

فصل ۱: بردارها

سال	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰	۹۱	۹۲
داخل	۲	۱	۱	۲	۲	۱	۱	۱	۲	۲	۱	۱
خارج												
تعداد	برگزار نمی‌شد											

به ضرب‌ها (داخلی، خارجی، مختلط و مضاعف) توجه ویژه‌ای دارند و غالباً تیپ سؤالات به‌گونه‌ای است که کاربرد این نوع ضرب‌ها را از شما می‌خواهند؛ مثلاً در ضرب داخلی تسلط بر اتحادها، پیدا کردن

زاویه، تصویر بردار بر بردار و همچنین قرینه‌ی بردار نسبت به بردار متداول‌ترین نوع سؤالات مطرح شده است. در ضرب خارجی محاسبه‌ی مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع و تسلط بر خواص ضرب خارجی مهم‌ترین موضوعات مطرح شده است. در ضرب مختلط محاسبه‌ی حجم متوازی‌السطوح (حتی وقتی که صفر می‌شود و سه بردار هم‌صفحه می‌شوند) و یا ارتفاع آن از مهم‌ترین مسائل مطرح شده تاکنون بوده است. البته در چارچوب این سؤالات ویژگی‌های ابتدایی این نوع ضرب‌ها نظیر جابه‌جایی، پخش‌ی، جابه‌جایی دوری و همچنین مفهوم صفر شدن هر کدام از این ضرب‌ها و ... مورد توجه اصلی طراحان بوده است که البته تمرین‌های کتاب درسی معیار اصلی طرح این‌گونه سؤالات است که ما در این کتاب تمام آن‌ها را مورد واکاوی قرار داده‌ایم.

فقط روی تست‌های سال‌های گذشته و تمرینات کتاب درسی تأکید کنید و نیازی به بررسی نکات عجیب و غریب نیست، تست‌های این فصل فوق‌العاده تکرارپذیرند.

تعداد تست‌های این فصل در ۵ سال اخیر ۱ یا ۲ تست بوده است و جالب این‌که وقتی یک تست از بردار مطرح می‌شود از ضرب خارجی به بعد است که معمولاً خواص ساده و ابتدایی ضرب داخلی را نیز در

آن دخالت می‌دهند و زمانی که دو تست از این فصل طراحی می‌شود یکی مربوط به کاربردهای ضرب داخلی و دیگری مربوط به کاربردهای ضرب خارجی است. شماره تست‌های مربوط به این فصل در دفترچه کنکور در مواردی که یک تست مطرح می‌شود ۱۳۳ و در مواردی که دو تست مطرح می‌شود ۱۳۳ و ۱۳۴ است.

طراحان در این فصل:

پیشنهاد ما:

حرف آخر:

ضرب مختلط



۷ بار

مساحت مثلث و متوازی‌الاضلاع



۵ بار

قرینه‌ی بردار نسبت به بردار



۵ بار

ضرب داخلی و اتحادها



۵ بار

زاویه‌ی بین دو بردار



۳ بار

ضرب خارجی



۲ بار

ضرب مضاعف



۱ بار

تصویر بردار بر یک بردار



۱ بار

تعداد دفعات تکرار مباحث این فصل از سال ۸۰ به بعد

۱ | مقدمات بردار

۱ **تصویر کردن:** برای تصویر کردن هر بردار [یا نقطه و ...] روی محورها و صفحات مختصات، کافی است هر مؤلفه‌ی غیر هم‌نام با اسم محور یا صفحه را در مؤلفه‌های بردار، صفر کنیم.

مثلاً $A(1, 2, 3) \xrightarrow{\text{تصویر روی } OY} A'(0, 2, 0)$

۲ **قرینه کردن:** برای قرینه کردن هر چیزی [نقطه، بردار، خط و ...] نسبت به محورها، صفحات یا مبدأ مختصات، کافی است هر مؤلفه‌ی غیر هم‌نام با اسم آن‌ها را در آن چیز قرینه کنیم.

مثلاً $A(1, 2, 3) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات}} A'(-1, -2, -3)$ و $A(1, 2, 3) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به } OZ} A'(-1, 2, 3)$

$|\vec{V}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

۳ **اندازه‌ی بردار:** بردار $\vec{V} = (a, b, c)$ مفروض است، در این صورت اندازه‌ی بردار \vec{V} به صورت مقابل به دست می‌آید:

۱ | اندازه‌ی تصویر بردار $\vec{V} = (3, 1, 0)$ بر صفحه‌ی xOy کدام است؟

- $\sqrt{14}$ (۴)
- $\sqrt{13}$ (۳)
- $\sqrt{10}$ (۲)
- $\sqrt{5}$ (۱)

ابتدا بردار را روی صفحه‌ی xOy تصویر می‌کنیم، یعنی Z را به صفر تبدیل کرده و سپس اندازه‌ی آن را پیدا می‌کنیم:

$\vec{V}' = (3, 1, 0) \Rightarrow |\vec{V}'| = \sqrt{9 + 1 + 0} = \sqrt{10}$

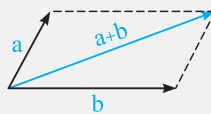
دهمی | ۷۰ | پاسخ: ۲

۲ | جمع و تفریق بردارها

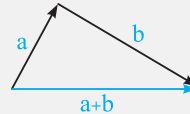
$a \pm b = (x \pm x', y \pm y', z \pm z')$

۱ **جمع و تفریق بردارها:** برای جمع و تفریق دو بردار، کافی است مؤلفه‌های نظیر در دو بردار را با هم جمع و تفریق کنیم.

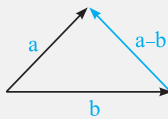
۲ **تعبیر هندسی جمع:** به شکل‌های زیر نگاه کنید، بارها آن‌ها را در فیزیک دیده‌اید:



روش متوازی‌الاضلاع



روش مثلث



۳ **تعبیر هندسی تفریق:** به شکل مقابل خیره شوید؛ مات و مبهوت!!! دیدی؟! جهت $a - b$ از b به سمت a است.

$\vec{AB} = B - A$

۴ **بردار \vec{AB} :** اگر A و B دو نقطه در فضا باشند، آن‌گاه مؤلفه‌های بردار هم‌ارز با پیکان \vec{AB} به صورت مقابل به دست می‌آید:

$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$

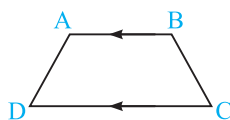
۵ **شرط موازی بودن دو بردار:** اگر $a = (x, y, z)$ و $b = (x', y', z')$ دو بردار باشند، شرط موازی بودن آن‌ها این است که \vec{a} و \vec{b} مضربی از هم باشند یا به عبارتی:

۲ | اگر چهار بردار $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$ در تساوی $\vec{OA} + K\vec{OC} = \vec{OB} + K\vec{OD}$ صدق کنند، چهارضلعی $ABCD$ همواره

کدام است؟ ($K > 1$)

- مستطیل (۱)
- دوزنقه (۲)
- لوزی (۳)
- متوازی‌الاضلاع (۴)

پیکان‌های داده شده را برحسب نقاط ابتدایی و انتهایی آن‌ها می‌نویسیم:



$A - O + K(C - O) = B - O + K(D - O) \Rightarrow A + KC = B + KD$

$\Rightarrow A - B = KD - KC \Rightarrow \vec{BA} = K\vec{CD} \xrightarrow{K > 1} \vec{BA} \parallel \vec{CD} \Rightarrow$ دوزنقه \Rightarrow دو بردار موازی و ناهم‌اندازه

دهمی | ۷۰ | پاسخ: ۲

۳ ضرب داخلی (درونی، نقطه‌ای، عددی)

۱ تعریف: اگر $a = (x, y, z)$ و $b = (x', y', z')$ باشد، آن‌گاه ضرب داخلی آن‌ها به صورت مقابل به دست می‌آید که حاصل آن همواره یک عدد است:

۲ قسیده: ضرب داخلی دو بردار a و b که زاویه‌ی بین آن‌ها θ باشد، از رابطه‌ی مقابل قابل محاسبه است:

۳ بردارهای $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: این بردارها، بردارهای یک‌ه‌ی محورهای مختصات نام دارند به طوری که $\vec{i} = (1, 0, 0)$ و $\vec{j} = (0, 1, 0)$ و $\vec{k} = (0, 0, 1)$ می‌باشد و هر بردار دلخواهی را بر حسب ترکیب خطی آن‌ها می‌توان نوشت یعنی:

$$a \cdot b = xx' + yy' + zz'$$

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$$

$$V = (a \cdot b \cdot c) \Rightarrow V = a \vec{i} + b \vec{j} + c \vec{k}$$

۳ به‌زای کدام مقدار a ، حاصل ضرب داخلی دو بردار $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ و $\vec{b} = -2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$ برابر -3 است؟

(۱) -6 (۲) -4 (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) 3

دلیل تجربی ۸۶ | پاسخ: ۱

$$\vec{a} = (3, -1, 5)$$

$$\vec{b} = (-2, 5, -3)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2a - 15 + 0 = -3 \Rightarrow 2a = -12 \Rightarrow a = -6$$

۴ حاصل ضرب داخلی دو بردار غیرصفر با اندازه‌های مساوی، برابر با مربع اندازه‌ی هریک از دو بردار است. زاویه‌ی بین دو بردار چند درجه است؟

(۱) صفر (۲) 30° (۳) 45° (۴) 90°

دسته‌ی ۷۰ | پاسخ: ۱

$$a \cdot b = |a|^2 \xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|} |a| |a| \cos \theta = |a|^2 \Rightarrow \cos \theta = 1 \Rightarrow \theta = 0^\circ$$

۴ اتحادها و خواص

۱ ویژگی‌ها: ضرب داخلی دو بردار، دارای خاصیت‌های مهم زیر است:

۱ $a \cdot a = |a|^2$ رفتار عددی
 ۲ $a \cdot b = b \cdot a$ جابه‌جایی
 ۳ $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$ توزیع پذیری

۲ اتفاه‌ها: تمام اتحادهای جبری که دارای توان ۲ هستند برای بردارها برقرارند، با این تفاوت که ضرب داخلی تبدیل می‌شوند و هر جا توان ۲ داریم به جای پرانتز، اندازه می‌گذاریم یعنی داریم:

۱ $|a \pm b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \pm 2a \cdot b \Rightarrow |a \pm b|^2 = |a|^2 + |b|^2 \pm 2|a||b|\cos \theta$
 ۲ $|a + b + c|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ ۳ $(a + b) \cdot (a - b) = |a|^2 - |b|^2$

۵ اگر $|a| = 2\sqrt{6}$ ، $|b| = 5$ و $|a \cdot b| = 0$ باشد، اندازه‌ی بردار $a - b$ کدام است؟

(۱) 3 (۲) 4 (۳) 6 (۴) 7

دلیل تجربی ۸۳ | پاسخ: ۴

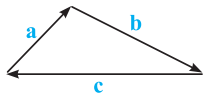
$$|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b \Rightarrow |a - b|^2 = (2\sqrt{6})^2 + (5)^2 - 2 \times 0 = 49 \Rightarrow |a - b| = 7$$

۶ سه بردار a و b و c با اندازه‌های ۳ و ۴ و ۷ واحد در رابطه‌ی $a + b + c = \vec{0}$ صدق می‌کنند. مقدار $a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c$ کدام است؟

(۱) -37 (۲) -19 (۳) 19 (۴) 37

تمرین ۳ ص ۲۴ کتاب درسی

$$|a + b + c|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) \Rightarrow 0 = 9 + 16 + 49 + 2(x) \Rightarrow x = -37$$



۷ در شکل روبه‌رو، اندازه‌های بردارهای a و b و c به ترتیب ۳ و ۵ و ۶ است. حاصل ضرب داخلی دو بردار a و b کدام است؟

- تمرین ۳ من ۲۴ کتاب درسی
- ۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

از روی شکل می‌توان دریافت که $a + b + c = \vec{0}$ است پس:

$$a + b + c = \vec{0} \Rightarrow a + b = -c \Rightarrow |a + b| = |-c| \Rightarrow |a + b|^2 = |c|^2$$

$$\Rightarrow |a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b = |c|^2 \Rightarrow 9 + 25 + 2a \cdot b = 36 \Rightarrow a \cdot b = 1$$

۵ اتحادهای فرعی

دو اتحاد فرعی زیر که یکی از آن‌ها در تمرینات کتاب درسی آمده است از اتحادهای اصلی به دست می‌آیند:

۱) $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$

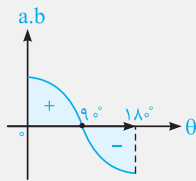
۲) $|a + b|^2 - |a - b|^2 = 4a \cdot b$

۸ اگر $|a + b| = \sqrt{6}$ و $|a - b| = 4$ و $|a| = \sqrt{3}$ باشد، اندازه‌ی بردار b کدام است؟

- ۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt{10}$
۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{7}$

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2) \Rightarrow 6 + 16 = 2(3 + |b|^2) \Rightarrow 11 = 3 + |b|^2 \Rightarrow |b| = 2\sqrt{2}$$

۶ شرط عمود بودن



با توجه به این که $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$ می‌باشد، اگر $\theta = 90^\circ$ باشد، $a \cdot b = 0$ می‌شود، پس دو بردار a و b بر هم عمودند اگر و تنها اگر:

توجه! رابطه‌ی $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$ همچنین نشان می‌دهد با افزایش زاویه‌ی دو بردار، ضرب داخلی مرتباً کاهش می‌یابد. به نمودار خیره شو!!!
در زاویه‌های حاده، ضرب داخلی مثبت و در زاویه‌های منفرجه، ضرب داخلی منفی است.

۹ در کدام حالت حاصل ضرب عددی بردار غیرصفر a در مجموع دو بردار غیرصفر X و Y صفر نمی‌باشد؟

- ۱) بردار X قرینه‌ی بردار Y ۲) بردار a فقط بر یکی از دو بردار X یا Y عمود
۳) سه بردار دو به دو عمود بر هم ۴) بردار a بر صفحه‌ی دو بردار X و Y عمود

$$a \cdot (X + Y) = a \cdot X + a \cdot Y$$

واضح است اگر بردار a فقط بر یکی از دو بردار X یا Y عمود باشد یکی از دو عبارت $a \cdot X$ یا $a \cdot Y$ صفر می‌شود و دیگری غیرصفر، بنابراین جمع آن‌ها هیچ‌گاه صفر نخواهد شد اما اگر بردار a بر هر دو بردار X و Y عمود باشد یا X قرینه‌ی Y باشد، حاصل صفر می‌شود. درباره‌ی گزینه‌ی (۴) باید بدانیم که اگر خطی بر یک صفحه عمود باشد بر تمام خط‌های آن صفحه عمود است یعنی چون a بر صفحه‌ی دو بردار X و Y عمود است پس بر X و Y نیز عمود است.

۱۰ دو بردار با تصویرهای $a = (1, \alpha)$ و $b = (2, -1)$ مفروض‌اند. به‌ازای کدام مقدار α بردارهای $a + b$ و $a - b$ بر هم عمودند؟

- ۱) $-1, 0, 6$ ۲) $-1, 0, 6$ ۳) $1, 0, 4$ ۴) $1, 0, 6$

$$a + b \perp a - b \Rightarrow (a + b) \cdot (a - b) = 0 \Rightarrow |a|^2 - |b|^2 = 0 \Rightarrow |a|^2 = |b|^2$$

$$\Rightarrow 1 + (\alpha + 1)^2 + (2\alpha)^2 = 4 + 0 + 1 \Rightarrow (\alpha + 1)^2 + (2\alpha)^2 = 4 \xrightarrow{\text{با توجه به گزینه‌ها}} \alpha = -1, 0, 6$$

۱۱ اگر بردار $a = (m, 2, -1)$ و $|b| = \sqrt{41}$ و دو بردار $a + b$ و $a - b$ عمود بر هم باشند، مقدار مثبت m کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) تمرین ۱۳ ص ۲۵ کتاب درسی

داخل ۸۵ | پاسخ: ۴

$$a + b \perp a - b \Rightarrow (a - b) \cdot (a + b) = 0 \Rightarrow |a|^2 - |b|^2 = 0 \Rightarrow |a|^2 = |b|^2 \Rightarrow m^2 + 4 + 1 = 41 \Rightarrow m = \pm 6$$

جمع بندی: بعد از تحقیقات زیار معلوم شده که طراحان کنکور تا این‌جای فصل، از اتفادهای خیلی فوششان می‌آید، پس هتماً آن‌ها را مطالعه کنید.

۷ در جریان باشید ...

۱ طرفین هر تساوی برداری را می‌توان در یک بردار دلخواه ضرب داخلی کرد:

$$a = b \Rightarrow a \cdot c = b \cdot c$$

۲ در ضرب داخلی بردارها، قانون حذف همواره برقرار نیست:

$$a \cdot c = b \cdot c \not\Rightarrow a = b$$

تذکره! از $a \cdot c = b \cdot c$ می‌توان سه نتیجه گرفت که یکی از آن‌ها $a = b$ است و کلاً به شرح زیر است:

$$a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a \cdot c - b \cdot c = 0 \Rightarrow (a - b) \cdot c = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - b = \vec{0} \Rightarrow a = b \\ (a - b) \perp c \\ c = \vec{0} \end{cases}$$

۱۲ اگر a و b و c سه بردار غیرصفر باشند و زاویه‌ی بین b و c برابر 30° باشد، از تساوی $a \cdot b = a \cdot c$ کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

- ۱) $b = c$ ۲) $a \parallel b - c$ ۳) $a \perp (b - c)$ ۴) $a = b - c$

a ، b و c که غیرصفرند و چون زاویه‌ی بین b و c برابر 30° است، پس $b \neq c$ ، بنابراین طبق درسنامه می‌توان گفت: $a \perp (b - c)$.

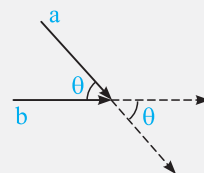
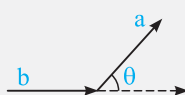
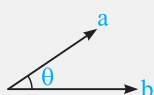
تمرین کتاب درسی | پاسخ: ۳

۸ زاویه‌ی دو بردار

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|}$$

اگر a و b دو بردار باشند و زاویه‌ی بین آن‌ها θ باشد، آن‌گاه همیشه θ زاویه‌ای است در بازه‌ی $[0, \pi]$ ، که از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید:

توجه! زاویه‌ی بین دو بردار، زاویه‌ای است که دو بردار هم ابتدا با هم می‌سازند، به این شکل‌ها به ذره خیره شو و خوب نگاه کن ...



۱۳ اگر $a = 2i + 3j + k$ و $b = i - j + k$ باشد، آن‌گاه کسینوس زاویه‌ی بین دو بردار $a - b$ و b کدام است؟

مثال ۳ ص ۱۰ و مثال ۶ ص ۲۳ کتاب درسی

$$-\sqrt{\frac{5}{17}} \quad (۲)$$

$$-\sqrt{\frac{3}{17}} \quad (۱)$$

$$\sqrt{\frac{5}{17}} \quad (۴)$$

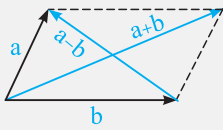
$$\sqrt{\frac{3}{17}} \quad (۳)$$

داخل ۸۱ | پاسخ: ۱

$$\begin{cases} a - b = i + 4j = (1, 4, 0) \\ b = i - j + k = (1, -1, 1) \end{cases} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1 \times 1 + 4 \times (-1) + 0 \times 1}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 0^2} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{-3}{\sqrt{17} \times \sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{3}{17}}$$

۹ | در جریان باش ...

اگر a و b دو ضلع مجاور یک متوازی‌الاضلاع باشند، بردارهای $a+b$ و $a-b$ قطرهای این متوازی‌الاضلاع هستند.



دو نتیجه!

- ۱ اگر $a+b$ و $a-b$ بر هم عمود باشند، آن‌گاه متوازی‌الاضلاع تبدیل به لوزی می‌شود، پس $|a|=|b|$.
- ۲ اگر $|a+b|=|a-b|$ آن‌گاه متوازی‌الاضلاع تبدیل به مستطیل می‌شود، پس $a \perp b$.

