



www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

خلاصه‌ی فرمول‌ها و روابط هندسه تحلیلی و جبر خطی

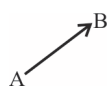
تهیه و تنظیم:

مهندس دهقانی ، مهندس خطیبی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

فصل اول - بردار

تصویر بردار $\vec{a}$	بردار $\vec{a}$ به مختصات (x, y, z) می‌باشد
	روی محور x ها: $(x, 0, 0)$
	روی محور y ها: $(0, y, 0)$
	روی محور z ها: $(0, 0, z)$
	روی صفحه‌ی xOy : $(x, y, 0)$
	روی صفحه‌ی xOz : $(x, 0, z)$
	روی صفحه‌ی yOz : $(0, y, z)$
مختصات نقطه‌ی A	نقطه‌ی A به مختصات (x, y, z) می‌باشد
	روی محور x ها: $(x, 0, 0)$
	روی محور y ها: $(0, y, 0)$
	روی محور z ها: $(0, 0, z)$
	روی صفحه‌ی xOy : $(x, y, 0)$
	روی صفحه‌ی xOz : $(x, 0, z)$
	روی صفحه‌ی yOz : $(0, y, z)$
فصلی نقطه‌ی A	روی محور x ها: $\sqrt{y^2 + z^2}$
	روی محور y ها: $\sqrt{x^2 + z^2}$
	روی محور z ها: $\sqrt{y^2 + x^2}$
	روی صفحه‌ی xOy : $ z $
	روی صفحه‌ی xOz : $ y $
	روی صفحه‌ی yOz : $ x $
	روی محور x ها: $(x, -y, -z)$
فریبده بردار $\vec{a}$	روی محور y ها: $(-x, y, -z)$
	روی محور z ها: $(-x, -y, z)$
	روی صفحه‌ی xOy : $(x, y, -z)$
	روی صفحه‌ی xOz : $(x, -y, z)$
	روی صفحه‌ی yOz : $(-x, y, z)$
	روی محور x ها: $(x, -y, -z)$
	روی محور y ها: $(-x, y, -z)$



$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

- مختصات بردار $\vec{AB}$:

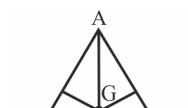
$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

- طول بردار $\vec{AB}$:



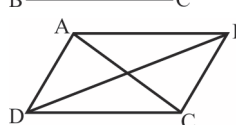
$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$$

- مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB :



$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \right)$$

- مختصات مرکز ثقل مثلث ABC :



$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \\ z_A + z_C = z_B + z_D \end{cases}$$

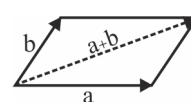
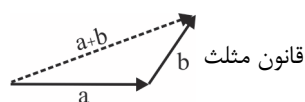
- رابطه‌ی بین رئوس متوازی‌الاضلاع:

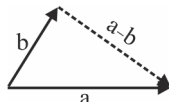
$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

- تساوی بردارها:

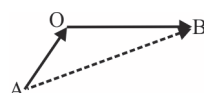
$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

- جمع بردارها:



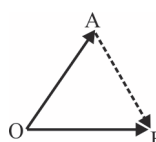
$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$


- تفریق بردارها:



$$\vec{AO} + \vec{OB} = \vec{AB}$$

نکته:



$$\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

– توافقی بردارها:

$$r\vec{a} = (ra_1, ra_2, ra_3)$$

– ضرب عدد حقیقی در بردار ($r \in \mathbb{R}$)

$$|r\vec{a}| = |r||\vec{a}|$$

* نکته:

$$|\vec{a} \pm \vec{b}| \neq |\vec{a}| \pm |\vec{b}|$$

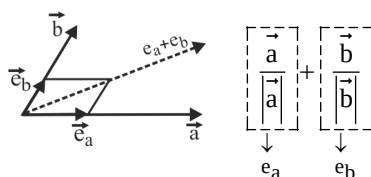
* نکته:

– بردار یکه: نام دیگر: بردار جهت

طول همواره برابر ۱ واحد

$$\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} \quad \text{رابطه:}$$

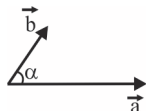
– بردار نیمساز:



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \text{عدد}$$

– ضرب داخلی بردارها:

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$



$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

– شرط عمود بودن دو بردار:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

– ویژگی‌های مهم ضرب داخلی:

$$a \cdot a = |a|^2$$

$$a \cdot (b \cdot c) = \text{نامفهوم}$$

$$a \cdot b = a \cdot c \not\Rightarrow b = c$$

$$i \cdot i = 1 \text{ و } i \cdot j = 0$$

– رابطه‌ی مهم:

$$|a \pm b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \pm 2a \cdot b$$

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$$

– نتیجه:

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|a|} \quad \cos \beta = \frac{a_2}{|a|} \quad \cos \gamma = \frac{a_3}{|a|}$$

– زاویه‌های یک بردار با محورهای مختصات:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

– رابطه‌ی بین کسینوس زوایای یک بردار با محورهای مختصات:

$$\vec{a} = (m, m, m)$$

* نکته: برداری که با هر سه محور زوایای حاده‌ی مساوی می‌سازد:

$$\text{Arccos} \frac{\sqrt{3}}{3}$$

کسینوس زوایای برداری که با هر سه محور زوایای حاده‌ی مساوی می‌سازد:

$$\vec{e}_a = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

تعریف دیگری از بردار یکه:

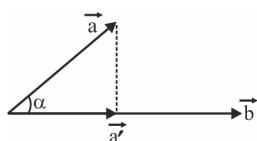
$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b}$$

– تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b}$: «بعد از $\vec{b}$ بار تکرار می‌شود.»

$$|\vec{a}'| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

– اندازه‌ی تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b}$:

$$|\vec{a}'| = |\vec{a}| \cos \alpha$$



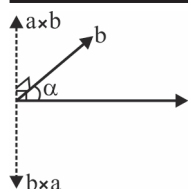
– رابطه‌ی دیگری برای اندازه‌ی تصویر قائم $\vec{a}$ بر $\vec{b}$:

$$\vec{a}'' = 2\vec{a}' - \vec{a}$$

– قرینه‌ی بردار $\vec{a}$ نسبت به راستای بردار $\vec{b}$:

$$|\vec{a}| = |\vec{a}''| > |\vec{a}'|$$

* نکته:



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$$

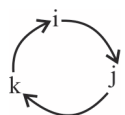
– ضرب خارجی دو بردار:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

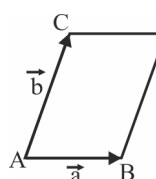
$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \not\Leftrightarrow \vec{b} = \vec{c}$$



$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j} \end{aligned}$$

– خاصیت چرخشی در ضرب خارجی بردارهای یک‌ه‌ی محورهاى مختصات:

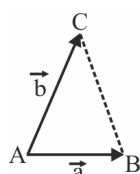
$$\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \quad \text{نکته:}$$



$$S = |\vec{AB} \times \vec{AC}| = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

– مساحت متوازی‌الاضلاع:

* توجه: بردارهای سازنده حتماً باید ابتدای مشترک داشته باشند.

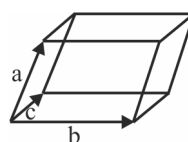


$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

– مساحت مثلث:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

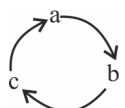
– ضرب مختلط سه بردار در فضا:



$$V_{\text{متوازی السطوح}} = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

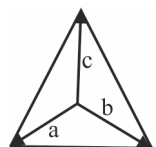
– حجم متوازی‌السطوح:

* نکته: خاصیت چرخشی در تعریف حجم متوازی‌السطوح:



$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})| = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$$

* نکته: حجم هرم ساخته شده روی سه بردار a, b, c:

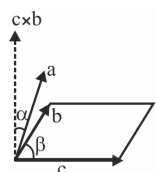


$$V_{\text{هرم}} = \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$$

* نکته: سه بردار a, b, c هم صفحه‌اند اگر:

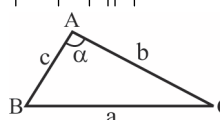
* نکته: تعریف دیگری برای حجم متوازی‌السطوح:



$$V = |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \alpha \sin \beta$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

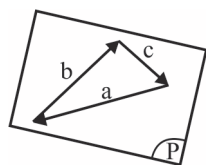
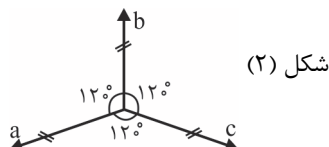
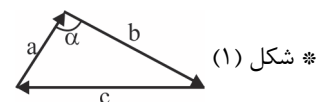
– نامساوی کوشی-شوارتز:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

– قضیه‌ی کسینوس‌ها در مثلث:

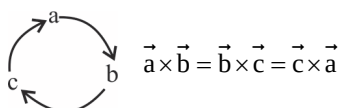
– از فرض $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ نکات زیر را داریم:



* در شکل (۱) زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ، $(180^\circ - \alpha)$ می‌باشد نه α .

* این سه بردار هم‌صفحه‌اند یعنی: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ یا با این سه بردار متوازی‌السطوحی ساخته نمی‌شود.

* طبق خاصیت چرخشی داریم:



$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$$

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \xrightarrow{\text{توان ۱۱}} |\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{c} + 2\vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 + (a \cdot b)^2 = |a|^2 |b|^2$$

$$\tan \alpha = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

– اتحاد لاگرانژ:

– تعریف دیگری برای زاویه‌ی بین دو بردار:

– ضرب سه گانه:

– اگر a, b, c سه بردار هم‌صفحه باشند، آن‌گاه حاصل $a \times (b \times c)$ برداری است در صفحه‌ی بردارهای a, b, c .

– خاصیت چرخشی در تعریف ضرب سه گانه:

– تعریف:

$$a \times (b \times c) = b \times (c \times a) = c \times (a \times b)$$

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$$

$$(a \times b) \times c = (a \cdot c)b - (b \cdot c)a$$

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = \vec{0}$$

* نکته:

* نکته:

✓ مقایسه کنید!!

$$a \cdot (a \times b) = 0 \text{ قضیه:}$$

$$a \cdot (b \times c) = \text{ضرب مختلط}$$

$$a \times (b \times c) = \text{ضرب سه گانه}$$

$$a \cdot (b \cdot c) = \text{نامفهوم}$$

$$a \times (b \cdot c) = \text{نامفهوم}$$

فصل دوم - خط و صفحه

$$d: \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$$

$$d \begin{cases} x = pt + x_0 \\ y = qt + y_0 \\ z = rt + z_0 \end{cases}$$

معادله‌ی متقارن خط گذرنده از نقطه‌ی $A(x_0, y_0, z_0)$:

معادله‌ی پارامتری خط:

خط‌های خاص

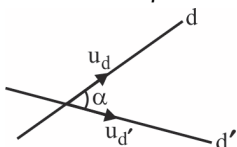
معادله‌ی خط	هادی	محور	
$x = x_0, \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$	$(0, q, r)$	عمود بر محور x ها	معادله‌ی خط عمود بر محورها
$y = y_0, \frac{x-x_0}{p} = \frac{z-z_0}{r}$	$(p, 0, r)$	عمود بر محور y ها	
$z = z_0, \frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q}$	$(p, q, 0)$	عمود بر محور z ها	
$y = y_0, z = z_0$	$(p, 0, 0)$	موازی محور x ها	معادله‌ی خط موازی با محورها
$x = x_0, z = z_0$	$(0, q, 0)$	موازی محور y ها	
$x = x_0, y = y_0$	$(0, 0, r)$	موازی محور z ها	

$$\cos \alpha = \frac{p}{|u|} \quad \cos \beta = \frac{q}{|u|} \quad \cos \gamma = \frac{r}{|u|}$$

زاویه‌های یک خط با محورهای مختصات:

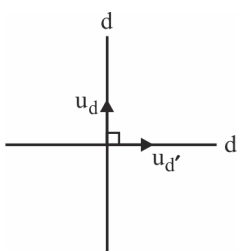
$$\frac{x-x_0}{\cos \alpha} = \frac{y-y_0}{\cos \beta} = \frac{z-z_0}{\cos \gamma}$$

معادله‌ی خط با کسینوس‌های هادی به جای بردار هادی:



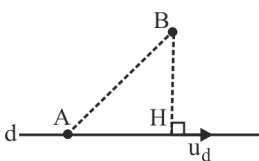
$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| |\vec{u}'|}$$

زاویه‌ی بین دو خط:



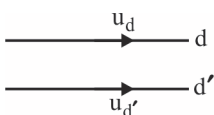
$$d \perp d' \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$$

شرط تعامد دو خط:



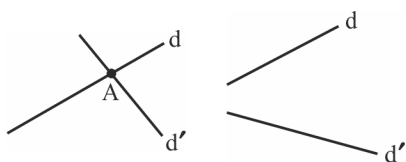
$$BH = \frac{|\vec{u} \times \vec{AB}|}{|\vec{u}|}$$

فاصله‌ی نقطه از خط در فضا:

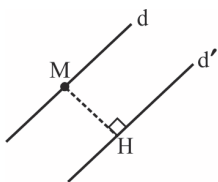


$$d \parallel d' \Rightarrow \frac{p}{p'} = \frac{q}{q'} = \frac{r}{r'} \quad \text{توازی:}$$

اوضاع نسبی دو خط در فضا:

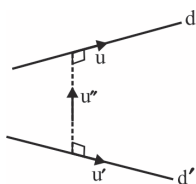


– **تقاطع یا تنافر:** معادله‌ی d را به صورت پارامتری می‌نویسیم و در معادله‌ی دوم قرار می‌دهیم، اگر از روی کسره‌های ساخته شده با t ؛ برای t یک جواب به دست آمده دو خط متقاطعند، در غیر این صورت متنافرند.



