



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

مجموع جملات دنباله حسابی (عددی)



مجموع n جمله ای اول یک دنباله حسابی:

بچه ها! می شه حاصل $۱+۲+۳+...+۹۸+۹۹+۱۰۰$ رو به دست بیارید؟

آقا اجازه! اگه بخوایم این ۱۰۰ جمله رو دونه دونه با هم جمع کنیم، کلی طول می کشه!

کمی فکر کنید، شاید راهی پیدا کردید؟

آقا اجازه! اگه جمله ی اول و آخر، و یکی مونده به آخر و... رو در کنار هم قرار بدیم، اون موقع:

$$\underbrace{1+2+3+\dots+98+99+100}_{\text{جمله } 100} = \underbrace{(1+100) + (2+99) + (3+98) + \dots}_{\text{پرانز } 50 \text{ تا } 50} = \underbrace{101+101+101+\dots}_{(101) \text{ تا } 50} = 50(101) = 5050$$

آخرین عزیزم.

حالا به سوال دیگه: آیا تساوی رو بر و رو قبول دارین؟ $a_1 + a_n = a_r + a_{n-r} = a_r + a_{n-r}$

بله آقا، قبول داریم. علت درستی این تساوی اینه که مجموع اندیس های هر قسمت از این تساوی با هم برابرن، یعنی:

$$(1) + (n) = (2) + (n-1) = (3) + (n-2) \rightarrow a_1 + a_n = a_r + a_{n-r} = a_r + a_{n-r}$$

بچه ها! حالا اگه موافق باشید، برای مجموع n جمله ای اول یک دنباله ی حسابی رابطه ای رو ایجاد کنیم:

$$S_n = \underbrace{a_1 + a_r + a_r + \dots + a_{n-r} + a_{n-1} + a_n}_{\text{جمله } n} =$$

$$S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_r + a_{n-1}) + (a_r + a_{n-2}) + \dots + ()}_{\text{پرانز } \frac{n}{2} \text{ تا } \frac{n}{2}} \xrightarrow{\text{میدونیم: } a_1 + a_n = a_r + a_{n-1} = a_r + a_{n-2} = \dots}$$

$$S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n)}_{\text{پرانز } \frac{n}{2} \text{ تا } \frac{n}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)} \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} \boxed{S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)}$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(a_1 + a_{20})$$

مثال: \Rightarrow

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d)$$

مثال: \Rightarrow

$$S_{75} = \frac{75}{2}(a_1 + a_{75})$$

$$S_{75} = \frac{75}{2}(2a_1 + 74d)$$

سؤال: در یک دنباله ی حسابی جمله ی اول برابر ۳ و جمله ی چهارم و پنجم برابر ۹۷ می باشد. مجموع چهل و پنج

جمله ی اول کدام است؟

$$\text{داده ها: } \begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{45} = 97 \end{cases} \Rightarrow S_{45} = \frac{45}{2}(a_1 + a_{45}) = \frac{45}{2} \times (3 + 97) = 45 \times 50 = 2250$$

سؤال ۲: در یک دنباله‌ی عددی $a_3 = 5$ و $a_7 = 29$ می‌باشد. مجموع ۲۰ جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

داده‌ها: $\begin{cases} a_3 = 5 \\ a_7 = 29 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{a_7 + a_3}{7 - 3} = \frac{29 - 5}{4} = 6 \Rightarrow d = 6$

از طرفی $a_3 = 5 \Rightarrow a_1 + 2d = 5 \Rightarrow a_1 = -7 \rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 10(-14 + 114) = 1000$

درجه توابع a_n و S_n در یک دنباله حسابی:

په‌ها! همون طور که می‌دونید در یک دنباله‌ی حسابی رابطه‌ی $a_n = a_1 + (n-1)d$ برقراره. حالا این رابطه رو مرتب می‌کنم:

تابعی درجه‌ی یک با شیب d
 $a_n = a_1 + nd - d \Rightarrow a_n = d \cdot n + \boxed{a_1 - d} \Rightarrow \boxed{a_n = d(n) + k}$

همونطور که می‌بینید، قدر نسبت دنباله، به جای ضریب n قرار گرفته.

سؤال ۳: جمله‌ی عمومی دنباله‌های عددی زیر را بیابید.

$3, 7, 11, \dots \Rightarrow a_n = 4n + K \xrightarrow{K=-1} \boxed{a_n = 4n - 1}$

$9, 6, 3, \dots \Rightarrow a_n = -3n + K \xrightarrow{K=12} \boxed{a_n = -3n + 12}$

اما په‌ها! با توجه به این که در دنباله‌ی حسابی، رابطه $S_n = \frac{n}{2}(2a_1) + (n-1)d$ برقراره، آیا می‌تونید بگید S_n بعد از استاندارد شدن به چه شکلی درمی‌آد؟

$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + nd - d) = \frac{n}{2}(nd) + \frac{n}{2}(2a_1 - d) = \left(\frac{d}{2}\right)n^2 + \frac{2a_1 - d}{2}n \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{d}{2}n^2 + Kn}$

سؤال ۴: در یک دنباله‌ی حسابی $S_n = n^2 + 2n$ می‌باشد. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

روش تشریحی: $\begin{cases} S_1 = 3 \Rightarrow a_1 = 3 \\ S_2 = 8 \Rightarrow a_1 + a_2 = 8 \Rightarrow a_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow d = a_2 - a_1 \Rightarrow d = 2$

روش تستی: $S_n = \frac{1}{2}n^2 + 2n \Rightarrow \boxed{d = 2}$

سؤال ۵: در یک دنباله‌ی حسابی $S_n = \frac{3n^2}{2} + n$ می‌باشد. جمله‌ی پنجاه و یکم این دنباله چیست؟

$S_n = \frac{3}{2}n^2 + n \Rightarrow \begin{cases} S_1 = \frac{3}{2} + 1 \Rightarrow a_1 = \frac{5}{2} \\ \frac{d}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow d = 3 \end{cases} \Rightarrow a_{51} = a_1 + 50d = \frac{5}{2} + 150 = \boxed{a_{51} = 152.5}$

رابطه‌ی بین a_n و S_n در یک دنباله:

بچه‌ها! همون طور که می‌دونید در یک دنباله، « S_n یعنی مجموع n جمله‌ی اول اون دنباله» بنابراین:

$$S_1 = a_1 \xrightarrow{\text{تفاضل دو تساوی}} S_2 - S_1 = a_2$$

$$S_2 = a_1 + a_2 \xrightarrow{\text{تفاضل دو تساوی}} S_3 - S_2 = a_3$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

⋮

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$


$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$\rightarrow \boxed{S_n - S_{n-1} = a_n}$$

$$S_{10} - S_9 = a_{10}$$


$$S_{53} - S_{52} = a_{53}$$

مثال: ↷

سؤال ۶: یک دنباله حسابی $S_n = n^2 + 4n$ می‌باشد. جمله‌ی عمومی این دنباله (یعنی a_n) را به دست آورید. 

$$\text{روش اول: } a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + 4n) - ((n-1)^2 + 4(n-1)) = n^2 + 4n - (n^2 - 2n + 1 + 4n - 4) = 2n + 3$$

$$\text{روش دوم: } S_n = n^2 + 4n \Rightarrow \begin{cases} S_1 = 5 \Rightarrow \boxed{a_1 = 5} \\ \frac{d}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{d = 2} \end{cases} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 5 + (n-1)2 \Rightarrow \boxed{a_n = 2n + 3}$$