۱۴ | بر روی دو بردار $a = 3i + 3j$ و $b = i - j - 2k$ متوازی‌الاضلاعی ساخته شده است. کسینوس زاویه‌ی بین دو قطر این

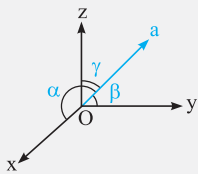
متوازی‌الاضلاع کدام است؟ شکل ۹ من ۱۰ و شکل ۱۱ من ۱۱ و مثال ۵ من ۲۱ کتاب درسی

خارج ۹۲ | پاسخ: ۳

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

$$\begin{cases} a+b = (4, 2, -2) \\ a-b = (2, 4, 2) \end{cases} \Rightarrow \cos \theta = \frac{(a+b) \cdot (a-b)}{|a+b| |a-b|} = \frac{4 \times 2 + 2 \times 4 - 2 \times 2}{\sqrt{16+4+4} \times \sqrt{4+16+4}} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

۱۰ | زاویه‌ی بردار با محورهای مختصات



اگر بردار $a = (x, y, z)$ با محورهای مختصات زاویه‌های α و β و γ بسازد، آن‌گاه داریم:

$$\cos \alpha = \frac{x}{|a|} \quad \cos \beta = \frac{y}{|a|} \quad \cos \gamma = \frac{z}{|a|}$$

این کسینوس‌ها را کسینوس‌های هادی بردار a می‌نامند.

۱۵ | اگر بردار $a = (1, -1, m)$ با محور z زاویه‌ی 45° بسازد، کسینوس زاویه‌ی این بردار با محور x ها کدام است؟

(۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos \gamma = \frac{z}{|a|} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{m}{\sqrt{1+1+m^2}} \Rightarrow \frac{m}{\sqrt{m^2+2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m = \sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{|a|} = \frac{1}{\sqrt{1+1+2}} = \frac{1}{2}$$

۱۱ | رابطه‌ی بین کسینوس‌های هادی

اگر زاویه‌ی بردار a با محورهای مختصات α و β و γ باشد، آن‌گاه رابطه‌ی زیر بین کسینوس‌های آن‌ها برقرار است:

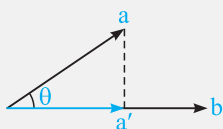
$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

۱۶ | چند بردار وجود دارد که با محورهای مختصات زوایای $\frac{\pi}{4}$ ، $\frac{3\pi}{4}$ ، $\frac{\pi}{3}$ بسازد؟

- (۱) یک
- (۲) دو
- (۳) بی‌شمار
- (۴) وجود ندارد

چنین برداری وجود ندارد. $\Rightarrow \cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{3\pi}{4} + \cos^2 \frac{\pi}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \neq 1$

۱۲ | تصویر قائم بردار a بر بردار b



اگر a' تصویر قائم بردار a بر بردار b باشد آن‌گاه a' همیشه مضربی از b به شکل زیر است:

$$a' = \left(\frac{a \cdot b}{|b|^2} \right) b$$

تمرین ۳ من ۲۴ کتاب درسی

۱۷ تصویر قائم بردار $\vec{a} = (0, -3, 6)$ روی امتداد بردار $\vec{b} = (2, -1, -2)$ کدام است؟

- (۱) $(2, -1, -2)$ (۲) $(-2, 1, 2)$ (۳) $(4, -2, 4)$ (۴) $(2, 3, -1)$

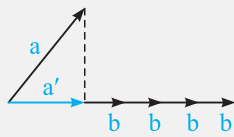
$$a' = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b} = \left(\frac{0 + 3 - 12}{4 + 1 + 4} \right) \vec{b} = -b \Rightarrow (2)$$

۱۸ اگر $\vec{a} = (1, -3, 4)$ ، $\vec{b} = (3, -4, 2)$ و $\vec{c} = (-1, 1, 4)$ سه بردار باشند، تصویر قائم \vec{a} بر امتداد $\vec{b} + \vec{c}$ کدام است؟

- (۱) $5(2, -3, 6)$ (۲) $\frac{5}{7}(2, -3, 6)$ (۳) $7(2, -3, 6)$ (۴) $\frac{1}{7}(2, -3, 6)$

$$\begin{cases} \vec{a} = (1, -3, 4) \\ \vec{x} = \vec{b} + \vec{c} = (2, -3, 6) \end{cases} \Rightarrow a' = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^2} \right) \vec{x} = \left(\frac{2 + 9 + 24}{4 + 9 + 36} \right) \vec{x} = \frac{35}{49} \vec{x} = \frac{5}{7} \vec{x} \Rightarrow (2)$$

۱۳ قد دراز الکی...



این بردار b رو می‌گیم دیلاق!!! نیگاش کن ... وقتی بردار a را روی بردار b تصویر می‌کنیم اندازه‌ی بردار b (یعنی دراز یا کوتاه بودن آن) هیچ تأثیری در محاسبه‌ی a' ندارد و فقط راستای b مهم است، یعنی اگر بردار b را در هر عدد مثبت یا منفی ضرب کنید جواب تصویر تغییر نخواهد کرد.

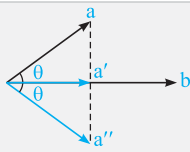
۱۹ تصویر قائم بردار $\vec{a} = (4, 3, 2)$ بر امتداد برداری که با قسمت مثبت محورهای مختصات زوایای حاده‌ی مساوی می‌سازد، کدام است؟

- (۱) $(1, 1, 1)$ (۲) $(2, 2, 2)$ (۳) $(3, 3, 3)$ (۴) $(4, 4, 4)$

چون اندازه‌ی بردار b اهمیت ندارد، بنابراین برداری که با هر سه محور، زوایای حاده‌ی مساوی می‌سازد را می‌توان هر بردار با سه مؤلفه‌ی یکسان فرض کرد. مثلاً $b = (1, 1, 1)$. در این صورت داریم:

$$a' = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b} = \left(\frac{4 + 3 + 2}{1 + 1 + 1} \right) \vec{b} = 3\vec{b} = (3, 3, 3)$$

۱۴ قرینه‌ی بردار a نسبت به بردار b



اگر a'' قرینه‌ی بردار a نسبت به بردار b باشد و a' تصویر a بر بردار b ، در این صورت برای پیدا کردن a'' ابتدا باید a' را پیدا کرد و سپس:

$$a'' = 2a' - a$$

۲۰ قرینه‌ی بردار $\vec{a} = \vec{j} + 2\vec{k}$ نسبت به راستای $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$ کدام است؟

- (۱) $-\vec{i} + 2\vec{k}$ (۲) $-\vec{3i} - \vec{j}$ (۳) $\vec{2i} - \vec{j} + \vec{k}$ (۴) $\vec{3i} + \vec{j}$

$$a' = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b} = \left(\frac{0 + 0 - 2}{1 + 1} \right) \vec{b} = -\frac{1}{2}(\vec{i} - \vec{k}) \Rightarrow a'' = 2a' - a = -\vec{3i} - \vec{j}$$

مثال ۳ من ۲۱ کتاب درسی

۲۱ قرینه‌ی بردار $\vec{a} = (-2, 0, 1)$ نسبت به امتداد بردار $\vec{b} = (1, 2, -1)$ کدام بردار است؟

- (۱) $(1, -2, 0)$ (۲) $(-1, 2, 0)$ (۳) $(0, 2, 1)$ (۴) $(0, -2, 1)$

$$a' = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b} = \left(\frac{-2 + 0 - 1}{1 + 4 + 1} \right) \vec{b} = -\frac{1}{2} \vec{b} \Rightarrow a'' = 2a' - a = -\vec{b} - a = (1, -2, 0)$$

۱۵ تشخیص a'' از روی گزینه‌ها

برای تشخیص a'' از روی گزینه‌ها می‌توان به شکل زیر هم عمل کرد.

- ۱ باید $|a| = |a''|$ باشد.
- ۲ باید $a + a''$ مضرری از b باشد.

مثال ۳ ص ۲۱ کتاب درسی

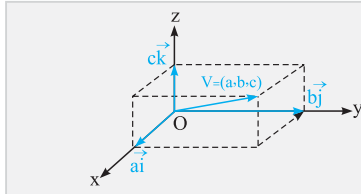
۲۲ قرینه بردار $a = (1, -3, 2)$ نسبت به امتداد بردار $b = (1, 2, 0)$ کدام بردار است؟

- (۱) $(-3, -1, -2)$ (۲) $(-1, -2, 2)$ (۳) $(0, 5, -2)$ (۴) $(1, 7, -2)$

اندازه بردار a برابر است با: $|a| = \sqrt{1+9+4}$ که تنها گزینه‌ی (۱) با آن هم‌اندازه است. البته اگر $a + a''$ را به دست آوریم $(-2, -4, 0)$ به دست می‌آید که $-2b$ است.

خارج ۸۸ پاسخ: ۱

۱۶ حرف آخر در قرینه



نه تنها a'' قرینه‌ی a نسبت به b است بلکه a هم قرینه‌ی a'' نسبت به b است. **تذکر:** وقتی گفته می‌شود برداری به تصویر $(1, -2, 3)$ یعنی برداری که تصویر آن روی محور x ها ۱ و روی محور y ها -2 و روی محور z ها برابر ۳ است. یعنی مؤلفه‌های هر برداری معرف اندازه‌ی جبری تصویر بردار بر محورهای مختصات هستند.

