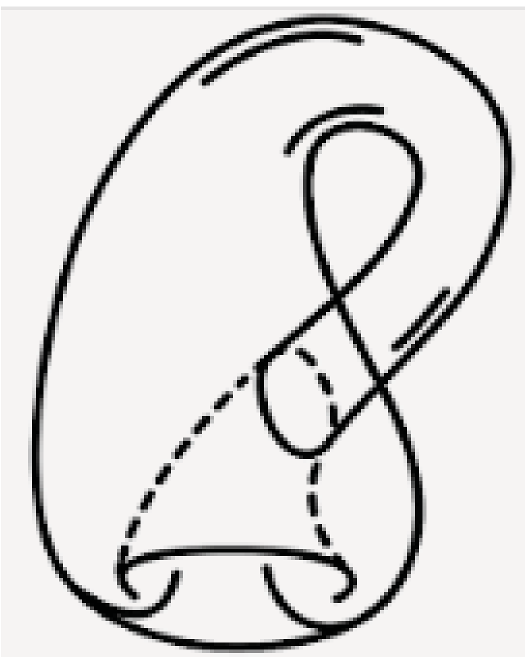
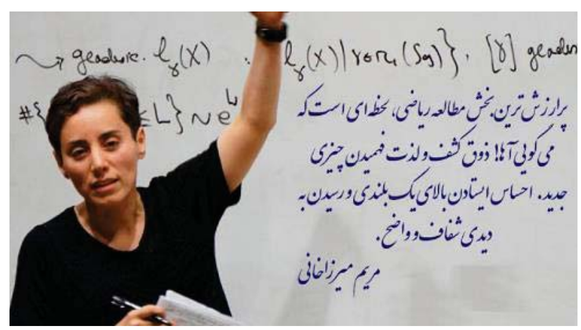
آموزش وپرورش منطقه ۳ تهران

حسابان (۱)



یازدهم (رشته ریاضی)

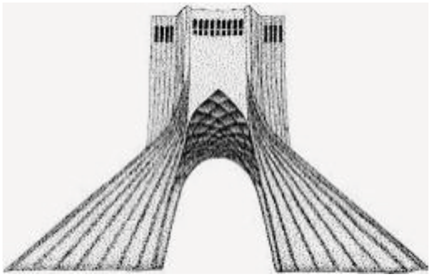
۱۴۰۱



سعید میری

تلفن: ۰۹۱۲۳۱۵۷۱۵۵

فهرست



فصل اول: جبر و معادله

۱– مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

در سال دهم با الگو و دنباله ها آشنا شدید. الگوهای مثلثی $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ و مربعی $a_n = n^2$ را بررسی کردیم. دنباله‌های خاص حسابی(عددی) و هندسی را یاد گرفتید.

1. دنباله......،5،8،11 یک دنباله‌ی حسابی است با جمله اول5 و قدرنسبت 3 و برای یافتن جمله بیستم آن از فرمول $a_n = a_1 + (n-1)d$ کمک می‌گیریم

قدرنسبت در دنباله حسابی از دو رابطه زیر به دست می آید:

$d = \frac{a_m - a_n}{m-n}$

$d =$ (بجز جمله اول)هرجمله – جمله قبلی $= (a_n) - (a_{n-1})$

2. دنباله .....،3،6،12 یک دنباله ی هندسی است. جمله اول آن 3 و قدرنسبت آن 2 و برای یافتن جمله دهم این دنباله از رابطه: $t_n = t \times q^{n-1}$ کمک می گیریم.

قدرنسبت در دنباله هندسی از دو رابطه زیر به دست می‌آید:

$q = \sqrt[m\times n]{\frac{a_m}{a_n}}$ و $q = \frac{\text{هرجمله}(\neq a_1)}{\text{جمله قبلی}}$

3. به دنباله $a_n = an + b$ دنباله خطی گفته می‌شود که یک دنباله حسابی با قدرنسب a (ضریب n) است.