سؤال ۷: در یک دنباله‌ی حسابی $S_n = 2n^2 - 3n$ می‌باشد. حاصل $a_6 + a_7 + \dots + a_{10}$ کدام است؟ 


بچه‌ها! کافیست $a_1 + \dots + a_{10}$ رو به خواسته‌ی مسئله، اضافه و کم کنید تا S_{10} ایجاد بشه:

$$\boxed{a_1 + \dots + a_{10}} + a_6 + a_7 + \dots + a_{10} - \boxed{a_1 + \dots + a_5} = S_{10} - S_5 = [2(10)^2 - 3(10)] - [2(5)^2 - 3(5)]$$


$$= 170 - 35 = 135$$

اگر در یک دنباله حسابی با n جمله، تعداد جمله‌ها فرد و جمله وسط k باشد آنگاه: $S_n = nK$



سؤال ۸: در یک ۹ ضلعی زوایای داخلی، دنباله حسابی می‌سازند. زاویه وسطی این ۹ ضلعی چقدر است؟ 

$$\text{مجموع زوایای یک } n \text{ ضلعی محدب} = (n-2) \times 180 \rightarrow S_9 = 7 \times 180 = 9K \rightarrow K = \frac{7 \times 180}{9} = 140$$

سؤال ۹: در یک دنباله حسابی $S_4 = 54$ و $S_8 = 60$ ، قدرنسبت این دنباله کدام است؟ (آزاد ۷۸) 

$$S_8 = 60 \rightarrow \frac{8}{2} [2a_1 + 4d] = 60 \rightarrow 2a_1 + 4d = 24 \rightarrow a_1 + 2d = 12$$

$$S_4 = 54 \rightarrow \frac{4}{2} [2a_1 + 2d] = 54 \rightarrow 2a_1 + 2d = 27$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_1 = 18 \\ d = -3 \end{cases}$$

سؤال ۱۰: مجموع هشت جمله اول از دنباله حسابی برابر ۲ و جمله یازدهم آن برابر ۱۰ می باشد. قدرنسبت این دنباله کدام است؟ (سراسری ۷۹)

$$\begin{cases} S_8 = 2 \\ a_{11} = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8}{2}[2a_1 + 7d] = 2 \\ a_1 + 10d = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4[2a_1 + 7d] = 2 \\ a_1 + 10d = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 7d = \frac{1}{2} \\ a_1 + 10d = 10 \end{cases} \rightarrow a_1 = -5, d = \frac{3}{2}$$

سؤال ۱۱: مجموع تمام اعداد طبیعی بخش پذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ کدام است؟ (سراسری ۸۱)

۱۰۲ = اولین عدد بخش پذیر بر ۶ بزرگتر از ۱۰۰
 ۱۹۸ = اولین عدد بخش پذیر بر ۶ بزرگتر از ۲۰۰
 ۱۰۲, ۱۰۸, ..., ۱۹۸

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 198 = 102 + (n-1)6 \rightarrow 96 = (n-1)6 \rightarrow n-1 = 16$$

$$n = 17 \rightarrow S_n = \frac{17}{2}(102 + 198) = 2550$$

سؤال ۱۲: در یک دنباله حسابی $S_n = n^2 + 2n$ مجموع جملات هفتم و هشتم و نهم چقدر است؟ (آزاد ۸۱)

$$a_7 + a_8 + a_9 = 3a_8$$

$$a_8 = S_8 - S_7 = 8^2 + 2(8) - (7^2 + 2(7)) = 64 + 16 - 49 - 14 = 80 - 63 = 17$$

$$3a_8 = 51$$

سؤال ۱۳: در یک دنباله عددی (حسابی) جمله پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله ماقبل خود به اندازه $\frac{1}{2}$ کمتر است.

مجموع ۱۰ جمله اول آن کدام است؟ (سراسری ۸۲)

$$\begin{cases} a_5 = 3 \\ d = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow a_1 + 4d = 3 \rightarrow a_1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 3 \rightarrow \begin{cases} a_1 - 2 = 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2a_1 + 9d] = 5\left[10 - \frac{9}{2}\right] = 5\left[\frac{20-9}{2}\right] = \frac{5 \times 11}{2} = \frac{55}{2}$$

سؤال ۱۴: در یک دنباله حسابی $a_7 + a_8 = 0$ و $a_7 = 4$ مجموع ۸ جمله اول چقدر است؟ (آزاد ۸۲)

$$a_7 + a_8 = 0 \rightarrow 2a_8 = 0 \rightarrow a_8 = 0, a_7 = 4$$

$$a_7 - a_8 = 2d \rightarrow 4 - 0 = 2d \rightarrow d = 2$$

$$a_8 = a_1 + 4d \rightarrow 0 = a_1 + 4(2) \rightarrow 0 = a_1 + 8 \rightarrow a_1 = -8$$

$$S_8 = \frac{8}{2}[2(-8) + (8-1)2] = 4[-16 + 14] = 4(-2) = -8$$

سؤال ۱۵: در یک دنباله حسابی با جمله اول a ، اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آنگاه به مجموع ۲۰ جمله اول چقدر افزوده خواهد شد؟ (سراسری ۸۳)

$$\text{در حالت اول: } S_{۲۰}^{\circ} = \frac{۲۰}{۲}[۲a + ۱۹d] = ۱۰[۲a + ۱۹d] = ۲۰a + ۱۹۰d$$

$$\text{در حالت دوم: } S_{۲۰}' = \frac{۲۰}{۲}[۲a + ۱۹(d+1)] = ۱۰[۲a + ۱۹d + ۱۹] = ۲۰a + ۱۹۰d + ۱۹۰ \Rightarrow S_{۲۰}' - S_{۲۰}^{\circ} = ۱۹۰$$

سؤال ۱۶: مجموع اعداد طبیعی فرد، بخش پذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۰۱ کدام است؟ (سراسری ۸۵)

$$۳, ۹, \dots, ۹۹ \rightarrow ۹۹ = ۳ + (n-1)۶ \rightarrow ۹۶ = (n-1)۶ \rightarrow n = ۱۷$$

$$S = \frac{۱۷}{۲}(۳ + ۹۹) = \frac{۱۷}{۲}(۱۰۲) = ۱۷ \times ۵۱$$

سؤال ۱۷: مجموع چند جمله از دنباله حسابی $۲, ۶, ۱۰, \dots$ برابر جمله سیزدهم است؟ (آزاد ۸۵)

$$a_1 = ۲, d = ۴$$

$$S_n = \frac{n}{۲}[۴ + (n-1)۴] = \frac{n}{۲}[۴n] = ۲n^۲$$

$$a_{۱۳} = ۲ + (n-1)۴ = ۲ + ۱۲ \times ۴ = ۵۰$$

$$۲n^۲ = ۵۰ \rightarrow n^۲ = ۲۵ \rightarrow n = ۵$$

سؤال ۱۸: اعداد $۱, x, y, \frac{۵}{۲}, \dots$ چهار جمله اول از یک دنباله حسابی هستند، $S_{۱۵}$ را بدست آورید؟ (سراسری ۸۶)

$$\begin{cases} a_4 = \frac{۵}{۲} \rightarrow a_4 - a_1 = ۳d \rightarrow \frac{۵}{۲} - ۱ = ۳d \rightarrow \frac{۳}{۲} = ۳d \rightarrow d = \frac{۱}{۲} \\ a_1 = ۱ \end{cases}$$

$$S_{۱۵} = \frac{۱۵}{۲}[۲a_1 + ۱۴d] = \frac{۱۵}{۲}[۲ + ۱۴] = ۱۵ \times ۸ = ۱۲۰$$

سؤال ۱۹: در دنباله حسابی $-۲۷, x, -۲۱, \dots$ مجموع جملات منفی کدام است؟ (آزاد ۸۷)

$$a_2 - a_1 = ۲d \rightarrow ۶ = ۲d \rightarrow d = ۳$$

$$a_n = -۲۷ + (n-1)۳ = ۳n - ۳۰ < ۰ \rightarrow n < ۱۰ \rightarrow n \leq ۹$$

$$S_9 = \frac{۹}{۲}[۲ \times (-۲۷) + ۸ \times ۳] = \frac{۹}{۲}[-۵۴ + ۲۴] = \frac{۹}{۲}[-۳۰] = ۹ \times (-۱۵) = -۱۳۵$$