– **فاصله‌ی دو خط موازی:** کافی است یک نقطه از خط d انتخاب کنیم و فاصله‌ی آن نقطه تا خط d' را از

$$\text{رابطه‌ی } BH = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{AB}|}{|\vec{u}|} \text{ به دست آوریم.}$$



– **عمود مشترک دو خط متنافر:**

۱- منحصر به فرد است.

۲- معادله $u'' = u \times u'$

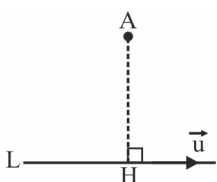
۳- طول:

$$\text{طول مشترک} = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{u}')|}{|\vec{u} \times \vec{u}'|}$$

راه اول - فرمول: (A و B دو نقطه از خط‌های d و d' اند)

راه دوم - کافی است یک صفحه از خط پایین عبور دهیم و نیز یک نقطه از خط بالا انتخاب کنیم و از رابطه‌ی فاصله‌ی نقطه از صفحه در فضا

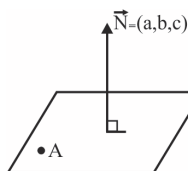
$$d' = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ طول عمود مشترک را به دست آوریم.}$$



– **تصویر یک نقطه روی خط:** نقطه‌ی H تصویر نقطه‌ی A روی خط L است. برای یافتن H یک نقطه‌ی پارامتری روی خط L در نظر

می‌گیریم و شرط عمود بودن AH بر L را اجرا می‌کنیم؛ پس از محاسبه‌ی t و جایگذاری در معادله‌ی پارامتری مختصات H یا تصویر به دست می‌آید.

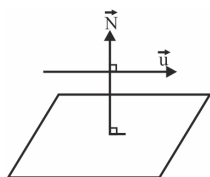
– **معادله‌ی خط گذرنده از نقطه‌ی A:**



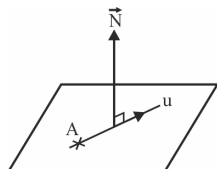
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

– **اوضاعی نسبی خط و صفحه:** ۱- توازی ۲- انطباق ۳- تقاطع

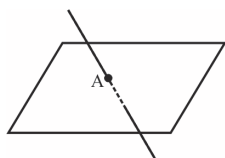
۱- توازی:



$$\vec{u} \perp \vec{N} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{N} = 0$$



۲- **انطباق:** در این وضعیت نیز مثل حالت توازی، نرمال صفحه بر هادی خط عمود است و هر نقطه از خط در صفحه صدق می‌کند.

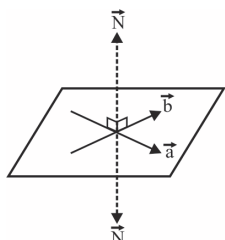


۳- **تقاطع:** اگر خط با صفحه موازی نباشد پس قطعاً با آن متقاطع است. [یادتان باشد که خط و صفحه نمی‌توانند با هم متنافر باشند]. برای پیدا کردن فصل مشترک کافی است خط را پارامتری کرده و در معادله‌ی صفحه قرار دهیم، وقتی t حاصل شد، آن را به معادله‌ی پارامتری باز می‌گردانیم تا نقطه‌ی تقاطع به دست آید.

* **تکنیک کلی برای نوشتن معادله‌ی صفحه:**

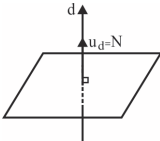
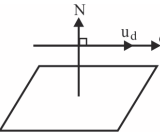
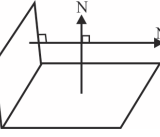
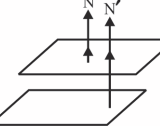
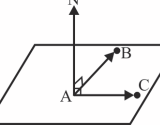
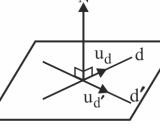
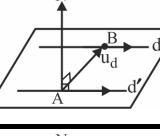
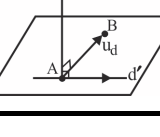
باید دو بردار متقاطع در صفحه‌ی مورد نظر پیدا کنیم و آن‌ها را در هم ضرب خارجی نماییم، بردار حاصل بر هر دو بردار متقاطع و نیز بر صفحه‌ی مزبور عمود است و در واقع همان بردار نرمال صفحه می‌باشد:

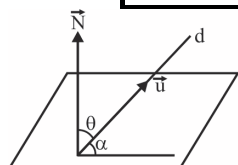
$$\vec{N} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \text{یا} \quad \vec{b} \times \vec{a}$$



به جدول صفحه‌ی بعد دقت کنید:

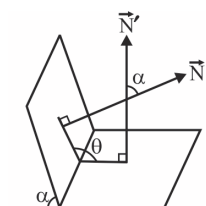
طرز یافتن بردار نرمال صفحه در حالات مختلف

وضعیت صفحه	شکل	رابطه‌ی کلید
۱		$\vec{N} \parallel \vec{u}_d \rightarrow \vec{N} = \vec{u}_d$
۲		$\vec{N} \perp \vec{u}_d \rightarrow \vec{N} \cdot \vec{u}_d = 0$
۳		$\vec{N} \perp \vec{N}' \rightarrow \vec{N} \cdot \vec{N}' = 0$
۴		$\vec{N} \parallel \vec{N}' \rightarrow \vec{N} = \vec{N}'$
۵		$\vec{N} = \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}$
۶		$\vec{N} = \vec{u}_{d'} \times \vec{u}_d$
۷		$\vec{N} = \vec{u}_d \times \overrightarrow{AB}$
۸		$\vec{N} = \vec{u}_d \times \overrightarrow{AB}$



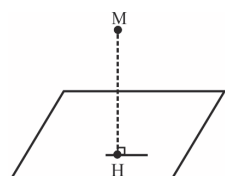
$$\cos \theta = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{u}|}{|\vec{N}| |\vec{u}|} \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$$

- زاویه‌ی خط با صفحه:



$$\cos \theta = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{N}'|}{|\vec{N}| |\vec{N}'|} \quad \text{یا} \quad \alpha = \pi - \theta$$

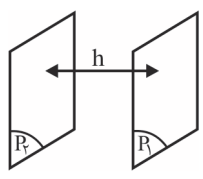
- زاویه‌ی صفحه با صفحه:



$$MH = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- فاصله‌ی نقطه از صفحه:

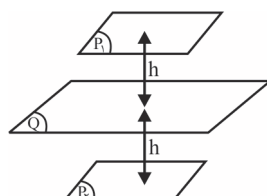
– فاصله‌ی دو صفحه‌ی موازی:



$$\begin{cases} P_1 : ax + by + cz + d_1 = 0 \\ P_2 : ax + by + cz + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$h = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

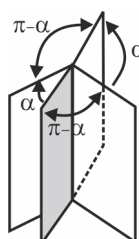
– مکان هندسی نقاط متساوی‌الفاصله از دو صفحه‌ی موازی:



$$\begin{cases} P_1 : ax + by + cz + d_1 = 0 \\ P_2 : ax + by + cz + d_2 = 0 \end{cases}$$

$$Q : ax + by + cz + \frac{d_1 + d_2}{2} = 0$$

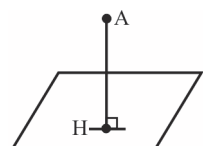
– مکان هندسی نقاط متساوی‌الفاصله از دو صفحه‌ی «نیمساز»:



$$\frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'z + d|}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

– تصویر یک نقطه روی یک صفحه:

برای یافتن H، پای عمود یا تصویر، معادله‌ی خطی را می‌نویسیم که از A گذشته و بر صفحه عمود باشد. $(\vec{u}_{\text{خط}} = \vec{N})$ سپس نقطه‌ی تلاقی خط و صفحه را پیدا می‌کنیم که همان تصویر است.



معادله‌ی صفحات خاص:

۱- در صفحه‌ی موازی با یکی از محورهای مختصات: مؤلفه‌ی متناظر با آن محور غایب است.

مثال: صفحه‌ی موازی با محور OX به صورت $by + cz + d = 0$ می‌باشد.

۲- در صفحه‌ی عمود بر یکی از محورهای مختصات: دو مؤلفه‌ی دیگر معادله‌ی صفحه‌ی غایب هستند.

مثال: صفحه‌ی عمود بر محور X ها و گذرنده از نقطه‌ی $A(x_0, y_0, z_0)$ به صورت $x = x_0$ می‌باشد.

۳- صفحه‌ی نیمساز صفحات مختصات:

به عنوان مثال نیمساز صفحات XOZ و YOZ به صورت $y = \pm x$ می‌باشد.

– قرینه‌ی یک صفحه (یا یک خط) نسبت به صفحات مختصات:

به عنوان مثال برای قرینه کردن یک صفحه نسبت به صفحه‌ی XOY کافی است در معادله‌ی صفحه Z را به -Z تبدیل کنیم.

– تقارن نسبت به نیمسازهای صفحات مختصات:

به عنوان مثال در تقارن نسبت به صفحه‌ی $y = -z$ باید در معادله‌ی صفحه تبدیل $\begin{cases} y \rightarrow -z \\ z \rightarrow -y \end{cases}$ را انجام داد.

فصل سوم - مقاطع مخروطی

دایره:

– دایره مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله‌ی آن‌ها از یک نقطه‌ی ثابت در آن صفحه مقدار ثابتی باشد.
به این نقطه‌ی ثابت مرکز دایره و به فاصله‌ی ثابت مرکز تا هر نقطه از دایره، شعاع گفته می‌شود.

– معادله‌ی استاندارد دایره: $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$

– معادله‌ی گسترده‌ی دایره: $F(x, y) = x^2 + y^2 + ax + by + c$

– محاسبه‌ی مرکز دایره: مربع کامل کردن

$$O \begin{cases} -\frac{a}{2} \\ -\frac{b}{2} \end{cases} \text{ فرمول:}$$

$$O \begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \end{cases} \text{ مشتق:}$$

– محاسبه‌ی شعاع دایره: مربع کامل کردن

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} \text{ فرمول:}$$

– شرط دایره بودن مقطع مخروطی:

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \rightarrow \text{دایره (مهم)}$$

$$a^2 + b^2 - 4c = 0 \rightarrow \text{یک نقطه}$$

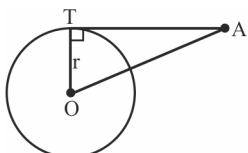
$$a^2 + b^2 - 4c < 0 \rightarrow \text{هیچ شکلی}$$

– وضعیت نقطه نسبت به دایره «قوت»

$$F(x_0, y_0) < 0 \rightarrow \text{داخل دایره}$$

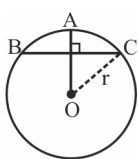
$$F(x_0, y_0) = 0 \rightarrow \text{روی دایره}$$

$$F(x_0, y_0) > 0 \rightarrow \text{خارج دایره}$$



$$AT = \sqrt{F(x_0, y_0)} \text{ فرمول:}$$

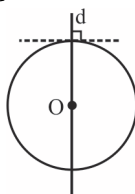
$$AT^2 = OA^2 - r^2 \text{ با توجه به شکل:}$$



$$BC = 2\sqrt{-F(x_0, y_0)}$$

$$OA = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$AC^2 = r^2 - OA^2 \rightarrow 2AC = BC$$



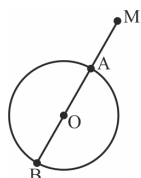
– خط قائم بر دایره حتماً از مرکز دایره می‌گذرد به عبارت دیگر تمام قطرهای دایره قائم‌های وارد بر دایره محسوب می‌شوند.

با توجه به شکل:

* نکته: دایره‌ی مماس بر محورها

دایره مماس بر محور X	دایره مماس بر محور Y	دایره مماس بر هر دو محور
$ \beta = r$	$ \alpha = r$	$ \alpha = \beta = r$

– بیشترین و کمترین فاصله نقطه از دایره:



$$MB = MO + R$$

$$MA = |MO - R|$$

– اوضاع نسبی دو دایره:

شکل	تعداد مماس مشترک	شرط	وضعیت دو دایره
	۴	$OO' > r + r'$	متخارج (۱)
	۳	$OO' = r + r'$	مماس خارج (۲)
	۲	$ r - r' < OO' < r + r'$	مقاطع (۳)
	۱	$OO' = r - r' $	مماس داخل (۴)
	۰	$OO' < r - r' $	متداخل (۵)

– وتر مشترک دو دایره: ۱- معادله

۲- طول

۱- معادله‌ی وتر مشترک: کافی است معادله‌ی دایره‌ها را از هم کم کنیم: $C(O, r) - C(O', r') = 0$

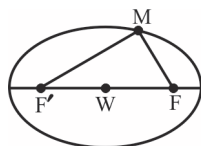
۲- طول وتر مشترک: باید معادله‌ی یکی از دایره‌ها را با معادله‌ی وتر مشترک در یک دستگاه حل کنیم (قطع دهیم) تا دو نقطه‌ی تقاطع به دست آید. فاصله‌ی این دو نقطه همان طول وتر مشترک است.