مثلا دنباله $a_n = 3n + 8$ یک دنباله خطی (حسابی) با قدرنسبت 3 است.

4. دنباله های $a_n = a_1(1 + r\%)^n$ و $b_n = b_1 \ (1 - r\%)^n$ دنباله‌های رشد و زوال با قدر نسبت $(1 \pm r\%)$ و مقدار اولیه a_1 بودند.

مانند مثال کاهش قیمت دوچرخه طی یک سال گذشته یا افزایش قیمت زمین طی سه سال آینده.

درسال جاری مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی و کاربرد آنها را مورد بررسی می‌دهیم.

مجموع جملات دنباله‌های حسابی

برای بدست آوردن مجموع n جمله نخست (ابتدایی) یک دنباله حسابی با جمله اول a_1 و قدرنسبت d از رابطه روبرو می‌توان استفاده کرد:

$$\boxed{A)\ S_n=\frac{n}{2}\ [2a_1+(n-1)d]}$$

این فرمول 4 پارامتر a_1، n، d، S_n دارد.

اگر جمله اول، جمله آخر(a_n) و تعداد جملات معلوم باشند، مجموع n جمله را از رابطه زیر می‌یابیم:

$$\boxed{B)\ S_n=\frac{n}{2}\ (a_1+a_n)}$$

این فرمول نیز 4 پارامتر a_1, a_n, n, S_n دارد.

مثال1. در دنباله‌های روبرو مجموع تعداد جملات خواسته شده را بیابید:

الف) 5،8،11 ،.... $S_{20}=?$

$S_{20}=\frac{20}{2}[2(5)+(20-1)\times 3]=10\times[10+19\times 3]=10\times 67=670$

ب) $2+4+6+.....+104=؟ \Longrightarrow \begin{cases} a_1=2 \\ n=52 \\ a_{52}=104 \end{cases} \Longrightarrow S_{52}=\frac{52}{2}(2+104)=\cdots$

ج) مجموع اعداد طبیعی سه رقمی بخشپذیر بر 3

$\begin{cases} d=3 \\ a_1=102 \\ a_n=999 \\ n,S_n=? \end{cases} \Rightarrow$ ابتدا n را می یابیم $\Rightarrow \boxed{n=\frac{\text{جمله اول} - \text{آخرجمله}}{d}+1} = \frac{999-102}{3}+1=\cdots$

$S_{300}=\frac{300}{2}(102+999)=150\times 1001$

د) روی محور دایره‌ای 15 نقطه متمایز داریم. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را بیابید.

$14+13+12+.....+1=\frac{14}{2}(14+1) = 7 \times 15$

مجموع جملات دنباله هندسی

برای بدست آوردن مجموع n جمله نخست (ابتدایی) یک دنباله هندسی با جمله اول t_1 و قدرنسبت r از رابطه روبرو می توان استفاده کرد:

$$A)\ \boxed{S_n = t_1 \times \frac{(1-r^n)}{1-r}}$$

این فرمول 4 پارامتر (t_1, r, n, S_n) دارد.

$$\boxed{B)\ S_n = \frac{t-t_n r}{1-r}}$$

این فرمول 4 پارامتر t_n, r, n, S_n دارد.

مثال2. در دنباله های روبرو مجموع تعداد جملات خواسته شده را بیابید.

الف) $3,6,12,.... \Longrightarrow S_{10} = ?\ \begin{cases} n = 10 \\ t_1 = 3 \\ r = \frac{6}{3} = 2 \\ s_{10} = ? \end{cases} \Longrightarrow S_{10} = 3 \times \frac{(1-2^{10})}{1-2} = \cdots$

ب) مجموع همه اعداد طبیعی تا سه رقمی که توانی از 3 هستند را به دست آورید.