سؤال ۲۰: اعداد $۱, x, y, \frac{۵}{۲}, \dots$ تشکیل یک دنباله حسابی می دهند. $S_{۱۵}$ کدام است؟ (خارج از کشور ۸۸)

$$a_4 - a_1 = ۳d \rightarrow \frac{۵}{۲} - ۱ = \frac{۳}{۲} = ۳d \rightarrow d = \frac{۱}{۲}$$

$$S_{۱۵} = \frac{۱۵}{۲} \left[۲ \times ۱ + ۱۴ \times \frac{۱}{۲} \right] = ۱۵ \rightarrow [۲ + ۷] = ۱۵ \times ۹ = ۱۳۵$$

سؤال ۲۱: در یک دنباله حسابی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع ۱۲ جمله اول آن است ($S_{20} = 3S_{12}$). اگر جمله سوم برابر ۶ باشد جمله دهم کدام است؟ (سراسری ۹۰)

$$\begin{cases} S_{20} = 3S_{12} \\ a_3 = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{20}{2}[2a_1 + 19d] = 3 \times \frac{12}{2}[2a_1 + 11d] \\ a_1 + 2d = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20a_1 + 190d = 6(6a_1 + 33d) \\ a_1 + 2d = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 190d = 36a_1 + 198d \\ a_1 + 2d = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 16a_1 + 8d = 0 \\ a_1 + 2d = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a_1 + d = 0 \\ a_1 + 2d = 6 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_1 = -2 \\ d = 4 \end{cases} \rightarrow a_{10} = a_1 + 9d = 34$$

سؤال ۲۲: اگر در یک دنباله حسابی $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله هفتم ختم به جمله هجدهم کدا است؟ (سراسری خارج از کشور ۹۰)

$$a_7 + a_8 + \dots + a_{18} = S_{18} - S_6 = \frac{18(18-15)}{6} - \frac{6(6-15)}{6} = 3 \times 3 - (-9) = 9 + 9 = 18$$

سؤال ۲۳: در یک دنباله حسابی $a_7 + a_{13} = 18$ است. مجموع ۱۹ جمله اول این دنباله چقدر است؟ (آزاد ۹۱)

$$a_7 + a_{13} = 18 \rightarrow 2a_{10} = 18 \rightarrow a_{10} = 9 \rightarrow a_1 + 9d = 9$$

$$S_{19} = \frac{19}{2}[2a_1 + 18d] = 19[a_1 + 9d] = 19 \times 9 = 171$$

سؤال ۲۴: در یک دنباله حسابی $S_8 - S_5 = 7$ ، حاصل جمع $a_4 + a_5 + \dots + a_{10}$ چقدر است؟ (آزاد ۹۱)

$$\frac{8}{2}[2a_1 + 7d] - \frac{5}{2}[2a_1 + 4d] = 7$$

$$8a_1 + \frac{56}{2}d - 5a_1 - 10d = 3a_1 + 18d = 7 \rightarrow \begin{cases} a_1 + 6d = 7 \\ \rightarrow a_7 = 7 \end{cases}$$

$$a_4 + a_5 + \dots + a_{10} = (a_4 + a_{10}) + (a_5 + a_9) + (a_6 + a_8) + a_7 = 2a_7 + 2a_7 + 2a_7 + a_7 = 7a_7 = 7 \times 7 = 49$$

سؤال ۲۵: در دنباله حسابی ۵, ۸, ۱۱, ..., ۱۱۰ میانگین جملات کدام است؟ (سنجش)

$$\text{میانگین} = \frac{S_n}{n} = \frac{\frac{n}{2}(a_1 + a_n)}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{5 + 110}{2} = \frac{115}{2}$$

سؤال ۲۶: در یک دنباله حسابی $S_n = \frac{n^2 - 3n}{3}$ ، $a_4 - a_7$ کدام است؟ (سنجش)

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{3} \rightarrow d = \frac{2}{3}, a_4 - a_7 = 6d = 6 \times \frac{2}{3} = 4$$

سؤال ۲۷: در یک دنباله حسابی $S_n = \frac{n(2n-3)}{4}$ ، جمله دهم کدام است؟ (سنجش)

$$a_{10} = S_{10} - S_9 = \frac{10(20-3)}{4} - \frac{9(18-3)}{4} = \frac{10 \times 17}{4} - \frac{9 \times 15}{4} = \frac{170}{4} - \frac{135}{4} = \frac{35}{4}$$

سؤال ۲۸: در یک دنباله حسابی با جمله عمومی $a_n = \frac{n}{2} + 3$ مجموع جملات شروع از یازدهم و ختم به جمله بیستم

کدام است؟ (سنجش)

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + \dots + a_{20} &= S_{20} - S_{10} = \frac{20}{2}(a_1 + a_{20}) - \frac{10}{2}(a_1 + a_{10}) \\ &= 10 \left(\frac{1}{2} + 3 + 10 + 3 \right) - 5 \left(\frac{1}{2} + 5 + 3 \right) \\ &= 10 \left(16 + \frac{1}{2} \right) - 5 \left(8 + \frac{1}{2} \right) = 107/5 \end{aligned}$$

سؤال ۲۹: مجموع ۱۵ جمله اول از دنباله $\dots, -10, -13, -16$ کدام است؟ (سنجش)

$$\begin{aligned} d &= -13 - (-16) = 3 \\ S_{15} &= \frac{15}{2} [2 \times (-16) + 14 \times 3] = \frac{15}{2} [-32 + 42] = \frac{15}{2} [10] = 15 \times 5 = 75 \end{aligned}$$

سؤال ۳۰: بین دو عدد ۴ و ۶ حداقل چند واسطه حسابی باید قرار داد تا مجموع کلیه اعداد این دنباله بزرگتر از ۵۰

باشد؟ (آموزش و پرورش)

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & & & & & & 6 \\ \downarrow & & & & & & \downarrow \\ a_1 & & & \dots & & & a_{m+2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{m+2}{2} (a_1 + a_{m+2}) = \frac{m+2}{2} (4+6) = 5(m+2) > 50 \\ \rightarrow m+2 > 10 &\rightarrow m > 8 \rightarrow m \geq 9 \end{aligned}$$

سؤال ۳۱: مجموع چند جمله از دنباله حسابی $\dots, -2, 5a-2, 2, 55$ برابر ۵۵ است؟ (آموزش و پرورش)

$$a + (5a - 2) = 2 \times 2 \rightarrow 6a - 2 = 4 \rightarrow 6a = 6 \rightarrow a = 1$$

$$a_n : 1, 2, 3, \dots \rightarrow d = 1$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2} [2 + (n-1)1] = 55 \rightarrow \frac{n}{2} [(n+1)] \rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 55 \rightarrow n(n+1) = 110 \\ &= 10 \times 11 \rightarrow n = 10 \end{aligned}$$

