



**RIAZISARA**

سایت ویژه ریاضیات [www.riazisara.ir](http://www.riazisara.ir)

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی  
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور  
نمونه سوالات امتحانات ریاضی  
نرم افزارهای ریاضیات**

...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

<https://t.me/riazisara>



ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



همه‌هنگی کلاس خصوصی آنلاین ریاضی ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲

# کیمیای ماهان

## مسئله به یک مسئله

فصل اول تابع

محقق: محمدرضا دهقانی گرجانی



## مقدمه مؤلف

این مجموعه شامل درسنامه‌ای کامل به همراه ۱۰۰ سؤال متنوع و حل شده از سؤالات امتحانات نهایی داخل و خارج از کشور به همراه سؤالات مفهومی و تألیفی از متن کتاب درسیه . تمام نکات لازم برای شما ارائه شده . این کتاب با توجه به رویکرد کتاب حسابان ۲ نوشته شده و سعی کردم کاستی های اونو پوشش بدم . از طرفی نحوه ی نوشتن پاسخ تشریحی ، برای امتحان نهایی هم ارائه شده تا به " اندازه بنویسی و نمره سوال رو کامل بگیری " . تدوین کتاب بطوریه که با استفاده از مفاهیم و سؤالات حل شده قادر به حل سؤالات بعدی باشی .

برای موفقیت در درس ریاضی باید از حل مثال‌ها و تمرین‌های کتاب درسی شروع کنید و به هیچ‌وجه از آن غافل نشوید سؤالات امتحانات نهایی و حتی کنکور به طور مستقیم از تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی طراحی می‌شن. آفت موفقیت شما حفظ کردن پاسخ تمریناته! تسلط بر مفاهیم مستلزم فهم درست درسه و اکتفا کردن به خواندن حل مسأله کارساز نیست، دقت کنید که حل هر سؤال برای شما کمکیه برای حل سؤالات جدیدتر و درک مفاهیم اساسی ریاضی از طریق حل مسئله . دقت به موارد زیر موفقیت شما را افزایش میده :

- ۱- بررسی موضوعات به صورت تشریحی و مفهومی و هم‌چنین توجه به کاربرد مفاهیم و تعاریف در حل مسئله .
  - ۲- یادگیری عمیق موضوعات با حوصله‌ی زیاد و اینکه روش های مختلف حل یه سوال رو یادگیری.
  - ۳- بررسی نمونه سؤالات حل شده و پس از آن حل تمرین ( البته به اعتقاد من مثال های حل شده کتاب رو هم باید اول سعی کنیم خودمون حل کنیم ) و در صورت نیافتن راه حل رجوع به پاسخ.
- خوبه بدونید ارزش ۵۰ تمرین که خودتون حل می کنید به مراتب بیش‌تر از خوندن و حفظ کردن ۱۰۰۰ تمرین حل شده است، چون مهم‌ترین قسمت یادگیری و کاربردی‌ترین آن برای حل مسأله ریاضی مثال‌ها و تمرین‌هایی است که خودتون به حل آن می‌پردازید.
- فرآیند یادگیری ریاضی تدریجیه و در صورت عدم تکرار و تداوم از یاد می‌ره ، بنابراین انتظار نداشته باشید در این درس در کوتاه مدت تسلط کامل پیدا کنید بلکه این مهم ، آهسته و پیوسته با تمرین مطالب آموخته شده اتفاق می‌افته . تسلط و مهارت در هر درسی نتیجه تلاش مستمر و پیگیریه .

لطف کنید کمی و کاستی این کتاب را از من دریغ نکنید تا مجموعه بهتری ارائه بشه از صبر و حوصله و دقت شما سپاس بی پایان دارم از مهندس آرش آریان بابت ویراستاری ودقت نظر تشکر می کنم .

کرج مهر ۱۴۰۰ : محمد صادق روحانی گلمجانی

## فهرست مطالب

### فصل اول: تابع

..... جعبه ابزار

..... اعمال روی توابع

..... تابع درجه ۳

..... توابع صعودی و نزولی

..... ترکیب توابع

..... تابع یک به یک

..... تابع وارون

..... بخش پذیری

- ۱)  $(a+b)^r = a^r + r ab + b^r$
- ۲)  $(a-b)^r = a^r - r ab + b^r$
- ۳)  $(a+b)^r + (a-b)^r = 2(a^r + b^r)$
- ۴)  $(a+b)^r - (a-b)^r = 2r ab$
- ۵)  $a^r + b^r = (a+b)^r - r ab$
- ۶)  $a^r + b^r = (a-b)^r + r ab$
- ۷)  $(a+b)(a-b) = a^r - b^r$
- ۸)  $a-b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$
- ۹)  $\forall n \in \mathbb{N} \quad (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 1$
- ۱۰)  $(a+b+c)^r = a^r + b^r + c^r + r(ab+ac+bc)$
- ۱۱)  $(a+b)^r = a^r + r a^r b + r a b^r + b^r$
- ۱۲)  $(a-b)^r = a^r - r a^r b + r a b^r - b^r$
- ۱۳)  $(a+b)^r = a^r + b^r + r ab(a+b)$
- ۱۴)  $(a-b)^r = a^r - b^r + r ab(a-b)$
- ۱۵)  $a^r + b^r = (a+b)(a^r - ab + b^r)$
- ۱۶)  $a^r - b^r = (a-b)(a^r + ab + b^r)$
- ۱۷)  $a^r + b^r = (a+b)^r - r ab(a+b)$
- ۱۸)  $a^r - b^r = (a-b)^r + r ab(a-b)$
- ۱۹)  $a-b = (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$
- ۲۰)  $a+b = (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})$
- ۲۱)  $(x+a)(a+b) = x^r + (a+b)x + ab$

$$\text{دایره: } S = \pi R^r, \quad P = 2\pi R$$

$$\text{کره: } S = 4\pi R^r, \quad V = \frac{4}{3}\pi R^r$$

$$\text{استوانه: } S = 2\pi R h + 2\pi R^r, \quad V = \pi R^r h$$

$$\text{مخروط: } L^r = R^r + h^r, \quad V = \frac{\pi}{3} R^r h$$

$$۱) |u| \geq 0, |u| = 0 \Rightarrow u = 0$$

$$۲) |u| = |-u| \Rightarrow |u - v| = |v - u|$$

$$۳) -|u| \leq u \leq |u|$$

$$۴) \sqrt[n]{u^n} = |u|$$

$$۵) |u| = K \xrightarrow{K > 0} u = \pm K$$

$$۶) |u| = |v| \longrightarrow u = \pm v$$

$$۷) K > 0 \Rightarrow \begin{cases} |u| \leq K \Leftrightarrow -K \leq u \leq K \\ |u| \geq K \Leftrightarrow u \geq K \vee u \leq -K \end{cases}$$

$$۸) \begin{cases} |uv| = |u||v| \\ \left| \frac{u}{v} \right| = \frac{|u|}{|v|} \end{cases} \quad v \neq 0$$

$$۱) [x] \leq x < [x] + 1$$

$$۲) x - 1 < [x] \leq x$$

$$۳) x \geq n \Rightarrow [x] \geq n$$

$$۴) 0 \leq x - [x] < 1$$

$$۵) [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$۶) \begin{cases} \text{if } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x] \\ \text{if } x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow [-x] = -[x] - 1 \end{cases}$$

$$۷) \forall x \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{Z} \Rightarrow [x + m] = [x] + m$$

$$۸) \forall x, y \in \mathbb{R} \quad [x + y] = \begin{cases} [x] + [y] & \text{if } 0 \leq p_1 + p_2 < 1 \\ [x] + [y] + 1 & \text{if } 1 \leq p_1 + p_2 < 2 \end{cases}$$

$$۹) \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left[ \frac{n}{r} \right] = \begin{cases} \frac{n}{r} & n = rk \\ \frac{n-1}{r} & n = rk + 1 \end{cases}$$

$$۱۰) \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left[ \frac{x}{n} \right] = \left[ \frac{[x]}{n} \right]$$

## فصل ۱ تابع

### ۱ اعمال جبری روی توابع

منظور از اعمال جبری روی توابع همان چهار عمل اصلی جمع و تفریق و ضرب و تقسیم دو تابع است. نکته‌ی مهم آن است که ابتدا باید دامنه‌ی هر دو تابع را تعیین و اشتراک این دو دامنه را مناسبه نمود و اعمال جبری را روی دامنه‌ی اشتراکی انجام دهیم.

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x)+g(x) & D_{f \pm g} &= D_f \cap D_g \\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x) & D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} \\ (f \times g)(x) &= f(x) \times g(x) \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0 \end{aligned}$$



در نمایش توابع به صورت زوج‌های مرتب، وقتی مولفه‌های اول دو زوج از دو تابع یکسان بودن برای اعمال جبری، زوج مرتبی می‌نویسیم و مولفه‌ی اول را قرار داده و برای تعیین مولفه‌ی دوم نگاه می‌کنیم چه عملی باید انجام داد. آن عمل را روی مولفه‌های دوم زوج‌های مرتب انجام می‌دهیم.

۱- اگر  $f = \{(-1, 1), (1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$  ،  $g = \{(-1, 0), (1, 2), (2, 4), (5, 3)\}$  دو تابع باشند: (شهریور ۹۵)  
مقدار  $(2f - g)(-1)$  را حساب کنید.

$$(2f - g)(-1) = 2(f(-1)) - g(-1) = 2(1) - 0 = 2$$

۲- دو تابع  $f = \{(1, 3), (-2, 5), (0, 7), (3, -4)\}$  ،  $g = \{(1, 4), (3, 1), (0, 0)\}$  را در نظر بگیرید.  $f \times g$  را به صورت زوج مرتب بنویسید. (شهریور ۹۳)

$$D_f \cap D_g = \{0, 1, 3\}$$

$$f \times g = \{(1, 3 \times 4), (0, 7 \times 0), (3, -4 \times 1)\} = \{(1, 12), (0, 0), (3, -4)\}$$

پاسخ:

$$\text{۳- با فرض: } \begin{cases} f(x) = \{(-4, 13), (-1, 7), (0, 5), (3, -5)\} \\ g(x) = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6)\} \end{cases} \text{ توابع زیر را حساب کنید.}$$

پاسخ:

$$۱) f + g = \{(-4, 13 + (-7)), (0, 5 + (-3)), (3, -5 + 0)\} = \{(-4, 6), (0, 2), (3, -5)\}$$

$$۲) f - g = \{(-4, 13 - (-7)), (0, 5 - (-3)), (3, -5 - 0)\} = \{(-4, 20), (0, 8), (3, -5)\}$$

$$۳) f \times g = \{(-4, 13 \times -7), (0, 5 \times -3), (3, -5 \times 0)\} = \{(-4, -91), (0, -15), (3, 0)\}$$

$$۴) \frac{f}{g} = \left\{ \left( -4, \frac{13}{-7} \right), \left( 0, \frac{5}{-3} \right) \right\}$$

۴- اگر  $f = \{(-1, 2), (1, 5), (3, -1), (0, 3)\}$  ،  $g = \{(-2, 5), (3, 2), (4, 6), (0, 2), (-1, 0)\}$  باشند، تابع  $\frac{f}{g}$  را با اعضاء بنویسید.

(خرداد ۹۰ خارج از کشور)

$$\frac{f}{g} = \left\{ \left( 3, \frac{-1}{2} \right), \left( 0, \frac{3}{2} \right) \right\} \text{ تابع در } x = -1 \text{ قابل تعریف نیست، زیرا مخرج کسر صفر می‌شود؛ } D_{\frac{f}{g}} = \{3, 0\}$$

پاسخ:

۵- توابع  $x > 0$ ,  $x = 0$ ,  $x < 0$  ,  $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$  ,  $g(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$  مفروض اند، تابع  $f \times g$  را تعیین کنید.

$$f(x) \times g(x) = \begin{cases} 1 \times x^3 = x^3 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 \times -1 = -1 & x < 0 \end{cases}$$

پاسخ:

۶- فرض کنید  $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 2 \\ x-1 & x < 2 \end{cases}$  ,  $g(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \geq 1 \\ x+1 & x < 1 \end{cases}$  باشد، ضابطه تابع  $y = (f+g)(x)$  را بنویسید.

پاسخ:

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

x	۱	۲
f(x)	x-1	2x
g(x)	x+1	2x-1

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x & x < 1 \\ 3x-2 & 1 \leq x < 2 \\ 4x-1 & x \geq 2 \end{cases}$$



این سوال رو با توضیحات داده شده میتونی حل کنی.

◀ اگر  $g = \{(1, 4), (2, 9), (-2, 3)\}$  ,  $f = \{(1, 2), (-2, 5), (0, 7), (3, -4)\}$  باشد، تابع  $\frac{f}{g} + \frac{g}{f}$  را تعیین کنید. (دی ماه ۹۳)

◀ دو تابع  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  ,  $g(x) = \sqrt{x+4}$  را در نظر بگیرید.

الف) مقدار  $(f+g)(0)$  را به دست آورید.

ب) دامنه  $\frac{f}{g}$  را تعیین کنید.



## اعمال روی توابع

بررسی تابع  $g(x) = f(x) + k$  (انتقال عرضی)

برای رسم نمودار  $g(x) = f(x) + k$  نمودار تابع  $f(x)$  را  $k$  واحد به بالا یا پایین در امتداد محور  $y$  انتقال می دهیم.

انتقال عرضی، برد تابع را جابجا می کند یعنی  $y$  ها تغییر می کنند ولی روی دامنه یا همان  $x$  ها تاثیری ندارد.

مثلاً تابع  $y = |x| + 2$  را بررسی می کنیم.



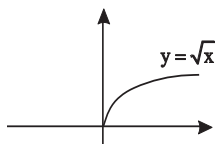
کلاً تابع  $y = |x|$  را  $2$  واحد در جهت مثبت محور  $y$  ها بالا بردیم. دامنه هیچ تغییری نمی کند ولی برد آن تغییر نموده است.

$$0 \leq |x| \rightarrow R_{|x|} = [0, +\infty) \Rightarrow 2 \leq |x| + 2 \rightarrow R_{|x|+2} = [2, +\infty)$$

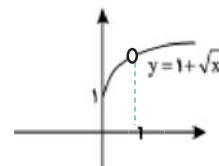
۷- به کمک نمودار تابع  $y = \sqrt{x}$  نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$  را رسم کنید.

$$f(x) = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x}$$

پاسخ: برای هر کاری به جز دامنه گرفتن، اول تا جای ممکن تابع را ساده کنید. (ثواب ۱)



حالا شکل  $\sqrt{x}$  رو به واحد می بریم بالا



اینجا بخاطر دامنه تابع کسری، تابع حفره داره چون  $x = 1$  ریشه مخرج است

۸- اگر  $f(x) = \{(1, 2), (-1, 3), (0, 0), (2, 4)\}$  باشد  $f(x) - 2$  را تعیین کنید.

$$f(x) - 2 = \{(1, 0), (-1, 1), (0, -2), (2, 2)\}$$

پاسخ: از تمام  $y$  ها  $2$  واحد کم می کنیم

بررسی تابع  $kf(x)$  ( انبساط و انقباض عرضی )

$$(kf)(x) = kf(x) \Rightarrow \begin{cases} D_{kf} = D_f \\ R_{kf} = \{ky \mid y \in R_f\} \end{cases}$$

برای رسم نمودار  $kf$  باید عرض هر نقطه‌ی  $f$  را در عدد  $k$  ضرب کنیم.