۲۳ قرینه بردار a نسبت به امتداد بردار $2i - j + k$ برداری به تصویر $(1, -2, 5)$ است. تصاویر بردار a کدام است؟

- (۱) $(-1, 5, 2)$ (۲) $(2, 5, -1)$ (۳) $(5, -1, -2)$ (۴) $(5, -2, 1)$

اول بردارها را نام‌گذاری کنیم همان طوری که همیشه صدایشان می‌کردیم، $b = 2i - j + k$ و $a'' = (1, -2, 5)$.

$$a' = \left(\frac{a'' \cdot b}{|b|^2} \right) b = \left(\frac{2+2+5}{4+1+1} \right) b = \frac{3}{2} b$$

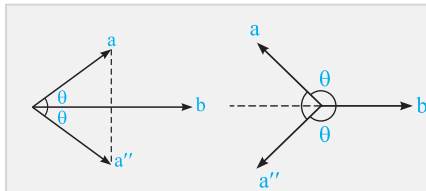
$$a = 2a' - a'' = 3b - a'' = (6, -3, 3) - (1, -2, 5) = (5, -1, -2)$$

توجه: چون همه‌ی گزینه‌ها هم‌اندازه بودند برای تشخیص از روی گزینه‌ها باید تک‌تک آن‌ها را با a'' جمع می‌کردیم تا ببینیم کدام مضرب b می‌شود.

خارج ۸۹ پاسخ: ۳

جمع بندی: در سؤالاتی که قرینه‌ی بردار a نسبت به بردار b فواسته می‌شود فقط یک گزینه هست که هم با a هم‌اندازه است و هم حاصل جمعش با a مضرب b می‌شود. پس اگر مجبور شدید، دست به دامن گزینه‌ها شوید.

۱۷ زاویه‌ی a و a''



همان‌طور که ملاحظه می‌کنید زاویه‌ی بین a و a'' برابر است با 2θ که θ زاویه‌ی بین a و b است. اما اگر زاویه‌ی a و b منفرجه باشد 2θ را از 360° کم می‌کنیم. **توجه:** زاویه‌ی بین هر دو برداری همواره از 180° کم‌تر است. اصلاً آقا زاویه‌ی بالای 180° توی بردار نداریم اصلاً زاویه باید کمتر از 180° باشه ...

۲۴ قرینه بردار $a = i - j$ نسبت به بردار $b = 2i - j + 2k$ را c می‌نامیم. ضرب داخلی دو بردار a و c کدام است؟

مثال ۳ ص ۲۱ و شکل ۲ ص ۱۶ کتاب درسی

- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) صفر (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{4}{3}$

$$\begin{cases} a \cdot c = |a| |c| \cos 2\theta = |a| |a| \cos 2\theta = |a|^2 \cos 2\theta \\ \cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \frac{2+1+0}{\sqrt{1+1} \times \sqrt{4+1+4}} = \frac{3}{\sqrt{2} \times 3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ \Rightarrow a \cdot c = |a|^2 \times \cos 90^\circ = 0 \end{cases}$$

خارج ۹۰ پاسخ: ۲

۱۸ بردار جهت (بردار یکه)

$$e_a = \frac{1}{|a|} a = \left(\frac{x}{|a|}, \frac{y}{|a|}, \frac{z}{|a|} \right)$$

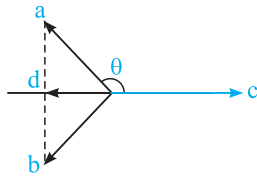
اگر $a = (x, y, z)$ یک بردار غیر صفر در فضا باشد آن‌گاه بردار جهت آن به صورت مقابل به دست می‌آید: **تذکر:** e_a را می‌توان به صورت $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ هم بیان کرد.

۲۵ دو بردار $a = 3i - 6j + 2k$ و $b = -7i + 4j + k$ نسبت به بردار c قرینه‌ی یک دیگریند. اگر زاویه‌ی بین دو بردار a و c در بازه‌ی $(\frac{\pi}{3}, \pi)$ باشد، آن‌گاه بردار جهت c کدام است؟

شکل ۲ ص ۱۶ و فرمول ص ۱۲ کتاب درسی

$$\frac{1}{3}(-2i + 2j + k) \quad (۴) \quad \frac{1}{3}(2i - 2j + k) \quad (۳) \quad \frac{1}{3}(-2i - j + 2k) \quad (۲) \quad \frac{1}{3}(2i + j - 2k) \quad (۱)$$

این تست از لحاظ ساختاری دچار اشکال است، چون a و b نسبت به c قرینه‌ی هم هستند، پس باید $|a| = |b|$ باشد که نیست ولی ما فرض می‌کنیم که هست. در این صورت راه حل به صورت زیر ادامه پیدا می‌کند:



$$b = 2d - a \Rightarrow d = \frac{a+b}{2} = (-2, -1, 2) \Rightarrow e_d = \frac{1}{|d|}d = \frac{1}{3}(-2, -1, 2)$$

$$e_c = -e_d \Rightarrow e_c = -\frac{1}{3}(-2, -1, 2) = \frac{1}{3}(2, 1, -2) \Rightarrow (۱)$$

به هر حال گزینه‌ی (۱) با چشم‌پوشی از اشتباه طراح به دست آمده ولی این تست جواب درست ندارد!!!

۱۹ نامسای کوشی - شوارتز

اگر کوشی با شوارتز خودشانو گشتن فهمیدن $|\cos \theta| \leq 1$ و در فرمول زاویه $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|}$ باید صورت از مخرج کم‌تر باشه و برای هر دو بردار دلخواه یک نامسای عجیب به دست آوردن. عجب!!! عجب!!!

$$|a \cdot b| \leq |a||b|$$

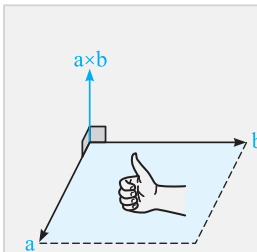
۲۶ اگر $a = (x, y, z)$ و $b = (2, 1, 2)$ و حاصل ضرب داخلی آن‌ها برابر ۶ باشد، کم‌ترین مقدار برای $x^2 + y^2 + z^2$ کدام است؟

$$\frac{2}{3} \quad (۲) \quad ۴ \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2} \quad (۴) \quad ۲ \quad (۳)$$

$$|a \cdot b| \leq |a||b| \Rightarrow 6 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \times \sqrt{4 + 1 + 4} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 4$$

۲۰ ضرب خارجی



اگر $a = (x, y, z)$ و $b = (x', y', z')$ دو بردار باشند، آن‌گاه حاصل ضرب خارجی آن‌ها یک بردار است که عمود بر هر دو بردار a و b (و در واقع عمود بر صفحه‌ی شامل a و b) می‌باشد و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$a = (x, y, z) \Rightarrow a \times b = \begin{pmatrix} |y & z| \\ |y' & z'| \\ -|x & z| \\ -|x' & z'| \\ |x & y| \\ |x' & y'| \end{pmatrix}$$

برای محاسبه‌ی ضرب خارجی، دو بردار را زیر هم می‌نویسیم. برای به دست آوردن مؤلفه‌ی x ، x های دو بردار را نادیده می‌گیریم و دترمینان ماتریس 2×2 ی باقی‌مانده را به دست می‌آوریم و ...

فقط در محاسبه‌ی مؤلفه‌ی y ، چون هرکی دوست داری منفی یادت نره. (توی کلاس‌ها ما به بچه‌ها می‌گیم دترمینان وسطی را برعکس بگیرد یعنی حاصل ضرب قطر فرعی را منهای قطر اصلی کنید. اصلاً به لحظه فکر کن چلمن شدی).

جهت ضرب خارجی: جهت بردار ضرب خارجی هم بر اساس قانون دست راست به دست می‌آید. یعنی اگر کف دست راست را در جهت a باز کرده و در جهت b ببندیم، انگشت شست جهت $a \times b$ را نشان می‌دهد.

۲۷ اگر $a = 2i + 2j$ و $b = i + 2k$ باشد، اندازه‌ی بردار $a \times b$ کدام است؟

$$۷ \quad (۴) \quad ۶ \quad (۳) \quad ۵ \quad (۲) \quad ۴ \quad (۱)$$

$$\begin{cases} a = (2, 2, 0) \\ b = (1, 0, 2) \end{cases} \Rightarrow a \times b = (4 - 0, 0 - 4, 0 - 2) = (4, -4, -2) \Rightarrow |a \times b| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$$

چلمن شدی

۲۱ ضرب خارجی i و j و k



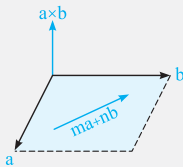
برای ضرب خارجی بردارهای i و j و k نیازی به زیر هم نوشتن آنها نیست و می‌توانید از دایره‌ی ساعت‌گرد مقابل استفاده کنید. اگر ضرب دو بردار در جهت دایره بود جواب، سومی است و اگر در خلاف جهت دایره بود جواب، قرینه‌ی سومی است.

تمرین ۶ ص ۳۳ کتاب درسی

۲۸ اگر i و j و k بردارهای واحد باشند، حاصل $(i \times (i \times j)) \times k$ کدام است؟

- داخل ۹۱ پاسخ: ۴
- (۱) صفر (۲) $-k$ (۳) j (۴) $-i$
- $((i \times (i \times j)) \times k) = -j \times k = -i$

۲۲ در جریان باش ...



اگر برداری بر یک صفحه عمود باشد بر تمام بردارهای آن صفحه عمود است. حال اگر بردارهای سازنده‌ی صفحه، a و b باشند، بردارهای درون آن صفحه به شکل $m\vec{a} + n\vec{b}$ هستند، بنابراین $a \times b$ بر همه‌ی آنها عمود است.

۲۹ دو بردار $a = (1, 2, -1)$ و $b = (2, 4, m)$ مفروض‌اند. به‌ازای کدام مقادیر m ، حاصل $(a + b) \cdot (a \times b)$ برابر صفر است؟

شکل ۱ ص ۲۹ و تقشیه‌ی ۱ ص ۲۸ کتاب درسی

- داخل ۸۸ پاسخ: ۴
- (۱) فقط -2 (۲) فقط ± 2 (۳) هیچ مقدار m (۴) هر عدد حقیقی m
- بردار $a \times b$ همواره بر $a + b$ عمود است، بنابراین ضرب داخلی آنها همیشه صفر است و ربطی به m ندارد، یعنی $m \in \mathbb{R}$.