* نکته: هرگاه مختصات یک نقطه برحسب متغیر (یا پارامتر دیگری) مثل α داده شود برای به دست آوردن معادله‌ی مکان هندسی نقطه باید پارامتر مورد نظر را حذف کرد و رابطه‌ای بین x و y به دست آورد.

مثال: مکان هندسی نقطه‌ی $M(\tan \alpha, \cot \alpha)$ وقتی α تغییر کند چه شکلی است؟

$$\begin{cases} x = \tan \alpha \\ y = \cot \alpha \end{cases} \xrightarrow{\times} xy = \tan \alpha \times \cot \alpha = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

تابع هموگرافیک یا همان هذلولی متساوی‌الساقین دوران یافته است.



بیضی:

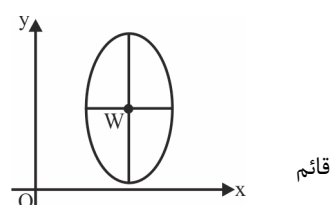
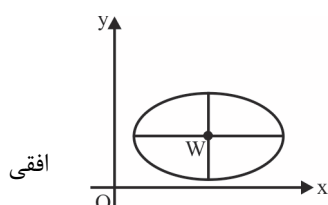
– بیضی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که مجموع فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت F و F' مقدار ثابتی باشد و این مقدار ثابت از فاصله‌ی آن دو نقطه بیش‌تر باشد.

به دو نقطه‌ی ثابت کانونی‌های بیضی و به مقدار ثابت $2a$ می‌گوییم: $MF + MF' = 2a$

– قرارداد: $\alpha - 1$ و β در معادله کم میشوند.

۲- α و β به مختصات نقاط اضافه شوند.

– مقایسه:



$$\frac{(x-\beta)^2}{a^2} + \frac{(y-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

$$F \left| \begin{matrix} c+\alpha \\ \beta \end{matrix} \right. \quad F' \left| \begin{matrix} -c+\alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$$

$$A \left| \begin{matrix} a+\alpha \\ \beta \end{matrix} \right. \quad A' \left| \begin{matrix} -a+\alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$$

$$B \left| \begin{matrix} \alpha \\ b+\beta \end{matrix} \right. \quad B' \left| \begin{matrix} \alpha \\ -b+\beta \end{matrix} \right.$$

$$\omega(\alpha, \beta)$$

$$a > b > 0$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} + \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

$$F \left| \begin{matrix} \alpha \\ c+\beta \end{matrix} \right. \quad F' \left| \begin{matrix} \alpha \\ -c+\beta \end{matrix} \right.$$

$$A \left| \begin{matrix} \alpha \\ a+\beta \end{matrix} \right. \quad A' \left| \begin{matrix} \alpha \\ -a+\beta \end{matrix} \right.$$

$$B \left| \begin{matrix} b+\alpha \\ \beta \end{matrix} \right. \quad B' \left| \begin{matrix} -b+\alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$$

قائم $x = \alpha$

افقی $y = \beta$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$0 < e < 1$$

بیضی به دایره شبیه تر $\circ$
بیضی لاغرتر 0

– در بیضی افقی، مرکز، کانون‌ها و رئوس کانونی دارای عرض یکسان می‌باشند. (و در بیضی قائم برعکس)

– اگر بیضی به مرکز $\omega(\alpha, \beta)$ بر هر دو محور مختصات مماس باشد:

در حالت $|\alpha| > |\beta|$ بیضی افقی است و معادله آن به صورت مقابل است:

(و در بیضی قائم برعکس)

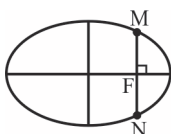
– **وتر کانونی:** وتر از کانون بیضی بگذرد را وتر کانونی بیضی می‌گویند. طول وتر کانونی

$$MN = \frac{2b^2}{a}$$

* **نکته:** تشخیص بیضی، نقطه یا تهی بودن یک مقطع مخروطی:

ابتدا مرکز را از راه مشتق به دست می‌آوریم، داریم:

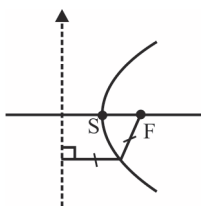
$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$



بیضی $F(x_0, y_0) < 0$

یک نقطه $F(x_0, y_0) = 0$

تهی $F(x_0, y_0) > 0$



سهمی

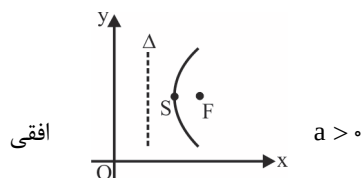
– سهمی مکان هندسی تمام نقاطی از صفحه است که از یک نقطه‌ی ثابت F و یک خط صابت Δ به یک فاصله باشند.

نقطه‌ی ثابت F را کانون و خط ثابت Δ را خط هادی می‌نامند.

* اگر خط هادی سهمی موازی محور عرض‌ها (y ها) باشد یا محور تقارن سهمی موازی محور طول‌ها (x ها)

باشد در این صورت سهمی افقی است.

– **مقایسه:**

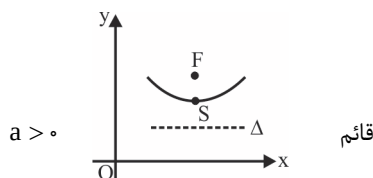


$$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$$

$$F \left| \begin{matrix} a+\alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$$

$$\Delta: x = -a + \alpha$$

محور تقارن $y = \beta$



$$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$$

$$F \left| \begin{matrix} \alpha \\ a+\beta \end{matrix} \right.$$

$$\Delta: y = -a + \beta$$

محور تقارن $x = \alpha$

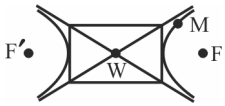
* **نکته:** خط هادی سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از آنجا می‌توان دو مماس عمود بر هم بر سهمی رسم کرد.

– **وتر کانونی:** وتر که بر محور تقارن سهمی در کانون عمود شود را وتر کانونی سهمی می‌گویند.

طول وتر کانون سهمی برابر است با: $4|a|$

– از هر نقطه خارج سهمی دو مماس بر آن و از هر نقطه روی سهمی یک مماس بر آن و از هر نقطه داخل سهمی هیچ مماسی بر آن نمی‌توان رسم کرد.

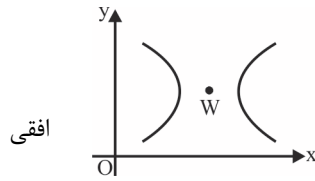
هذلولی:



– هذلولی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که قدرمطلق تفاضل فواصل آن‌ها از دو نقطه‌ی ثابت مقدار ثابتی باشد.

$$\|MF| - |MF'|\| = 2a$$

– مقایسه:



$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

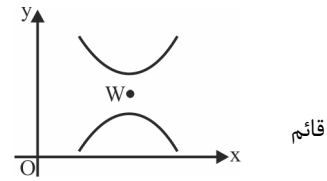
$$y - \beta = \pm \frac{b}{a}(x - \alpha) \text{ مجانب‌ها}$$

$$F \begin{vmatrix} c + \alpha \\ \beta \end{vmatrix} \quad F' \begin{vmatrix} -c + \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$$

$$A \begin{vmatrix} a + \alpha \\ \beta \end{vmatrix} \quad A' \begin{vmatrix} -a + \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$$

$$B \begin{vmatrix} \alpha \\ b + \beta \end{vmatrix} \quad B' \begin{vmatrix} \alpha \\ -b + \beta \end{vmatrix}$$

الزاماً $a > b$ نیست.



$$\frac{(y-\beta)^2}{a^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{b^2} = 1$$

$$y - \beta = \pm \frac{a}{b}(x - \alpha) \text{ مجانب‌ها}$$

$$F \begin{vmatrix} \alpha \\ c + \beta \end{vmatrix} \quad F' \begin{vmatrix} \alpha \\ -c + \beta \end{vmatrix}$$

$$A \begin{vmatrix} \alpha \\ a + \beta \end{vmatrix} \quad A' \begin{vmatrix} \alpha \\ -a + \beta \end{vmatrix}$$

$$B \begin{vmatrix} b + \alpha \\ \beta \end{vmatrix} \quad B' \begin{vmatrix} -b + \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$$

– شیب خطوط مجانب در هذلولی افقی به ترتیب $m = \pm \frac{b}{a}$ و $m' = \pm \frac{a}{b}$ می‌باشد، رابطه زیر زاویه‌ی بین مجانب‌های هذلولی را می‌دهد:

$$\tan \alpha = \left| \frac{m - m'}{1 + mm'} \right|$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$e > 1$ دو نیم خط
 $e = \sqrt{2}$ دو خط موازی

– خروج از مرکز هذلولی:

– در معادله‌ی هذلولی هرگاه $a = b$ باشد، هذلولی متساوی‌الساقین است و در آن همواره داریم:

– قوت نقطه نسبت به هذلولی:

$$F(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow M \text{ خارج هذلولی}$$

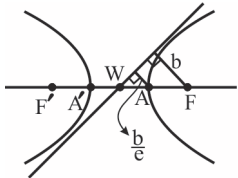
$$F(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow M \text{ روی هذلولی}$$

$$F(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow M \text{ داخل هذلولی}$$



با کمی دقت متوجه می‌شویم که سه حالات بالا دقیقاً عکس سه حالت در بیضی است.

– برای تشخیص هذلولی از دو خط متقاطع باید با استفاده از مشتق $\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \end{cases}$ مرکز را به دست آوریم، اگر مختصات مرکز در معادله صدق کرد، معادله‌ی دو خط متقاطع است و همان محل تقاطع دو خط است؛ و اگر مختصات مرکز در معادله صدق نکرد، معادله هذلولی است.



* نکته: در هذلولی فاصله‌ی هر کانون از هر خط مجانب برابر با b است:

* نکته: در هذلولی فاصله‌ی هر رأس کانونی از هر مجانب برابر با $\frac{b}{e}$ است:

– ماتریس دوران:

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$R_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$R_{(-\theta)} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$R_\alpha R_\beta = R_{(\theta+\beta)}$$

– دوران نقطه حول مبدأ مختصات:

– دوران محورهای مختصات و مختصات نقطه در دستگاه جدید:

* نکته:

$$R_\theta^n = R_{(n\theta)} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix}$$

* نکته:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

– معادله‌ی کلی مقاطع مخروطی:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

– دوران مقاطع مخروطی: (راه تستی)

$$\begin{cases} \Delta > 0 \rightarrow \text{هذلولی} \\ \Delta = 0 \rightarrow \text{سهمی} \\ \Delta < 0 \rightarrow \text{بیضی} \end{cases}$$

– دوران مقاطع مخروطی: (راه تشریحی)

$$\tan 2\alpha = \frac{b}{a - c}$$

زاویه‌ی دوران:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

جایگذاری در معادله:

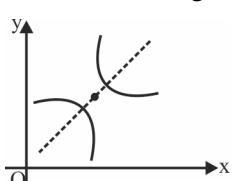
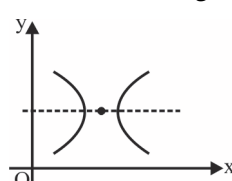
$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{cases}$$

– اتحادهای کمکی برای به دست آوردن زاویه‌ی دوران

* نکته: هرگاه در معادله‌ی کلی مقاطع مخروطی $a = c$ باشد زاویه‌ی دوران $\frac{\pi}{4}$ است.