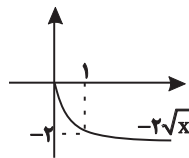
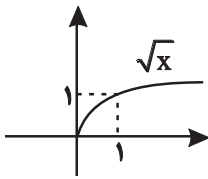
- |   |                |
|---|----------------|
| تابع $f$ در راستای محور $y$ ها با ضریب $k$ کشیده می‌شود.                              | $: k > 1$      |
| تابع $f$ در راستای محور $y$ ها با ضریب $k$ فشرده می‌شود.                              | $: 0 < k < 1$  |
| تابع ابتدا نسبت به محور $x$ ها آینه‌وار منعکس می‌شود، سپس با ضریب $ k $ فشرده می‌شود. | $: -1 < k < 0$ |
| تابع نسبت به محور $x$ ها منعکس می‌شود، سپس با ضریب $ k $ کشیده می‌شود.                | $: k = -1$     |
| تابع فقط نسبت به محور $x$ ها آینه‌وار منعکس می‌شود.                                   | $: k < -1$     |

اگر برد تابع  $y = f(x)$  بازه‌ی  $[m, n]$  باشد، آنگاه با فرض مثبت بودن  $k$  برد تابع  $y = kf(x)$  بازه‌ی  $[km, kn]$  می‌باشد و اگر  $k$  منفی باشد، برد تابع  $y = kf(x)$  بازه‌ی  $[kn, km]$  خواهد بود.

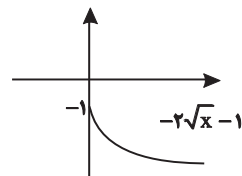
دامنه‌ی توابع  $f(x)$  ،  $kf(x)$  ،  $f(x)+k$  یکسان‌اند.

۹- ابتدا نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x}$  را رسم نموده، سپس با استفاده از آن نمودار تابع  $g(x) = -2f(x) - 1$  را رسم کنید. (خرداد ۹۲)

پاسخ:

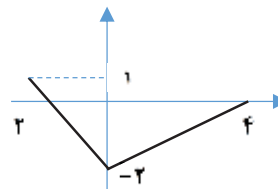
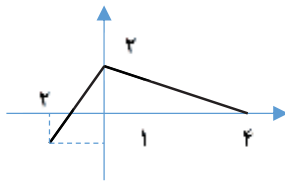


فقط  $y$  ها را  $-2$  برابر می‌کنیم



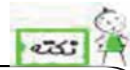
۱ واحد میره پایین

۱۰- نمودار تابع  $f(x)$  شکل مقابل است. نمودار تابع  $g(x) = -f(x)$  را با توجه به آن رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین نمایید.



$$D_f = [-2, 4] \Rightarrow D_{-f} = [-2, 4]$$

$$R_f = [-1, 2] \Rightarrow R_{-f} = [-2, 1]$$



بررسی تابع  $y = f(x-a)$  ( $a > 0$ )

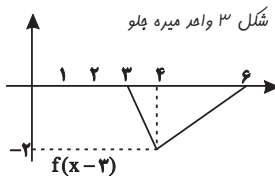
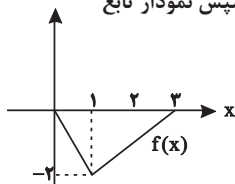
برای رسم منفی آن کافی است نمودار تابع  $f$  را  $a$  واحد در امتداد مثبت محور  $x$  ها انتقال دهیم.

بررسی تابع  $y = f(x+a)$  ( $a > 0$ )

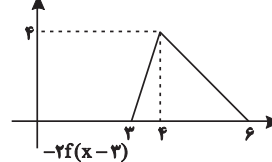
برای رسم منفی آن کافی است نمودار تابع  $f$  را  $a$  واحد در امتداد منفی محور  $x$  ها انتقال دهیم.

۱۱- در زیر نمودار تابع  $y = f(x)$  رسم شده است. با استفاده از انتقال ابتدا نمودار تابع  $y = f(x-3)$  را رسم کرده و سپس نمودار تابع

$y = -2f(x-3)$  را رسم کنید. (خرداد ۹۱)



شکل قرینه نسبت به محور  $x$ ها و دو واحد انبساط عرضی دارد.



پاسخ:

بررسی تابع  $g(x) = f(ax)$

در این توابع دامنه تغییر می‌کند، اما برد هیچ‌گونه تغییری نمی‌کند.

$$D_f = [c, d] \Rightarrow c \leq kx \leq d \Rightarrow \begin{cases} \text{if } a > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} \leq x \leq \frac{d}{a} \\ \text{if } a < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} \geq x \geq \frac{d}{a} \end{cases} \Rightarrow D_g = \left\{ \frac{x}{a} \mid x \in D_f \right\}$$

$$\begin{cases} g(x) = f(ax) \\ |a| < 1 \quad \text{کشیدگی} \\ |a| > 1 \quad \text{فشرده‌گی} \end{cases}$$

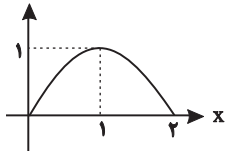


برای رسم  $f(ax+b)$  ابتدا انتقال عدد ثابت  $b$  را انجام می‌دهیم. سپس تغییرات مربوط به ضریب  $x$  را روی شکل اعمال می‌کنیم.

برای رسم نمودار  $f(ax)$  اگر  $(0 < a < 1)$  باشد نمودار تابع  $f(x)$  را در راستای محور  $x$  ها با ضریب  $\frac{1}{a}$  منبسط می‌کنیم. طول‌ها  $\frac{1}{a}$  برابر می‌شوند.

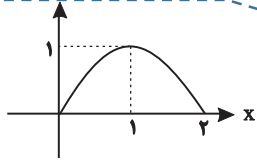
اگر  $(a > 1)$  نمودار تابع  $f(x)$  در راستای محور  $x$  ها با ضریب  $\frac{1}{a}$  منقبض می‌شود. طول‌ها  $\frac{1}{a}$  برابر می‌شوند.

۱۲- نمودار تابع معین  $y = f(x)$  در شکل روبه‌رو داده شده است. نمودار تابع  $g(x) = f(-2x)$  را رسم کنید، سپس دامنه و برد آن را تعیین کنید.

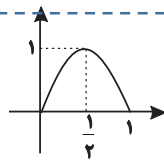


پاسخ:

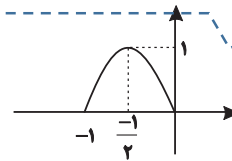
طرفین نامساوی رو بر  $-2$  تقسیم میکنیم  
 $-1 \leq x \leq 0$   
 حالا باید  $-2x$  تو دامنه  $f$  باشه  
 $0 \leq -2x \leq 2$   
 در تابع  $f$ ،  $x$  باید در بازه  $0 \leq x \leq 2$  باشه



→



→

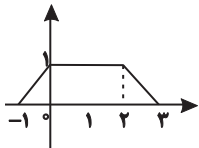


کشیدگی طولی به قاطر ضریب ۲ و اماری  $x$  داخل پراگتت

تقارن طولی به قاطر منفی داخل پراگتت

$D_g = [-1, 0]$  ,  $R_g = [0, 1]$

۱۳- اگر نمودار  $y = f(x)$  شکل روبه‌رو باشد، نمودار تابع  $g(x) = 2f(-x) - 1$  را رسم کنید و دامنه و برد  $g(x)$  را به دست آورید.

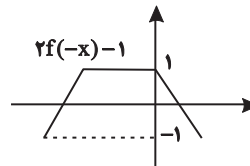
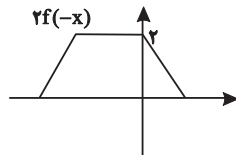
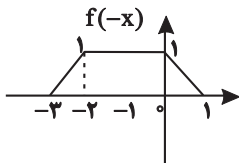


پاسخ:

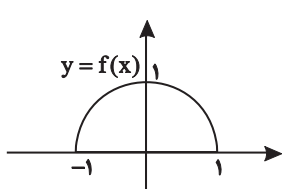
یعنی  $x$  های دامنه را قرینه کن.

$y$  ها رو دو برابر کن (کشیدگی عرضی)

یک واحد ببر پایین



$D_f = [-1, 3]$  ,  $D_g = [-3, 1]$  ,  $0 \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f(-x) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2f(-x) \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2f(-x) - 1 \leq 1$

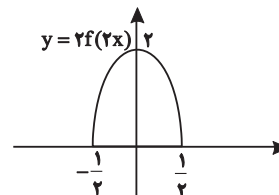
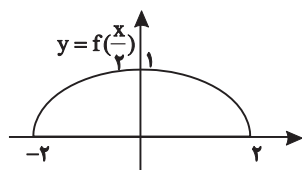


۱۴- نمودار  $f(x)$  شکل مقابل است. نمودار توابع  $f(\frac{x}{2})$  و  $g(x) = 2f(2x)$  را رسم کنید.

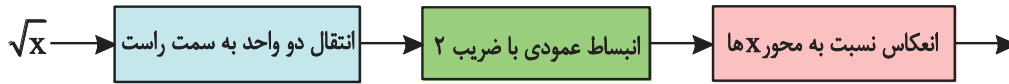
پاسخ:

کشیدگی طولی به قاطر ضریب  $\frac{1}{2}$  و اماری  $x$

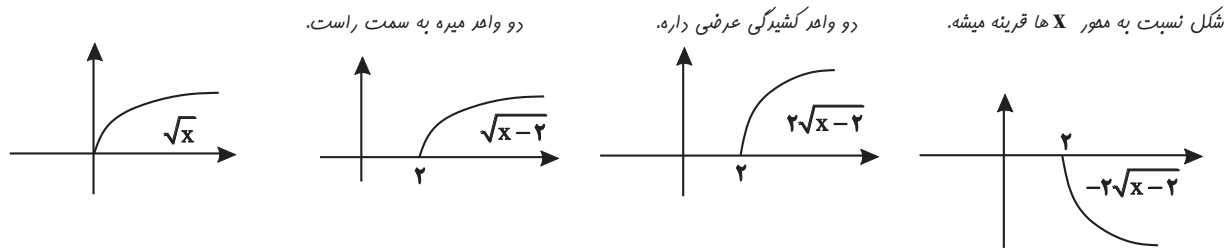
کشیدگی طولی به قاطر ضریب دو و اماری  $x$  و کشیدگی عرضی به قاطر ضریب دو و اماری  $f$



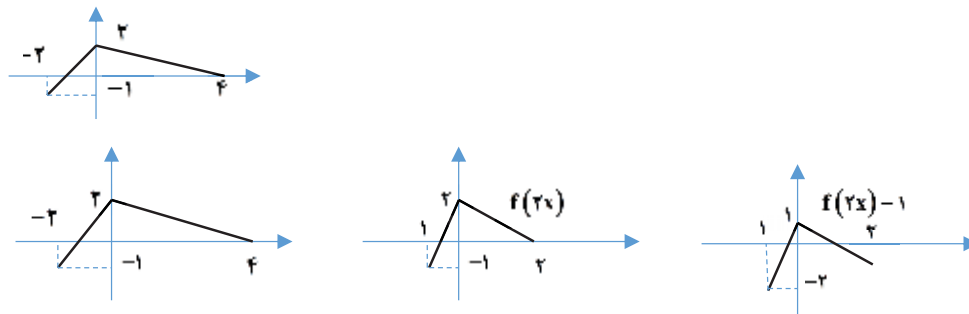
۱۵- اگر ورودی  $f(x) = \sqrt{x}$  باشد، خروجی ماشین زیر را تعیین کنید. در هر مرحله شکل مربوطه را رسم کنید.



پاسخ:



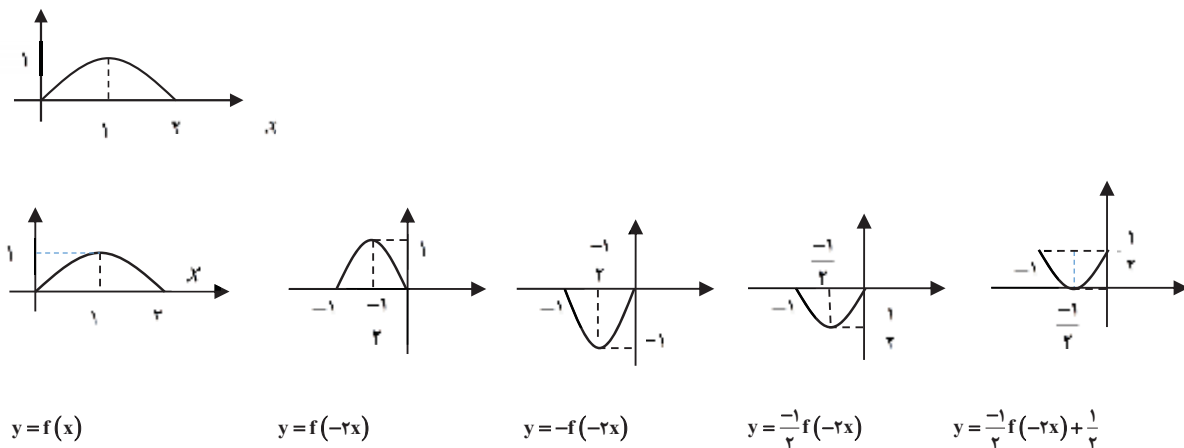
۱۶- نمودار تابع  $f(x)$  شکل مقابل است. نمودار تابع  $g(x) = f(2x) - 1$  را با توجه به آن رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین نمایید.



چون ضریب  $x$ ،  $2$  است تمام  $x$  های روی شکل رو در  $\frac{1}{2}$  ضرب می کنیم شکل منقبض میشه ولی بردش تغییر نمیکنه

حالا کل شکل رو  $1$  واحد میاریم پایین

۱۷- نمودار تابع معین  $y = f(x)$  در شکل رو به رو داده شده است نمودار تابع  $y = -\frac{1}{2}f(-2x) + \frac{1}{2}$  را رسم کنید و مراحل را توضیح دهید.