سؤال ۳۲: در یک دنباله حسابی اگر به جمله اول ۳ واحد اضافه کنیم و از قدر نسبت ۲ واحد کم کنیم در مجموع بیست جمله چه تغییری صورت می گیرد؟ (گزینه ۲)

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2a_1 + 19d] \rightarrow$$

$$S'_{20} = \frac{20}{2} [2(a_1 + 3) + 19(d - 2)] = \frac{20}{2} [2a_1 + 19d + 6 - 38] = \frac{20}{2} [2a_1 + 19d - 32]$$

$$= \frac{20}{2} [2a_1 + 19d] - 320 = S_n - 320$$

سؤال ۳۳: در یک دنباله حسابی $S_n = 2n^2 - 3n$ ، $a_4 + a_5$ کدام است؟ (گزینه ۲)

$$a_4 + a_5 = S_5 - S_4 = (2(5)^2 - 3(5)) - (2(4)^2 - 3(4)) = (50 - 15) - (18 - 9) = 35 - 9 = 26$$

سؤال ۳۴: در یک دنباله حسابی $S_n = 2n^2 - 4n$ است. حاصل $d - a_1$ کدام است؟ (گزینه ۲)

$$a_1 = S_1 = 2(1)^2 - 4(1) = 2 - 4 = -2$$

$$\frac{d}{2} = 2 \rightarrow d = 4 \rightarrow d - a_1 = 4 - (-2) = 6$$

سؤال ۳۵: در یک دنباله حسابی $S_8 = 72$ ، $S_6 = 30$ ، جمله چهارم این دنباله کدام است؟ (گزینه ۲)

$$\begin{cases} S_6 = 30 \rightarrow \frac{6}{2} [2a_1 + 5d] = 30 \rightarrow 2a_1 + 5d = 10 \\ \rightarrow 2d = 8 \rightarrow d = 4 \rightarrow 2a_1 + 5(4) = 10 \\ S_8 = 72 \rightarrow \frac{8}{2} [2a_1 + 7d] = 72 \rightarrow 2a_1 + 7d = 18 \\ \rightarrow 2a_1 = -10 \rightarrow a_1 = -5 \rightarrow a_4 = a_1 + 3d = -5 + 3(4) = 7 \end{cases}$$

سؤال ۳۶: یک دنباله حسابی دارای ۲۷ جمله است. اگر مجموع سه جمله وسط برابر ۱۵ باشد، آنگاه S_{27} کدام است؟

(گزینه ۲)

$$5 = \text{جمله وسط} \rightarrow \text{جمله وسط} \times 3 = 15 \Rightarrow \text{جمله وسط} \times 3 = \text{مجموع سه جمله وسط}$$

$$S_{27} = 27 \times 5 = 135$$

سؤال ۳۷: در یک دنباله حسابی با قدر نسبت d و جمله اول a_1 حاصل $\left\{ \frac{na_n}{S_n} \right\}$ به چه عددی همگرا می شود؟

(گزینه ۲)

$$\frac{n[a_1 + (n-1)d]}{\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]} = \frac{2[(a_1 + (n-1)d)]}{2a_1 + (n-1)d} \quad n \rightarrow \infty \rightarrow \frac{na_n}{S_n} \rightarrow 2$$

سؤال ۳۸: در یک دنباله حسابی $S_n = a_n$ ، قدر نسبت دنباله کدام است؟ (گزینه ۲)

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_2 \rightarrow a_1 + a_2 = a_2 \rightarrow a_1 = 0$$

$$S_3 = a_3 \rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = a_3 \rightarrow a_1 + a_2 = 0 \rightarrow a_2 = 0$$

اگر این روند را ادامه دهیم متوجه می شویم که تمام جملات دنباله صفر هستند پس: $d = 0$

سؤال ۳۹: در یک دنباله حسابی $S_6 = 6S_3$ ، حاصل $\frac{a_{10}}{a_4}$ کدام است؟

$$\frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = 6 \times \frac{6}{2}(2a_1 + 4d) \rightarrow 9(2a_1 + 8d)$$

$$= 36(2a_1 + 4d) \rightarrow 2a_1 + 8d = 4a_1 + 2 \cdot 4d$$

$$\rightarrow 6a_1 = -12d \rightarrow a_1 = -2d$$

$$\frac{a_{10}}{a_4} = \frac{a_1 + 9d}{a_1 + 3d} = \frac{-2d + 9d}{-2d + 3d} = \frac{7}{1} = 7$$

سؤال ۴۰: در دنباله حسابی $\log_2^{\sqrt{x}}, \log_2^x, \log_2^{x\sqrt{x}}$ مجموع ده جمله اول کدام است؟

ابتدا ببینیم که واقعاً دنباله حسابی است:

$$\log_2^{\sqrt{x}} + \log_2^{x\sqrt{x}} = 2 \log_2^x \rightarrow \log_2^{x^2} = \log_2^{x^2} \quad \checkmark$$

$$\text{قدر نسبت} = \log_2^x - \log_2^{\sqrt{x}} = \log_2^{\frac{x}{\sqrt{x}}} = \log_2^{\sqrt{x}}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 5(2 \log_2^{\sqrt{x}} + 9 \log_2^{\sqrt{x}})$$

$$= 5(11 \log_2^{\sqrt{x}}) = 55 \log_2^{\sqrt{x}} = \frac{55}{2} \log_2^x$$

سؤال ۴۱: در یک دنباله حسابی $15, -12, -9, \dots$ مجموع جملات طبیعی و دو رقمی کدام است؟

$$d = -12 - (-15) = 3 \rightarrow a_n = -15 + 3(n-1) = 3n - 18$$

اولین و آخرین و تعداد جملات طبیعی دو رقمی این دنباله رو مشخص می کنیم:

$$10 \leq a_n \leq 99 \rightarrow 10 \leq 3n - 18 \leq 99 \rightarrow 28 \leq 3n \leq 117 \rightarrow 9/000 \leq n \leq 39$$

$$\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} 10 \leq n \leq 39 \xrightarrow{\text{تعداد اعداد طبیعی}} 39 - 10 + 1 = 30$$

$$n = 10 \rightarrow a_{10} = 3(10) - 18 = 12$$

$$n = 39 \rightarrow a_{39} = 3(39) - 18 = 88$$

$$\text{جمله مورد نظر } 30 \rightarrow 12, 15, 18, \dots, 88 \rightarrow S_{30} = \frac{30}{2}(12 + 88) = 15 \times 100 = 1500$$

سؤال ۱۴۲: در یک دنباله حسابی $S_4 = 54$ و $S_{10} = 50$ باشند حاصل S_{14} کدام است؟

$$\begin{cases} S_4 = 54 \\ S_{10} = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = 54 \\ \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 9(a_1 + 4d) = 54 \\ 5(2a_1 + 9d) = 50 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 + 4d = 6 \\ 2a_1 + 9d = 10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = 14 \\ d = -2 \end{cases}$$

$$S_{14} = \frac{14}{2}(2a_1 + 13d) = 7(28 - 26) = 7 \times 2 = 14$$

سؤال ۱۴۳: در دنباله با جمله عمومی $a_n = 3n + 1$ حاصل $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{k-1}$ کدام است؟