دوره‌ی مقاطع مخروطی

جدول ۱:

مقاطع مخروطی غیراستاندارد			مقاطع مخروطی استاندارد		
روشناسایی	ضریب xy	شکل	روشناسایی	ضریب xy	شکل
Δ		دوران یافته	۱- مربع کامل کردن معادله ضمنی		افقی یا قائم
$\Delta > 0$ هذلولی $\Delta = 0$ سهمی $\Delta < 0$ بیضی	بجز دایره بقیه دارند	مثال: 	۲- از روی معادله‌ی ضمنی	ندارند	مثال: 

جدول ۲:

ضرایب x^2 و y^2 از نظر عدد و علامت	جمله‌ی x^2 و y^2	
ضرایب x^2 و y^2 هم عدد و هم علامتند.	دایره	هر دو را دارد
ضرایب x^2 و y^2 غیر هم عدد و هم علامتند.	بیضی	هر دو را دارد
_____	سهمی	فقط یک را دارد
ضرایب x^2 و y^2 غیر هم عدد و غیر هم علامتند.	هذلولی	هر دو را دارد

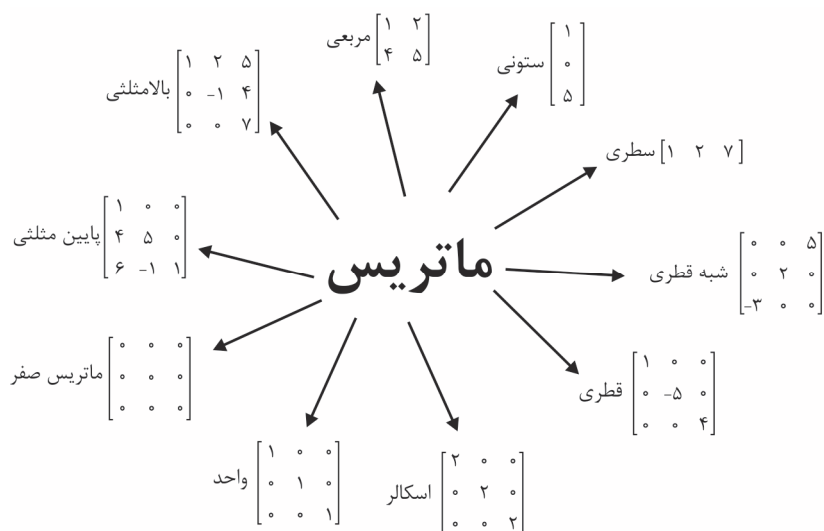
نکته راجع به دوران مقاطع مخروطی: فرض کنید معادله‌ی $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ داده شده است، محورهای مختصات را در جهت مثلثاتی به اندازه‌ی دلخواه دوران می‌دهیم، اگر معادله‌ی بالا را در دستگاه جدید به صورت $A'x'^2 + B'x'y' + Cy'^2 + Dx' + E'y + F = 0$ بازنویسی شود، به شرطی که: $E = f$ باشد داریم:

$$\begin{cases} A + C = a + c \\ B^2 - 4AC = b^2 - 4ac \end{cases}$$

فصل چهارم - ماتریس

تعریف ماتریس: جدولی شامل $m \times n$ عدد حقیقی که به شکل روبرو در m سطر و n ستون چیده باشد را ماتریس $m \times n$ می‌گویند.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$



– تساوی دو ماتریس: ماتریس‌های A و B با هم برابرند هرگاه تمام درایه‌های نظیرشان با هم برابر باشد.

– جمع و تفریق ماتریس‌ها: در جمع ماتریس‌ها باید درایه‌های نظیر با هم جمع و در تفریق ماتریس‌ها باید درایه‌های نظیر از هم کم شوند.

«لازم به ذکر است دو ماتریس، زمانی با هم جمع یا از هم کم می‌شوند که مرتبه‌های یکسانی داشته باشند».

– ضرب عدد در ماتریس: کافی است عدد را در تمامی درایه‌های ماتریس ضرب نماییم.

– ضرب ماتریس‌ها:

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

شرط ضرب پذیر بودن

مثال: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ یعنی باید سطر اول از A را در ستون سوم از B ضرب کنیم.

– ویژگی‌های مهم ضرب ماتریس‌ها:

$$A(BC) = (AB)C$$

$$A \times B \neq B \times A$$

۱- ضرب ماتریس‌ها خاصیت شرکت پذیری دارد، یعنی:

۲- ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابجایی ندارد:

(مثل ضرب خارجی برداری و ضرب دکارتی!!)

* نکته:

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(A+B)^T = A^T + AB + BA + B^T$$

$$A^k = A^{k-1} \times A$$

$$AB = AC \not\Rightarrow B = C$$

$$A = B \Rightarrow A \times C = B \times C$$

۳- برای توان‌های A داریم:

۴- خاصیت حذف برقرار نیست، یعنی:

۵- دو طرف یک تساوی ماتریسی را می‌توان از چپ یا راست در ماتریسی دلخواه ضرب کرد:

* نکته: اگر A و B دو ماتریس بالا (یا پایین) مثلثی باشند، آن‌گاه AB یا BA بالا (یا پایین) مثلثی است.

– شرط تعویض پذیر بودن ماتریس‌ها:

– وقتی دو ماتریس تعویض پذیر داریم:

✓ تمام اتحادهای جبری در مورد آن‌ها صادق می‌کند.

$$(AB)^n = A^n B^n \quad \checkmark$$

✓ ماتریس‌های زیر تعویض پذیرند:

۱- ماتریس اسکالر با هر ماتریس مربعی هم مرتبه‌ی خودش.

۲- ماتریس به فرم $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ با هر ماتریس به این شکل و ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ با هر ماتریس به این شکل.

۳- A^{-1}, A, I, A^*

۴- توان‌های یک ماتریس مثل $A: A^m \times A^n = A^n \times A^m = A^{m+n}$

- **ماتریس خود توان:** ماتریس A خود توان است هرگاه $A^T = A$ باشد، در این صورت داریم: $A^n = A$

مثل $I, I^n = I$ یعنی $I^n = I$ است.

- **ماتریس پوچ توان:** ماتریس A پوچ توان است هرگاه $A^n = 0$ باشد، در این صورت همواره $A^{k \geq n} = 0$

- **برخی از ماتریس‌های مهم تبدیل در R^2 عبارتند از:**

۱- تقارن نسبت به محور x ها: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

۲- تقارن نسبت به محور y ها: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۳- تقارن نسبت به مبدأ مختصات: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

۴- تقارن نسبت به خط $y = x$: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

۵- تقارن نسبت به خط $y = -x$: $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

۶- تبدیل تجانس با نسبت k : $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

- در تبدیلات متوالی، ماتریس تبدیل نهایی برابر حاصلضرب ماتریس‌های تبدیل از انتها به ابتدا است.

- در تبدیل اشکال هندسی مختلف به هم، اگر S مساحت شکل اولیه و S' مساحت شکل تبدیل یافته با ماتریس A باشد.

داریم: $S' = \|A\| \times S$. ($\|A\|$ قدرمطلق دترمینان است.)

- **ترانهاده T :** جای سطر و ستون یک ماتریس را عوض می‌کند.

- **ویژگی‌های ترانهاده:**

$$(A^T)^T = A \text{ (مهم)}$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(rA)^T = rA^T$$

$$(A^k)^T = (A^T)^k$$

$$(AB)^T = B^T A^T \text{ مهم}$$

- **ماتریس متقارن:** $A^T = A$

درایه‌های نظیر به نظیر در طرفین قطر اصلی با هم برابرند.

- **ماتریس پادمتقارن:** $A^T = -A$

درایه‌های قطر اصلی، همگی صفراند.

درایه‌های نظیر به نظیر در طرفین قطر اصلی قرینه‌ی هم‌اند.

$$\text{نکته: } A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

- یک ماتریس ممکن است هم متقارن باشن هم پادمتقارن مثل ماتریس صفر 0.

- یک ماتریس ممکن است نه متقارن باشد و نه پادمتقارن مثل: $2(A + A^T)$

* **نکته:** اگر A یک ماتریس مربعی دلخواه باشد آن‌گاه راجع به AA^T نکات زیر را داریم:

۱- AA^T متقارن است. ۲- $|AA^T| \geq 0$. ۳- عناصر قطر اصلی AA^T همگی غیرمنفی‌اند.

- **دترمینان:** عددی حقیقی است که به یک ماتریس مربعی نسبت داده می‌شود.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = ad - bc : 2 \times 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ساروس} \\ \text{بسط: } |A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \end{array} \right\} : 3 \times 3$$

ویژگی‌های دترمینان:

- ۱- اگر تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون A برابر صفر باشد، آن‌گاه: $|A| = 0$
- ۲- اگر دو سطر یا دو ستون A یکسان (یا مضربی از هم) باشند، آن‌گاه: $|A| = 0$
- ۳- اگر تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون A در عدد ثابت C ضرب می‌شود و به عکس می‌تواند از عدد ثابت C در درایه‌های یک سطر یا یک ستون فاکتور گرفت و در دترمینان ضرب کرد.
- ۴- دترمینان هر ماتریس پایین مثلثی و بالامثلثی و قطری برابر است با: حاصلضرب درایه‌های قطر اصلی.
- ۵- اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند آن‌گاه $|AB| = |A||B|$ و $|A^k| = |A|^k$
- ۶- مرتبه‌ی ماتریس اس و $\lambda \in \mathbb{R}$: $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
- ۷- اگر A^T ترانهاده‌ی A باشد آن‌گاه: $|A^T| = |A|$
- ۸- اگر جای دو سطر یا دو ستون ماتریس A را عوض کنیم، مقدار دترمینان در (-1) ضرب می‌شود.
- ۹- اگر مضربی از یک سطر (یا ستون) را به سطر دیگر (یا ستون دیگر) اضافه کنیم، مقدار دترمینان تغییری نمی‌کند.
- ۱۰- دترمینان ماتریس A را می‌توان به صورت زیر، یعنی با جمع دو دترمینان دیگر نوشت:

$$\begin{vmatrix} m+a & n & p \\ q+b & r & s \\ t+c & u & v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n & p \\ q & r & s \\ t & u & v \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & n & p \\ b & r & s \\ c & u & v \end{vmatrix}$$

* نکته: A یک ماتریس پادمتقارن مرتبه‌ی فرد است، داریم:

$$S_{\Delta_{ABC}} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \end{vmatrix} \quad \text{«قدمطلق دترمینان»}$$

– مساحت مثلثی که با سه رأس $A \begin{vmatrix} x_A \\ y_A \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} x_B \\ y_B \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} x_C \\ y_C \end{vmatrix}$ ساخته می‌شود برابر است با:

– معادله‌ی خطی که از نقاط $A = (a, b)$ و $B = (c, d)$ می‌گذرد، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$d: \begin{vmatrix} x & a & c \\ y & b & d \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \xrightarrow{T} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a & b & 1 \\ c & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

– $A_{m \times n}$ و $B_{n \times m}$ مفروضند، آن‌گاه AB یا BA ماتریس‌های مربعی‌اند و داریم:

$$|AB| = 0 \leftarrow m > n$$

$$|AB| = 0 \leftarrow m < n \quad (نمی‌توان پیش‌بینی کرد) \quad |AB| \neq 0 \leftarrow m = n$$

فصل پنجم - ماتریس وارون و حل دستگاه:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

- وارون ماتریس A را با A^{-1} نشان می‌دهیم و داریم:

$$AA^{-1} = I \xrightarrow{\text{عدد}} |AA^{-1}| = |I| \rightarrow |A||A^{-1}| = 1 \rightarrow |A| \neq 0$$

* نکته:

عدد عدد

- وارون هر ماتریس منحصر به فرد است.

$$N_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

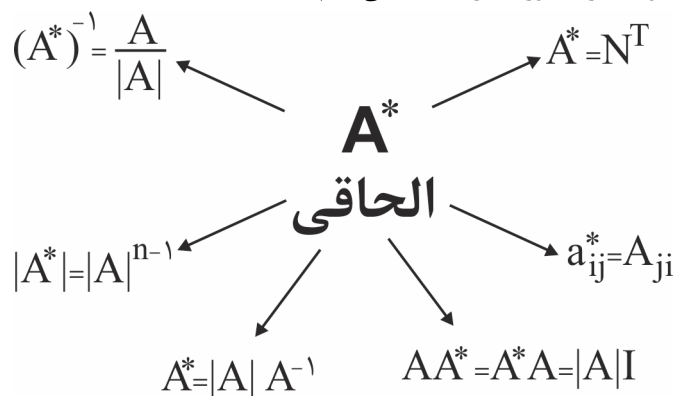
- ماتریس همسازها:

$$A^* = N^T$$

- ماتریس الحاقی:

$$a_{ij}^* = A_{ji}$$

* نکته: هرگاه الحاقی نظیر درایه‌ی A_{ij} را بخواهند از دستور مقابل استفاده می‌کنیم:



$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$|A| = ad - bc \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

$$|A| \neq 0$$

$$a_{ij}^{-1} = \frac{A_{ji}}{|A|}$$

- وارون ماتریس 2×2 :

- وارون ماتریس 3×3 :

- هرگاه معکوس نظیر درایه‌ی a_{ij} را بخواهند از دستور مقابل استفاده می‌کنیم:

- وارون یک ماتریس پایین (بالا) مثلثی، ماتریس پایین (بالا) مثلثی است که درایه‌های قطر اصلی آن عکس درایه‌های قطر اصلی ماتریس اولیه است.

- شرط وارون پذیر بودن یک ماتریس قطری، مخالف صفر بودن تمام درایه‌های قطر اصلی است.

- وارون یک ماتریس قطری، ماتریس قطری است که درایه‌های روی قطر اصلی آن عکس درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس اولیه است.