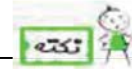


مراحل رسم تابع  $g(x) = mf(ax + b) + n$

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad g(x) = mf(ax + b) + n$$

③
②
①
④

- ① اول انتقال طولی با توجه به علامت  $b$  به اندازه  $|b|$  واحد
  - ② دوم انبساط یا انقباض طولی، تقسیم تمام طول های بر  $|a|$  و اگر  $a$  منفی باشد نمودار را نسبت به محور  $y$  ها قرینه می کنیم.
  - ③ سوم انبساط و انقباض عرضی تمام  $y$  ها را در  $|m|$  ضرب می کنیم و اگر  $m$  منفی باشد نمودار را نسبت به محور  $x$  ها قرینه می کنیم.
  - ④ چهارم انتقال عرضی به اندازه  $n$  واحد به سمت بالا یا پایین
- ✓ اعمال ۱ و ۲ هیچ تاثیری بر  $y$  ها و برد تابع نخواهد داشت.
- ✓ اعمال ۳ و ۴ هیچ تاثیری بر  $x$  ها و دامنه تابع نخواهد داشت.



\* اگر نقطه  $A$  روی نمودار تابع  $f(x)$  باشد نقطه نظیر آن روی تابع  $g(x) = f(ax + b)$  برابر است با :

$$\text{if } A(x_0, y_0) \in f(x) \quad A' \begin{array}{c} x_0 - b \\ a \\ y_0 \end{array} \in g(x) = f(ax + b)$$

$$\text{if } A(x_0, y_0) \in f(x) \quad A' \begin{array}{c} x_0 - b \\ a \\ ky_0 \pm k' \end{array} \in g(x) = kf(ax + b) \pm k'$$

۱۸- اگر نقطه  $A \begin{array}{c} -5 \\ 3 \end{array}$  نقطه‌ای روی نمودار تابع  $y = f(x)$  باشد، نقطه‌ی  $A'$  نظیر آن روی تابع  $g(x) = 3f(x - 2) + 1$  می‌باشد. مختصات  $A'$  را به دست آورید.

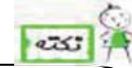
طول نقطه داده شده را باید ۲ واحد به سمت راست ببریم :  $x = -5 + 2 = -3 \rightarrow x = -5$  عرض نقطه را باید ۳ برابر کنیم و یک واحد بهش اضافه کنیم .  $y = 3 \rightarrow y = 3(3) + 1 = 10$  در کل یعنی :

$$\text{if } A(x_0, y_0) \in f(x) \quad A' \begin{array}{c} x_0 - b \\ a \\ ky_0 + k' \end{array} \in g(x) = kf(ax + b) + k'$$

$$A(-5, 3) \in f(x) \quad A' \begin{array}{c} -5 - (-2) \\ 1 \\ 3(3) + 1 = 10 \end{array} = -3 \in g(x) = 3f(x - 2) + 1$$

۱۹ - نقطه ی  $(-۸, ۶)$  روی نمودار  $y = f(x)$  قرار دارد کدام نقطه به طور قطع روی نمودار  $y = \frac{1}{۲}f(-۲x + ۲) + ۱$  قرار دارد؟

$$A \begin{vmatrix} -۸ \\ ۶ \end{vmatrix} \Rightarrow A' \begin{vmatrix} \frac{-۸-۲}{-۲} = ۵ \\ \frac{1}{۲}(۶) + ۱ = ۴ \end{vmatrix}$$

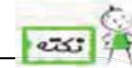


\* اگر نمودار  $f(x)$  را به شما بدهند و نمودار  $y = mf(ax + b) + n$  را بخواهند به شکل زیر عمل کنید.

الف) یک جدول بکشید و به صورت زیر نقاط مهم نمودار  $f$  را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \frac{x-b}{a} \\ y &\rightarrow my + n \end{aligned}$$

ب) در جدول دیگری نقاط جدول اول را به شکل زیر منتقل کنید.



\* اگر نمودار  $y = mf(ax + b) + n$  را به شما بدهند و نمودار  $f(x)$  را بخواهند به شکل زیر عمل کنید.

الف) یک جدول بکشید و به صورت زیر نقاط مهم نمودار  $y = mf(ax + b) + n$  را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} x &\rightarrow ax + b \\ y &\rightarrow \frac{y-n}{m} \end{aligned}$$

ب) در جدول دیگری نقاط جدول اول را به شکل زیر منتقل کنید.

۲۰- اگر  $g(x) = 2f\left(1 - \frac{x}{2}\right)$  و نقطه  $A(2, 2)$  روی نمودار  $g$  باشد، نقطه متناظر  $A$  روی نمودار  $f$  کدام است؟

- (۱)  $(-2, 1)$       (۲)  $(-2, 4)$       (۳)  $(0, 1)$       (۴)  $(0, 4)$

☑ پاسخ:

$$g(x) = 2f\left(1 - \frac{x}{2}\right) = 2f\left(\frac{-x}{2} + 1\right) \xrightarrow{A(2,2) \in g} g(2) = 2f(-1+1) = 2 \Rightarrow f(0) = 1 \Rightarrow B(0, 1) \in f$$

۲۱- نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = \sqrt{x}$  را در امتداد محور  $x$  ها ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور  $y$  ها ۲ واحد در جهت مثبت انتقال می دهیم فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع  $f$  از مبدا مختصات کدام است؟ (سراسری ۹۹ داخل کشور)

- (۱)  $4\sqrt{15}$       (۲)  $6\sqrt{7}$       (۳)  $4\sqrt{17}$       (۴)  $6\sqrt{10}$

☑ پاسخ:

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow g(x) = \sqrt{x-12} + 2 \Rightarrow g(x) = f(x) \Rightarrow \sqrt{x-12} + 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x-12 = x+4-4\sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} = 4 \Rightarrow x = 16 \Rightarrow A\left|\begin{smallmatrix} 16 \\ 4 \end{smallmatrix}\right. \Rightarrow |OA| = \sqrt{256+16} = 4\sqrt{17}$$

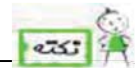
۲۲- نمودار تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 - 2x$  ;  $(x > 1)$  مفروض است قرینه نمودار آن نسبت به محور  $x$  ها را،  $16$  واحد در امتداد محور  $y$  ها در جهت مثبت انتقال می دهیم فاصله نقطه برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع  $f$  از مبدا مختصات کدام است؟ (سراسری ۹۹ خارج کشور)

- (۱)  $4\sqrt{5}$       (۲)  $6\sqrt{2}$       (۳)  $5\sqrt{2}$       (۴)  $2\sqrt{5}$

☑ پاسخ:

$$f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow g(x) = x^2 + 2x + 16 \Rightarrow g = f \Rightarrow x^2 + 2x + 16 = x^2 - 2x \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow A\left|\begin{smallmatrix} 4 \\ 8 \end{smallmatrix}\right. \Rightarrow |OA| = \sqrt{16+64} = 4\sqrt{5}$$



\* اگر دامنه  $y = f(x)$  را برهمن و دامنه  $y = f(u(x))$  بفواهند باید نامعادله  $D_f = [a, b]$  را حل کنید یعنی اگر  $a \leq u(x) \leq b$  را حل کنیم جواب به دست آمده دامنه تابع پذیرد است.

\* اگر دامنه  $y = f(u(x))$  برابر  $[m, n]$  باشد برای یافتن دامنه  $f(x)$  اول نامعادله  $m \leq x \leq n$  را بنویسید و سعی کنید  $u(x)$  را ایجاد کنید آنگاه  $a \leq u(x) \leq b$  دامنه تابع  $f(x)$  حاصل می شود (بازه و بسته بودن بازه ها رو دقت کنید)



۲۳- اگر دامنه تابع  $g(x) = 1 - f(1 - 3x)$  بازه  $[-2, 4]$  باشد، دامنه تابع  $y = f(x)$  کدام است؟

- (۱)  $[-11, 7]$  (۲)  $[-11, 7]$  (۳)  $[-1, 1]$  (۴)  $(-1, 1)$

پاسخ:

$$y = 1 - f(1 - 3x) = -f(-3x + 1) + 1$$

$$-2 < x \leq 4 \Rightarrow -12 \leq -3x < 6 \Rightarrow -11 \leq 1 - 3x < 7 \Rightarrow D_g = [-11, 7)$$

۲۴- اگر دامنه تابع  $y = f(2x - 1) + 3$  به صورت  $[-2, 6]$  باشد، آن گاه دامنه تابع  $g(x) = 3f(4x - 2) - 3$  کدام است؟

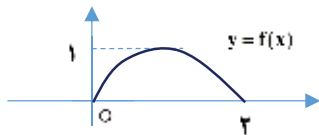
- (۱)  $[-1, 3]$  (۲)  $\left[\frac{-3}{4}, \frac{13}{4}\right]$  (۳)  $\left[\frac{3}{8}, \frac{11}{8}\right]$  (۴)  $[-3, 1]$

پاسخ:

$$[-2, 6] \Rightarrow -2 \leq x \leq 6 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 12 \Rightarrow -5 \leq 2x - 1 \leq 11 \Rightarrow D_f = [-5, 11]$$

$$-5 \leq 4x - 2 \leq 11 \Rightarrow -3 \leq 4x \leq 13 \Rightarrow \frac{-3}{4} \leq x \leq \frac{13}{4} \Rightarrow D_g = \left[\frac{-3}{4}, \frac{13}{4}\right]$$

۲۵- اگر نمودار تابع  $f$  به شکل زیر باشد دامنه تابع  $g(x) = \frac{f(1-x)}{f(x)}$  را تعیین کنید.



پاسخ:

$$D_f = [0, 2] \Rightarrow 0 \leq 1 - x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq -x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$D_g = D_{f(1-x)} \cap D_f - \{x \mid f(x) = 0\} = [-1, 1] \cap [0, 2] - \{0, 2\} = (0, 1)$$

می دانیم هر تابع به صورت  $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + px + q$  که در آن  $a, b, \dots, p, q$  اعداد حقیقی و  $n$  یک عدد صحیح نامنفی است و  $a \neq 0$  یک تابع چند جمله ای از درجه  $n$  می نامند.

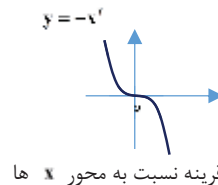
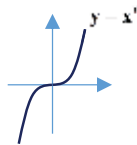
این توابع چند جمله ای خطی اند  
 $y = x^r - 2x^r + 6x - 1$   
 $y = 1 - 3x$  اما توابع  
 $y = x^r + 2x$  ,  $y = x|x|$   
 $y = \frac{x^r}{x}$  ,  $y = \sqrt{x}$  چند جمله ای خطی نیستند.  
 $y = 5$

### تابع درجه ۳

صورت کلی این توابع به شکل زیر است .  
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

چند جمله ای خطی از مرتبه ۳ که در اون ضرایب معلومند . و ساده ترین صورت آن هم به فرم :

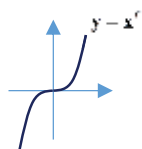
$$f(x) = x^3$$



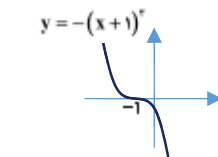
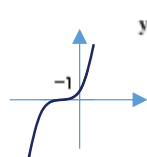
قرینه نسبت به محور  $x$  ها

$$f(x) = x^r \quad , \quad A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = A(x - x_0)^r + C$$

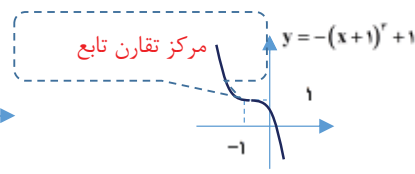
نقطه  $x = x_0$  طول مرکز تقارن تابع است در نتیجه  $w(x_0, C)$  نقطه تقارن تابع است.



انتقال ۱ واحد نمودار  $y = x^3$  به سمت راست



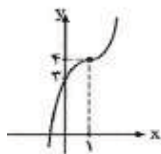
قرینه نسبت به محور  $x$  ها



انتقال ۱ واحد نمودار در امتداد محور  $y$  ها

۲۶- نمودار تابع  $f(x) = b(x-a)^r + c$  به صورت مقابل است مقادیر  $c, b, a$  را به دست آورید .

☑ پاسخ:

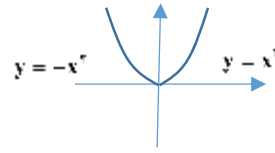


با توجه به نمودار تابع  $y = x^3$  باید عبارت درجه ۳ در  $x = 1$  صفر شود و مختصات نقاط معلوم تابع باید در آن صدق کند .

$$(x-a)^r \Big|_{x=1} = (1-a)^r = 0 \quad \Rightarrow \quad a=1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f(1) = b(1-1) + c = 4 \Rightarrow c = 4 \\ f(0) = b(0-1) + c = 3 \Rightarrow -b + 4 = 3 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

۲۷- تابع  $y = x^r |x|$  را رسم کنید.

$$y = x^r |x| = \begin{cases} -x^r & x < 0 \\ x^r & x \geq 0 \end{cases}$$



۲۸- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

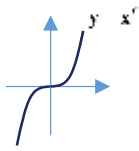
ت)  $y = (-\frac{x}{r} + 1)^r$

پ)  $y = (-x + 2)^r + 1$

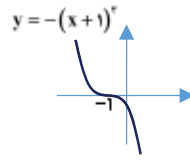
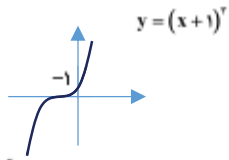
ب)  $y = (2x - 1)^r - 1$

الف)  $y = -(x + 1)^r + 1$

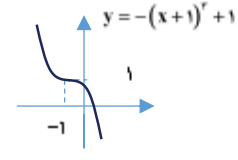
پاسخ:



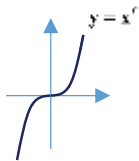
انتقال ۱ واحد نمودار  $y = x^r$  به سمت راست



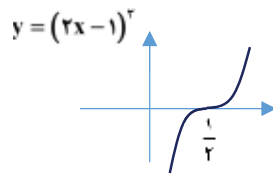
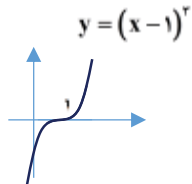
قرینه نسبت به محور x ها



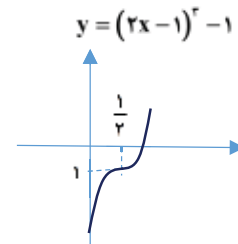
انتقال ۱ واحد نمودار در امتداد محور y ها