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{k-1}}_{\text{تعداد جملات } k}$$

$$a_1 = 4, a_{k-1} = 3(2k-1) + 1 = 6k - 2$$

$$\text{مجموع} = \frac{k}{2}(a_1 + a_{k-1}) = \frac{k}{2}(4 + 6k - 2) = \frac{k}{2}(6k + 2) \rightarrow k(3k - 1) = 3k^2 + k$$

سؤال ۱۴۴: در بیست جمله اول از دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می باشد. جمله اول کدام است؟

$$\begin{cases} \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{19}}_{\text{جمله } 10} = 135 \\ \underbrace{a_2 + a_4 + \dots + a_{20}}_{\text{جمله } 10} = 150 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{10}{2}(a_1 + a_{19}) = 135 \\ \frac{10}{2}(a_2 + a_{20}) = 150 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5(2a_{10}) = 135 \rightarrow a_{10} = 13/5 \\ 5(2a_{11}) = 150 \rightarrow a_{11} = 15 \end{cases}$$

$$a_{11} - a_{10} = 1/5 = d$$

$$a_{11} = 15 \rightarrow a_1 + 10d = 15 \rightarrow a_1 + 10(1/5) = 15 \rightarrow a_1 + 15 = 15 \rightarrow a_1 = 0$$

سؤال ۱۴۵: در یک دنباله حسابی نزولی، مجموع ۵ جمله دوم برابر مجموع ۴ جمله اول است. این دنباله چند جمله مثبت دارد؟

$$\text{مجموع پنج جمله دوم} = S_{10} - S_5$$

$$\rightarrow S_{10} - S_5 = S_4$$

$$\rightarrow \frac{10}{2}[2a_1 + 9d] - \frac{5}{2}[2a_1 + 4d] = \frac{4}{2}[2a_1 + 3d] \rightarrow 5[2a_1 + 9d] - \frac{5}{2}[2a_1 + 4d] = 2[2a_1 + 3d]$$

$$\rightarrow 10a_1 + 45d - 5a_1 - 15d = 4a_1 + 6d \rightarrow 5a_1 + 30d = 4a_1 + 6d \rightarrow a_1 + 24d = 0 \rightarrow a_{25} = 0$$

از اونجایی که دنباله نزولیه و با توجه به اینکه جمله ۳۰ ام برابر صفر است پس ۲۹ جمله اول این دنباله مثبت و از جمله سی و یکم به بعد تمامی جملات منفی هستند.

سؤال ۱۴۶: اگر $S_n = 2n^2 + n$ باشد حاصل $a_1 + a_2 + \dots + a_{98} + a_{100}$ کدام است؟

$$S_n = 2n^2 + n \rightarrow \begin{cases} S_1 = a_1 = 3 \\ \frac{d}{2} = 2 \rightarrow d = 4 \end{cases} \rightarrow a_n = 3 + (n-1)4 = 4n - 1$$

$$\underbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_{98} + a_{100}}_{\text{جمله } 50} = (a_1 + a_{100}) + (a_2 + a_{98}) + \dots = \frac{50}{2} (a_1 + a_{100}) = \frac{50}{2} (2a_{50.5}) = 50 a_{50.5}$$

$$= 50 (4 \times 50.5 - 1) = 50 (202 - 1) = 50 (201) = 10050$$

سؤال ۱۴۷: یک دنباله حسابی $(\forall n \in N \ S_n = na_n)$ می‌باشد. قدر نسبت دنباله کدام است؟

$$\frac{n}{2} (a_1 + a_n) = na_n \rightarrow \frac{a_1 + a_n}{2} = a_n \rightarrow a_1 + a_n = 2a_n \rightarrow a_1 = a_n$$

$$\rightarrow a_1 = a_1 + (n-1)d \rightarrow (n-1)d = 0 \rightarrow d = 0$$

سؤال ۱۴۸: اعداد طبیعی را به شکل روبرو دسته بندی کرده ایم:

(۱), (۲, ۳), (۴, ۵, ۶, ۷), (۸, ۹, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۳, ۱۴, ۱۵), ...

مجموع جملات دسته هفتم چیست؟ (تعداد جملات دسته ها یک دنباله هندسی می‌سازند.)

(۱), (۲, ۳), (۴, ۵, ۶, ۷), (۸, ۹, ۱۰, ..., ۱۵), ...

↓ جمله ۱
↓ جمله ۲
↓ جمله ۳
↓ جمله ۸

اگر کمی دقت کنین به نکات زیر می‌رسید:

۱. تعداد جملات هر دسته با اولین جمله اون دسته برابر.

۲. اولین جمله هر دسته و دسته n ام برابر 2^{n-1} است.

۳. آخرین جمله دسته n ام برابر $2^n - 1$ است.

(شروع جمله $2^7 - 1 = 127$, ... , $2^7 - 1 = 64$) مجموع جملات دسته هفتم

$$\underbrace{64 + 65 + \dots + 127}_{\text{جمله } 64} = \frac{64}{2} (64 + 127) = 32 \times 191 = 6112$$



۱- در هر دنباله حسابی اگر داشته باشیم $\frac{S_m}{S_n} = \left(\frac{m}{n}\right)^2$ ، آنگاه: $d = 2a_1$

۲- اگر بین اعداد a و b به تعداد m واسطه عددی قرار دهیم به طوری که $m+2$ عدد حاصل جملات متوالی یک دنباله حسابی باشند مجموع این m عدد برابر $\frac{m}{2}(a+b)$ است.

۳- اگر n جمله اول یک دنباله حسابی را داشته باشیم بطوری که مجموع m جمله اول برابر S_1 و مجموع m جمله آخر

برابر S_r باشد. مجموع این n جمله برابر است با: $\frac{n}{2} \left(\frac{S_1 + S_r}{m} \right)$

۴- اگر $2n$ جمله اول یک دنباله حسابی را داشته باشیم بطوری که S_1 مجموع n جمله اول و S_r مجموع n جمله آخر باشند همواره داریم: $S_r - S_1 = n^2 d$



۵- اگر n عددی زوج باشد و مجموع n جمله اول یک دنباله را داشته و مجموع جملات مرتبه فرد (جملات اول و سوم و پنجم و...) را با S_1 و مجموع جملات مرتبه زوج را با S_2 نشان دهیم همواره داریم:

$$S_2 - S_1 = \frac{nd}{2}$$

۶- در هر دنباله حسابی اگر $S_m = n$ و $S_n = m$ و $(m \neq n)$ آنگاه داریم: $S_{m+n} = -(m+n)$

سؤال ۴۹: در یک دنباله حسابی مجموع جملات دهم و بیست و یکم ۱۰۰ است. در این صورت مجموع ۳۰ جمله اول

این دنباله کدام است؟

$$a_{10} + a_{21} = 100$$

$$S_{30} = \frac{30}{2}(a_1 + a_{30}) = \frac{30}{2}(a_{10} + a_{21}) = 15 \times 100 = 1500$$

سؤال ۵۰: در دنباله حسابی $5, 8, 11, \dots$ حداقل چند جمله را باید با هم جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

$$S_n = \frac{n}{2}[2 \times 5 + (n-1)3] > 500 \rightarrow \frac{n}{2}[10 + 3n - 3] > 500 \rightarrow n(3n + 7) > 1000$$

$$\rightarrow 3n^2 + 7n - 1000 > 0 \rightarrow \begin{cases} n > \frac{-7 + \sqrt{12049}}{6} \rightarrow n > \frac{-7 + 109.8}{6} \rightarrow n > 17.8 \\ n < \frac{-7 - \sqrt{12049}}{6} \text{ غ ق ق} \end{cases} \rightarrow n \geq 18$$