ویژگی‌های ماتریس وارون:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$$

$$(A^{-1})^n = (A^n)^{-1}$$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) (A^{-1}BA)^n = A^{-1}B^nA \\ 2) (ABA^{-1})^n = AB^nA^{-1} \end{array} \right.$$

* نکته:

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

* نکته:

$$(A+B)^{-1} = A^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}B^{-1}$$

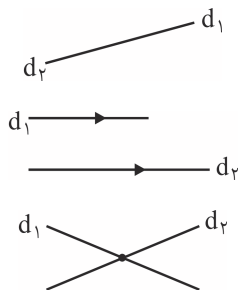
* نکته:

بحث روی تعداد جواب‌ها و حل دستگاه:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

– بحث روی تعداد جواب‌های دستگاه دو معادله و دو مجهول:

نسبت ضرایب و ثابت	تعداد جواب
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$	بی‌شمار جواب داریم
$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$	فاقد جواب است
$\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$	جواب منحصر به فرد داریم



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \rightarrow A \times X = B$$

ماتریس ضرایب ماتریس مجهولات ماتریس معلومات

– بحث روی تعداد جواب‌های دستگاه سه معادله و سه مجهول:

پس با توجه به $AX = B$ داریم:

دستگاه همگن $B = O$	$ A = 0$	بی‌شمار جواب: $(0,0,0)$ و ... (جواب غیرصفر دارد.)
	$ A \neq 0$	جواب منحصر به فرد (جواب صفر)
دستگاه ناهمگن $B \neq O$	$ A = 0$	بی‌شمار جواب یا فاقد جواب
	$ A \neq 0$	جواب منحصر به فرد (جواب ناصفر) نقطه‌ای غیر از مبدا مختصات

– اگر در مسایل بحث روی تعداد جواب‌های دستگاه ۳ معادله ۳ مجهول، پارامتر m در سمت راست یعنی در ماتریس معلومات ظاهر شود، باید سه معادله سه مجهول را به دستگاه دو معادله دو مجهول تبدیل کنیم و از روش‌های بحث روی این دستگاه استفاده کنیم.

– هرگاه در یک دستگاه m معادله، n مجهول تعداد معادله‌ها بیش‌تر از مجهولات باشد (یعنی $m > n$) آن‌گاه دستگاه:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y = b_3 \end{cases}$$

۱- جواب ندارد.

۲- بی‌شمار جواب دارد.

۳- جواب منحصر به فرد دارد.

– ولی اگر تعداد مجهولات بیش‌تر از معادلات باشد یعنی $(n > m)$ آن‌گاه دستگاه:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \end{cases}$$

جواب ندارد.

بی‌شمار جواب دارد.

– روش‌های حل دستگاه:

$$X = A^{-1}B$$

۱- به کمک ماتریس معکوس:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|}, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}$$

۲- روش کرامر:

۳- روش حذفی گاوس: تشکیل ماتریس افزوده و بالامثلثی کردن آن.

۴- روش گاوس – جردن: تشکیل ماتریس افزوده و قطری کردن آن.

فصل ۱ - هندسه‌ی ۲ - استدلال در هندسه

۱- الف) شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی و یا خارجی هر چهارضلعی محدب یک چهارضلعی محاطی می‌باشد.

ب) شکل حاصل از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی و یا خارجی هر دوزنقه یک چهارضلعی محاطی است که دو زاویه‌ی مقابل آن برابر با 90° می‌باشد.

ج) اگر دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع a و b بوده و زاویه‌ی بین این دو ضلع برابر با θ باشد، شکل حاصل از تقاطع نیمسازهای داخلی مستطیلی به عرض $|a-b|\sin\frac{\alpha}{2}$ و طول $|a-b|\cos\frac{\alpha}{2}$ می‌باشد و شکل حاصل از تقاطع نیمسازهای خارجی، مستطیل به عرض $|a+b|\sin\frac{\alpha}{2}$ و طول $|a+b|\cos\frac{\alpha}{2}$ می‌باشد.

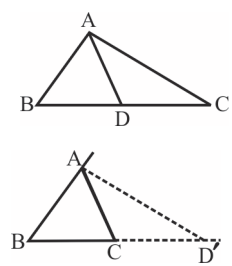
د) شکل حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی مستطیل به طول a و عرض b ، مربعی به طول ضلع $\frac{|a-b|}{\sqrt{2}}$ می‌باشد و شکل حاصل از برخورد نیمسازهای خارجی،

مربعی به طول ضلع $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ خواهد بود.

ه) شکل حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی هر لوزی یک نقطه است و اگر طول ضلع این لوزی a باشد و زاویه‌ی بین دو ضلع α فرض شود مستطیلی به عرض $a\sin\frac{\alpha}{2}$ و طول $2a\cos\frac{\alpha}{2}$ از تقاطع نیمسازهای خارجی آن حاصل می‌گردد.

۲- الف) اگر در مثلث ABC ، AD نیمساز داخلی زاویه‌ی A باشد: $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ACD'}}$ و $AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$

ب) اگر AD' نیمساز خارجی زاویه‌ی A باشد: $\frac{BD'}{CD'} = \frac{AB}{AC} = \frac{S_{\triangle ABD'}}{S_{\triangle ACD'}}$ و $AD'^2 = BD' \times CD' - AB \times AC$



۳- الف) در یک مثلث، یک ضلع از ضلع دیگر بزرگتر است اگر و تنها اگر زاویه‌ی روبرو به ضلع بزرگتر، بزرگتر از زاویه‌ی روبرو به ضلع کوچکتر است.

ب) در هر مثلث، مجموع طول‌های هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگتر است که این قضایا را در مورد مثلثی با اضلاع a, b, c به صورت ۲ می‌توان نوشت:

$$a+b > c, \quad a+c > b, \quad b+c > a \quad \text{فرم ۱}$$

ج) **قضیه‌ی لولا:** اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر نظیر به نظیر برابر بوده و زاویه‌ی بین این دو ضلع در مثلث اول بزرگتر از زاویه‌ی بین دو ضلع نظیر از مثلث دوم باشد، آن‌گاه ضلع سوم از مثلث اول بزرگتر از ضلع سوم از مثلث دوم است.

۴- الف) اگر O نقطه‌ای دلخواه در داخل مثلث ABC باشد، آن‌گاه:

$$\frac{AB+AC+BC}{2} < OA+OB+OC < AB+AC+BC$$

ب) در هر مثلث هر میانه از نصف مجموع دو ضلع مجاور آن کوچکتر و از نصف تفاضل آن‌ها بزرگتر می‌باشد:

$$\frac{|b-c|}{2} < m_a < \frac{b+c}{2}$$

ج) در هر مثلث در مورد مجموع طول‌های ۳ میانه داریم:

$$\frac{3}{4}(a+b+c) < m_a + m_b + m_c < a+b+c$$

۵- **مکان هندسی:** مجموعه نقاطی که همگی دارای ویژگی مشترکی هستند. یعنی هر نقطه در این مجموعه، دارای این ویژگی است و هر نقطه که آن ویژگی را دارد عضو این مجموعه می‌باشد. مثال: مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط راست d به فاصله‌ی L می‌باشند دو خط راست موازی با خط d و در طرفین آن به فاصله‌ی L می‌باشد و مکان هندسی مذکور در فضای سطح جانبی استوانه‌ای است که محور آن خط d بوده و L شعاع قاعده‌اش می‌باشد.

۶- **رسم مثلث:** الف) در مسائلی که دو ضلع از مثلث و زاویه‌ی مقابل به یکی از این اضلاع داده شده و تعداد مثلث‌های قابل رسم مورد نظر می‌باشد از قضیه‌ی سینوس‌ها یعنی $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ مبادرت به حل مسئله می‌نماییم، واضح است که فرضیات مسئله باید طوری باشند که تناسب موجود، بدیهیات هندسی و مثلثاتی را نقض نکند.

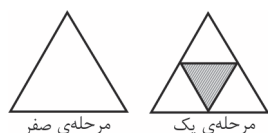
ب) در مسائلی از رسم مثلث می‌توان مسئله را با اصل خویشاوندی حل نمود. یعنی هرگاه ۳ فرض مسئله به صورتی باشند که مثلثی فرعی در داخل مثلث اصلی را بیان نماید. آن‌گاه شرط وجود مثلث اصلی به شرط وجود مثلث وابسته می‌باشد.

مثال ۱: از مثلثی $b=5$ و $c=4$ و $\hat{B}=45^\circ$ مفروض است، چند مثلث می‌توان رسم کرد؟

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{2\sqrt{2}}{5} < 1 \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = \text{حاده} \\ \hat{C} = \text{منفرجه} \end{cases}$$

فقط یک مثلث قابل رسم است. $b > c \Rightarrow \hat{B} > \hat{C} \Rightarrow 45^\circ > \hat{C} \Rightarrow \hat{C} = \text{حاده} \Rightarrow$

۷- **مثلث سرپنسیکی:** اگر مثلثی به مساحت واحد را در نظر گرفته و سپس وسط‌های اضلاع مثلث را به هم وصل کرده و بعد مثلث وسطی را حذف نماییم و مثلث حذف شده را به صورت سایه زده شده نشان داده و به همین نحو این روند را ادامه دهیم، خواهیم داشت:

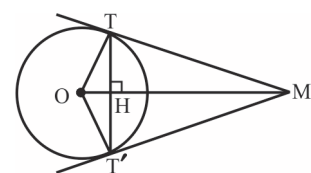


تعداد مثلث‌های سفید در مرحله‌ی n ام 3^n و مساحت مثلث‌های سفید در مرحله‌ی n ام $\left(\frac{3}{4}\right)^n$

فصل ۲ - هندسه ی ۲

۱- مکان هندسی نقطه ی H، وسط وترهایی به طول L از دایره ی C(O, R) دایره ای است به مرکز O و شعاع $R = OH = \sqrt{R^2 - \frac{L^2}{4}}$

۲- مطابق شکل اگر MT و MT' در نقطه های T و T' بر دایره ی C(O, R) مماس باشند، آن گاه داریم:

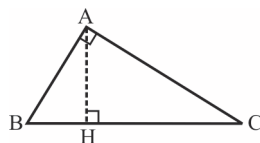


$$OT^2 = R^2 = OH \times OM$$

$$TT'^2 = 4OH \times HM$$

$$TT' \times OM = 2R \times MT$$

$$MT^2 = MH \times OM$$



$$AB^2 = BH \times BC$$

$$AC^2 = CH \times BC$$

$$AH^2 = BH \times CH$$

$$2S = AB \times AC = AH \times BC$$

زیرا:

۳- مکان هندسی نقطه ای از صفحه ی دایره ی C(O, R) که از آن می توان دو مماس با زاویه ی α بر دایره رسم کرد،

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{OM} \Rightarrow R' = OM = \frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

دایره ای به مرکز O و شعاع $R' = \frac{R}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ می باشد.

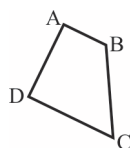
۴- در هر مثلث به طول اضلاع a, b, c و مساحت S؛ اولاً مرکز دایره ی محیطی مثلث نقطه ی همرسی ۳ عمودمنصف اضلاع بوده و ثانیاً شعاع دایره ی محیطی برابر

$$R = \frac{abc}{4S}$$

۵- در هر مثلث به مساحت S و محیط ۲P و شعاع دایره ی محاطی داخلی r و شعاع دایره ی محاطی خارجی r_a و r_b و r_c اولاً مرکز دایره ی محاطی داخلی، نقطه ی همرسی نیمسازهای داخلی بوده و مرکز هر دایره ی محاطی خارجی از همرسی هر دو نیمساز خارجی به وجود می آید و ثانیاً در مورد شعاع دایره ی محاطی داریم:

$$r = \frac{S}{P}, \quad r_a = \frac{S}{P-a}, \quad r_b = \frac{S}{P-b}, \quad r_c = \frac{S}{P-c}$$

۶- الف) اگر چهارضلعی ABCD محاطی باشد زوایای روبرو مکمل یکدیگرند.



«چهارضلعی ABCD محاطی می باشد. $\Leftrightarrow \widehat{B} + \widehat{D} = \widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ$ »

ب) اگر چهارضلعی ABCD محیطی باشد، مجموع اضلاع روبروی آن با هم برابرند.

«چهارضلعی ABCD محیطی می باشد. $\Leftrightarrow AB + CD = AD + BC$ »

ج) به عنوان مثال با توجه به موارد الف و ب می توان گفت لوزی همواره محیطی و مستطیل همواره محاطی و دوزنقه ی متساوی الساقین همواره محاطی است.

۷- اگر دوزنقه ی متساوی الساقین ABCD محیطی باشد، همواره قطر دایره ی محاطی آن واسطه ی هندسی بین دو قاعده است. $4R^2 = AB \times CD$

۸- الف) زاویه ی مرکزی زاویه ای است که رأس آن مرکز دایره بوده و دو ضلع آن دو شعاع از دایره می باشند و اندازه ی آن برابر با کمان روبرو به آن است.

ب) زاویه ی محاطی زاویه ای است که رأس آن روی دایره و ضلع هایش دو وتر از دایره اند و برابر با نصف کمان روبروی آن است.

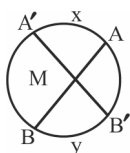
ج) زاویه ی ظلی زاویه ای است که رأس آن روی دایره و یک ضلعش دایره را قطع کرده و ضلع دیگرش بر دایره مماس است و برابر با نصف کمان روبرو به آن است.