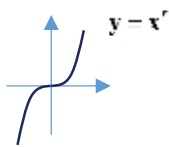
انتقال ۱ واحد نمودار  $y = x^r$  به سمت راست



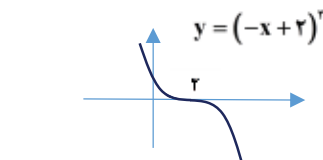
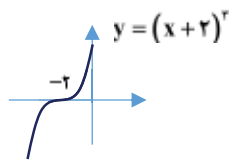
انقباض طولی، طول ها را تقسیم بر ۲ می کنیم



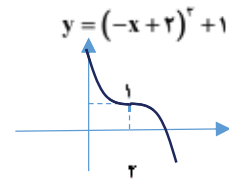
انتقال ۱ واحد نمودار در امتداد محور y ها به پایین



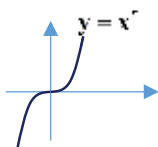
انتقال ۱ واحد نمودار  $y = x^r$  به سمت چپ



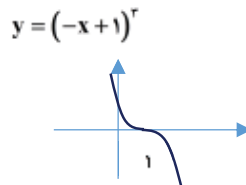
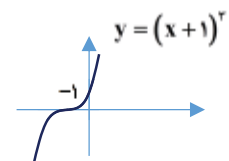
قرینه نسبت به محور y ها



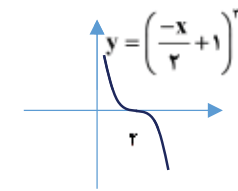
به بالا انتقال ۱ واحد نمودار در امتداد محور y ها



انتقال ۱ واحد نمودار  $y = x^r$  به سمت چپ

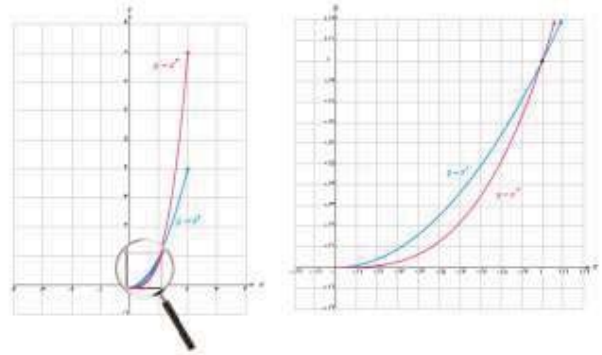


قرینه نسبت به محور y ها



انبساط ۲ واحد و ضرب طول ها در ۲

۲۹- نمودار تابع  $f(x) = x^3$  در بازه  $(-\infty, a)$  بالای نمودار تابع  $g(x) = x^2$  قرار ندارد بیشترین مقدار  $a$  کدام است ؟  
 (۱) صفر (۲) ۱ (۳) هر مقدار دلخواه (۴) -۱  
 پاسخ:



تابع درجه ۳ در بازه  $(-\infty, 1]$  پایین تر از تابع درجه ۲ است.

$$\forall x \in (-\infty, 1] \Rightarrow x^3 \leq x^2$$

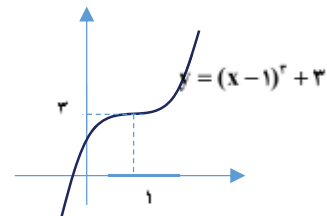
در نتیجه ۱ درست است

اینو هم بخاطر بسپار  $\forall x \in (0, 1) \Rightarrow 0 < x^n < x^{n-1} < \dots < x^3 < x^2 < x < \sqrt{x} < \sqrt[3]{x} < \dots < \sqrt[n]{x} < 1$

۳۰- نمودار تابع  $g(x) = x^3 - 3(x^2 - x) + 2$  از کدام ناحیه دستگاه مختصات نمی گذرد ؟  
 (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

پاسخ:

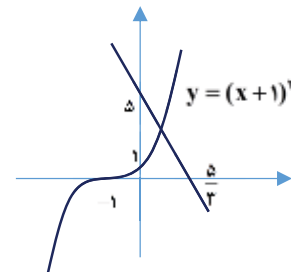
$$g(x) = x^3 - 3(x^2 - x) + 2 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3 = (x-1)^3 + 3$$



از ناحیه چهارم نمی گذرد.

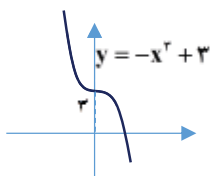
۳۱- نمودار تابع  $f(x) = (x+1)^2$  خط به معادله  $y = -3x + 5$  را در کدام ناحیه مختصات قطع می کند ؟  
 (۱) اول (۲) دوم (۳) سوم (۴) چهارم

پاسخ:  با توجه به شکل در ناحیه اول یکدیگر را قطع می کنند. اگر بخواهیم از راه حل معادله به دست آوریم کاری دشوار است.



$$(x+1)^2 = -3x + 5 \Rightarrow x^2 + 3x^2 + 3x + 1 = -3x + 5$$

$$x^2 + 3x^2 + 6x - 4 = 0$$



۳۲- اگر دامنه تابع  $f(x) = -x^2 + 3$  بازه  $[-2, 1]$  و برد آن  $[a, b]$  باشد، حاصل  $b - a$  کدام است ؟  
 (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

$$R_f = [f(1), f(-2)] = [2, 11] = [a, b]$$

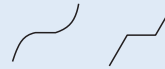
$$b - a = 9$$

پاسخ:  تابع  $f$  یک تابع نزولی است پس داریم:

توابع صعودی و توابع نزولی

تابع صعودی: تابع  $y = f(x)$  را صعودی می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر  $x$ ، مقدار تابع یعنی  $y$  نیز بزرگ شود و یا ثابت بماند.

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



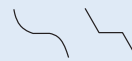
تابع صعودی اکید می‌نامند هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر  $x$ ، مقدار تابع یعنی  $y$  نیز بزرگ شود.

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



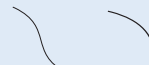
تابع نزولی: تابع  $y = f(x)$  را نزولی می‌نامند، هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر  $x$ ، مقدار تابع یعنی  $y$  کاهش یابد و یا ثابت بماند.

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



تابع نزولی اکید می‌نامند، هرگاه با بزرگ شدن مقدار متغیر  $x$ ، مقدار تابع یعنی  $y$  نیز کاهش یابد.

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

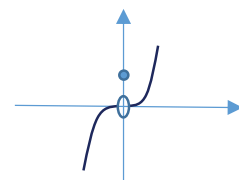
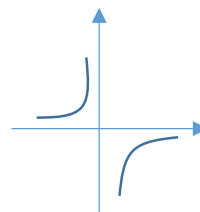
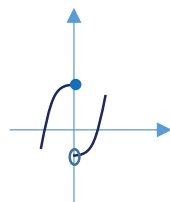
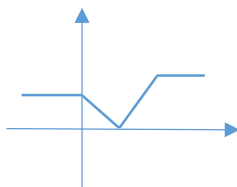


۱. در هر بازه که تابع ثابت باشد، هم می‌توان گفت صعودیه و هم نزولی چون در تعریف هر دو صدق می‌کنه.
۲. هر تابعی که در دامنه‌اش صعودی اکید (یا نزولی اکید) باشد، یک به یک و در نتیجه وارون پذیر است. ولی ممکن تابعی یک به

یک باشد ولی یکنوا نباشه مثل تابع:  $y = \frac{1}{x}$

اگر تابع  $y = f(x)$  در یک بازه  $I$  تابعی صعودی (نزولی) باشد، آنگاه آن را یکنوا می‌نامیم.

اگر تابع  $y = f(x)$  صعودی یا نزولی نباشد آنگاه  $f$  را تابعی غیر یکنوا می‌نامیم.



تمام این توابع در دامنه خود غیر یکنوا هستند



(۱) اول از  $x_1 < x_2$  متعلق به دامنه تابع شروع کنید و سعی نمایید  $f(x_1)$  و  $f(x_2)$  بسازید.  
 (۲) دقت کنید کدام نامساوی برقرار است  $f(x_1) \leq f(x_2)$  یا  $f(x_1) \geq f(x_2)$  اولی یعنی صعودی بودن تابع و دومی یعنی نزولی بودن آن

۳۳- نشان دهید تابع  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$  نزولی اکید است.

پاسخ:

$$0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < (x_1)^2 < (x_2)^2 \Rightarrow 1 + (x_1)^2 < 1 + (x_2)^2 \Rightarrow \frac{1}{1 + (x_1)^2} > \frac{1}{1 + (x_2)^2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

۳۴- صعودی یا نزولی بودن تابع  $f(x) = \sqrt{2x-4}$  را روی دامنه‌اش بررسی کنید.

پاسخ:

$$f(x) = \sqrt{2x-4} \Rightarrow 2x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow D_f = [2, +\infty)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 - 4 < 2x_2 - 4 \Rightarrow \sqrt{2x_1 - 4} < \sqrt{2x_2 - 4} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع در دامنه‌اش صعودی است.

۳۵- با استفاده از ضابطه‌ی صعودی یا نزولی بودن تابع:  $f(x) = -2(x+1)^2 - 1$  را بررسی کنید.

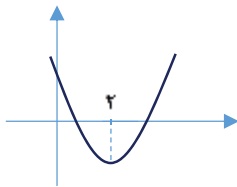
پاسخ:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2(x_1+1)^2 < 2(x_2+1)^2 \Rightarrow -2(x_1+1)^2 - 1 > -2(x_2+1)^2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow$$

بنابراین تابع نزولی است.

۳۶- در تابع با ضابطه  $f(x) = x^2 - 4x + 1$  دامنه تابع را به گونه‌ای محدود کنید که تابع اکیداً صعودی باشد.

پاسخ:



راس این سهمی  $x = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$  و چون  $a = 1 > 0$  دهنه سهمی رو به بالاست و از  $x = 2$  به بعد تابع صعودی است.

اینم اثباتش

$$\forall x_1, x_2 \in [2, +\infty) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

باید نشون بدم

چون  $x$  ها بزرگتر از ۲ اند داریم

$$x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1 - 2) < (x_2 - 2) \Rightarrow (x_1 - 2)^2 < (x_2 - 2)^2 \Rightarrow (x_1 - 2)^2 - 3 < (x_2 - 2)^2 - 3$$

$$x_1^2 - 4x_1 + 1 < x_2^2 - 4x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



۱) نمودار تابع را رسم کنید.

۲) برای هر بازه به صورت میژا صعودی یا نزولی بودن را بررسی کنید.

۳۷- با رسم نمودار تابع  $y = |x-1| + |x+3|$  مشخص کنید تابع در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی است؟ (شهریور ۹۳) ☑ پاسخ:

ریشه قدر مطلق اول  $x = -3$   
 ریشه قدر مطلق دوم  $x = 1$

$$y = |x+3| + |x-1| \Rightarrow \begin{cases} -2x-2 & x < -3 \\ 4 & -3 \leq x \leq 1 \\ 2x+2 & x > 1 \end{cases}$$

$x$	-4	-3	1	2
$y$	6	4	4	6

$\forall x \in (-\infty, -3)$  نزولی       $\forall x \in (-3, 1]$  ثابت       $\forall x \in (1, +\infty)$  صعودی

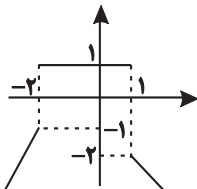
۳۸- ابتدا نمودار تابع زیر را رسم کنید، سپس بازه‌هایی را که در آن تابع صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید. (شهریور ۹۲)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$$

☑ پاسخ:

۳۹- تابع در بازه  $(-\infty, 0)$  اکیداً نزولی است در بازه  $[0, 1]$  ثابت و در بازه  $(1, +\infty)$  اکیداً صعودی است.

۴۰- تابع  $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & x > 1 \end{cases}$  را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (خرداد ۹۰)

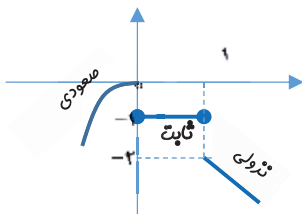


☑ پاسخ: تابع در بازه  $(-\infty, -2)$  صعودی است و در بازه  $(-2, 1)$  ثابت و در بازه  $(1, +\infty)$  نزولی است.

۴۱- نمودار تابع زیر را رسم ، سپس بازه‌هایی را که در آن تابع صعودی واکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ -1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -3x+1 & x > 1 \end{cases}$$

☑ پاسخ: در بازه  $(-\infty, 0)$  صعودیه . در بازه  $[0, 1]$  ثابته و در بازه  $(1, +\infty)$  نزولیه .



۴۲- تابع  $f$  در  $\mathbb{R}$  صعودی است و  $f(3x-1) < f(2-x)$  حدود  $x$  را تعیین کنید.

☑ پاسخ: گفته تابع  $f$  صعودی است پس باید :

$$f \nearrow \Rightarrow \text{if } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow f(3x-1) \leq f(2-x) \Rightarrow 3x-1 \leq 2-x \Rightarrow x \leq \frac{3}{4}$$

۴۳- حدود  $m$  را طوری تعیین کنید که تابع  $f(x) = (m-6)x^2 - x$  در بازه  $[2, +\infty)$  صعودی باشد.