سؤال ۵۱: حاصل $1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1)$ را بدست آورید؟

$$a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 2k-1 = 1 + (n-1)2 \rightarrow 2k-2 = (n-1)2 \rightarrow 2(k-1) = (n-1)2 \rightarrow 2 = n$$

$$S_n = \frac{k}{2}(1 + 2k - 1) = \frac{k}{2}(2k) = k^2$$

سؤال ۵۲: در یک دنباله حسابی با قدر نسبت d حاصل $S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$ کدام است؟

$$S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} = S_n - S_{n-1} - S_{n-1} + S_{n-2} = S_n - S_{n-1} - (S_{n-1} - S_{n-2}) = a_n - a_{n-1} = d$$

سؤال ۵۳: در یک دنباله حسابی رابطه $2 + S_n = 3n + S_{n-1}$ برقرار است در این صورت S_n کدام است؟

$$S_n - S_{n-1} = 3n + 2 \rightarrow a_n = 3n - 2 \rightarrow a_1 = 3 - 2 = 1$$

$$\rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + 3n - 2) = \frac{n}{2}(3n - 1)$$

سؤال ۵۴: در یک دنباله حسابی با جمله عمومی a_n اگر $S_n = 3n^2 + kn$ باشد حاصل $a_{n+2} - a_{n+1}$ کدام است؟

$$\frac{d}{2} = 3 \rightarrow d = 6$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (n+3 - (n+1))d = 2d \rightarrow 2 \times 6 = 12$$

سؤال ۵۵: در یک دنباله حسابی $S_n = n^2 + 2n$ در این صورت مجموع جملات دورقمی این دنباله کدام است؟

$$\begin{cases} S_1 = a_1 = 3 \\ \frac{d}{2} = 1 \rightarrow d = 2 \rightarrow a_n = 3 + (n-1)2 = 2n+1 \end{cases}$$

$$\rightarrow a_n : 3, 5, 7, \dots$$

$$b_n = b_1 + (n-1)d \rightarrow 99 = 11 + (n-1)2$$

$$\rightarrow 88 = (n-1)2 + n - 1 = 44 \rightarrow n = 45$$

$$\rightarrow S_n = \frac{45}{2}(11+99) = \frac{45}{2} \times 110 = 45 \times 55$$

سؤال ۵۶: در یک دنباله حسابی ۱۰ جمله اول را حذف می‌کنیم تا دنباله جدیدی بدست آید. اگر مجموع آن ده جمله

با مجموع دو جمله اول دنباله جدید برابر باشد جمله چندم دنباله صفر خواهد شد؟

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = a_{11} + a_{12} \rightarrow S_{10} = a_{11} + a_{12} \rightarrow$$

$$\frac{10}{2}[2a_1 + 9d] = a_1 + 10d + a_1 + 11d \rightarrow 5[2a_1 + 9d] = 2a_1 + 21d \rightarrow 10a_1 + 45d = 2a_1 + 21d$$

$$\rightarrow 8a_1 + 24d \rightarrow a_1 + 3d = 0 \rightarrow a_7 = 0$$

سؤال ۵۷: آراین x تومان پول در خانه دارد. در پایان ماه اول $a_1 = \frac{x}{55}$ تومان آن را خرج می‌کند. در پایان ماه دوم

$a_2 = \frac{x}{55} + a_1$ تومان و در پایان ماه سوم $a_3 = \frac{x}{55} + a_2$ و ... پس از چند ماه آراین پول هایش تمام می‌شود؟

$$\begin{cases} a_1 = \frac{x}{55} \\ a_2 = \frac{x}{55} + a_1 = \frac{x}{55} + \frac{x}{55} = \frac{2x}{55} \\ a_3 = \frac{x}{55} + a_2 = \frac{x}{55} + \frac{2x}{55} = \frac{3x}{55} \\ \vdots \\ a_n = \frac{nx}{55} \end{cases}$$

$$S_n = x = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \rightarrow x = \frac{n}{2} \left(\frac{x}{55} + \frac{nx}{55} \right) \rightarrow x = \frac{n}{2} \cdot \frac{x}{55} \cdot (n+1) \rightarrow 1 = \frac{n(n+1)}{110}$$

$$\rightarrow n(n+1) = 110 \rightarrow 10 \times 11 \rightarrow n = 10$$

سؤال ۵۸: مجموع n جمله اول دنباله حسابی $\frac{2-n}{n}, \frac{5}{n}, \frac{8+n}{n}, \dots$ برابر ۸۵ است. n را بدست آورید؟

$$d = \frac{5}{n} - \frac{2-n}{n} = \frac{5-2+n}{n} = \frac{3+n}{n}$$

$$S_n = \frac{n}{2} \left[2 \left(\frac{2-n}{n} \right) + (n-1) \left(\frac{3+n}{n} \right) \right] = \frac{n(2-n)}{n} + \frac{n(n-1)(3+n)}{2n} = 85$$

$$\rightarrow 2-n + \frac{(n-1)(3+n)}{2} = 85 \rightarrow \frac{4-2n+n^2+2n-3}{2} = 85 \rightarrow \frac{n^2+1}{2} = 85$$

$$\rightarrow n^2+1=170 \rightarrow n^2=169 \rightarrow n=13$$

سؤال ۵۹: به بهای اجاره‌ی یک واحد مسکونی در چند سال هر ساله ۲۰۰۰۰ تومان اضافه شده است. اگر مجموع

اجاره‌های سال اول و آخر، معادل $\frac{1}{8}$ مجموع کل اجاره باشد، تعداد سالها چند است؟

$$d = 20000$$

$$a_1 + a_n = \frac{1}{8} S_n = \frac{1}{8} \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \rightarrow 1 = \frac{n}{16} \rightarrow n = 16$$

سؤال ۶۰: جسمی از بالای یک برج در حال سقوط است. اگر در ثانیه اول ۲ متر، در ثانیه دوم ۵ متر و در ثانیه سوم ۸

متر طی کند، با فرض اینکه افزایش طول مسیر طی شد در هر ثانیه یکنواخت باشد و جسم بعد از ۱۰ ثانیه به زمین برسد، ارتفاع برج چقدر است؟

$$2, 5, 8, \dots \quad d = 3$$

بنابراین ارتفاع برج برابر مجموع ۸ جمله اول است:

$$S_{10} = \frac{10}{2} [2 \times 2 + 9 \times 3] = 5 [4 + 27] = 5 \times 31 = 155$$

سؤال ۶۱: اگر $I: a_1, a_2, a_3, \dots$ و $II: b_1, b_2, b_3, \dots$ دنباله‌های حسابی باشد و $a_8 = 80 - b_8$ و $a_1 = 3b_1 = 60$ باشد

آنگاه مجموع بیست و پنج جمله اول دنباله $(a_1 + b_1), (a_2 + b_2), \dots$ کدام است؟

اگر قدرنسبت دنباله سوم را d فرض کنیم:

$$a_n + b_n = (a_1 + b_1) + (n-1)d \xrightarrow{n=8} a_8 + b_8 = (a_1 + b_1) + 7d$$

$$\begin{cases} a_8 = 80 - b_8 \rightarrow a_8 + b_8 = 80 \\ a_1 = 3b_1 = 60 \rightarrow a_1 = 60, b_1 = 20 \end{cases} \rightarrow a_8 + b_8 = 80 = (60 + 20) + 7d \rightarrow d = 0$$