دنباله مربوطه: $3,9,27,....,729 \Rightarrow$ ابتدا تعداد جملات را به دست می آوریم

$$t_n = t_{1q^{n-1}} \Rightarrow 729 = 3 \times 3^{n-1} \Longrightarrow 729 = 3^{1+n-1} \Longrightarrow 3^6 = 3^n \Longrightarrow \mathrm{n} = 6$$

$$\Longrightarrow S_6 = \frac{t_1 - t_6 r}{1-r} = \cdots$$

چ) طول ضلع مربعی 1 متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقیمانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقیمانده را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ٪99 مربع رنگ شده است؟

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\dots \quad \Rightarrow \quad n=? \quad ; \quad S_n \geq \frac{99}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{t_1(1-r^n)}{1-r} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100} \Rightarrow 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{99}{100}$$

یعنی دست کم 7 مرحله باید بگذرد تا ٪99 سطح رنگ شود.

کار در کلاس:

1. مجموع همه اعداد طبیعی دو رقمی مضرب 5 را به دست آورید.

2. در شکل فاصله بین هر دو توپ متوالی 4 متر است. دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کند و توپ اول را بردارد و تا سبد حمل کند و به سبد بیاندازد و سپس سمت توپ دوم و سوم و ... ادامه دهد. اگر این دونده در پایان 440 متر دویده باشد، حساب کنید او جمعا چند توپ در سبد انداخته است.

3. حاصل کسر روبرو را به ازای $t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ به دست آورید.(ریاضی 93)

$$\frac{t^{11}+t^{10}+t^9+\cdots+t+1}{t^9+t^6+t^3+1}=$$

4. تعداد جمله های یک دنباله هندسی عددی زوج است. اگر مجموع تمام جمله های دنباله 3 برابر مجموع جمله های با ردیف فرد باشد، قدر نسبت آن کدام است؟(ریاضی 94)

5. عدد های طبیعی را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جمله‌های هر دسته برابر شماره آن دسته باشد، مجموع جمله‌ها در دسته بیستم را به دست آورید:

(1), (2,3), (4,5,6), (7,8,9,10), ...

6.دنباله‌های هندسی با قدر نسبت طبیعی و بزرگتر از یک که شامل ۵ جمله هستند را در نظر بگیرید. چه تعداد از این نوع دنباله‌ها می‌توان یافت که جملات آن عضو مجموعه $\{1, 2, \dots, 100\}$ باشد؟

تمرین در منزل:

1. حداقل چند جمله از دنباله ... ,2, 5, 8 را با هم جمع کنیم تا حاصل از 737 بیشتر گردد.

2. مجموع n جمله نخست یک دنباله حسابی از رابطه $S_n = kn^2 + 3n + k - 4$ به دست می آید. قدر نسبت و جمله اول این دنباله را بیابید و جمله عمومی آنرا بنویسید.

3. در یک دنباله حسابی مجموع پنج جمله اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله بعدی است. جمله دوم چند برابر جمله اول است؟(ریاضی 91)

4. بین دو عدد 2 و $16\sqrt{2}$، شش عدد چنان درج کرده‌ایم که هشت عدد حاصل، دنباله هندسی تشکیل داده اند. مجموع این هشت عدد را بیابید؟(ریاضی 88)

5. در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله اول 136 و مجموع شش جمله اول 153 می‌باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟(ریاضی 89)

6. حاصل عبارت روبرو را به ازای $x = \sqrt{2}$ به دست آورید:

$$A = (1 + x + x^2 + \cdots + x^8)(1 - \mathrm{x} + x^2 + \cdots - x^8)$$

7. مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد مفروض است. وسط اضلاع را بهم وصل می‌کنیم و سه مثلث بیرونی را رنگ می‌کنیم و این کار را برای مثلث داخلی تکرار می‌کنیم و ادامه می‌دهیم. دست کم بعد از چند مرحله حداقل 99 درصد مثلث اولیه رنگ می‌شود؟