☑ پاسخ: برای اینکه تابع تو بازه  $[2, +\infty)$  صعودی باشد باید :

$$f(x) = (m-6)x^2 - x \Rightarrow a = m-6 > 0 \quad \text{[1]}, \quad \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2(m-6)} \leq 2 \quad \text{[2]} \Rightarrow m > 6 \cap m \geq \frac{25}{4} \Rightarrow m \geq \frac{25}{4}$$

۴۴- تابع  $f$  اکیداً نزولی است اگر  $f(3a-1) < f(a+1)$  باشد، آنگاه حدود  $a$  کدام است ؟

$$a > 2 \quad (4) \qquad a > 1 \quad (3) \qquad a \geq 1 \quad (2) \qquad a \geq 2 \quad (1)$$

☑ پاسخ:

$$f \downarrow \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$f(3a-1) < f(a+1) \Rightarrow a+1 < 3a-1 \Rightarrow a > 1$$

باید

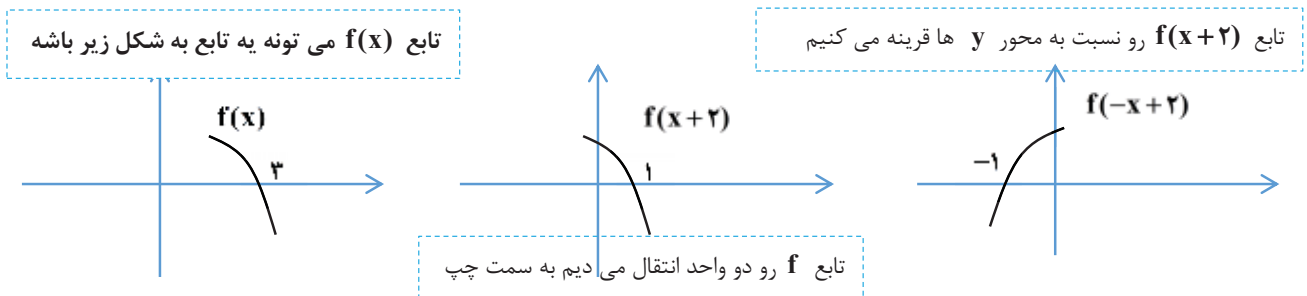
۴۵- اگر تابع پیوسته  $y = f(x)$  با دامنه  $\mathbb{R}$  اکیداً نزولی باشد و داشته باشیم  $f(3) = 0$  آن گاه دامنه  $g(x) = \sqrt[4]{(x-3)^2 f(2-x)}$  کدام است ؟

$$[-1, +\infty) \quad (4) \qquad (3, +\infty) \quad (3) \qquad [3, +\infty) \quad (2) \qquad (-1, +\infty) \quad (1)$$

☑ پاسخ:

باید

$$g(x) = \sqrt[4]{(x-3)^2 f(2-x)} \Rightarrow (x-3)^2 f(2-x) \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-3)^2 \geq 0}{\text{همیشه}} \Rightarrow f(-x+2) \geq 0 \quad \text{باید}$$



بنابراین از  $x = -1$  به بعد داریم :  $f(-x+2) \geq 0$  در نتیجه جواب همیشه گزینه ۴



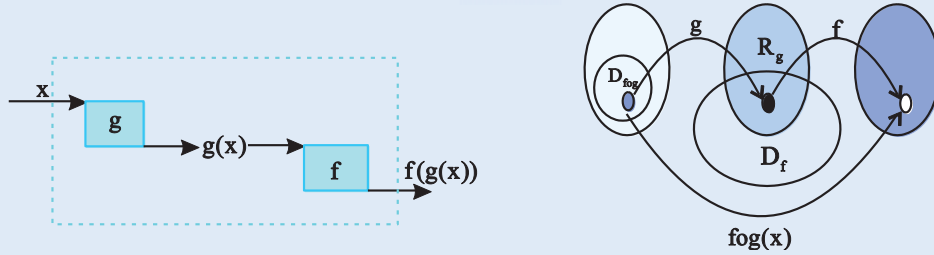


ترکیب توابع

اگر  $A \xrightarrow{f} B$  ,  $C \xrightarrow{g} D$  آن‌گاه  $C \xrightarrow{fog} B$  به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{cases} y = fog(x) = f(g(x)) \\ D_{fog} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\} \end{cases}$$

اگر برد  $g(x)$  اشتراکی با دامنه‌ی تابع  $f(x)$  نداشته باشد،  $f(g(x))$  قابل تشکیل نیست. حال اگر  $R_g \cap D_f \neq \emptyset$  آن‌گاه با جای‌گزینی  $g(x)$  به جای  $x$  در ضابطه‌ی  $f(x)$  تابع  $fog$  تشکیل می‌شود.



۴۶- اگر  $f = \{(-1, 1), (1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$  ,  $g = \{(-1, 0), (1, 2), (2, 4), (5, 3)\}$  دو تابع باشند: (شهریور ۹۵)

تابع  $fog$  را به صورت زوج مرتب بنویسید.

$$\begin{aligned} -1 &\xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} \times \\ 1 &\xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f} 3 \Rightarrow (1, 3) \in fog \\ 2 &\xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} 5 \Rightarrow (2, 5) \in fog \\ 5 &\xrightarrow{g} 3 \xrightarrow{f} \times \end{aligned} \Rightarrow fog = \{(1, 3), (2, 5)\}$$

۴۷- اگر  $f = \{(0, 2), (1, -1), (3, \frac{-1}{4}), (-2, 3), (-1, 0)\}$  ,  $g = \{(2, \sqrt{2}), (-1, 2), (\frac{1}{4}, 3), (1, \frac{3}{2})\}$  باشند، تابع  $gof$  را بدست آورید. (خرداد ۹۴)

$$\begin{aligned} 0 &\xrightarrow{f} 2 \xrightarrow{g} \sqrt{2} \Rightarrow (0, \sqrt{2}) \in gof \\ 1 &\xrightarrow{f} -1 \xrightarrow{g} 2 \Rightarrow (1, 2) \in gof \\ 3 &\xrightarrow{f} \frac{-1}{4} \xrightarrow{g} \times \\ -2 &\xrightarrow{f} 3 \xrightarrow{g} \times \\ -1 &\xrightarrow{f} 0 \xrightarrow{g} \times \end{aligned} \Rightarrow gof = \{(0, \sqrt{2}), (1, 2)\}$$

اینجا به جایی نمیرن

پاسخ:

۴۸- اگر  $f(x) = \sqrt{x-3}$  ,  $g = \{(0, 4), (3, 2), (5, 6)\}$  دو تابع باشند. (خرداد ۹۱)

الف) تابع  $fog$  را به صورت زوج های مرتب بنویسید. ب) دامنه‌ی تابع  $\frac{f}{g}$  را بنویسید.

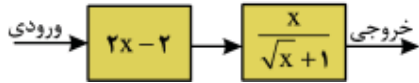
پاسخ:

$$\begin{cases} 0 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f=\sqrt{x-3}} 1 \Rightarrow (0, 1) \\ 3 \xrightarrow{g} 2 \xrightarrow{f=\sqrt{x-3}} \sqrt{2-3} \Rightarrow (3, \sqrt{3}) \\ 5 \xrightarrow{g} 6 \xrightarrow{f=\sqrt{x-3}} \sqrt{3} \Rightarrow (5, \sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow fog = \{(0, 1), (5, \sqrt{3})\}$$

تعریف نشده

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x : g(x) = 0\} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \{3, 5\}$$

۴۹- اگر خروجی از ماشین شکل مقابل  $\frac{4}{3}$  باشد، مقدار ورودی کدام است؟

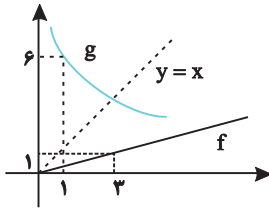


پاسخ:

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x=4 \Rightarrow 2x-2=4 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$$

۵۰- شکل مقابل نمودارهای توابع  $f, g$  است و  $f$  تابعی خطی می‌باشد،  $\text{gof}(3) + \text{fog}(1)$  کدام است؟

پاسخ:



$$f(x) = \frac{1}{3}x \Rightarrow$$

$$f(g(1)) = f(6) = \frac{1}{3}(6) = 2$$

$$g(f(3)) = g(1) = 6$$

$$\text{gof}(3) + \text{fog}(1) = 6 + 2 = 8$$

تابع  $f$  قطعی، و با شیب  $\frac{1}{3}$  و گذرا از مبدأ است.  
بنابراین معادله آن به این صورت می‌باشد.

۵۱- اگر  $g(x) = 3x^2 + x - 1$ ،  $f(x) = 1 - 2x$  باشند جواب معادله  $\text{fog} = -5$  را به دست آورید.

$$f(x) = 1 - 2x, g(x) = 3x^2 + x - 1 \Rightarrow \text{fog}(x) = 1 - 2(3x^2 + x - 1) = -6x^2 - 2x + 3 = -5$$

$$-6x^2 - 2x + 3 = -5 \Rightarrow 6x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$$



تعداد زیادی از سوالات ترکیب دو تابع مربوط به تعیین دامنه ترکیب دو تابع بدون تشکیل ضابطه و از راه تعریف است. دقت کن:

$$D_{\text{fog}} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$$

$$D_{\text{gof}} = \{x \in D_f : f(x) \in D_g\}$$

$$D_{\text{fof}} = \{x \in D_f : f(x) \in D_f\}$$



(۱) ابتدا دامنه دو تابع را به دست آورید.

(۲) فرمول دامنه ترکیب رو با توجه به یکی از سه مورد بالا بنویسید.

(۳) با استفاده از فرمول و محدودیت های هر دامنه، دامنه ترکیب را حساب کنید.

(خرداد ۸۵)

۵۲- توابع  $f(x) = \sqrt{x-1}$  ,  $g(x) = \frac{1}{x}$  مفروض‌اند.

ب) در صورت وجود، ضابطه‌ی  $g \circ f$  را بنویسید.

الف) بدون تشکیل ضابطه‌ی  $f \circ g$  دامنه را تعیین کنید.

پاسخ:

الف)  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g = \mathbb{R} - \{0\} \mid g(x) \in D_f = [1, +\infty)\} = \left\{x \mid x \in \mathbb{R} - \{0\}, \frac{1}{x} \geq 1\right\} = \{x \mid x \in \mathbb{R} - \{0\}, x \leq 1\} = (-\infty, 1] - \{0\}$

ب)  $g \circ f = g(\sqrt{x-1}) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

یعنی در تابع  $g$  بجای  $x$  ، ضابطه  $f(x)$  رو قرار بده

۵۳- اگر  $f(x) = \sqrt{x+|x|}$  ,  $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$  باشد دامنه‌ی تابع  $g \circ f$  کدام است؟

$f(x) = x + |x| = \begin{cases} \sqrt{2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow x + |x| \geq 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} , \quad D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$  پاسخ:

می‌دانیم:  $\forall x \in (-\infty, 0] \Rightarrow \sqrt{x+|x|} = 0 , \quad \sqrt{x+|x|} = 4 \Rightarrow \sqrt{2x} = 4 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8$

در نتیجه:  $D_{g \circ f} = \{x : x \in \mathbb{R} \ni \sqrt{x+|x|} \neq 0, 4\} = (0, +\infty) - \{8\}$

(خرداد ۹۲)

۵۴- اگر  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  ,  $g(x) = \sqrt{x-3}$  دو تابع باشند.

ب) دامنه تابع  $f \circ g$  را بیابید.

الف) مقدار  $(f \circ g)(4)$  را به دست آورید.

پاسخ:

الف)  $(f \circ g)(4) = \frac{1}{\frac{1}{4-1} - \sqrt{4-3}} = -2$

ب)  $D_f = \mathbb{R} - \{1\} , D_g = [3, +\infty) \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \mid x \in D_g , g(x) \in D_f\} = \{x \mid x \in [3, +\infty) , \sqrt{x-3} \neq 1\} = [3, +\infty) - \{4\}$

(خرداد ۹۰)

۵۵- اگر  $g(x) = \frac{1}{x-3}$  ,  $f(x) = 3x-2$  باشد. آن‌گاه حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

ب)  $D_{f \circ g}$

الف)  $(3f + 2g)(4)$

پاسخ:

الف)  $3f = 3(3x-2) = 9x-6 , \quad 2g = \frac{2}{x-3} \Rightarrow 3f + 2g = (9x-6) + \left(\frac{2}{x-3}\right) \Rightarrow (3f + 2g)(4) = 32$

ب)  $D_{f \circ g} = \left\{x \in D_g = \mathbb{R} - \{3\} \mid \frac{1}{x-3} \in D_f = \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R} - \{3\}$

(خرداد ۹۳- خارج کشور)

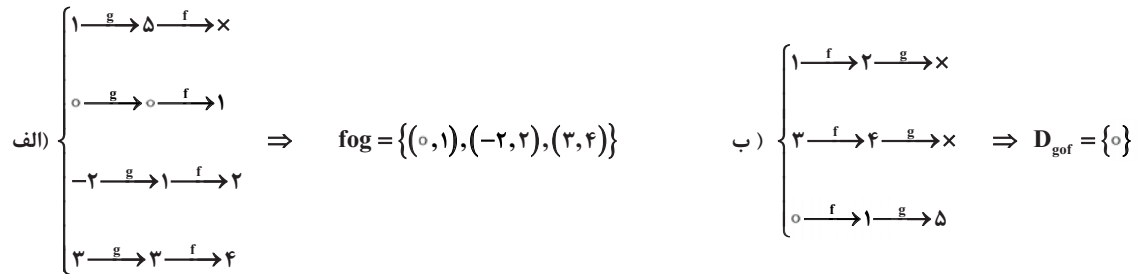
۵۶- توابع  $f(x) = \sqrt{\frac{3x-2}{1-x}}$  ,  $g(x) = 2x$  مفروض‌اند. دامنه تابع  $f \circ g(x)$  را محاسبه کنید.

$\frac{x}{\frac{3x-2}{1-x}} \mid \frac{2}{3} \mid 1$  ,  $D_f = \left[\frac{2}{3}, 1\right)$  ,  $D_g = \mathbb{R}$  پاسخ:

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right)\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} \leq 2x < 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leq x < \frac{1}{2}\right\} = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

۵۷- اگر  $g = \{(1, 5), (0, 0), (-2, 1), (3, 3)\}$ ،  $f = \{(1, 2), (3, 4), (0, 1)\}$  آنگاه :  
 الف ( تابع  $f \circ g$  را تعیین کنید .  
 ب ) دامنه  $g \circ f$  را به دست آورید .

پاسخ: [X]



۵۸- توابع  $f(x) = 2\sqrt{x-5}$ ،  $g(x) = \frac{x-7}{x-2}$  مفروضند. بدون تشکیل ضابطه دامنه تعریف  $f \circ g$  را به دست آورید.

پاسخ: [X]

$$f = 2\sqrt{x-5} \Rightarrow x-5 \geq 0 \Rightarrow D_f = [5, +\infty) \quad , \quad D_g = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \mid x \in D_g = \mathbb{R} - \{2\} \Rightarrow \frac{x-7}{x-2} \geq 5 \Rightarrow \frac{-4x+3}{x-2} \geq 0 \right\} = \left[ \frac{3}{4}, 2 \right)$$

x	۳	۲	
$\frac{-4x+3}{x-2}$	-	۰	+
		ت	-



۱) اگر  $f(x)$ ،  $f(g(x))$  داده شود و  $g(x)$  را بخواهند کافی است در ضابطه  $f$  به جای  $x$  ها  $g$

قرار می دهیم و با  $f(g(x))$  داده شده مساوی قرار می دهیم و  $g$  را به دست می آوریم.

۲) اگر  $f(g(x))$  و  $g(x)$  را بدهند و  $f(x)$  را از ما بخواهند ابتدا با تغییر متغیر  $g(x) = t$  و یافتن  $x$  بر حسب

$t$  و انجام تغییرات و جایگذاری  $x$  بر مبنای  $t$ ،  $f(t)$  را محاسبه نموده و عملاً  $f(x)$  حاصل می شود.