۲۳ اندازه‌ی ضرب خارجی

اگر زاویه‌ی بین دو بردار a و b برابر θ باشد آن‌گاه اندازه‌ی ضرب خارجی از رابطه‌ی مقابل قابل محاسبه است:

$$|a \times b| = |a| |b| \sin \theta$$

۳۰ بردارهای a و b مفروض‌اند. اگر $|a| = 3$ و $|b| = 26$ و $|a \times b| = 72$ باشد حاصل $a \cdot b$ کدام است؟

- تمرین کتاب درسی پاسخ: ۳
- (۱) 30 (۲) -30 (۳) ± 30 (۴) ± 15
- $|a \times b| = |a| |b| \sin \theta \Rightarrow 72 = 26 \times 3 \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{12}{13} \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{5}{13}$
- $\Rightarrow a \cdot b = |a| |b| \cos \theta = 3 \times 26 \times (\pm \frac{5}{13}) = \pm 30$

۲۴ ویژگی‌های ضرب خارجی و مقایسه با ضرب داخلی

۱ $a \times a = \vec{0}$	$a \cdot a = a ^2$
۲ $a \times b = -b \times a$	$a \cdot b = b \cdot a$
۳ $a \times (b \pm c) = a \times b \pm a \times c$	$a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$
۴ $a \parallel b \Rightarrow a \times b = \vec{0}$	$a \perp b \Rightarrow a \cdot b = 0$

۳۱ زاویه‌ی بین دو بردار a و b کم‌تر از 90° است و $|a| = 6$ و $|b| = 5$ و $|a \times (a + b)| = 18$ ، حاصل $a \cdot (a + b)$ کدام است؟

تمرین ۵ ص ۳۲ کتاب درسی

- داخل ۸۵ پاسخ: ۳
- (۱) 54 (۲) 56 (۳) 60 (۴) 64
- $|a \times (a + b)| = |a \times a + a \times b| = |a \times b| = |a| |b| \sin \theta \Rightarrow 18 = 6 \times 5 \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{3}{5}$
- $\Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos \theta = \begin{cases} \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{cases}$ (غ.ق.ق. $(\theta < 90^\circ)$)
- $\Rightarrow a \cdot (a + b) = a \cdot a + a \cdot b = |a|^2 + |a| |b| \cos \theta = 6^2 + 6 \times 5 \times \frac{4}{5} = 60$

۳۲ اگر a و b و c سه بردار باشند و $a + b + c = \vec{0}$ ، حاصل $a \times b$ با کدام گزینه برابر است؟

- (۱) $c \times b$ (۲) $a \times c$ (۳) $b \times a$ (۴) $c \times a$

اگر $a + b + c = \vec{0}$ باشد، می‌توان ثابت کرد که $a \times b = b \times c = c \times a$ زیرا:

$$\begin{cases} a + b + c = \vec{0} \Rightarrow b = -a - c \\ a \times b = a \times (-a - c) = \underbrace{-a \times a}_0 - a \times c = -a \times c = c \times a \end{cases}$$

۳۳ بردارهای ناموازی و غیر صفر a و b و c و d در تساوی‌های $a \times c = b \times d$ و $a \times b = c \times d$ صادق‌اند. کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

- (۱) بردارهای $a - d$ و $b + c$ موازی‌اند. (۲) بردارهای $a - d$ و $b - c$ موازی‌اند.
(۳) بردارهای $a + d$ و $b + c$ عمودند. (۴) اندازه‌ی دو بردار $a + b$ و $c + d$ یکسان است.

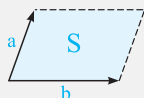
همان‌طور که گفتیم ضرب خارجی دو بردار موازی، بردار صفر است بنابراین:

$$\begin{cases} a \times b = c \times d \\ a \times c = b \times d \end{cases} \Rightarrow a \times b - a \times c = c \times d - b \times d \Rightarrow a \times (b - c) = (c - b) \times d$$

$$\Rightarrow a \times (b - c) - (c - b) \times d = \vec{0} \Rightarrow a \times (b - c) - d \times (b - c) = \vec{0} \Rightarrow (a - d) \times (b - c) = \vec{0} \Rightarrow a - d \parallel b - c$$

توجه: اگر طرفین دو تساوی را با هم جمع کنیم می‌توان نتیجه گرفت که $a + d \parallel b + c$.

۲۵ مساحت متوازی الاضلاع



اگر a و b دو بردار باشند، مساحت متوازی‌الاضلاعی که روی بردارهای a و b ساخته می‌شود برابر است با:

$$S = |a \times b|$$

یادداشت: اگر به جای متوازی‌الاضلاع، هر چهارضلعی دیگری دادند مساحت نصف حاصل ضرب خارجی دو قطر آن است (ولی بعیده تو کنکور بیاد تا حالا که نیومده فقط گفتیم در جریان باشید آخه در جریان بودن مهمه ...)

۳۴ اگر $a = (1, -2, 3)$ و $b = (2, 0, 1)$ باشد، مساحت متوازی‌الاضلاع تولید شده توسط دو بردار $a + 3b$ و $2a + 5b$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $3\sqrt{5}$ (۴) $5\sqrt{3}$

$$S = |(2a + 5b) \times (a + 3b)| = |\underbrace{2a \times a}_0 + 6a \times b + 5b \times a + \underbrace{15b \times b}_0| = |6a \times b - 5a \times b| = |a \times b|$$

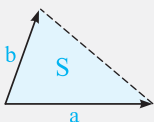
$$\begin{cases} a = (1, -2, 3) \\ b = (2, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow a \times b = (-2, 5, 4) \Rightarrow S = |a \times b| = \sqrt{4 + 25 + 16} = 3\sqrt{5}$$

۳۵ بردار $a = i + 2j - 4k$ به صورت ترکیبی از بردارهای واحد محورهای مختصات داده شده است. مساحت متوازی‌الاضلاعی که بر روی دو بردار a و $a \times k$ ساخته شود، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{14}$ (۲) $\sqrt{96}$ (۳) $\sqrt{102}$ (۴) $\sqrt{105}$

$$\begin{cases} a = (1, 2, -4) \\ k = (0, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \times k = (2, -1, 0) \\ a = (1, 2, -4) \end{cases} \Rightarrow (a \times k) \times a = (4, 8, 5) \Rightarrow S = |(a \times k) \times a| = \sqrt{16 + 64 + 25} = \sqrt{105}$$

۲۶ مساحت مثلث



$$S = \frac{1}{2} |a \times b|$$

اگر a و b دو بردار باشند آن‌گاه مساحت مثلث تولید شده [یا گاهی می‌گویند مساحت تولید شده و اسمی از مثلث نمی‌برند!!!] توسط این دو بردار برابر است با:

در جریان باش، اگر به جای بردار، سه نقطه‌ی A و B و C داده شد اول با آن‌ها دو بردار دلخواه، مثلاً \vec{AB} و \vec{AC} را می‌سازیم بعد آن‌ها را ضرب خارجی می‌کنیم و ...

۳۶ دو بردار a و b به طول‌های ۳ و ۴ واحد با یکدیگر زاویه‌ی 30° می‌سازند. مساحت مثلثی که بر روی دو بردار $a - 2b$ و $3a + 2b$ تولید می‌شود، کدام است؟

مثال ۵ ص ۳۰ کتاب درسی

- ۴۸ (۴) ۴۲ (۳) ۳۶ (۲) ۲۴ (۱)

$$S = \frac{1}{2} |(3a + 2b) \times (a - 2b)| = \frac{1}{2} |3a \times a - 6a \times b + 2b \times a - 4b \times b|$$

$$= \frac{1}{2} |-6a \times b - 2a \times b| = 4 |a \times b| = 4 |a| |b| \sin 30^\circ = 4 \times 3 \times 4 \times \frac{1}{2} = 24$$

۳۷ دو بردار a و b با طول‌های ۵ و ۸ واحد مفروض‌اند و مساحت تولید شده توسط این دو بردار ۱۲ واحد مربع است. اگر زاویه‌ی بین دو بردار کم‌تر از قائمه باشد، اندازه‌ی تفاضل دو بردار کدام است؟

مثال ۵ ص ۳۰ و قضیه‌ی ۲ ص ۲۰ کتاب درسی

- ۷/۵ (۴) ۶/۵ (۳) ۶ (۲) ۵ (۱)

منظور از مساحت تولید شده همان مساحت مثلث تولید شده است. بنابراین:

$$S = \frac{1}{2} |a \times b| \Rightarrow 12 = \frac{1}{2} |a| |b| \sin \theta \Rightarrow 24 = 5 \times 8 \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{3}{5} \xrightarrow{\theta < 90^\circ} \cos \theta = \frac{4}{5}$$

$$|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2|a||b| \cos \theta = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \frac{4}{5} = 25 \Rightarrow |a - b| = 5$$

دقت کنید که برای به دست آوردن $\cos \theta$ از روی $\sin \theta$ یا برعکس از رابطه‌ی $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۵ ص ۲۰ کتاب درسی

۳۸ مساحت مثلث ABC با سه رأس $A(1, -2, 3)$ و $B(2, 0, 1)$ و $C(-3, 2, 1)$ کدام است؟

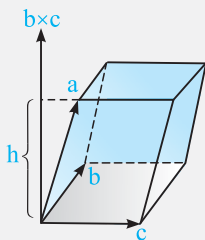
- $\sqrt{42}$ (۲) $\sqrt{35}$ (۱)
 $\sqrt{65}$ (۴) $\sqrt{54}$ (۳)

با این سه نقطه باید دو بردار تشکیل دهیم و فرقی نمی‌کند که \vec{AB} و \vec{AC} باشد یا مثلاً \vec{AB} و \vec{BC} و ...

$$\begin{cases} \vec{AB} = B - A = (1, 2, -2) \\ \vec{AC} = C - A = (-4, 4, -2) \end{cases} \Rightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} = (4, 10, 12)$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 100 + 144} = \frac{1}{2} \sqrt{260} = \sqrt{65}$$

۲۷ ضرب مختلط



۱ محاسبه‌ی ضرب مختلط

اگر $a = (a_1, a_2, a_3)$ و $b = (b_1, b_2, b_3)$ و $c = (c_1, c_2, c_3)$ سه بردار در فضا باشند، آن‌گاه ضرب مختلط آن‌ها که با نماد $a \cdot (b \times c)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$a \cdot (b \times c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

۲ محاسبه‌ی حجم متوازی السطوح

حجم متوازی‌السطوحی که، بردارهای a و b و c سه یال هم رأس آن باشند برابر است با:

$V = |a \cdot (b \times c)|$

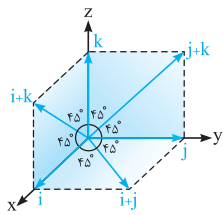
$V = Sh$

نکته: حجم متوازی‌السطوح برابر است با مساحت قاعده \times ارتفاع یعنی:

۳۹ حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار واقع بر نیمسازهای سه صفحهی XOY و YOZ و XOZ و به ترتیب با طولهای $\sqrt{2}$ و $2\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ با مؤلفه‌های غیرمنفی ساخته می‌شود، چند واحد مکعب است؟

مثال ۶ ص ۳۲ کتاب درسی

- ۱۲ (۱) ۱۶ (۲) $8\sqrt{2}$ (۳) $12\sqrt{2}$ (۴)



ابتدا باید ببینیم نیمسازهای سه صفحهی XOY و YOZ و XOZ با مؤلفه‌های غیرمنفی چه بردارهایی هستند به شکل خیره شوید همین جور مات و مبهوت زل بزنید. خُب نیمسازهای این سه صفحه با مؤلفه‌های غیرمنفی، $i + j$ و $j + k$ و $i + k$ است اما بدبختی این است که طول همه‌ی آنها $\sqrt{2}$ است ولی مسأله گفته با طولهای $\sqrt{2}$ و $2\sqrt{2}$ و $3\sqrt{2}$ خب حالا چه کار کنیم!!؟ کاری نداره اگر یکی را در ۲ و یکی را در ۳ ضرب کنیم درست می‌شود یعنی بردارهای سازنده‌ی متوازی السطوح عبارتند از:

$$\begin{cases} a = i + j \\ b = 2j + 2k \\ c = 3i + 3k \end{cases} \Rightarrow V = |a \cdot (b \times c)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times (6) - 1 \times (-6) + 0 \times (\dots) = 12$$

۴۰ بر روی سه بردار $a = 2i - j$ و $b = j + 3k$ و $c = 4i - k$ یک متوازی السطوح ساخته شده است. اگر قاعده‌ی این متوازی السطوح را بردارهای a و b تشکیل دهند، ارتفاع متوازی السطوح کدام است؟

تمرین ۱ ص ۳۲ کتاب درسی

- ۱ (۱) $1/5$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴)

$$V = |a \cdot (b \times c)| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = |2(-1) + 1(-12)| = |-14| = 14$$

$$\begin{cases} a = (2, -1, 0) \\ b = (0, 1, 3) \end{cases} \Rightarrow a \times b = (-3, -6, 2) \Rightarrow S_{\text{قاعده}} = |a \times b| = \sqrt{9 + 36 + 4} = 7 \xrightarrow{V = S \cdot h} 14 = 7 \times h \Rightarrow h = 2$$

راه دیگر این بود که بردار c را روی $a \times b$ تصویر کنیم. به شکل روی جلد کتاب درسی دقت کنید.

۴۱ اگر سه بردار به تصاویر $(2, 0, 1)$ ، $(0, 2, 4)$ و $(2, 1, c)$ یال‌های یک مکعب مستطیل باشند، حجم آن کدام است؟

تمرین ۲ ص ۲۴ و مثال ۶ ص ۳۲ کتاب درسی

- ۳۲ (۱) ۴۲ (۳) ۳۶ (۲) ۴۵ (۴)

یال‌های مکعب مستطیل دو به دو بر هم عمودند بنابراین ضرب داخلی دوبه‌دوی این بردارها باید صفر شود.

$$\begin{cases} \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 \\ \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_3 = 0 \\ \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2b + 2a + 4 = 0 \\ 4 + a + c = 0 \\ 2b + 2 + 4c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -2 \\ a + c = -4 \\ b + 2c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -1 \\ b = 1 \\ a = -3 \end{cases}$$

$$|\vec{V}_1| = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{V}_2| = \sqrt{1 + 4 + 16} = \sqrt{21} \Rightarrow V = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| |\vec{V}_3| = \sqrt{14} \times \sqrt{21} \times \sqrt{6} = 42$$

$$|\vec{V}_3| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

۴۲ اگر a, b, c و d چهار بردار دلخواه باشند، آنگاه سه بردار $a \times d$ ، $b \times d$ و $c \times d$ نسبت به هم چگونه‌اند؟

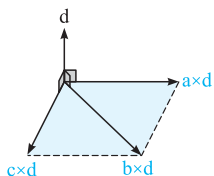
تمرین ۱۳ ص ۳۳ کتاب درسی

(۱) موازی یک صفحه‌اند.

(۲) موازی هم‌اند.

(۳) دو به دو عمود برهم‌اند.

(۴) مجموع آن‌ها بردار صفر است.



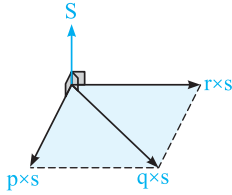
از آن جایی که حاصل ضرب خارجی دو بردار، بر هر دو بردار عمود است، پس $a \times d$ ، $b \times d$ و $c \times d$ همگی بر بردار d عمود می‌باشند (مطابق شکل)، پس همگی درون یک صفحه قرار دارند یا به تعبیری دیگر، موازی یک صفحه‌اند.

۲۸ شرط هم صفحه بودن

شرط لازم و کافی برای این که سه بردار a و b و c در یک صفحه باشند، این است که حجم متوازی‌السطوح بنا شده بر آن‌ها صفر شود یعنی به عبارت دیگر:

$$a \cdot (b \times c) = 0$$

۴۳ فرض کنید p, q, r, s بردارهایی دلخواه باشند، حاصل $[(p \times s) \cdot (q \times s) \times (r \times s)]$ کدام است؟



- (۱) $p \times (q \times r)$ (۲) صفر
 (۲) $(q \times r) \times p$ (۳) $p \cdot (q \times s)$
 بردارهای $p \times s$ و $q \times s$ و $r \times s$ همگی بر بردار s عمودند بنابراین موازی یک صفحه هستند و ضرب مختلط آن‌ها صفر است.

۴۴ به ازای کدام مقدار a چهار نقطه‌ی $A(1, 0, 0), B(1, -1, -3), C(2, 3, 2), D(a, 9, 5)$ در یک صفحه قرار دارند؟

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵

باید بردارهای \vec{AB} و \vec{AC} و \vec{AD} در یک صفحه باشند یعنی ضرب مختلط آن‌ها صفر باشد.

$$AB \cdot (AC \times AD) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ a-1 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 0 \cdot (18 - 27) + 1(6 - 3a + 3) - 2(9 - 3a + 3) = 0 \Rightarrow (9 - 3a) - 2(12 - 3a) = 0 \Rightarrow -15 + 3a = 0 \Rightarrow a = 5$$

۴۵ اگر $a \times b = a \times c$ ، $b \neq c$ ، آن‌گاه کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ ($a \neq 0$)

- (۱) a عمود بر $b - c$ (۲) a موازی $b - c$ (۳) $a \cdot (b \times c) = 0$ (۴) a و b و c در یک صفحه‌اند.

$$a \times b = a \times c \Rightarrow a \times b - a \times c = 0 \Rightarrow a \times (b - c) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a \parallel b - c \\ b - c = 0 \Rightarrow b = c \end{cases}$$

با توجه به فرضیات سؤال $a \parallel b - c$

وقتی a با بردار $b - c$ موازی است، یعنی سه بردار درون یک صفحه قرار دارند و ضرب مختلط آن‌ها صفر است.

۴۶ فرض کنید a و b و c بردارهایی غیر صفر بوده و $(a \times b) + (b \times c) + (c \times a) = 0$ باشند، کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

- (۱) هر سه موازی هم (۲) $a \cdot (b \times c) = 0$ (۳) $a + b + c = 0$ (۴) $a \times (b \times c) = 0$

طرفین تساوی را در بردار a ، ضرب داخلی می‌کنیم:

$$a \cdot (a \times b) + a \cdot (b \times c) + a \cdot (c \times a) = 0 \Rightarrow a \cdot (b \times c) = 0$$

۴۷ بردارهای a و b و c با شرط $(a - c) \times b = a \times c$ مفروض‌اند، کدام نتیجه‌گیری الزاماً درست است؟

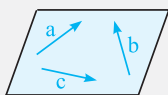
- (۱) $a \cdot (b \cdot c) = 0$ (۲) $a \cdot (b \times c) = 0$ (۳) $a \times (b \times c) = 0$ (۴) هر سه بردار موازی‌اند.

می‌دونی که؟! در ضرب مختلط اگر دو بردار از سه بردار یکسان باشند هم‌صفحه می‌شوند و ضرب مختلط آن‌ها صفر است یعنی: $a \cdot (a \times b) = 0$

$$(a - c) \times b = a \times c \Rightarrow a \times b - c \times b = a \times c \Rightarrow a \times b + b \times c = a \times c$$

$$\Rightarrow a \times b + b \times c + c \times a = 0 \xrightarrow{\text{طرفین را در } a \text{ ضرب داخلی می‌کنیم}} \underbrace{a \cdot (a \times b)}_{\text{همواره صفر}} + a \cdot (b \times c) + \underbrace{a \cdot (c \times a)}_{\text{همواره صفر}} = 0 \Rightarrow a \cdot (b \times c) = 0$$

۲۹ نوشتن یک بردار برحسب ترکیب خطی دو بردار دیگر



اگر سه بردار در یک صفحه باشند (ضرب مختلط آن‌ها صفر باشد) هر کدام از آن‌ها را می‌توان برحسب ترکیب خطی از دو بردار دیگر نوشت:

$$a \cdot (b \times c) = 0 \Leftrightarrow a = mb + nc$$

۴۸ به ازای کدام مقدار m بردار $a = (1, 2, m)$ را می توان به صورت مجموع دو بردار در راستاهای $V_1 = (0, -1, 2)$ و $V_2 = (2, 3, -1)$ نوشت؟

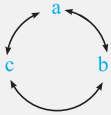
۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $-\frac{3}{2}$

برای این که بتوان a را برحسب مجموع دو بردار در راستای \vec{V}_1 و \vec{V}_2 نوشت باید a و V_1 و V_2 هم صفحه باشند یعنی ضرب مختلط آنها صفر باشد:

$$a \cdot (V_1 \times V_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 1(1-6) - 2(0-4) + m(0+2) = 0 \Rightarrow 2m = -3 \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

جمع بندی: به این هم صفحه بودن سه بردار فیلی دقت کنید، با قیافه های مختلف داره ظاهر می شه.