بنابراین تمام جملات دنباله سوم مساوی هستند:

$$\rightarrow S_{25} = 25(a_1 + b_1) = 25(80) = 2000$$

سؤال ۶۲: اگر در یک دنباله حسابی داریم $S_{30} = 25S_6$ در این صورت قدرنسبت چند برابر جمله اول است؟

از این تیپ مسائل زیاد حل کردیم اما برای حل این مسأله می‌شه از نکته ای استفاده کرد:

$$\frac{S_{30}}{S_6} = 25 = \left(\frac{30}{6}\right)^2 \rightarrow d = 2a_1$$

سؤال ۶۳: بین دو عدد ۳ و ۴۷ به تعداد ۱۰ عدد را به گونه ای قرار داده ایم که ۱۲ عدد حاصل، جملات متوالی یک

دنباله حسابی باشند، مجموع این ۱۰ واسطه عددی چقدر است؟

$$\text{مجموع واسطه ها} = \frac{m}{2}(a+b) = \frac{10}{2}(3+47) = 5 \times 50 = 250$$

سؤال ۶۴: مجموع بیست جمله اول مشترک بین دو دنباله حسابی $\begin{cases} I: 2, 5, 8, \dots \\ II: 4, 6, 8, \dots \end{cases}$ کدام است؟

$$\begin{cases} I: 2, 5, 8, 11, 14, \dots & d_1 = 3 \\ II: 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots & d_2 = 2 \end{cases} \rightarrow II: 8, 14, 20, 26, \dots$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2 \times 8 + 19 \times 6] = 10[16 + 114] = 10 \times 130 = 1300$$

سؤال ۶۵: جمله اول یک دنباله حسابی را در نظر می‌گیریم اگر مجموع ۴ جمله اول با مجموع چهارجمله آخر برابر

۶۰ باشد مجموع این صدجمله چقدر است؟

$$S = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_{97} + a_{98} + a_{99} + a_{100}) = 60$$

$$\Rightarrow S = (a_1 + a_{100}) + (a_2 + a_{99}) + (a_3 + a_{98}) + (a_4 + a_{97}) = 60$$

$$a_1 + a_{100} = a_2 + a_{99} = a_3 + a_{98} = a_4 + a_{97} \Rightarrow S = 4(a_1 + a_{100}) = 60 \Rightarrow a_1 + a_{100} = 15$$

$$\Rightarrow S_{100} = \frac{100}{2}(a_1 + a_{100}) = \frac{100}{2} \times 15 = 50 \times 15 = 750$$

براساس نکته گفته شده (۳)

$$S = \frac{n}{2} \left(\frac{S_1 + S_r}{m} \right) = \frac{100}{2} \left(\frac{60}{4} \right) = 50 \times 15 = 750$$

سؤال ۶۶: یک ساعت دیواری رأس هر ساعت به تعداد عدد ساعت زنگ می‌زند. ضمناً این ساعت روی ۱۰ دقیقه یک

زنگ روی ۲۰ دقیقه دو زنگ و ... روی ۵۰ دقیقه پنج زنگ می‌زند. این ساعت در شبانه روز چندبار زنگ می‌زند؟

$$\text{تعداد زنگ هایی که هر ۱۲ ساعت، رأس هر ساعت می‌زند} = 1+2+3+\dots+12 = \frac{12}{2}(1+12) = 78$$

$$1+2+3+4+5 = \frac{5}{2}(1+5) = 15 \rightarrow \text{در ۱۲ ساعت} \rightarrow 15 \times 12 = 180$$

پس تعداد کل زنگ‌هایی که در ۱۲ ساعت می‌زند برابر است با $78 + 180 = 258$ بنابراین در یک شبانه روز (۲۴ ساعت) تعداد زنگ‌ها:

$$258 \times 2 = 516$$

سؤال ۶۷: در یک دنباله حسابی با جمله عمومی a_n اگر $a_r + a_f + a_\delta + a_\epsilon = 38$ و $a_r a_\delta = 88$ آنگاه مجموع بیست جمله اول این دنباله کدام است؟

$$a_r + a_f + a_\delta + a_\epsilon = a_r + a_\delta + a_f + a_\epsilon = 2a_f + 2a_\delta = 2(a_f + a_\delta) = 38 \rightarrow a_f + a_\delta = 19$$

$$\begin{cases} a_f + a_\delta = 19 \\ a_r a_\delta = 88 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_f = 8 \\ a_\delta = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 + 3d = 8 \\ a_1 + 4d = 11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ d = 3 \end{cases} \rightarrow S_{20} = \frac{20}{2} [2(-1) + 19 \times 3] = 550$$

سؤال ۶۸: چهار جمله اول یک دنباله حسابی مدنظر است. در این صورت تفاضل ۲۰ جمله اول از ۲۰ جمله آخر چند برابر قدر نسبت است؟

$$S_r - S_1 = n^2 d \quad \text{طبق نکته (۴)}$$

$$2n = 40 \rightarrow n = 20 \rightarrow S_r - S_1 = (20)^2 \times d = 400d$$

سؤال ۶۹: در حجم به طرف زمین در حال سقوط هستند. اگر جسم اول ۲ ثانیه زودتر از جسم دوم شروع به سقوط کرده باشد و هر دو جسم در ثانیه اول یک متر و در هر ثانیه نسبت به ثانیه قبل ۲ متر بیشتر طی کنند زمانی که فاصله بین دو جسم ۱۲ متر است. جسم اول چند ثانیه در حال سقوط بوده است؟

مسافتی که جسم ها طی می کنند یک دنباله حسابی است با $a_1 = 1$ و $d = 2$ اگر فرض کنیم جسم اول t ثانیه و جسم دوم $t - 2$ ثانیه در حال سقوط باشند فاصله بین آنها ۱۲ متر خواهد بود اگر S_1 و S_r مسافت های طی شده توسط دو جسم باشد داریم:

$$S_1 - S_r = 12 \rightarrow \frac{t}{2} (2(1) + (t-1)(2)) - \frac{(t-2)}{2} (2(1) + (t-3)(2)) = 12$$

$$\rightarrow \frac{t}{2} (2 + 2t - 2) - \frac{(t-2)}{2} (2 + 2t - 6) = 12 \rightarrow t^2 - (t^2 - 4t + 4) = 12 \rightarrow 4t - 4 = 12 \rightarrow 4t = 16 \rightarrow t = 4$$

سؤال ۷۰: در یک دنباله حسابی با جمله عمومی a_n حاصل $\frac{S_{2n+1}}{a_{n+1}}$ را بدست آورید؟

$$= \frac{(2n+1)(a_1 + a_{2n+1})}{2 a_{n+1}} = \boxed{a_1 + a_{2n+1} = 2a_{n+1}} = \frac{(2n+1)(2a_{n+1})}{2 a_{n+1}} = 2n+1$$

سؤال ۷۱: در یک دنباله حسابی n جمله اول را انتخاب می کنیم. اگر مجموع جملات مرتبه فرد برابر ۲۸ و مجموع جملات مرتبه زوج ۴۰ و جمله n ام از جمله اول ۲۱ واحد بیشتر باشد. n کدام است؟ (n زوج است).