۳) بعضی وقت ها با عدد گذاری هم می توان بعضی از مسائل را حل کرد .

۵۹- اگر  $f(x) = x^2 - x - 12$  ,  $f(g(x)) = x^2 - 7x$  تابع  $g(x)$  را به دست آورید ؟

پاسخ:

$$1) f(g(x)) = g^2 - g - 12 = x^2 - 7x \Rightarrow g^2 - g = x^2 - 7x + 12 \longrightarrow g^2 - g + \frac{1}{4} = x^2 - 7x + \frac{49}{4}$$

$$(g - \frac{1}{2})^2 = (x - \frac{7}{2})^2 \Rightarrow \begin{cases} g = -x + 4 \\ g = x - 3 \end{cases}$$

$$2) f(g(x)) = g^2 - g - 12 = x^2 - 7x \Rightarrow g^2 - g - (x^2 - 7x + 12) = 0$$

$$(g + (x - 4))(g - (x - 3)) = 0 \Rightarrow \begin{cases} g = -x + 4 \\ g = x - 3 \end{cases}$$

۶۰- اگر  $g(x) = 2x + 1$  ,  $fog(x) = 8x^2 + 6x + 5$  باشند. تابع  $f(x)$  برابر کدام است ؟ (خارج کشور ۹۵)

$$2x^2 + x + 3 \quad (4) \quad 2x^2 - x + 4 \quad (3) \quad 2x^2 + 3x + 1 \quad (2) \quad 2x^2 + 3x + 1 \quad (1)$$

پاسخ:

$$X = 2x + 1 \Rightarrow x = \frac{X-1}{2} \Rightarrow f(g(x)) = f(X) = 8\left(\frac{X-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{X-1}{2}\right) + 5 = 2X^2 - X + 4$$

۶۱- اگر  $f(x) = x + a$  و  $g(x) = ax^2 + bx + c$  باشد،  $a, b, c$  را طوری تعیین کنید که داشته باشیم:  $(fog)(x) = x^2 - 3x + 4$

$$f(g(x)) = ax^2 + bx + c + a = x^2 - 3x + 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c + a = 4 \Rightarrow c = 3 \end{cases}$$

یعنی در تابع  $f$  هر جا  $x$  داریم به جاش ضابطه ی  $g$  رو میگذاریم



برای حل معادلات به صورت  $f(g(x)) = m$  بهترین روش این است که ابتدا معادله  $f(x) = m$

را حل کنیم سپس  $g(x)$  را مساوی ریشه های اول قرار دهیم .

برای محاسبه برد  $f(g(x))$  ابتدا برد تابع داخلی را محاسبه کرده و مجموعه حاصل می شود دامنه تابع  $f(x)$  البته ممکن است همه

آن در دامنه  $f$  نباشد در نهایت با توجه به آن برد تابع  $f$  را برای مقادیر ممکن بدست می آوریم

۶۲- اگر  $f(x) = x + \sqrt{x}$  ,  $g = \{(1,2), (5,4), (6,5), (2,3)\}$  ,  $g(f(a)) = 5$  باشد عدد  $a$  کدام است ؟

$$4 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

پاسخ:

$$g(f(a)) = 5 \xrightarrow{g(6)=5} \Rightarrow f(a) = 6 = a + \sqrt{a} \Rightarrow a = 4$$

## تعریف تابع یک به یک

تابع  $f(x)$  یک به یک است، هرگاه برای هر دو عضو متمایز از دامنه  $x_1, x_2$  مقادیر تابع به ازای این نقاط یعنی  $f(x_1), f(x_2)$  نیز متمایز باشند.

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

توابع چند ضابطه‌ای اگر دو شرط زیر را داشته باشند، یک به یک اند.

(۱) هر ضابطه در دامنه‌ی خود یک به یک باشد.

(۲) اشتراک بردها تهی باشد.



(۱) نمودار تابع یک به یک: اگر خطی افقی نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن گاه تابع یک به یک است.

(۲) تمام چند جمله‌ای‌های درجه‌ی زوج یک به یک نیستند.

(۳) اگر یک تابع اکیداً نزولی یا اکیداً صعودی باشد یک به یک است. (عکس این مطلب همواره درست نیست)

۶۳- ثابت کنید تابع  $f(x) = \frac{x+1}{x}$  یک به یک است.

پاسخ: تابع یک به یک است.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1} = \frac{x_2+1}{x_2} \Rightarrow x_1x_2 + x_2 = x_1x_2 + x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

۶۴- دو تابع  $g(x) = x - [x]$  ,  $f(x) = x + [x]$  از نظر یک به یک بودن چگونه‌اند؟

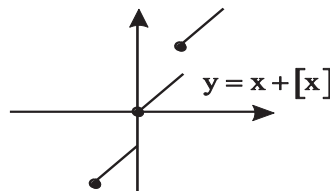
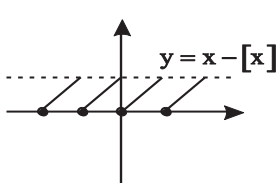
(۱) هر دو یک به یک نیستند.

(۲) هر دو یک به یک‌اند.

(۳)  $f$  یک به یک و  $g$  یک به یک نیست.

(۴)  $f$  یک به یک و  $g$  یک به یک نیست.

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است؛ هیچ خط افقی نمودار تابع  $f$  را بیش از یک نقطه قطع نمی‌کند ولی نمودار  $g$  را هر خط افقی  $0 \leq y = k < 1$  در بی‌شمار نقطه قطع می‌کند.



۶۵- ثابت کنید تابع  $f(x) = x^2 - 6x + 5$  برای  $x > 3$  یک به یک است.

پاسخ:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

۴ واحد به طرفین اضافه کردیم تا مربع کامل شوند.

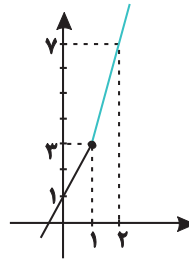
$$x_1^2 - 6x_1 + 5 = x_2^2 - 6x_2 + 5 \Rightarrow x_1^2 - 6x_1 + 9 = x_2^2 - 6x_2 + 9 \Rightarrow (x_1 - 3)^2 = (x_2 - 3)^2$$

$$\Rightarrow |x_1 - 3| = |x_2 - 3| \Rightarrow \begin{matrix} \text{مطابق فرض } x \geq 3 \text{ است. در نتیجه دامل قدرمطلق‌ها} \\ \text{مثبت است پس فودشان بیرون میان} \end{matrix} \Rightarrow x_1 - 3 = x_2 - 3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

۶۶- با رسم نمودار تابع  $y = 3x + |x - 1|$  مشخص کنید تابع یک به یک است یا خیر؟

پاسخ:

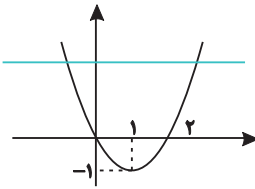
$$f(x) = \begin{cases} 4x - 1 & x \geq 1 \\ 2x + 1 & x < 1 \end{cases}$$



با توجه به شکل تابع یک به یک است. چون هیچ خط افقی آن را در دو نقطه قطع نمی‌کند.

۶۷- با رسم تابع  $y = x^2 - 2x$  یک به یک بودن آن را تعیین کنید.

پاسخ:



با توجه به اینکه خطوط افقی  $y = k > -1$  منحنی تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند تابع یک به یک نیست.

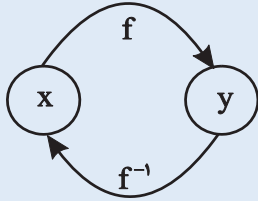


این سوال‌ها را با توضیحات داده شده می‌تونی حل کنی.

(خرداد ۹۳)

◀ - آیا تابع  $f(x) = x^2 - 2x$  یک به یک است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

◀ - ثابت کنید تابع  $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  یک به یک است.



تابع وارون

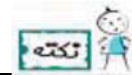
اگر  $f$  تابعی یک به یک باشد، معکوس پذیر و معکوس تابع  $f$  به صورت زیر است.

$$f^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in f\}$$

$$D_{f^{-1}} = R_f \quad D_f = R_{f^{-1}}$$

$$\forall x \in D_{f^{-1}} \quad f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in D_f \quad f^{-1}(f(x)) = x$$

ترکیب هر تابع با تابع معکوس خود حتماً تابع همانی است. و اگر  $f(a) = b$  آن گاه  $f^{-1}(b) = a$



۱) نمودار توابع  $f, f^{-1}$  نسبت به خط  $y = x$  متقارن اند.

۲) نمودار  $f, f^{-1}$  در صورت تقاطع عموماً یکدیگر را روی خط  $y = x$  قطع می کنند. (نه همیشه)

۳) ممکن است نمودار  $f, f^{-1}$  بر هم منطبق باشند. مانند:  $y = \frac{1}{x}$  و یا یکدیگر را قطع نکنند. مانند:

$$f^{-1}(x) = \log_7^x, \quad f(x) = 7^x$$



۱) ابتدا ثابت کنید تابع یک به یک است. (قسمت فستهی کار) این طوری:

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

کمتز سوال میاد، بیشتر می خواد که ضابطه تابع معکوس رو مستقیم به دست بیارید

۲) تابع را بر حسب  $x$  بنویسید یعنی از ضابطه‌ی داده شده  $x$  رو بر حسب  $y$  تنها کنید. (قسمت سفت کار)

۳) در نهایت تابع حاصل را به صورت  $y = f^{-1}(x)$  بنویسید.

۶۸- معکوس تابع زیر کدام است؟

۱)  $y = ax + b$

پاسخ:

۱)  $y = ax + b \Rightarrow ax = y - b \Rightarrow x = \frac{y - b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a}$

۶۹- اگر  $f(a) = 3ax - 5$  و نقطه‌ی  $(4, 3)$  روی نمودار تابع  $f^{-1}$  باشد، اولاً مقدار  $a$  را به دست آورید. ثانیاً ضابطه‌ی تابع وارون  $f$  را تعیین کنید.

پاسخ:

$$(4, 3) \in f^{-1} \Rightarrow (3, 4) \in f \Rightarrow f(3) = 3a(3) - 5 = 4 \Rightarrow 9a = 9 \Rightarrow a = 1$$

$$f(x) = 3x - 5 \Rightarrow y = 3x - 5 \Rightarrow y + 5 = 3x \Rightarrow x = \frac{y + 5}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{3}$$



۷۰- ثابت کنید تابع  $x \geq 2$ ،  $f(x) = (x-2)^2$  وارون پذیر است، سپس ضابطه‌ی وارون آن را بنویسید. (خرداد ۹۱)

پاسخ:

اثبات معکوس پذیری  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 - 2)^2 = (x_2 - 2)^2 \xrightarrow{x \geq 2} |x_1 - 2| = |x_2 - 2| \xrightarrow{x \geq 2} x_1 = x_2$

$$y = (x-2)^2 \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{(x-2)^2} \Rightarrow \sqrt{y} = |x-2| \xrightarrow{x \geq 2} \sqrt{y} = x-2 \quad x = \sqrt{y} + 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$$

۷۱- وارون تابع  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  :  $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  کدام است ؟

(۲)  $y = 1 + \sqrt{x-2}$  ,  $x \geq 2$

(۱)  $y = 1 - \sqrt{x-2}$  ,  $x \geq 2$

(۴)  $y = 1 - \sqrt{2-x}$  ,  $x \leq 1$

(۳)  $y = 1 + \sqrt{2-x}$  ,  $x \leq 1$

مربع کامل می‌کنیم

$$y = x^2 - 2x + 3 \Rightarrow y = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow (x-1)^2 = y-2 \Rightarrow |x-1| = \sqrt{y-2} \xrightarrow{x \leq 1} x-1 = -\sqrt{y-2}$$

$$x = 1 - \sqrt{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-2} \quad , \quad x \geq 2$$

۷۲- اگر وارون تابع  $f(x) = b + \sqrt{x+2}$  تابع  $f^{-1}(x) = x^2 + ax + c$  ( $x \geq 3$ ) باشد حاصل  $\frac{c+2}{a+b}$  کدام است ؟

(۴) -۳

(۳)  $\frac{7}{3}$

(۲)  $-\frac{7}{3}$

(۱) ۳

پاسخ:

$$f(x) = b + \sqrt{x+2} \Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_f = [-2, +\infty) \Rightarrow R_f = D_{f^{-1}} = [3, +\infty)$$

$$f(-2) = b + \sqrt{-2+2} = 3 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = 3 + \sqrt{x+2}$$

$$y = 3 + \sqrt{x+2} \Rightarrow y-3 = \sqrt{x+2} \Rightarrow y^2 - 6y + 9 = x+2 \Rightarrow x = y^2 - 6y + 7 \Rightarrow f^{-1} = x^2 - 6x + 7$$

$$a = -6, \quad b = 3, \quad c = 7 \Rightarrow \frac{c+2}{a+b} = \frac{7+2}{-6+3} = -3$$

۷۳- وارون پذیری تابع زیر را بررسی کنید و در صورت وارون پذیری تابع، ضابطه‌ی وارون آن را به دست آورید. (شهریور ۹۲)

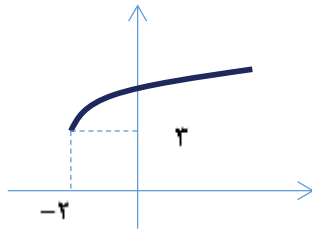
$$f(x) = \sqrt{x+3} - 5$$

پاسخ:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \longrightarrow \sqrt{x_1+3} - 5 = \sqrt{x_2+3} - 5 \Rightarrow x_1+3 = x_2+3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$y = \sqrt{x+3} - 5 \Rightarrow y+5 = \sqrt{x+3} \Rightarrow (x+3) = (y+5)^2 \Rightarrow x = (y+5)^2 - 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x+5)^2 - 3$$

۷۴- شکل مقابل نمودار تابع  $f(x) = \sqrt{x+a} + b$  است و  $\begin{cases} g(x) = x^2 - 6x + 10 \\ \forall x \in (-\infty, 3] \end{cases}$  آنگاه  $g^{-1}(f^{-1}(b+a))$  کدام است ؟



- ۴ (۲)
- ۸ (۴)
- ۲ (۱)
- ۶ (۳)

پاسخ:

$$f(x) = \sqrt{x+a} + b \Rightarrow x+a \geq 0 \Rightarrow x \geq -a = -2 \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = \sqrt{x+2} + b \Rightarrow f(-2) = \sqrt{0} + b = 3 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x+2} + 3$$

$$f^{-1}(a+b) = f^{-1}(5) \Rightarrow \sqrt{x+2} + 3 = 5 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 2 \Rightarrow x+2 = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f^{-1}(5) = 2$$

$$g^{-1} \circ f^{-1}(a+b) = g^{-1}(2) \Rightarrow x^2 - 6x + 10 = 2 \Rightarrow (x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow g^{-1} \circ f^{-1}(a+b) = 2$$

(دی ماه ۹۰)

۷۵- تابع وارون  $y = x^3$  تابع ..... است.

$$y = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$$

پاسخ:

۷۶- در ماشین زیر ضابطه تابع  $g$  را تعیین کنید.