8. پخش شدن یک خبر دروغ بدین گونه است که هرگاه خبر به اولین نفر می رسد، او حداکثر 20 دقیقه بعد خبر را به دو نفر دیگر می رساند. اگر جمعیت یک شهر 2047 نفر باشد، حداکثر چند ساعت طول می کشد تا همه افراد شهر از آن شایعه خبردار شوند؟

9. مجموع چند جمله دنباله حسابی .... ،10،6،2 برابر جمله سیزدهم خود دنباله است؟(ریاضی 95)

10. جمله پنجم یک دنباله حسابی 10 و جمله هشتم آن 19 است. مجموع جملات این دنباله از جمله پنجم تا جمله 25 را به دست آورید.(قلم چی آذر 96)

11. در یک دنباله حسابی ?= $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99}$ اگر $a_n = 3n - 1$ باشد؟ (گزینه(2)97)

۲– تابع و معادله درجه دو

در سال دهم با روش های تجزیه، مربع کامل کردن، ریشه گیری و روش کلی (Δ) برای حل معادله درجه دوم $ax^2 + \mathrm{b}x + \mathrm{c} = 0$ آشنا شدید. هر یک را به روش خواسته شده حل کنید:

الف) $x^2 - x - 110 = 0$ (تجزیه)

ب) $x^2 + 6x + 7 = 0$ (مربع کامل کردن)

ج) $x^2-8=0$ (ریشه‌گیری)

د) $2x^2-x=2$ (روش کلی-دلتا)

همچنین روش میانبری نیز بود: (برای هر یک مثالی بیاورید)

اگر $a+b+c=0 \to \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a} \end{cases}$

$a+c=b \to \begin{cases} x=-1 \\ x=-\frac{c}{a} \end{cases}$

روش ساختن معادله درجه دو با داشتن (معلوم بودن) ریشه های آن (α , β)

روش اول: مطابق روبرو انجام مراحل 1و2و3

$$(1)\quad S=\alpha+\beta$$

$$(2)\quad P=\alpha\times\beta$$

$$\Rightarrow \boxed{(3)\quad x^2-Sx+P=0}$$

روش دوم:

مطابق زیر انجام مراحل 1 و 2 و 3

$$(1)\ \begin{cases} x=\alpha \\ x=\beta \end{cases} \Rightarrow (2)\ \begin{cases} x-\alpha=0 \\ x-\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{(3)\quad (x-\alpha)(x-\beta)=0}$$

مثال 1: معادله درجه دومی بسازید که ریشه‌های آن $-\frac{3}{5}$ و 7 می‌باشد:

$$S=7+\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{35-3}{5}=\frac{32}{5}$$

$$\Longrightarrow x^2-\frac{32}{5}x-\frac{21}{5}=0 \Longrightarrow \cdots$$

$$P=7\times\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{21}{5}$$

مثال 2. محیط یک مستطیل 33^{cm} و مساحت آن 65^{cm^2} است. ابعاد مستطیل را بیابید.

طول:α　　محیط $= 2(\alpha+\beta) = 33$　　$\alpha+\beta = \frac{33}{2}$

عرض:β　　مساحت $= \alpha \times \beta = 65$　　$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$

$$x^2 - \frac{33}{2}x + 65 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 33x + 130 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac \\ \Delta = 33 - 4(2)(130) \end{cases}$$

$$= 1089 - 1040 = 49 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{33 \pm 7}{2(2)} = \begin{cases} \frac{33+7}{4} = \frac{40}{4} = 10 = \text{طول} \\ \frac{33-7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{13}{2} = 7/5 = \text{عرض} \end{cases}$$

مثال 3. مساحت یک لوزی 4^{cm^2} و مجموع دو قطر آن $\frac{17}{3}$ است. محیط این لوزی را بیابید.

2. روابط ریشه‌ها (α, β) و ضرایب $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c)

اگر α , β ریشه‌های معادله درجه دو باشند:

α و $\beta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha \times \beta = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-b^2+4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

مثال 4.

اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $3x^2 - 6x + 2 = 0$ باشد، بدون حل معادله مقدار عددی عبارت زیر را به دست آورید: $S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{3}$ و $P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$

الف) $\alpha^2+\beta^2=?$ $\quad\Rightarrow\quad \alpha^2+\beta^2=S^2-2P=2^2-2\left(\frac{2}{3}\right)=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

ب) $\alpha^3+\beta^3=?$

$$\boxed{\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=S^3-3PS}$$

$$=2^3-3\left(\frac{2}{3}\right)(2)=8-4=4$$

ج) $|\alpha-\beta|=?$ $\qquad |\alpha-\beta|=A\Rightarrow(\alpha-\beta)^2=A^2\Rightarrow$

$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=S^2-2P-2P=S^2-4P\Rightarrow\boxed{|\alpha-\beta|=\sqrt{S^2-4P}}$

$=\sqrt{2^2-4\left(\frac{2}{3}\right)}=\sqrt{4-\frac{8}{3}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

د) $3\alpha^2+6\beta-2=?$

ریشه $\beta\Rightarrow 3\beta^2-6\beta+2=0\Longrightarrow 3\beta^2=6\beta-2\quad\}\Longrightarrow 3\alpha^2+6\beta-2=$

$3\alpha^2+3\beta^2=3(\alpha^2+\beta^2)=3\times\frac{8}{3}=8$

ح) $3\alpha^2+2\beta^2=?$ $\qquad \boxed{m\alpha^2+n\beta^2=(\frac{m+n}{2})(\alpha^2+\beta^2)+(\frac{m-n}{2})(\alpha^2-\beta^2)}$

$\left(\frac{3+2}{2}\right)(\alpha^2+\beta^2)+\left(\frac{3-2}{2}\right)(\alpha^2-\beta^2)=\cdots$

مثال5. اگر β و α ریشه‌های معادله $x^2-6x+2=0$ باشند، مقدار عددی عبارات زیر را به دست آورید:

الف) $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=$

ب) $\frac{\alpha}{\beta+1}+\frac{\beta}{\alpha+1}=$

ج) $\beta^2+\frac{4}{\beta^2}=$

ح) $4\alpha^2+3\beta^2=$

مثال6. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن مربع ریشه‌های معادله $x^2+4x-1=0$ باشد؟(گزینه 2–97)

کار در کلاس:

1. اگر α و β ریشه‌های معادله $x(5x+3)=2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $4x^2-kx+25=0$ به صورت $\frac{1}{\beta^2}, \frac{1}{\alpha^2}$ است؟(ریاضی 90)

2. به ازای چ مقدار m ، مجموع جذر هردو ریشه معادله $2x^2-(m+1)x+\frac{1}{8}=0$ برابر 2می باشد؟ (ریاضی 96)

3. در معادله $3x^2-15x+m=0$ اگر یکی از ریشه‌ها2 واحد بیشتر از ریشه دیگر باشد، m و هر دو ریشه را بیابید.

4. به ازای چه مقدار m نمودار تابع $f(x) = (m-3)x^2 + mx - 1$ از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (ریاضی 92)

5. به ازای چه مقدار m ، معادله درجه دوم $(2m-1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است؟ (ریاضی 97)

1) $-2 < m < 3/5$

2) $-2 < m < 2/5$

3) $-1 < m < 3/5$

4) $-1 < m < 2/5$

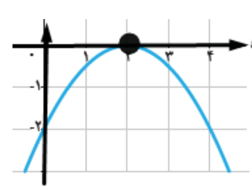
۳. صفرهای تابع

برای هر تابع f ، جواب‌های معادله $f(x) = 0$ را در صورت وجود، صفرهای تابع می‌نامند.