$$\begin{aligned} & a_r + a_f + a_\epsilon + \dots + a_{rk} \\ - & a_1 + a_r + a_\delta + \dots + a_{rk-1} \end{aligned} \quad \text{نکته (۵)}$$

$$d + d + d + \dots + d = kd = \frac{n}{2} d$$

$$\begin{cases} S_r - S_1 = \frac{nd}{2} \\ a_n - a_1 = 21 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 40 - 28 = \frac{nd}{2} \\ (n-1)d = 21 \end{cases} \rightarrow nd = 24 \rightarrow \frac{nd}{(n-1)d} = \frac{24}{21} = \frac{n}{n-1} = \frac{8}{7} \rightarrow n = 8$$

سؤال ۷۲: در یک دنباله حسابی مجموع پنج جمله اول $\frac{1}{4}$ مجموع پنج جمله بعدی است. اگر جمله اول دنباله برابر یک باشد قدر نسبت این دنباله کدام است؟

$$S_5 = \frac{1}{4}(S_{10} - S_5) \rightarrow 4S_5 = S_{10} - S_5 \rightarrow 5S_5 = S_{10}$$

$$\begin{aligned} 5 \times \frac{5}{4} [2(1) + 4d] &= \frac{1}{4} [2(1) + 9d] = \frac{25}{4} [2 + 4d] = 5[2 + 9d] \rightarrow 25[1 + 2d] = 5[2 + 9d] \\ \rightarrow 5(1 + 2d) &= 2 + 9d \rightarrow 5 + 10d = 2 + 9d \rightarrow d = -3 \end{aligned}$$

سؤال ۷۳: در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول برابر ۴ و مجموع چهار جمله اول برابر ۳ است. مجموع ۷ جمله اول کدام است؟

$$\begin{cases} S_3 = 4 \\ S_4 = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}(2a_1 + 2d) \\ \frac{4}{2}(2a_1 + 3d) = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 2d = \frac{8}{3} \\ 2a_1 + 3d = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{5}{2} \\ d = -\frac{7}{6} \end{cases}$$

$$\rightarrow S_7 = \frac{7}{2}(2a_1 + 6d) = \frac{7}{2} \left(2 \left(\frac{5}{2} \right) + 6 \left(-\frac{7}{6} \right) \right) = \frac{7}{2} (5 - 7) = -7$$

$$(6) \text{ راه حل دوم: نکته } \rightarrow \begin{cases} S_3 = 4 \\ S_4 = 3 \end{cases} \rightarrow S_7 = -7$$

سؤال ۷۴: در یک دنباله حسابی با جملات غیرصفر و جمله عمومی a_n ، اگر مجموع n جمله اول S_n و مجموع معکوسات این n جمله S'_n باشد، حاصل $A = \frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \frac{1}{a_3 + a_{n-2}} + \dots + \frac{1}{a_n a_1}$ را بدست آورید؟

$$\frac{1}{a_1 a_n} = \frac{1}{(a_1 + a_n)} \cdot \frac{(a_1 + a_n)}{a_1 a_n} = \frac{1}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1} \right)$$

$$\frac{1}{a_r a_{n-1}} = \frac{1}{(a_r + a_{n-1})} \cdot \frac{(a_r + a_{n-1})}{a_r a_{n-1}} = \frac{1}{a_r + a_{n-1}} \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_r} \right)$$

به همین ترتیب:

$$A = \frac{1}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1} \right) + \frac{1}{a_r + a_{n-1}} \left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_r} \right) + \dots + \frac{1}{a_n + a_1} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1} \right)$$

از طرفی چون $a_n + a_n = a_r + a_{n-1} = a_r + a_{n-2} = \dots$

$$A = \frac{1}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_r} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1} \right) = \frac{1}{a_1 + a_n} \left(\frac{2}{a_1} + \frac{2}{a_r} + \dots + \frac{2}{a_n} \right)$$

$$= \frac{2}{a_1 + a_n} \underbrace{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_r} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)}_{S'_n} \text{ و } S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \rightarrow a_1 + a_n = \frac{2S_n}{n}$$

$$\rightarrow A = \frac{2}{\frac{2S_n}{n}} S'_n = \frac{nS'_n}{S_n}$$

سؤال ۷۵: تعدادی از جملات متوالی یک دنباله حسابی به فرم $۹, ۱۲, ۱۵, \dots, ۶k + ۱۵$ است. اگر مجموع آنها ۴۵۰ باشد تعداد جملات چند تا است ($\sqrt{۱۲۲۵} = ۳۵$)

$$\begin{cases} a_1 = 9 \\ a_n = 6k + 15 \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} 6k + 15 = 9 + (n-1)3 = 3n - 3 + 9 = 3n + 6 \Rightarrow 3n = 6k + 9 \rightarrow n = 2k + 3 \\ d = 3 \end{cases}$$

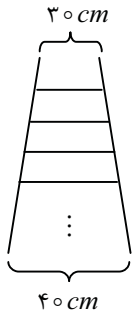
$$S_n = 450 \rightarrow \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = 450 \rightarrow \frac{2k+3}{2}(9 + 6k + 15) = 450$$

$$\frac{2k+3}{2}(24 + 6k) = 450 \rightarrow (2k+3)(12 + 3k) = 450 \rightarrow (2k+3) \times 3 \times (k+4) = 450$$

$$\rightarrow (k+4)(2k+3) = 150 \rightarrow 2k^2 + 11k - 138 = 0 \rightarrow k = \frac{-11 \pm \sqrt{1225}}{4} = \frac{-11 \pm 35}{4}$$

$$\rightarrow \begin{cases} k = -\frac{23}{2} \quad \checkmark \text{ (منفی می شود)} \\ k = 6 \rightarrow n = 2(6) + 3 = 15 \end{cases}$$

سؤال ۷۶: طول پله های یک نردبان از پایین به بالا به طور یکنواخت از ۴۰ سانتی متر تا ۳۰ سانتی متر کوتاه می شود. اگر مجموع طول پله ها $۱۰/۵$ متر باشد، این نردبان چند پله دارد؟



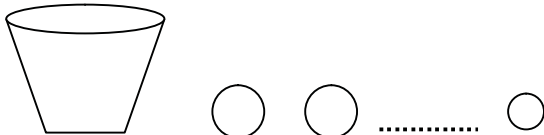
فرض کنیم طول هر دو پله متوالی به اندازه x متر با هم اختلاف داشته باشند اگر n پله داشته باشیم می شه گفت $a_1 = 40$ و $a_n = 30$ و $d = -x$ از طرفی چون S_n برابر $۱۰/۵$ متر یا ۱۰۵۰ سانتی متر باشد داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 30 = 40 + (n-1)(-x) \rightarrow (-10) = (n-1)(-x)(1)$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2 \times 40 + (n-1)(-x)]$$

$$\rightarrow \frac{n}{2}[80 - 10] = 35n = 1050 \rightarrow n = 30$$

سؤال ۷۷: تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله یک متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد برابر یک متر است. دونه ای باید از کنار سبد شروع کرده، هر توپ را بردارد و مجدداً به طرف توپ بعدی بدود، آن را تا سبد حمل کند و به داخل آن بیاندازد اگر دونه در مجموع ۴۲۰ متر دویده باشد، چند توپ در سبد انداخته است؟



دونه برای انداختن توپ اول باید ۲ متر طی کند، برای انداختن توپ دوم ۴ متر طی کند و... برای انداختن توپ n ام، $۲n$ متر طی کند:

$$۲ + ۴ + ۶ + \dots + ۲n = ۴۲۰ \rightarrow \frac{n}{2}(۲ + ۲n) = ۴۲۰ \rightarrow n(n+1) = ۲۰ \times ۲۱ \rightarrow n = ۲۰$$