۹- الف) کمان درخور زاویه ی α روبرو به پاره خط $BC = a$ ، مکان هندسی رأس زوایایی است که برابر با α بوده و اضلاع آن ها از دو نقطه ی ثابت A و B می گذرند و برای به دست آوردن شعاع دایره ی کمان درخور و فاصله ی مرکز این دایره تا پاره خط BC به صورت زیر عمل می نماییم.

$$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}, \quad OH = \frac{a}{2 |\tan \alpha|}$$

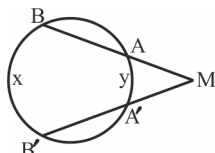
ب) هرگاه در مسائل مربوط به مثلث یک زاویه و ضلع مقابل آن داده شده باشد آن گاه از مفهوم کمان درخور استفاده می نماییم.

۱۰- روابط طولی و زاویه ای در دایره:



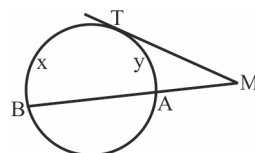
$$MA \times MB = MA' \times MB'$$

$$\widehat{M} = \frac{x+y}{2}$$



$$MA \times MB = MA' \times MB'$$

$$\widehat{M} = \frac{x-y}{2}$$



$$MT^2 = MA \times MB$$

$$\widehat{M} = \frac{x-y}{2}$$

۱۱- وضعی نسبی دو دایره:

۴ مماس مشترک دارند. $\Rightarrow$ دو دایره متخارجند. $d > R + R'$

۳ مماس مشترک دارند. $\Rightarrow$ دو دایره مماس خارجند. $d = R + R'$

۲ مماس مشترک دارند. $\Rightarrow$ دو دایره متقاطعند. $|R - R'| < d < R + R'$

۱ مماس مشترک دارند. $\Rightarrow$ دو دایره مماس داخلند. $d = |R - R'|$

۵) $d < |R - R'| \Rightarrow$ صفر مماس مشترک $\Rightarrow$ متداخلند.

۶) $d = 0 \Rightarrow$ هم مرکزند. $\Rightarrow$ صفر یا بی شمار مماس مشترک

فصل ۳- هندسه‌ی ۲- نگاشت و تبدیل

۱- الف) تعریف نگاشت: نگاشت از D به R تناظری بین مجموعه‌های D و R است که در آن هر عضو مجموعه‌ی D با یک و تنها یک عضو از R متناظر باشد. (ب) تعریف تبدیل: تبدیل نگاشتی یک به یک از صفحه بر روی خودش می‌باشد.

۲- تعریف ایزومتري: ایزومتري فاصله‌ی بین نقطه‌ها را حفظ می‌نماید و یا به عبارت دیگر طول پاره‌خط را تغییر نمی‌دهد.

۳- الف) تبدیل $T(x, y) = (x + h, y + k)$ به ازای هر دو عدد حقیقی h و k نشان‌دهنده‌ی یک انتقال است که بردار $V = (h, k)$ بردار انتقال می‌باشد. (در انتقال حتماً باید ضریب x و y فقط یک عدد باشد). (ب) انتقال یک ایزومتري است که شیب خط و جهت شکل را حفظ می‌نماید.

۴- الف) بازتاب‌های محوری مهم به شرح مقابلند: بازتاب نسبت به محور ox : $R(x, y) = (x, -y)$ ، بازتاب نسبت به محور oy : $T(x, y) = (-x, y)$

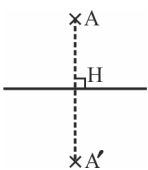
بازتاب نسبت به $y = b$: $R(x, y) = (x, 2b - y)$ ، بازتاب نسبت به $y = x$: $T(x, y) = (y, x)$

بازتاب نسبت به خط $x = a$: $R(x, y) = (2a - x, y)$ ، بازتاب نسبت به $y = -x$: $T(x, y) = (-y, -x)$

(ب) بازتاب نسبت به نقطه‌ی $P(\alpha, \beta)$: $R(x, y) = (2\alpha - x, 2\beta - y)$

(ج) تقارن محوری یک ایزومتري است که شیب خط و جهت شکل را حفظ نمی‌کند اما تقارن مرکزی یک ایزومتري است که شیب خط و جهت شکل را حفظ می‌کند.

۵- اگر در یک بازتاب محوری خط داده شده حالت خاص نباشد چه کنیم؟ به مثال زیر با دقت توجه کرده و راه مسئله را فراگیرید.



$$y = -x + 3 \Rightarrow m = -1 \Rightarrow m_{AA'} = -\frac{1}{m} = 1$$

مثال: قرینه‌ی نقطه‌ی $A = (2, 3)$ را نسبت به خط $y + x = 3$ بیابید؟

$$AA' : y - 3 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow y = 2, x = 1 \Rightarrow H = (1, 2) \Rightarrow A'(2 - 2, 4 - 3) = (0, 1)$$

۶- الف) دوران‌های مهم زیر را که $O = (0, 0)$ مرکز دوران می‌باشد به خاطر می‌سپاریم:

$$R(x, y) = (y, -x) : \alpha = 270^\circ, \quad R(x, y) = (-x, -y) : \alpha = 180^\circ, \quad R(x, y) = (-y, x) : \alpha = 90^\circ$$

(ب) دوران یک ایزومتري است که شیب خط و جهت شکل را حفظ نمی‌کند و در دوران مرکز دوران ثابت می‌ماند.

(ج) هرگاه دو شکل دوران یافته‌ی یکدیگر باشند برای یافتن مرکز دوران کافی است نقطه‌ی هم‌رسی عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های واصل بین هر نقطه و تبدیل یافته‌اش را به دست آوریم.

۷- الف) ضابطه‌ی تجانس با نسبت k و مرکز مبدأ $O = (0, 0)$ به صورت $D(x, y) = (kx, ky)$ می‌باشد اما اگر مرکز تجانس $(0, 0)$ نباشد همانند مثال عمل می‌نماییم.

مثال: مجانس نقطه‌ی $A = (1, 5)$ را تحت تجانس با نسبت $k = 3$ و مرکزیت $O' = (3, 2)$ بیابید؟

$$\overrightarrow{O'A'} = 3\overrightarrow{O'A} \Rightarrow A' - O' = 3(A - O') \Rightarrow A' = 3A - 2O' \Rightarrow A' = (3, 15) - (6, 4) = (-3, 11)$$

(ب) تجانس ایزومتري نبوده (مگر در حالت $k = 1$) ولی شیب خط را حفظ می‌کند و تجانس محیط را با ضریب k و مساحت را با ضریب k^2 عوض می‌کند.

۸- هرگاه دوران یافته‌ی نقطه‌ی $A = (x, y)$ تحت دورانی با زاویه‌ی θ حول نقطه‌ی $O' = (\alpha, \beta)$ مورد نظر باشد همانند مثال زیر عمل می‌نماییم.

مثال: دوران یافته‌ی نقطه‌ی $A = (3, 2)$ را تحت دوران 270° حول نقطه‌ی $O' = (1, -2)$ به دست آورید؟

$$O' = (1, -2) \Rightarrow O = (0, 0) \xrightarrow{\text{انتقال با } (-1, 2)} A = (3, 2) \Rightarrow A' = (2, 4) \xrightarrow{\text{دوران } 270^\circ \text{ حول } (0, 0)} A'' = (4, -2) \xrightarrow{\text{برگشت به اول با انتقال } (1, -2)} A''' = (5, -4)$$

۹- یافتن معادله‌ی تبدیل یافته‌ی یک خط: برای یافتن معادله‌ی تبدیل یافته‌ی یک خط کافی است براساس تبدیل داده شده مقادیر x' و y' متعلق به خط تبدیل یافته را برحسب x و y که متعلق به خط اول هستند را یافته و سپس این مقادیر را در معادله‌ی خط اول بگذاریم.

مثال: دوران یافته‌ی خط $y - 2x = 3$ تحت زاویه‌ی 90° به مرکز دوران $(0, 0)$ خط L_1 است. معادله‌ی خط تصویر L_2 ، تحت انتقالی با بردار $V = (1, -2)$ را بیابید؟

$$(x, y) \xrightarrow{\alpha=90^\circ} (-y, x) \xrightarrow{V=(1, -2)} (-y+1, x-2) \Rightarrow \begin{cases} x' = -y+1 \Rightarrow y = -x'+1 \\ y' = x-2 \Rightarrow x = y'+2 \end{cases} \quad (-x'+1) - 2(y'+2) = 3 \Rightarrow -x' - 2y' = 6 \Rightarrow 2y' + x' + 6 = 0$$

۱۰- الف) نتیجه‌ی ترکیب هر دو بازتاب مرکزی نسبت به دو نقطه‌ی O_1 و O_2 یک انتقال با بردار $\overrightarrow{2O_1O_2}$ می‌باشد.

(ب) نتیجه‌ی ترکیب دو تقارن محوری با محورهای موازی یک انتقال است که بردار انتقال دو برابر فاصله‌ی دور محور تقارن می‌باشد.

(ج) ترکیب دو تقارن محوری با محورهای متقاطع یک دوران است که مرکز دوران نقطه‌ی تقاطع دو محور و زاویه‌ی دوران دو برابر زاویه‌ی بین محورهاست.

۱۱- الف) اگر دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ مفروض باشند معادله‌ی محور تقارن این دو خط به صورت $ax + by + \left(\frac{c+c'}{2}\right) = 0$ می‌باشد.

(ب) اگر دو خط متقاطع $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ مفروض باشند معادله‌ی محور تقارن این دو خط که در واقع معادله‌ی دو خط نیمساز می‌باشد به

$$\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y + c'|}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}$$

صورت روبروست:

۱۲- هرگاه دو خط متقاطع تحت یک دوران تبدیل یافته‌ی یکدیگر باشند در این صورت زاویه‌ی تشکیل شده بین خط و تبدیل یافته‌اش همان زاویه‌ی دوران می‌باشد.

فصل ۴- هندسه ی ۲- هندسه ی فضایی

۱- حالت های مختلف نمایش یک صفحه به شرح زیرند:

(الف) ۳ نقطه ی غیرواقع بر یک خط (ب) یک خط و یک نقطه خارج آن (ج) دو خط متقاطع (د) دو خط متمایز موازی (دو خط غیرمنطبق موازی)

۲- وضع نسبی دو خط در فضا به شرح زیر می باشد:

(الف) دو خط در فضا را که در یک صفحه قرار نمی گیرند، دو خط متناظر نامند.

(ب) دو خط در فضا را که در یک صفحه باشند و همدیگر را قطع نکنند، یا بر هم منطبق باشند، دو خط موازی نامند.

(ج) دو خط در فضا را که فقط یک نقطه ی مشترک داشته باشند، دو خط متقاطع نامند.

۳- شرط توازی خط و صفحه: خط L با صفحه ی P موازی است، اگر و تنها اگر، L با یکی از خط های صفحه ی P موازی باشد.

۴- (الف) اگر خط L با صفحه ی P موازی باشد، هر صفحه که از L بگذرد و با P متقاطع باشد، P را در یک خط موازی L قطع می نماید.

(ب) اگر صفحه ای یکی از دو صفحه ی موازی را قطع کند، دیگری را هم قطع کرده و فصل مشترک ها با هم موازی یابند.

(ج) اگر خطی با دو صفحه ی متقاطع، موازی باشد، با فصل مشترک آن ها موازی است.

۵- اگر خطی با صفحه ای موازی باشد با خطوط آن صفحه یا موازی است و یا متناظر است. (خط L منطبق بر صفحه نمی باشد).

۶- شرط توازی دو صفحه: اگر دو خط متقاطع از صفحه ای با دو خط متقاطع از صفحه ی دیگری موازی باشند آن دو صفحه با هم موازی یابند.

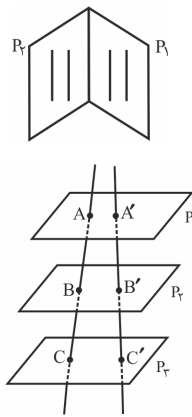
تذکر ۱: اگر دو خط از صفحه ای با دو خط از صفحه ای دیگر موازی باشند آن دو صفحه الزاماً با هم موازی نخواهند بود.

به شکل مقابل توجه شود.

تذکر ۲: اگر دو صفحه موازی باشند، هر خط از یکی از این دو صفحه، با صفحه دیگر موازی است.

۷- قضیه ی تالس در فضا: صفحه های موازی، روی دو خط که آن ها را قطع می کنند

پاره خط های متناظر متناسب ایجاد می کنند.



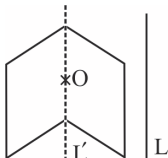
$$P_1 \parallel P_2 \parallel P_3 \iff \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

تذکر: عکس قضیه ی تالس در فضا برقرار نمی باشد.

۸- دو خط متناظر L و L' داده شده اند. اگر از هر نقطه روی L یا L' خطی موازی دیگری رسم شود، زاویه ی حاده یا قائمه ی بین این دو خط متقاطع، زاویه ی بین

آن دو خط متناظر، نامیده می شود.

۹- از نقطه ی O خارج از یک خط مانند L ، بی شمار صفحه می گذرد که با خط L موازی است (همانند شکل)



۱۰- قضیه ی اساسی تعامد: خط L بر صفحه ی P عمود است اگر و تنها اگر، بر دو خط متقاطع از صفحه ی P عمود باشد.