پاسخ:

$$g(x) = f^{-1}$$

$$f(x) = x^3 + 1 \Rightarrow y = x^3 + 1 \Rightarrow y - 1 = x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y-1} = x \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

۷۷- وارون تابع  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$  را تعیین کنید ؟

پاسخ:

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x \Rightarrow y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x+1)^3 - 1 \Rightarrow (x+1)^3 = y+1 \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{y+1} - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1} - 1$$

ملعب کامل می‌کنیم

۷۸- نشان دهید تابع  $f(x) = 1 + \sqrt[3]{x-5}$  وارون پذیر است، سپس وارون آن را بنویسید.

پاسخ: اول باید نشان دهیم تابع وارون پذیر است، یعنی باید نشان دهیم تابع یک به یک است.

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2: 1 + \sqrt[3]{x_1-5} = 1 + \sqrt[3]{x_2-5} \Rightarrow \sqrt[3]{x_1-5} = \sqrt[3]{x_2-5} \Rightarrow x_1-5 = x_2-5 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$y = 1 + \sqrt[3]{x-5} \Rightarrow y-1 = \sqrt[3]{x-5} \Rightarrow (y-1)^3 = (x-5) \Rightarrow x = (y-1)^3 + 5 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^3 + 5$$

۷۹- وارون تابع  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$  کدام است ؟

$\sqrt[3]{x+2}-8$  (۴)

$\sqrt[3]{x-8}+2$  (۳)

$\sqrt[3]{x-2}+8$  (۲)

$\sqrt[3]{x-8}-2$  (۱)

پاسخ:

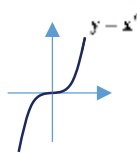
ملعب کامل می‌کنیم

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x \Rightarrow y = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 8 = (x-2)^3 + 8 \Rightarrow y-8 = (x-2)^3 \Rightarrow x-2 = \sqrt[3]{y-8} \Rightarrow x = 2 + \sqrt[3]{y-8} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 + \sqrt[3]{x-8}$$

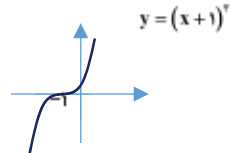
۸۰- تابع  $f(x) = -(x+1)^3 + 1$  را در نظر بگیرید و موارد زیر را کاملاً توضیح داده و انجام دهید.

الف) نمودار  $f(x)$  را به کمک  $y = x^3$  رسم کنید. مراحل را توضیح دهید.

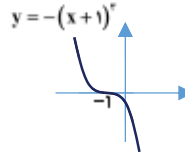
ب) نشان دهید  $f(x)$  وارون پذیر است و ضابطه ی  $f^{-1}(x)$  را به دست آورید.



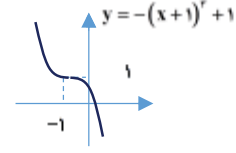
انتقال ۱ واحدی نمودار  $y = x^3$  به سمت راست



قرینه نسبت به محور x ها



انتقال ۱ واحدی نمودار در امتداد محور y ها



$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow -(x_1+1)^3 + 1 = -(x_2+1)^3 + 1 \rightarrow (x_1+1)^3 = (x_2+1)^3 \Rightarrow x_1+1 = x_2+1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$y = -(x+1)^3 + 1 \rightarrow (x+1)^3 = (1-y) \rightarrow x+1 = \sqrt[3]{1-y} \rightarrow x = \sqrt[3]{1-y} - 1 \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x} - 1$$

۸۱- در توابع زیر مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

پاسخ:

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(7) = ? \Rightarrow \frac{3x+1}{x-1} = 7 \Rightarrow 7x-7 = 3x+1 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f^{-1}(7) = 2$$

$$f(x) = x^2 - 2x, x \leq 2 \Rightarrow f^{-1}(5) = ? \Rightarrow x^2 - 2x = 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{24}}{2} = \begin{cases} 1 + \sqrt{6} \\ 1 - \sqrt{6} \end{cases}$$

(شهریور ۹۴)

۸۲- تحقیق کنید آیا دو تابع  $f(x) = \frac{1}{x} + 3$  ,  $g(x) = \frac{1}{x-3}$  وارون یکدیگرند؟

پاسخ: اولاً تابع  $f(x)$  یک به یک است چون

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow \frac{1}{x_1} + 3 = \frac{1}{x_2} + 3 \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

حال معکوس آن را به دست می‌آوریم.

$$y = \frac{1}{x} + 3 \Rightarrow \frac{1}{x} = y - 3 \Rightarrow x = \frac{1}{y-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x-3} = g(x)$$

۸۳- وارون پذیری تابع  $y = \frac{2x+1}{x-1}$  را بررسی کنید و در صورت امکان ضابطه‌ی تابع وارون را به دست آورید. (شهریور ۹۴ خارج کشور)

پاسخ:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \Rightarrow (2x_1+1)(x_2-1) = (2x_2+1)(x_1-1)$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 2x_2x_1 - 2x_2 + x_1 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

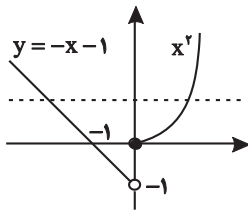
$$y = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow yx - y = 2x + 1 \Rightarrow yx - 2x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

(خرداد ۹۴)

۸۴- به کمک رسم نمودار ثابت کنید تابع زیر وارون پذیر نیست.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x-1 & x < 0 \end{cases}$$

پاسخ: مطابق شکل خطوط افقی  $y = k \geq 0$  منحنی تابع را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین تابع یک به یک نیست پس معکوس پذیر هم نخواهد شد.



$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1} \quad (1)$$

(۲) در توابع‌ای با ضابطه‌ی  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  (توابع هموگرافیک) اگر  $a+d=0$  باشد، آن‌گاه تابع و تابع معکوس با هم برابرند.

$$f(x) = f^{-1}(x) \quad \text{یعنی:}$$

(شهریور ۹۰)

۸۵- اگر  $f(x) = 4x - 3$  ،  $g(x) = x + 2$  تابع  $(g \circ f)^{-1}$  را حساب کنید.

پاسخ:

$$g(x) = x + 2 , f(x) = 4x - 3 \Rightarrow y = g \circ f = (4x - 3) + 2 = 4x - 1 \quad (g \circ f)^{-1} = \frac{x+1}{4}$$

یا

$$y = 4x - 3 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{4} , y = x + 2 \Rightarrow g^{-1}(x) = x - 2$$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \frac{x-2+3}{4} = \frac{x+1}{4}$$

۸۶- اگر  $f(x) = 1 + \sqrt{x}$  ,  $g(x) = x^2$  ,  $x > 0$  آن‌گاه ضابطه‌ی  $f^{-1} \circ g^{-1}$  کدام است؟

☑ پاسخ:

$$y = 1 + \sqrt{x} \Rightarrow f^{-1}(x) = (x-1)^2, \quad g(x) = x^2 \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{x} \Rightarrow$$

$$g^{-1} \circ f^{-1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| \xrightarrow{x > 0 \Rightarrow f(x) \geq 1 \Rightarrow D_{f^{-1}} = [1, +\infty)} \rightarrow g^{-1} \circ f^{-1} = \sqrt{(x-1)^2} = x-1$$

۸۷- تابع با ضابطه  $y = \frac{\sqrt{4x-4} + \Delta x}{6}$  منحنی تابع معکوسش را در نقطه‌ی ای با کدام طول قطع می‌کند .

$$\frac{3}{2} \quad (4) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

☑ پاسخ:

تابع داده شده تابع صعودی است ( چرا ؟ ) پس بجای حل معادله  $f = f^{-1}$  معادله  $f(x) = x$  را حل می‌کنیم .

$$x = \frac{\sqrt{4x-4} + \Delta x}{6} \Rightarrow \sqrt{4x-4} = x \Rightarrow 4x-4 = x^2 \Rightarrow (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

۸۸- اگر دامنه تابع  $f(x) = \frac{2}{x^2+3}$  بازه  $[-1, 1]$  در نظر گرفته شود، دامنه تابع  $y = f^{-1}(x+2)$  کدام است ؟

$$\left[ \frac{1}{2}, 1 \right] \quad (1) \quad \left[ -1, \frac{1}{2} \right] \quad (2) \quad \left[ \frac{-3}{2}, -1 \right] \quad (3) \quad \left[ \frac{-1}{2}, 1 \right] \quad (4)$$

☑ پاسخ:

۸۹- تابع  $f(x) = \frac{2}{x^2+3}$  تابعی اکیداً نزولی است و دامنه این بازه را  $[-1, 1]$  داده پس :

$$\frac{1}{2} \leq x+2 \leq 1 \Rightarrow \frac{-3}{2} \leq x \leq -1 \Rightarrow D_{f^{-1}(x+2)} = \left[ \frac{-3}{2}, -1 \right]$$

۹۰- اگر  $f(x) = \frac{x-24}{8}$  ,  $g(x) = x^2$  باشد مقادیر  $(f \circ g)^{-1}(5)$  ,  $(f^{-1} \circ f^{-1})(6)$  را تعیین کنید .

☑ پاسخ:

$$g(x) = x^2 \Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{x}, \quad f(x) = \frac{x-24}{8} \Rightarrow f^{-1}(x) = 8x+24$$

$$y = f(g(x)) = f(x^2) = \frac{1}{8}x^2 - 3 \Rightarrow y+3 = \frac{1}{8}x^2 \Rightarrow x = \sqrt{8(y+3)} \Rightarrow (f \circ g)^{-1} = \sqrt{8x+24}$$

$$1) (f \circ g)^{-1}(x) = \sqrt{8x+24} \Rightarrow (f \circ g)^{-1}(5) = \sqrt{8 \times 5 + 24} = \sqrt{64} = 8$$

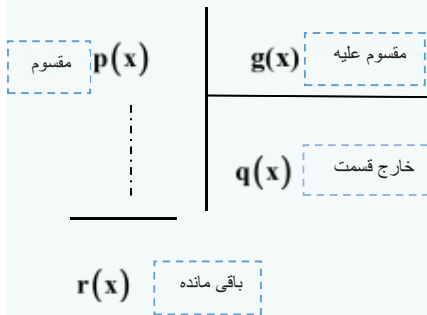
$$2) (f^{-1} \circ f^{-1})(6) = f^{-1}(f^{-1}(6)) = f^{-1}(8 \times 6 + 24) = f^{-1}(72) = 8 \times 72 + 24 = 600$$

## بخش پذیری

قضیه‌ی تقسیم: فرض کنید  $g(x), p(x)$  دو چند جمله‌ای باشند. در این صورت چند جمله‌ای‌های منقسم به فرد  $q(x), r(x)$  وجود دارند، به طوری که:

$$p(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

$p(x)$ ،  $g(x)$ ،  $q(x)$ ،  $r(x)$  را مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج قسمت و باقی‌مانده می‌نامند.



$$\begin{array}{r|l} x^5 + 3x^2 - 3x^2 + 3x - 5 & \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3} \\ \hline -(-x^5 + x^2) & \frac{x^5}{x^2} = x^3 \\ \hline 2x^2 - 3x^2 + 3x - 5 & \frac{2x^2}{x^2} = 2x \\ \hline -(2x^2 + 2x) & \frac{-3x^2}{x^2} = -3 \\ \hline -3x^2 + x - 5 & \\ \hline -(-3x^2 - 3) & \\ \hline x - 2 = r(x) & \end{array}$$

۹۱- در تقسیم  $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$  بر عبارت  $(x-2)$  مراحل زیر را تکمیل کنید آیا  $f(x)$  بر  $(x-2)$  بخش پذیر است؟ چرا؟

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x + 2 \quad | \quad x-2 \\ \hline -(3x^2 - 6x) \quad \dots x + \dots \\ \hline x + 2 \\ \hline -(x-2) \\ \hline R = \dots \end{array}$$

☑ پاسخ:

با توجه به روند تقسیم چون باقی مانده صفر نشده پس  $f$  بر  $x-2$  بخش پذیر نیست

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x + 2 \quad | \quad x-2 \\ \hline -(3x^2 - 6x) \quad | \quad 3x + 1 \\ \hline x + 2 \\ \hline -(x-2) \\ \hline R = 4 \end{array}$$



۱) اگر مقسوم  $p(x)$  از درجه‌ی  $n$  و مقسوم علیه  $g(x)$  از مرتبه‌ی  $m$  باشد، آن‌گاه خارج قسمت  $q(x)$  از درجه‌ی  $(n-m)$  و باقی‌مانده  $r(x)$  حداکثر از درجه‌ی  $(m-1)$  است.

مماسه‌ی باقی مانده‌ی تقسیم  $p(x)$  بر  $(x-a)$

اگر  $p(x)$  یک چند جمله‌ای آن‌گاه باقی‌مانده‌ی تقسیم،  $p(x)$  بر  $g(x) = x - a$  برابر است با:

$$p(a) = R(a)$$

$$\begin{array}{l} P(x) \\ \hline Q(x) \end{array} \Rightarrow P(x) = Q(x)(x-a) + R(x)$$

$$R(x)$$

که اگر  $p(a) = 0$  باشد، آن‌گاه  $p(x)$  بر  $(x-a)$  بخش‌پذیر است. در این حالت  $(x-a)$  فاکتور یا عامل  $p(x)$  گفته می‌شود.



$p(a) = 0$  به لحاظ شهودی و هندسی، یعنی نمودار چند جمله‌ای  $p(x)$  محور  $x$  ها را در نقطه‌ای به طول  $x = a$  قطع می‌کند.