۳۰ جابه جایی دوری



ضرب مختلط سه بردار دارای یک ویژگی جالب به اسم جابه جایی دوری است ببین:

$$a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)$$

۴۹ اگر a و b و c سه بردار غیر صفر و غیر واقع در یک صفحه باشند، مقدار کدام گزینه با سایرین فرق دارد؟

۱) $a \cdot (c \times b)$ ۲) $a \cdot (b \times c)$ ۳) $b \cdot (a \times c)$ ۴) $(a \times c) \cdot b$

گزینه های ۳ و ۴ کاملاً یکسان هستند چون ضرب داخلی خاصیت جابه جایی دارد، بنابراین یکی از دو گزینه ۱ یا ۲ با آنها یکسان است:

$$(a \times c) \cdot b = b \cdot (a \times c) = a \cdot (c \times b) \Rightarrow 4 \text{ و } 3 \text{ و } 1 \text{ گزینه های}$$

۵۰ اگر a ، b و c سه بردار غیر صفر باشند، خلاصه شده ی $((b+c) \times (c-a)) \cdot (2a-b)$ کدام است؟

۱) $a \cdot (b \times c)$ ۲) $2a \cdot (b \times c)$ ۳) $3a \cdot (b \times c)$ ۴) صفر

$$\begin{aligned} (2a-b) \cdot ((b+c) \times (c-a)) &= (2a-b) \cdot (b \times c - b \times a + \underbrace{c \times c}_0 - c \times a) \\ &= 2a \cdot (b \times c) - 2a \cdot (b \times a) - 2a \cdot (c \times a) - b \cdot (b \times c) + b \cdot (b \times a) + b \cdot (c \times a) \\ &= 2a \cdot (b \times c) + b \cdot (c \times a) = 2a \cdot (b \times c) + a \cdot (b \times c) = 3a \cdot (b \times c) \end{aligned}$$

جمع بندی: ساده سازی ضرب قاری و داخلی دو ترکیب قطعی در کنگور زیار دیده شده، در این موارد فیلی با موصله تک تک بردارها را در هم ضرب کنید. با رعایت دو نکته ی زیر همه چیز ساده می شود.

۱ در ضرب داخلی $a \cdot a = |a|^2$ و در ضرب قاری $a \times a = 0$ می باشد.

۲ در ضرب داخلی $a \cdot b = b \cdot a$ اما در ضرب قاری $a \times b = -b \times a$ می باشد.

۳۱ ضرب مضاعف

اگر a ، b و c سه بردار در فضا باشند $a \times (b \times c)$ را ضرب مضاعف آنها می نامند که در تمرین ۱۰ صفحه ی ۳۳ کتاب درسی آورده شده است. می توان ثابت کرد:

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - c(a \cdot b)$$

تذکره: $a \times (b \times c)$ موازی صفحه ی شامل b و c می باشد پس همواره یک ترکیب خطی از b و c است. برای به خاطر سپردن حاصل $a \times (b \times c)$ بردارهای داخل پرانتز را به صورت تفریق بنویسید، ضریب هر کدام از بردارها، ضرب داخلی دوتای دیگر است.

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - c(a \cdot b)$$

تذکره: اگر ضرب مضاعف را به صورت $(a \times b) \times c$ بدهند ابتدا یک منفی در جلوی عبارت می گذاریم و سپس به ترتیب بالا عمل می کنیم:

$$(a \times b) \times c = -c \times (a \times b) = -(b \cdot c)a - b(a \cdot c) = \dots$$

۵۱ اگر a و b و c بردارهایی دلخواه باشند، حاصل $a \times (b \times c) + b \times (c \times a)$ کدام است؟

(۱) $c \times (a \times b)$ (۲) $\vec{0}$ (۳) $(b \times a) \times c$ (۴) $(a \times b) \times c$

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) = [(a \cdot c)b - c(a \cdot b)] + [(a \cdot b)c - a(b \cdot c)]$$

$$= (a \cdot c)b - a(b \cdot c) = c \times (b \times a) = -(b \times a) \times c = (a \times b) \times c$$

۵۲ اگر $a = i - 2j + 3k$ و $b = 3j + 2k$ و $c = 4i + j - 2k$ باشند، تصویر بردار $(a \times b) \times c$ روی محور x ها کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴ تمرین ۱۰ من ۳۳ کتاب درسی

عبارت $a \times (b \times c)$ را هم می توان به تفاضل دو بردار تبدیل کرد و هم می توان به طور مستقیم حساب کرد:

$$\begin{cases} a = (1, -2, 3) \\ b = (0, 3, 2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \times b = (-4, -2, 3) \\ c = (4, 1, -2) \end{cases} \Rightarrow (a \times b) \times c = (1, 4, 4) \xrightarrow{\text{تصویر روی } OX} (1, 0, 0) \Rightarrow \text{تصویر روی محور } OX = 1$$

جمع بندی: تبدیلی نکنید و نگویید من تمام ضرب مضاعفها را به طور مستقیم حساب می کنم و نیازی به $(a \cdot c)b - c(a \cdot b)$ ندارم. شاید تست طوری طراحی شود که $a \cdot b$ و $a \cdot c$ و $b \cdot c$ را به شما برده و حاصل را بر حسب ترکیب فضا دو بردار بفواهد و یا همانند تست ۵۱ طراحی شود.

یادداشت



Blank lined area for writing notes.

۱- اگر $|a|=2$ و $|b|=4$ و $a+b+2c=\vec{0}$ باشد، حاصل $a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c$ کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۸ (۳) -۱۰ (۴) -۲۰

۲- اگر بردارهای $(1, -1, 2)$ و $(2, 0, 1)$ دو قطر یک متوازی الاضلاع باشد، مساحت آن کدام است؟

- (۱) $\sqrt{56}$ (۲) $\frac{\sqrt{14}}{2}$ (۳) $\sqrt{14}$ (۴) $\sqrt{7}$

۳- اگر $\vec{0} = 3a - 2b + c$ باشد، کدام گزینه با بقیه متفاوت است؟

- (۱) $3c \times a$ (۲) $2c \times b$ (۳) $-6a \times b$ (۴) $-3b \times c$

۴- اگر $|a|=|b|$ و $|a+b|=6$ و $|a-b|=2\sqrt{3}$ باشند، مساحت تولید شده توسط بردارهای a و b کدام است؟

- (۱) $3\sqrt{3}$ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴) $6\sqrt{3}$

۵- اگر حجم متوازی السطوح بنا شده بر سه بردار $b+c$ و $a-b$ و $2a-c$ برابر ۱۵ باشد، حجم متوازی السطوح بنا شده بر سه بردار a و b و c کدام است؟

تمرین ۶ صفحه ۳۳ و تمرین ۱ صفحه ۳۲ و مشابه داخل ۹۰ و خارج ۸۴

- (۱) ۵ (۲) $7/5$ (۳) ۱۵ (۴) ۳

۶- اگر $a \cdot b = 2$ و $a \cdot c = 3$ و $b \cdot c = -4$ باشد، حاصل $(a \times b) \times c$ کدام است؟

تمرین ۱۰ صفحه ۳۳ و مشابه داخل ۹۲

- (۱) $3b + 2a$ (۲) $3b - 2a$ (۳) $3b - 4a$ (۴) $3b + 4a$

۷- بردارهای $a = 3i - j + 2k$ و $b = 2i + j + k$ مفروضند. کدام بردار بر بردارهای $8a + 7b$ و $11a - 9b$ عمود است؟

تمرین ۲ صفحه ۳۲ و مشابه داخل ۸۸

- (۱) $(3, 1, 6)$ (۲) $(-1, 2, -6)$

- (۳) $(12, -6, -2)$ (۴) $(5, -3)$

۸- اگر $a = (-3, 1, 1)$ و $b = (1, 0, -1)$ و اندازه‌ی تصویر بردار c روی بردار $a \times b$ برابر $\sqrt{3}$ باشد، حجم متوازی السطوح بنا شده بر سه بردار a ، b و c کدام است؟

عکس روی پلک کتاب و اثبات صفحه ۳۱ و مشابه خارج ۸۹

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $4\sqrt{3}$ (۳) $3\sqrt{3}$ (۴) ۱۲

۱ ۱ ۲ ۳ ۴

۳ ۱ ۲ ۳ ۴

۵ ۱ ۲ ۳ ۴

۷ ۱ ۲ ۳ ۴

۲ ۱ ۲ ۳ ۴

۴ ۱ ۲ ۳ ۴

۶ ۱ ۲ ۳ ۴

۸ ۱ ۲ ۳ ۴

محل انجام محاسبات



سؤالات | آزمون | دوره‌های ۲ | فصل ۱

۱- بردارهای $a = i + j$ و $b = j + k$ و $c = i + k$ ، قطره‌های وجوه یک متوازی‌السطوح هستند، حجم متوازی‌السطوح کدام است؟

- مشابه قارج ۸۴
- ۱ (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{3}$ (۳) ۲ (۴)

۲- بردار $a = 2i - j + k$ به صورت ترکیبی از بردارهای واحد محورهای مختصات داده شده است. مساحت مثلث بنا شده بر روی دو

مشابه قارج ۸۶ بردار \vec{a} و \vec{j} و $\vec{a} \times \vec{j}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{30}}{2}$ (۳) $\sqrt{15}$ (۴) $\sqrt{30}$

۳- اگر a برداری با اندازه‌ی ۲ که با هر دو محور ox و oy زاویه‌ی 60° می‌سازد و داشته باشیم $a \times b + b \times c + c \times a = 2i + 4j$ ، حجم

مشابه قارج ۹۱ متوازی‌السطوح بنا شده بر بردارهای a ، b و c کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۴- قرینه‌ی بردار $a = \sqrt{3}i + k$ نسبت به بردار $b = -i$ را بردار c می‌نامیم، مقدار $a \cdot c$ کدام است؟