تذکر ۱: اگر خط L بر یک خط از صفحه ای عمود باشد، الزاماً بر آن صفحه عمود نمی باشد. (همانند شکل)

تذکر ۲: اگر خط L بر دو خط از صفحه ای عمود باشند ممکن است موازی یا متقاطع یا متناظر باشند.

۱۱- (الف) هرگاه دو خط بر خط سومی عمود باشند ممکن است موازی یا متقاطع یا متناظر باشند.

(ب) اگر خطی یکی از دو خط موازی را قطع نماید الزاماً دیگری را قطع نمی کند.

۱۲- صفحه ی عمودمنصف یک پاره خط، مکان هندسی نقطه هایی از فضا است که از دو سر آن پاره خط، به یک فاصله اند.

۱۳- عمودمشترک دو خط متناظر خطی است که دو خط متناظر را قطع کرده و بر آن ها عمود باشد. عمود مشترک دو خط متناظر یکتاست و کوتاه ترین پاره خط

متکی بر آن دو خط است.

۱۴- (الف) اگر خطی بر صفحه ای عمود باشد هر صفحه که بر آن خط بگذرد بر صفحه ی مفروض عمود است و اگر خطی بر صفحه ای عمود نباشد آن گاه فقط یک

صفحه وجود دارد که از آن خط گذشته و بر صفحه ی مذکور عمود است.

(ب) دو صفحه ی عمود بر یک صفحه الزاماً با هم موازی نیستند. (همانند شکل مقابل)

(ج) اگر دو صفحه ی متقاطع بر صفحه ای عمود باشند، فصل مشترک آن ها بر آن صفحه عمود است.

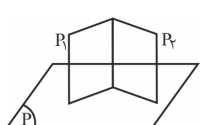
۱۵- اگر دو صفحه بر هم عمود باشند خطی در یکی از دو صفحه وجود دارد که بر دیگری عمود می باشد.

۱۶- (الف) از هر نقطه روی یک خط بی شمار عمود بر آن خط می توان رسم کرد.

(ب) از هر نقطه خارج از یک خط بی شمار خط می توان بر خط مذکور عمود کرد.

۱۷- دو صفحه ی P و P' با هم زاویه ی α ساخته اند (برای یافتن زاویه ی بین دو خط کافی است نقطه ای بر خط فصل مشترک در نظر گرفته و از آن نقطه در دو

صفحه ی P و P' دو خط عمود بر فصل مشترک رسم نماییم زاویه ی بین این دو خط جواب است. حال داریم: $L' = L \cos \alpha$, $S' = S \cos \alpha$



فصل ۱- هندسه‌ی ۱- هندسه و استدلال

۱- استدلال استنتاجی روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای حقایق است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم که این حقایق شامل قضیه‌ها، تعریف‌ها، اصول و واژه‌های تعریف شده همانند خط و نقطه می‌باشند.

۲- روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه‌ی محدودی از مشاهدات یا آزمایشات را استدلال استقرایی می‌گویند که نمی‌تواند روش اثبات قطعی باشد.

۳- دو زاویه را متمم گویند اگر مجموع آن‌ها 90° باشد و دو زاویه را مکمل نامند اگر مجموع آن‌ها 180° باشد.

۴- دو زاویه را مجانب گویند اگر مجاور باشند (در رأس و یک ضلع مشترک باشند) و مجموعشان برابر با 180° باشد.

۵- الف) مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° بوده و مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 360° می‌باشد.

ب) هر زاویه‌ی خارجی مثلث برابر با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیرمجاورش می‌باشد و بنابراین می‌توان گفت هر زاویه‌ی خارجی مثلث از هر زاویه‌ی داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

۶- الف) خم مسطح مجموعه‌ای از نقاط است که بتوانیم آن را بدون بلند کردن قلم از روی کاغذ رسم نماییم.

ب) خم ساده، یک خم مسطح است که هیچ یک از نقطه‌های خود را قطع نکند مگر در حالتی که نقطه‌های انتهایی به هم می‌رسند.

ج) قضیه‌ی خم جردن بیان می‌نماید هر خم ساده‌ی بسته، صفحه را به ۳ زیرمجموعه‌ی جدا از هم درون، بیرون و روی خم تقسیم می‌نماید.

۷- الف) یک ناحیه محدب است، هرگاه پاره‌خطی که هر دو نقطه‌ی دلخواه آن را به هم وصل می‌نماید، کاملاً درون ناحیه قرار گیرد.

ب) در چندضلعی محدب (کوژ) تمامی زاویه‌ها از 180° کم‌تر بوده و در چند ضلعی مقعر (کاو) حداقل یک زاویه از 180° بیش‌تر است.

۸- حالت‌های تساوی (همنهشتی) دو مثلث عبارتند از:

الف) دو ضلع و زاویه‌ی بین (ب) دو زاویه و ضلع بین (ج) تساوی ۳ ضلع

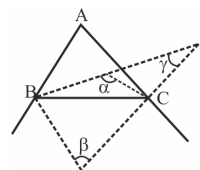
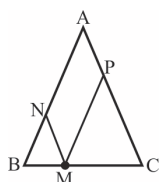
۹- اگر از یک نقطه‌ی دلخواه بر روی قاعده‌ی یک مثلث متساوی‌الساقین دو خط به موازات دو ساق رسم نماییم، تا آن‌ها را قطع نمایند

$$MN + NP = AB$$

اولاً مجموع طول پاره‌خط‌های ایجاد شده برابر با طول ساق مثلث می‌باشد.

$$ANMP = 2AB \text{ محیط متوازی‌الاضلاع}$$

ثانیاً محیط متوازی‌الاضلاع به وجود آمده برابر با دو برابر طول ساق مثلث است.



۱۰- اگر در مثلث ABC؛ α زاویه‌ی حاصل از تقاطع نیمسازهای داخلی زاویه‌های B و C بوده و β زاویه‌ی حاصل از تقاطع نیمسازهای

خارجی B و C باشد و γ زاویه‌ی حاصل از تقاطع نیمساز داخلی زاویه‌ی B و نیمساز زاویه‌ی خارجی C فرض شود، آن‌گاه داریم:

$$\alpha = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}, \quad \beta = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}, \quad \gamma = \frac{\hat{A}}{2}$$

۱۱- الف) در هر مثلث اندازه‌ی زاویه‌ی بین ارتفاع و نیمساز هر رأس مساوی نصف تفاضل اندازه‌های دو زاویه‌ی دیگر است.

ب) در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) اندازه‌ی زاویه‌ی بین میانه و ارتفاع وارد بر وتر مساوی تفاضل دو زاویه‌ی حاده است.

۱۲- در هر n ضلعی محدب:

الف) از هر رأس $n-3$ قطر می‌گذرد.

ب) تعداد قطر‌ها برابر با $\frac{n(n-3)}{2}$ می‌باشد.

ج) مجموع زوایای داخلی برابر با $180^\circ \times (n-2)$ بوده و مجموع زوایای خارجی برابر با 360° می‌باشد.

د) هر n ضلعی محدب حداکثر ۳ زاویه‌ی حاده‌ی داخلی و یا حداکثر ۳ زاویه‌ی منفرجه‌ی خارجی دارد.

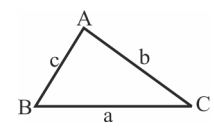
۱۳- در یک n ضلعی منتظم داریم:

$$\text{هر زاویه‌ی داخلی} = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}, \quad \text{هر زاویه‌ی خارجی} = \frac{360^\circ}{n}$$

فصل ۲ - هندسه ی ۱ - مساحت و قضیه ی فیثاغورس

۱- الف) مساحت مثلث برابر با حاصلضرب یک ضلع مثلث در نصف ارتفاع نظیر آن ضلع است.

ب) مساحت مثلث برابر با نصف حاصلضرب دو ضلع مثلث در سینوس زاویه ی بین آن دو ضلع می باشد:



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B}$$

نتیجه ی ۱: در هر مثلث رابطه ی مقابل که به رابطه ی سینوس ها معروف است، برقرار می باشد:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

نتیجه ی ۲: مساحت هر مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a برابر با $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ می باشد، زیرا:

$$S = \frac{1}{2}a \times a \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

نتیجه ی ۳: مساحت هر شش ضلعی منتظم به طول ضلع a برابر با $3\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ می باشد، زیرا:

$$S = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = 3\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

۲- الف) مساحت هر چهارضلعی محدب برابر با نصف حاصلضرب دو قطر در سینوس زاویه ی بین آن دو قطر می باشد. یعنی اگر d و d' قطرهای چهارضلعی بوده

$$S = \frac{1}{2}dd' \sin \alpha$$

و α زاویه ی بین دو قطر باشد، آن گاه داریم:

ب) علاوه بر قسمت الف مساحت متوازی الاضلاع را به هر یک از روش های زیر می توان محاسبه کرد:

- مساحت متوازی الاضلاع برابر با حاصلضرب قاعده در ارتفاع نظیر آن قاعده می باشد و مساحت دوزنقه برابر است با مجموع دو قاعده ضربدر نصف ارتفاع

$$S = ab \sin \alpha$$

- مساحت متوازی الاضلاع برابر با حاصلضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه ی بین آن دو ضلع می باشد.

$$S = a^2 = \frac{1}{2}d^2$$

ج) مساحت مربعی به طول ضلع a و قطر d برابر است با:

$$S = \frac{1}{2}dd'$$

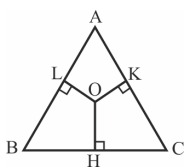
د) مساحت یک لوزی با قطرهای d و d' برابر است با:

۳- اگر دو شکل دارای مساحت های برابر باشند آن دو شکل را هم ارز یا معادل می نامند.

۴- در مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع a، مجموع فواصل هر نقطه ی دلخواه واقع در داخل آن از سه ضلع مثلث برابر با

$$OH + OK + OL = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

طول ارتفاع مثلث است. یعنی داریم:



۵- الف) مجموع فواصل هر نقطه ی دلخواه واقع بر قاعده ی مثلث متساوی الساقین از دو ساق آن برابر با طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث است.

ب) قدرمطلق تفاضل فواصل هر نقطه ی دلخواه واقع بر قاعده ی متساوی الساقین از دو ساق آن برابر با طول ارتفاع وارد بر ساق است.

۶- الف) هر میانه سطح مثلث را به دو قسمت هم مساحت تقسیم می نماید.

ب) ۳ میانه ی مثلث، سطح مثلث را به ۶ مثلث هم مساحت تقسیم می نماید.

ج) اگر G نقطه ی هم رسی میانه های مثلث ABC باشد، آن گاه ۳ مثلث هم مساحت ایجاد می گردد.

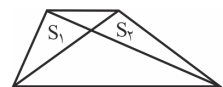
۷- الف) اگر در مثلث ABC، دو ضلع از مثلث و میانه ی وارد بر ضلع سوم داده شده باشد (m_a, c, b) کافی است میانه را به

اندازه ی خودش امتداد داده و به جای مساحت ΔABC ، مساحت ΔANC را که با آن مساوی است بیابیم که ۳ ضلع این مثلث m_a, m_b, m_c می باشند. (باید توجه داشت که در تست ها این مثلث یا قائم الزاویه و یا متساوی الساقین خواهد بود).

ب) اگر در مثلث ABC، ۳ میانه m_a, m_b, m_c داده شده باشند، آن گاه داریم: (مساحت مثلثی با اضلاع m_a, m_b, m_c) $S_{\Delta ABC} = \frac{4}{3} (m_a, m_b, m_c)$

۸- اگر مطابق شکل ABCD دوزنقه باشد و قطرهای آن را رسم نماییم آن گاه:

$$S_1 = S_2$$



۹- در هر مثلث قائم الزاویه داریم:

$$AB^2 = BH \times BC, \quad AC^2 = CH \times BC$$

$$AH^2 = BH \times CH, \quad 2S = AB \times AC = AH \times BC$$

۱۰- در مثلث قائم الزاویه: الف) ضلع مقابل به زاویه 30° نصف وتر است و بالعکس

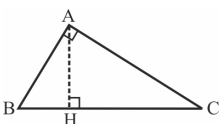
ج) اگر مثلث قائم الزاویه ای یک زاویه 15° داشته باشد، ارتفاع وارد بر وتر $\frac{1}{4}$ وتر است و بالعکس

۱۱- قضیه ی کسینوس ها: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

۱۲- با استفاده از قضیه ی کسینوس ها ثابت می شود: الف) $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$

۱۳- در مثلث قائم الزاویه ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) داریم:

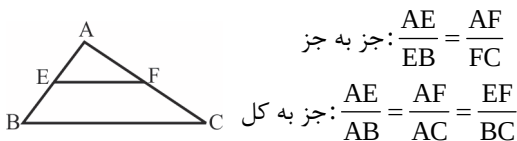
۱۴- قطر بزرگ شش ضلعی منتظم به طول a برابر با $2a$ و قطر کوچک آن برابر با $\sqrt{3}a$ می باشد.



فصل ۳- هندسه‌ی ۱- تالس و تشابه

۱- عدد b را واسطه‌ی هندسی بین دو عدد a و c نامند اگر $b^2 = ac$ باشد.