۹۲- باقیمانده‌ی تقسیم  $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - x + 4$  بر  $x+1$  برابر با ..... است. (خرداد ۹۴)  پاسخ:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow R = p(-1) = 5(-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) + 4 = 2$$

۹۳- اگر باقیمانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای  $p(x) = 2x^2 + mx + 2$  بر  $x+1$  برابر ۲ باشد، باقیمانده‌ی تقسیم آن بر  $x-1$  را بیابید. (دی ماه ۹۲)  پاسخ:

$$x+1=0 \rightarrow x=-1 \Rightarrow p(-1)=2 \Rightarrow 2(-1)^2 + m(-1) + 2 = 2 \Rightarrow m=2$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow p(1)=R \Rightarrow R = 2(1)^2 + 2(1) + 2 = 6$$

۹۴- مقدار  $k$  را چنان بیابید که چند جمله‌ای  $p(x) = 2x^3 - kx^2 - x + 3$  بر  $x+1$  بخش‌پذیر باشد. (خرداد ۹۰)  پاسخ:

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow p(-1)=0 \Rightarrow 2(-1)^3 - k(-1)^2 - (-1) + 3 = 0 \Rightarrow k=2$$

چون گفته بخش پذیره



۱)  $P(x)$  را به صورت مرتب بنویسید.

۲)  $g(x)$  را مساوی صفر قرار دهید.  $g(x) = ax + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{a}$

۳) حال در  $P(x)$  به جای  $x$  ها  $\frac{-b}{a}$  قرار دهید. عدد حاصل باقی‌مانده‌ی تقسیم  $P$  بر  $g$  می‌باشد.  $P\left(\frac{-b}{a}\right) = R$

۹۵- باقیمانده‌ی تقسیم  $P(x) = x^3 - 4x^2 + 2$  بر  $2x+1$  برابر با ..... است. (شهریور ۹۴)  پاسخ:

$$2x+1=0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2} \Rightarrow R = P\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 2 = \frac{7}{8}$$

(خرداد ۸۸)

۹۶- مقدار  $k$  را طوری تعیین کنید که عبارت  $۸x^2 + ۴x^2 - kx - ۸$  بر  $۲x - ۱$  بخش پذیر باشد؟

پاسخ:

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - k\left(\frac{1}{2}\right) - 8 = 0 \Rightarrow k = -12$$

۹۷- در چند جمله‌ای  $P(x) = x^2 - ax + 1$  مقدار  $a$  را طوری تعیین کنید که یک جواب معادله برابر ۱ باشد. (خرداد ۹۳- خارج کشور)

$$p(1) = (1)^2 - a(1) + 1 = 0 \Rightarrow a = 2$$

پاسخ:  یک جواب معادله ۱ باشد، یعنی  $p(1) = 0$



تقسیم چند جمله‌ای  $p(x)$  بر  $ax^2 + bx + c$ :

چند جمله‌ای  $p(x)$  را بر حسب قوای  $x^2$  مرتب کرده و در  $p(x)$  به جای  $x^2$ ،  $x^2 = \frac{-b}{a}x - \frac{c}{a}$  را قرار می‌دهیم. باقی‌مانده به دست می‌آید.

۹۸- باقی مانده‌ی تقسیم عبارت  $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 1$  بر  $2x^2 + 3$  را تعیین کنید.

پاسخ:

$$2x^2 + 3 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{-3}{2} \quad P(x) = P\left(x^2 = \frac{-3}{2}\right) = 3x\left(\frac{-3}{2}\right) + 2\left(\frac{-3}{2}\right) - x + 1 = \frac{-9}{2}x - 3 - x + 1 = \frac{-11}{2}x - 2$$



اگر باقیمانده‌ی تقسیم  $p(x)$  بر  $(x-a)$ ،  $(x-b)$  به ترتیب  $R_1$ ،  $R_2$  باشد، باقیمانده‌ی تقسیم  $p(x)$  بر  $(x-a)(x-b)$  برابر است با:  $R(x) = Ax + B$  به طوری که ضرایب  $A, B$  از دستگاه زیر به دست می‌آید.

$$p(x) = (x-a)(x-b) + Ax + B \quad \begin{cases} A(a) + B = R_1 \\ A(b) + B = R_2 \end{cases}$$

۹۹- اگر باقی مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای  $f(x)$  بر  $x+2$ ،  $x-3$  به ترتیب ۱، ۲ باشد باقی‌مانده‌ی تقسیم  $f$  بر  $x^2 - x - 6$  را حساب کنید.

(خرداد ۸۷)

پاسخ:

$$(x+2)(x-3) = x^2 - x - 6 \Rightarrow f(x) = (x+2)(x-3)q(x) + Ax + B$$

$$R(x) = Ax + B \Rightarrow \begin{cases} A(-2) + B = 1 \\ A(3) + B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ B = \frac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow R(x) = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$$



۱۰۰-  $p(x)$  یک چند جمله‌ای درجه‌ی ۲ است و ضریب بزرگ‌ترین توان آن ۱ می‌باشد.  $p(x)$  را به گونه‌ای تعیین کنید که شرایط روبه رو صدق کند.  
(خرداد ۹۲)

$$p(1) = 1, \quad p(2) = 3$$

پاسخ:

$$p(x) = x^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} p(1) = (1)^2 + b(1) + c = 1 \\ p(2) = (2)^2 + b(2) + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 0 \\ 2b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\therefore \Rightarrow p(x) = x^2 - x + 1$$

۱۰۱- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای  $p(x)$  بر  $x$  مساوی ۲ و بر  $x+2$  مساوی ۱ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم  $p(x)$  بر  $x^2 + 2x$  را به دست آورید.  
(شهریور ۹۰)

پاسخ:

$$p(x) = (x^2 + 2x)q(x) + ax + b \Rightarrow p(0) = 2 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow p(-2) = 1 \Rightarrow -2a + 2 = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow R(x) = \frac{1}{2}x + 2$$

۱۰۲- نشان دهید که عبارت  $x-2$  یک فاکتور (عامل)  $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$  است. سپس معادله‌ی  $f(x) = 0$  را حل کنید.

پاسخ:

$$x-2=0 \rightarrow x=2 \quad f(2) = (2)^3 + 2(2)^2 - 5(2) - 6 = 0 \quad \text{چون } f(2) \text{ صفره پس } f \text{ بر } x-2 \text{ بخش پذیر است}$$

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x-2)(x^2 + 4x + 3)$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow (x-2)(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$x-2=0 \rightarrow x=2 \quad x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$(x+1)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

چون  $f$  بر  $(x-2)$  بخش پذیر است پس می‌توان از آن  $(x-2)$  را فاکتور گرفت. برای این کار  $f$  را بر  $(x-2)$  تقسیم می‌کنیم و خارج قسمت را به دست می‌آوریم.

۱۰۳- مقدار  $k$  را طوری تعیین کنید که  $x=2$  یک جواب معادله‌ی  $f(x) = x^3 - 2x^2 + kx + 2 = 0$  باشد، سپس سایر جواب‌ها را تعیین کنید.

پاسخ:

$$f(2) = 0 \Rightarrow 8 - 8 + k(2) + 2 = 0 \Rightarrow k = -1$$

$$f(x) = (x-2)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = \pm 1$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x} = x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{-(x^2 - 2x^2)} \Bigg| \frac{x-2}{x^2-1}$$

$$\frac{-x}{x} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-x+2}{-(-x+2)}$$

۱۰۴- مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که عبارت  $p(x) = x^2 - 2x^2 + ax + b$  بر  $g(x) = x^2 - 3x + 2$  بخش پذیر باشد.

پاسخ:

$$g(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \quad (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$p(1) = 0 \Rightarrow 1 - 2 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = 1$$

$$p(2) = 0 \Rightarrow 4 - 8 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = 4$$



اگر باقی مانده تقسیم  $f(x)$  و  $g(x)$  بر  $h(x)$  به ترتیب  $R_1$  و  $R_2$  باشند، آن گاه باقی مانده تقسیم  $f \times g$  بر  $h$  برابر است با باقی مانده تقسیم  $R_1 \times R_2$  بر  $h$ .  
توجه کنید اگر درجه  $R_1 \times R_2$  از  $h$  کمتر باشد، باقی مانده همان  $R_1 \times R_2$  خواهد بود.

۱۰۵- باقی مانده تقسیم  $f$  و  $g$  بر عبارت  $x^2 - x + 1$  به ترتیب  $x - 1$  و  $x + 1$  می باشد. آن گاه باقی مانده تقسیم  $f \times g$  بر عبارت  $x^2 - x + 1$  را به دست آورید.

$$R_1 \times R_2 = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 1 \\ -(x^2 - x + 1) \\ \hline x - 2 \end{array}$$

پاسخ:

جواب

### تمرین باشد

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

برای یک عدد حقیقی  $a$  و عدد طبیعی  $n$  داریم:

از طرفی اگر  $n$  عدد طبیعی فرد باشد با تبدیل  $a$  به  $-a$  خواهیم داشت:

$$a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots - a + 1)$$

$$a^n - b^n = (a-b)q \Rightarrow a-b \mid a^n - b^n \quad n \text{ می تواند هر عدد طبیعی باشد}$$

$$\text{if } n = 2k + 1 \Rightarrow a+b \mid a^n + b^n \quad n \text{ باید عدد طبیعی فرد باشد}$$

$$\text{if } n = 2k \Rightarrow a+b \mid a^n - b^n \quad n \text{ باید عدد طبیعی زوج باشد}$$

$$\nexists n \in \mathbb{N} \Rightarrow a-b \mid a^n + b^n \quad n \text{ عدد طبیعی وجود ندارد}$$



این سوالات را با توضیحات داده شده می توانی حل کنی.

◀ مقدار  $m$  را چنان بیابید که چند جمله ای  $p(x) = x^2 - mx^2 - x + 4$  بر  $2x + 1$  بخش پذیر باشد.

◀  $m$  و  $n$  را چنان بیابید که چند جمله ای  $mx + n + 3x^3 - x^4$  بر  $x^2 - 5x + 6$  بخش پذیر باشد. (تمرین کتاب درسی)

◀ نمودار تابع  $f(x) = 2x^2 - 5x^2 - x + m$  محور  $x$  ها را در نقطه ای به طول ۲ قطع می کند. طول های دو نقطه تلاقی دیگر آن با محور  $x$  ها را تعیین کنید.

۱۰۶- جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) تابع  $y = (x+1)^2 |x+1|$  در بازه  $(-\infty, a]$  نزولی است. حداکثر مقدار  $a$  ..... است.

ب) باقی مانده ی تقسیم چند جمله ای  $f(x) = -2x^2 - 4x + 8$  بر  $x + 3$  برابر است با .....

ج) اگر  $k > 1$  باشد نمودار  $y = kf(x)$  از ..... نمودار  $y = f(x)$  حاصل می شود.

پاسخ:

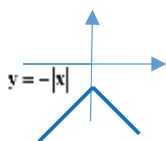
$$y = (x+1)^2 |x+1| = \begin{cases} (x+1)^3 & x \geq -1 \\ -(x+1)^3 & x < -1 \end{cases}$$



الف) ۱-

ب) ۲ چون  $f(x) = -2x^2 - 4x + 8 \Rightarrow R = f(-3) = -2(9) - 4(-3) + 8 = 2$

ج) انبساط عرضی یا کشش عرضی: چون  $k$  بزرگتر از ۱ و پشت  $f$  است انبساط عرضی داریم.



۱۰۷- جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) تابع  $f(x) = \log_{5/8} 2^x$  صعودی .....

ب) برای رسم تابع  $f(kx)$  کافی است طول نقاط نمودار تابع  $f(x)$  را در ..... ضرب کنیم.

پاسخ:

الف) نیست چون:  $f(x) = \log_{5/8} 2^x = \log_{1/2} 2^x = -\log_2 2^x = -x$  خطی با شیب منفی است

ب)  $\frac{1}{k}$

۱۰۸- درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید ؟

الف) تابع  $f(x) = -x^2 + 3x$  روی بازه ی  $(-\infty, 3]$  اکیداً صعودی است.

ب) تابع  $y = x^2 - 1$  روی بازه ی  $[0, 1]$  بالاتراز تابع  $y = x^3 - 1$  قرار دارد.

ج) باقیمانده ی تقسیم  $f(x) = 2x^5 - 3x^2 - 2x + 4$  بر  $x + 1$  برابر صفر است.

پاسخ:

الف) نادرست چون راس سهمی  $x = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$  و بعد اون تابع صعودیه

ب) درست چون:  $x^3 < x^2$  if  $x \in (0, 1)$

ج) نادرست چون:  $f(-1) = 7 \neq 0$

۱۰۹ جاهای خالی را پر کنید.

الف) تابعی که فقط صعودی یا فقط نزولی باشد را تابع ..... می گویند.

ب) برای رسم تابع  $f(kx)$  کافی است طول نقاط نمودار تابع  $f(x)$  را در ..... ضرب می کنیم.

ج) وارون تابع:  $f(x) = (x-1)^2, x \leq 1$  تابع ..... می باشد.

۱)  $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 1$

۲)  $f^{-1}(x) = -\sqrt{x} + 1$

پاسخ:

الف (یکنوا

ب)  $\frac{1}{k}$

ج (گزینه ۲  $y = (x-1)^2, x \leq 1 \quad \sqrt{y} = |x-1| \Rightarrow \sqrt{y} = -x+1 \Rightarrow x = -\sqrt{y}+1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\sqrt{x}+1$

۱۱۰- جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید .

الف ( نمودار تابع  $y = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$  را می توان با ..... واحد انتقال نمودار  $y = x^3$  به سمت ..... رسم کرد .  
ب ( برای آن که تابع  $f(x) = mx + n$  در تمام دامنه اش هم صعودی و هم نزولی باشد مقدار  $m$  باید برابر ..... باشد .

پاسخ:

الف ( ۲ - به سمت چپ :  $y = x^3 \Rightarrow y = (x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

ب ( صفر : خطی افقی می شود که در تعریف صعودی و نزولی صدق می کند  $y = mx + n \xrightarrow{m=0} y = n$

۱۱۱- کدام تابع زیر اکیداً نزولی است ؟

۴  $f(x) = \sqrt{-x}$

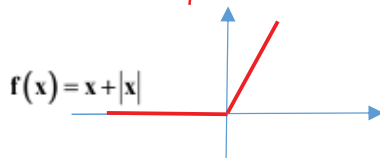
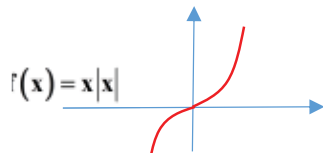
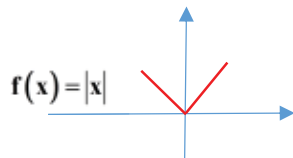
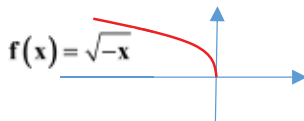
۳  $f(x) = x + |x|$

۲  $f(x) = x|x|$

۱  $f(x) = |x|$

پاسخ:

گزینه چهار تابعی نزولی است





## ریاضیات به سبک روحانی