مشابه قارج ۹۰

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۵- اگر زاویه‌ی دو بردار a و b بزرگ‌تر از 90° و هر دو بردار یک‌ه باشند و مساحت تولید شده توسط آن‌ها برابر $\frac{1}{3}$ باشد، اندازه‌ی

مشابه داخل ۸۱ بردار $2a + b$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{41}}{5}$ (۲) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ (۳) $\sqrt{\frac{41}{5}}$ (۴) $\frac{3}{5}$

۶- اگر اندازه‌ی بردارهای a ، b و c به ترتیب ۲، ۴ و زاویه‌ی بین دو بردار b و c برابر 150° و بردار a عمود بر صفحه‌ی دو بردار b

مشابه داخل ۹۰ و c باشد، حاصل $|a \cdot (b \times (2a - c))|$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $8\sqrt{3}$ (۳) ۸ (۴) ۴

۷- دو بردار با تساویر $a = (2, 3, -1)$ و $b = (m, -2, 4)$ مفروض‌اند، به ازای کدام مقادیر m حاصل عبارت $(2a - 3b) \cdot (a \times b)$

مشابه داخل ۸۸ برابر صفر است؟

- (۱) فقط ± 2 (۲) فقط -2 (۳) هیچ مقدار m (۴) هر عدد حقیقی m

۸- اگر دو بردار $a = (-2, 0, 1)$ و $b = (1, -2, 0)$ نسبت به راستای c قرینه‌ی هم باشند، و زاویه‌ی دو بردار a و c در بازه‌ی $(\frac{\pi}{3}, \pi)$

مشابه داخل ۹۰ باشد، آنگاه بردار جهت c کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$ (۳) $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -2, 1)$

۱	۱	۲	۳	۴	۳	۱	۲	۳	۴	۵	۱	۲	۳	۴	۷	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴	۴	۱	۲	۳	۴	۶	۱	۲	۳	۴	۸	۱	۲	۳	۴





۳ ۱ $|a + b + c|^2$ در $a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c$ ظاهر می‌شود، پس:

$$a + b + 2c = 0 \Rightarrow a + b + c = -c \Rightarrow |a + b + c| = |c| \Rightarrow |a + b + c|^2 = |c|^2$$

$$\Rightarrow |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + 2(a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c) = |c|^2 \Rightarrow 4 + 16 + 2(x) = 0 \Rightarrow x = -10$$

۲ ۲ مساحت متوازی‌الاضلاع نباشده روی دو بردار a و b برابر $S = |a \times b|$ می‌باشد، از طرفی می‌دانیم قطرهای این متوازی‌الاضلاع $a + b$ و $a - b$ هستند، پس:

$$|(a + b) \times (a - b)| = \left| \underbrace{a \times a}_0 - a \times b + b \times a - \underbrace{b \times b}_0 \right| = |-a \times b - a \times b| = |-2a \times b| = 2|a \times b| = 2S$$

بنابراین مساحت متوازی‌الاضلاع نصف اندازه‌ی حاصل ضرب خارجی دو قطر آن است.

$$2S = |(1, -1, 2) \times (2, 0, 1)| = |(-1, 3, 2)| = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14} \Rightarrow S = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

۴ ۳ می‌دانیم اگر $x + y + z = 0$ باشد، آن‌گاه $x \times y = y \times z = z \times x$ ، پس:

$$\underbrace{3a}_{x} - \underbrace{2b}_{y} + \underbrace{c}_{z} = 0 \Rightarrow 3a \times (-2b) = (-2b) \times c = c \times (3a) \Rightarrow -6a \times b = -2b \times c = 3c \times a$$

۱ ۴ مساحت تولیدشده توسط بردارهای a و b یعنی مساحت مثلث تولیدشده توسط این دو بردار و برابر است با: $S = \frac{1}{2} |a \times b|$ ، پس نیاز به $|a|$ و $|b|$ و $\sin \theta$ داریم.

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2) \xrightarrow{|a|=|b|} 36 + 12 = 2(|a|^2 + |a|^2) \Rightarrow |a|^2 = 12 \Rightarrow |a| = |b| = \sqrt{12}$$

$$|a + b|^2 - |a - b|^2 = 4a \cdot b \Rightarrow 36 - 12 = 4a \cdot b \Rightarrow a \cdot b = 6$$

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta \Rightarrow 6 = \sqrt{12} \times \sqrt{12} \times \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$S = \frac{1}{2} |a \times b| = \frac{1}{2} |a| |b| \sin \theta = \frac{1}{2} \times \sqrt{12} \times \sqrt{12} \times \sin 60^\circ = 3\sqrt{3}$$

۱ ۵ $(b + c) \cdot ((2a - b) \times (c - a)) = 15 \Rightarrow (b + c) \cdot (2a \times c - 2a \times a - b \times c + b \times a) = 15$

$$\Rightarrow b \cdot (2a \times c) - b \cdot (b \times c) + b \cdot (b \times a) + c \cdot (2a \times c) - c \cdot (b \times c) + c \cdot (b \times a) = 15 \Rightarrow 2b \cdot (a \times c) + b \cdot (a \times c) = 3b \cdot (a \times c) = 15$$

$$\Rightarrow b \cdot (a \times c) = 5$$

حجم متوازی‌السطوح نباشده بر c, b, a

۱ ۶ $(a \times b) \times c = -c \times (a \times b) = c \times (b \times a) = (a \cdot c)b - a(b \cdot c) = 3b + 4a$

۲ ۷ بردار $a \times b$ یا $b \times a$ بر بردارهای a و b و هر برداری که در صفحه‌ی آن دو بردار است عمود است. پس به جای محاسبه‌ی $(11a - 9b) \times (8a + 7b)$ همان $a \times b$ را به دست می‌آوریم. حتماً خودش یا مضرب غیر صفری از آن در گزینه‌ها یافت می‌شود.

$$\begin{cases} a(3, -1, 2) \\ b(2, 1, 1) \end{cases} \Rightarrow a \times b = (-3, 1, 5) \xrightarrow{\times(-2)} (6, -2, -10)$$

۳ ۸ تصویر بردار c روی $a \times b$ مطابق شکل روی جلد کتاب درسی ارتفاع متوازی‌السطوح است و حجم متوازی‌السطوح برابر است با مساحت قاعده \times ارتفاع. حال با ضرب خارجی a و b و محاسبه‌ی اندازه‌ی آن، مساحت قاعده را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} a = (-3, 1, 1) \\ b = (1, 0, -1) \end{cases} \xrightarrow{\times} a \times b = (-1, -2, -1) \Rightarrow S = |a \times b| = \sqrt{6}$$

$$V = Sh = \sqrt{6} \times \sqrt{3} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

فصل ۱

دوره‌های ۲

آزمون

پاسخ

در واقع متوازی‌السطوح بر روی بردارهای i و j و k بنا شده است و حجم آن برابر است با:

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

۱ ۱

$$\begin{cases} \mathbf{a} = (2, -1, 1) \\ \mathbf{j} = (0, 1, 0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{a} \times \mathbf{j} = (-1, 0, 2) \\ \mathbf{a} = (2, -1, 1) \end{cases} \xrightarrow{\times} (\mathbf{a} \times \mathbf{j}) \times \mathbf{a} = (2, 5, 1) \Rightarrow S = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{j})| = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 25 + 1} = \frac{\sqrt{30}}{2}$$

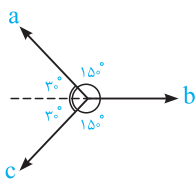
۲ ۲

طرفین تساوی را در بردار \mathbf{a} ضرب داخلی می‌کنیم:

۳ ۳

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} + 4\mathbf{a} \cdot \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 2|\mathbf{a}||\mathbf{i}|\cos\alpha + 4|\mathbf{a}||\mathbf{j}|\cos\beta$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 4 \times 2 \times \frac{1}{2} \Rightarrow V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = 6$$



با توجه به این که $|\mathbf{a}| = |\mathbf{c}|$ می‌باشد، بنابراین کافی است زاویه‌ی بین \mathbf{a} و \mathbf{c} را پیدا کنیم. ابتدا

۳ ۴

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{-\sqrt{3}}{2 \times 1} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = 150^\circ$$

زاویه‌ی \mathbf{a} و \mathbf{b} را پیدا می‌کنیم:

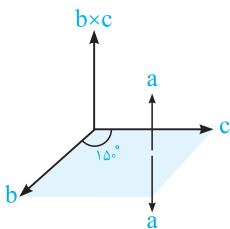
$$\Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = |\mathbf{a}||\mathbf{c}|\cos 60^\circ = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

مساحت تولیدشده توسط دو بردار همان مساحت مثلث تولیدشده است بنابراین:

۲ ۵

$$S = \frac{1}{2} |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{1}{2} |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |2\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = 4|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 4|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta = 4 + 1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2} \Rightarrow |2\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$



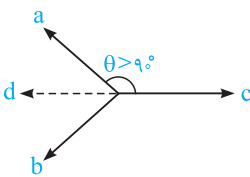
ابتدا عبارت را ساده می‌کنیم:

۳ ۶

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times (2\mathbf{b} - \mathbf{c}))| &= |\mathbf{a} \cdot (2\underbrace{\mathbf{b} \times \mathbf{b}}_0 - \mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |-\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})| \\ &= |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|\sin 150^\circ \cos 0^\circ = 2 \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} \times 1 = 8 \end{aligned}$$

بردار $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ همواره بر $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ عمود است، پس حاصل ضرب داخلی آن‌ها همواره صفر است و به m هیچ ربطی ندارد، یعنی به ازای هر عدد حقیقی m ، حاصل عبارت برابر صفر است.

۴ ۷



$$d \text{ راستای } = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2} = \left(-\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right) \approx (-1, -2, 1)$$

۳ ۸

$$\Rightarrow \mathbf{e}_d = \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, -2, 1) \xrightarrow{\mathbf{e}_d = -\mathbf{e}_c} \Rightarrow \mathbf{e}_c = \frac{1}{\sqrt{6}} (1, 2, -1)$$

یادداشت





www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)