۲- قضیه‌ی تالس: اگر خطی با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع نماید، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یک ضلع پدید می‌آورد، برابر است با نسبت پاره‌خط‌هایی که روی ضلع دیگر ایجاد می‌نماید.



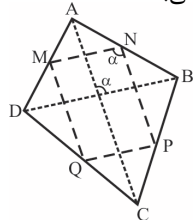
$$\text{جز به جز: } \frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$$

$$\text{جز به کل: } \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

تذکر: در مسائلی که خطوط موازی مشاهده می‌شود، حتماً باید قضیه‌ی تالس به کار برده شود، به بیان دیگر هر تعداد ۲ خط موازی که مشاهده شود، به همان تعداد هم می‌بایستی قضیه‌ی تالس را به کار برد.

۳- پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلثی را به یکدیگر وصل می‌نماید (میان خط یا پاره‌خط میانگین)، مساوی و موازی نصف ضلع سوم مثلث می‌باشد.

۴- اگر وسط‌های اضلاع مجاور چهارضلعی محدب ABCD را به هم وصل نماییم متوازی‌الاضلاع MNPQ به دست می‌آید که در مورد آن داریم:



$$\text{محیط } MNPQ = AC + BD$$

$$\text{مساحت } MNPQ = \frac{1}{2} \times S_{ABCD}$$

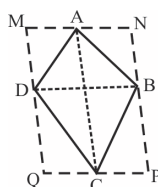
ویژگی‌های چهارضلعی ABCD	چهارضلعی MNPQ
مستطیل (قطرها بر هم عمودند. $AC \perp BD$)	مستطیل
لوزی (قطرها با هم برابرند. $AC = BD$)	لوزی
مربع (قطرها برابرند و بر هم عمودند.)	مربع
لوزی (مستطیل (قطرها با هم برابرند.))	لوزی
مستطیل (لوزی (قطرها بر هم عمودند.))	مستطیل
لوزی (دو زنگه‌ی متساوی‌الساقین)	لوزی
مربع (قطرها برابرند و بر هم عمودند.)	مربع

جدول مقابل در مورد وضعیت MNPQ و ABCD را مورد توجه قرار می‌دهیم:

۵- اگر از رأس‌های چهارضلعی محدب ABCD خطوطی به موازات قطرهای آن رسم نماییم، متوازی‌الاضلاع MNPQ به دست می‌آید که در مورد آن داریم:

$$\text{محیط } MNPQ = 2(AC + BD)$$

$$S_{MNPQ} = 2 \times S_{ABCD}$$



تذکر: جدول مقابل برای این حالت نیز صادق است.

۶- الف) دو ضلعی را متشابه گویند اگر زوایای آن‌ها نظیر به نظیر مساوی بوده و اضلاع آن‌ها متناسب باشند.

ب) حالت‌های تشابه دو مثلث عبارتند از:

(I) اگر دو زاویه از یک مثلث، با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند آن دو مثلث متشابهند.

(II) اگر یک زاویه از یک مثلث با یک زاویه از مثلث دیگر برابر بوده و ضلع‌های نظیر این زاویه‌ها متناسب باشند، آن دو مثلث متشابهند.

(III) هرگاه سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب بوده، آن دو مثلث متشابهند.

۷- در دو مثلث متشابه اگر نسبت تشابه برابر با k باشد:

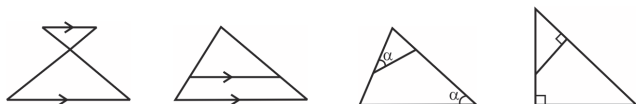
نسبت محیط‌ها = نسبت نیمسازها = نسبت میانه‌ها = نسبت ارتفاع‌ها = k

نسبت مساحت‌ها = k^2

۸- در مسائل تشابه برای یافتن دو مثلث متشابه، موارد زیر را مورد توجه قرار می‌دهیم:

(I) برای نوشتن نسبت تشابه، اضلاع مقابل به زوایای برابر را در یک نسبت می‌نویسیم.

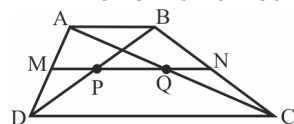
(II) هرگاه دو ضلع از زاویه‌ای حاده بر دو ضلع از زاویه‌ی دیگر عمود باشد، آن دو زاویه برابر بوده و در نتیجه نسبت‌های مثلثاتی متناظر آن دو زاویه نیز برابر خواهند بود.



تذکر: شکل‌های مقابل، دو مثلث متشابه را نشان می‌دهند که بسیار پرکاربرد هستند.

۹- پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق دوزنقه را به یکدیگر وصل می‌نماید، با قاعده‌ها موازی بوده و اندازه‌اش نصف مجموع دو قاعده است و قطرهای دوزنقه بر این

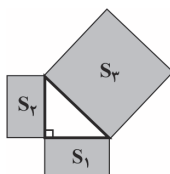
$$MN = \frac{AB + DC}{2}, \quad PQ = \frac{DC - AB}{2}$$



پاره‌خط قطعه‌ای ایجاد می‌نماید که اندازه‌ی آن نصف تفاضل دو قاعده است.

۱۰- اگر وسط‌های اضلاع n ضلعی منتظمی را به طور متوالی به هم وصل نماییم، n ضلعی منتظم دیگری به دست می‌آید که با آن متشابه بوده و نسبت تشابه برابر

$$\frac{S_2}{S_1} = \cos^2 \frac{180^\circ}{n}, \quad \frac{\text{محیط دومی}}{\text{محیط اولی}} = \cos \frac{180^\circ}{n} \quad \text{با } \cos \frac{180^\circ}{n} \text{ می‌باشد.}$$



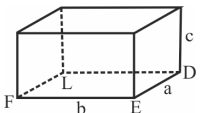
۱۱- در مثلث قائم‌الزاویه اگر روی وتر و دو ضلع قائم، ۳ شکل متشابه بسازیم، همواره مساحت شکلی که روی وتر ساخته می‌شود

$$S_3 = S_1 + S_2$$

برابر است با مجموع مساحت‌های دو شکل دیگر، یعنی داریم:

فصل ۴- هندسه ی ۱- شکل های فضایی

۱- اگر مکعب مستطیلی با طول یال های a, b, c را مطابق شکل مقابل در نظر گیریم آن گاه داریم:



$$S_{\text{جانبی}} = 2(a+b)c$$

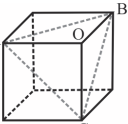
$$S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + 2S_{\text{قاعده}} = 2(ab+ac+bc) \quad , \quad \text{حجم} = V = abc$$

$$d = \text{قطر} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad , \quad \text{قطر وجه} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

در مورد قطر مکعب مستطیل و قطر هر وجه آن داریم:

۲- الف) در مکعبی به طول ضلع a داریم: الف) هر مکعب دارای ۹ صفحه ی متقارن می باشد.

ب) با توجه به این که اگر ۳ یال مکعب مستطیلی با هم برابر باشند جسم به مکعب تبدیل می شود. داریم:



$$\text{قطر وجه} = d = a\sqrt{3} \quad , \quad \text{قطر} = a\sqrt{3} \quad , \quad V = \text{حجم} = a^3 \quad , \quad S_{\text{کل}} = 6a^2 \quad , \quad S_{\text{جانبی}} = 4a^2$$

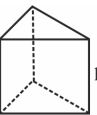
ج) اگر در مکعبی ۳ انتهای یال های گذرا بر یک رأس مکعب را به هم وصل نمائیم (C, B, A) مثلثی متساوی الاضلاع پدید می آید که طول ضلع آن $a\sqrt{2}$ می باشد.

د) هرگاه در مسائل مکعب حجم هرمی مورد نظر باشد مناسب ترین روش این است که قاعده ی هرم را مثلث قائم الزاویه در نظر بگیریم. مثلاً در شکل بالا برای محاسبه ی حجم هرم $OABC$ مناسب ترین روش این است که قاعده را مثلث AOC و ارتفاع OB در نظر بگیریم.

$$V_{\text{هرم } OABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta OAC} \times OB = \frac{1}{3} \left(\frac{a \times a}{2} \right) \times a = \frac{1}{6} a^3$$

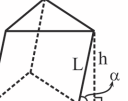
۳- الف) منشور یک چندوجهی است که دو وجه آن همنهشت بوده و در دو صفحه ی موازی قرار گیرند و وجه های دیگر آن متوازی الاضلاع باشند.

اگر یال های جانبی بر قاعده های منشور عمود باشند آن را منشور قائم نامند و در منشور قائم داریم:



$$\text{ارتفاع} = V = S_{\text{قاعده}} \times \text{ارتفاع} \quad , \quad S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + 2S_{\text{قاعده}} \quad , \quad \text{ارتفاع} = \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = S_{\text{جانبی}}$$

ب) اگر یال های جانبی بر قاعده های منشور عمود نباشند، آن را منشور مایل نامند و در مورد آن داریم:



$$\sin \alpha = \frac{h}{L} \Rightarrow h = L \sin \alpha \quad , \quad V = S_{\text{قاعده}} \times h \Rightarrow V = S_{\text{قاعده}} \times \text{ارتفاع}$$

۴- استوانه شکلی است فضایی شبیه به منشور که قاعده های آن به جای چندضلعی، دو دایره همنهشت می باشند و در مورد استوانه ی قائم داریم:

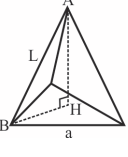
$$S_{\text{جانبی}} = \text{محیط قاعده} \times h = 2\pi R h \quad , \quad S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + 2S_{\text{قاعده}} = 2\pi R h + 2\pi R^2 \quad , \quad V = \text{حجم} = S_{\text{قاعده}} \times \text{ارتفاع} = \pi R^2 h$$

۵- الف) اصل کاوالیری درباره ی مساحت ها: فرض کنید قاعده های دو شکل بر روی یک خط قرار گرفته باشند. اگر هر خطی موازی قاعده های دو شکل در آن ها قطاعی با طول های مساوی ایجاد کند، مساحت های آن دو شکل برابر است.

ب) اصل کاوالیری درباره ی حجم ها: دو شکل فضایی و صفحه ای که قاعده های دو شکل در آن قرار گرفته باشند را در نظر بگیرید. اگر هر صفحه ای موازی با این صفحه که یکی از این دو شکل را قطع می نماید، دیگری را نیز قطع نماید و سطح مقطع های حاصل دارای مساحت های برابر باشند آن گاه حجم های این دو شکل فضایی با هم برابرند.

۶- هرم یک چندوجهی است که همه ی وجه های آن به جز یکی در یک رأس مشترک می باشند. اگر قاعده ی یک هرم، چندضلعی منتظم بوده و پای ارتفاع آن بر مرکز قاعده منطبق باشد، هرم را منتظم نامیم. تحلیل در هرم منتظم زیر بسیار مهم است:

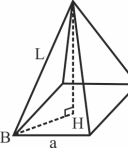
هرم مثلث القاعده منتظم



$$BH = \frac{2}{3} m_a = \frac{2}{3} h_a = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

$$AH = h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} a \right)^2}$$

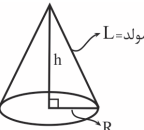
هرم مربع القاعده منتظم



$$BH = \text{نصف قطر} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$AH = h = \sqrt{L^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2}$$

۷- مخروط قائم دارای ویژگی های زیر می باشد:



$$S_{\text{جانبی}} = \pi R L \quad , \quad S_{\text{کل}} = \pi R L + \pi R^2 \quad , \quad L = \sqrt{h^2 + R^2}$$

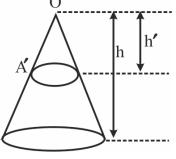
$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

ب) اگر سطح جانبی مخروط دواری را در امتداد یکی از مولدها باز کرده و آن را روی صفحه ای گسترش دهیم، قطاعی به دست می آید که مساحت آن با مساحت جانبی مخروط برابر بوده و زاویه ی قطاع حاصله از گسترش مخروط برابر است با:

$$\alpha = \frac{2\pi R}{L}$$

۸- هرگاه مخروط و یا هرمی را که حجم آن V و مساحتش S (فرقی نمی کند چه مساحتی در نظر گرفته شود) و ارتفاع آن h باشد،

را با صفحه ای موازی قاعده و به فاصله ی h' از رأس قطع نماید به طوری که مساحت مقطع به دست آمده S' و حجم آن V' باشد، داریم:



$$\frac{S'}{S} = \left(\frac{h'}{h} \right)^2 \quad , \quad \frac{V'}{V} = \left(\frac{h'}{h} \right)^3$$

۹- الف) در مورد کره ای به شعاع R داریم:

ب) اگر مکعبی در کره ای محاط شود قطر کره با قطر مکعب برابر است یعنی $a\sqrt{3} = 2R$ و اگر مکعبی در کره ای محاط شود، داریم: $a = 2R$
ج) برای اثبات مساحت کره از تبدیل آن بی شمار هرم یا مخروط کوچک استفاده شده است. برای اثبات حجم کره از اصل کاوالیری درباره ی حجم ها استفاده شده که یک نیم کره به شعاع R را با یک استوانه به شعاع قاعده R و ارتفاع R که از آن یک مخروط جدا شده است را در نظر می گیریم.

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad , \quad S = 4\pi R^2$$