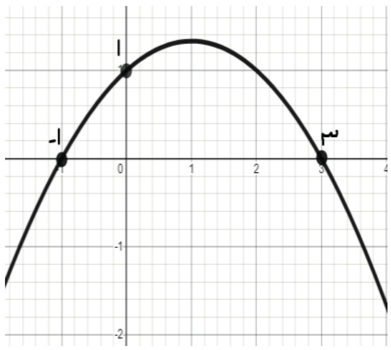
به لحاظ شهودی اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم صفرهای تابع f، طول نقاط تلاقی نمودار با محور x هاست.

مثال 1 . صفرهای تابع $f(x) = -x^2 + 4x - 4$ را بدست آورید .

الف) روش جبری : $-x^2 + 4x - 4 = -(x-2)^2 = 0 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

ب) روش هندسی :  $f(x) = -(x^2 - 4x + 4) = -(x-2)^2$

مثال 2. اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به صورت زیر باشد ، مقایر b و a و c را به دست آورید.



با توجه به نمودار $\begin{matrix} \alpha = -1 \\ \beta = 3 \end{matrix}$: روش A $y = a\,(x - \alpha)(x - \beta)$

$\Rightarrow \ y = a\,(x - (-1))(x - 3) \ \Rightarrow \ 1 = a(0 + 1)(0 - 3)$

$\Rightarrow \ 1 = -3a \ \Rightarrow \ a = -\dfrac{1}{3} \ \Rightarrow y = -\dfrac{1}{3}\ (x + 1)(x - 3)$

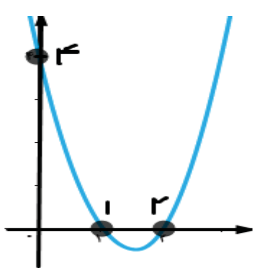
$y = -\dfrac{1}{3}\ (x^2 - 2x - 3) \ \Rightarrow \ y = -\dfrac{1}{3}\ x^2 + \dfrac{2}{3}x + 1 \quad \Rightarrow b = \dfrac{2}{3}$ و $c = 1$

B روش : $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \ 0 = a(3)^2 + b(3)^2 + 1 \ \Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b = -1 \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow \cdots$

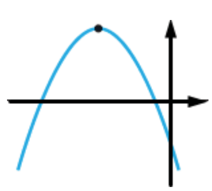
$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ 0 = a(-1)^2 + b(-1) + 1$

$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ \Rightarrow \ 1 = a(0)^2 + b(0) + c \ \Rightarrow$

مثال 3. در نمودار سهمی زیر با معادله $y = ax^2 + bx + c$ مقایر a و b و c را بدست آورید.



مثال 4. به ازای کدام مقادیر k k نمودار تابع $f(x) = kx^2 + (k + 3)x - 1$ محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند ؟ (ریاضی 92)



عرض از مبدأ(-1) $c =$ است و دو ریشه منفی دارد

پس نمودار آن شبیه روبرو است .

1 دهانه سهمی روبه پایین است پس $k < 0$

2 دو ریشه دارد پس : $\Delta > 0 \Leftarrow$ $(k+3)^2 \ - 4\,(k)(-1) > \ 0$

هر نامعادله درجه 2 نیاز $k^2 + \ 6k + 9 + 4k \ > 0 \ \Rightarrow \ k^2 + 10k + 9 \ > 0$

به تعیین علامت دارد بنابراین:

$k^2 + 10k + 9 = 0 \ \longrightarrow \ \begin{cases} k = -1 \\ k = -9 \end{cases}$ شکل $\Rightarrow \ (k < -9) \cup (k > -1)$

3 با توجه به منفی بودن ریشه ها طول رأس سهمی باید منفی باشد یعنی : $-\frac{b}{2a} < 0 \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ \frac{k+3}{k} > 0 \ \Rightarrow$ شکل $\Rightarrow \ (k < -3) \cup (k > 0)$

۴. تشخیص علامت Δ , c , b , a از روی نمودار سهمی داده شده :

1. دهانه سهمی روبه بالا $a > 0$ دهانه سهمی روبه پایین $a < 0$

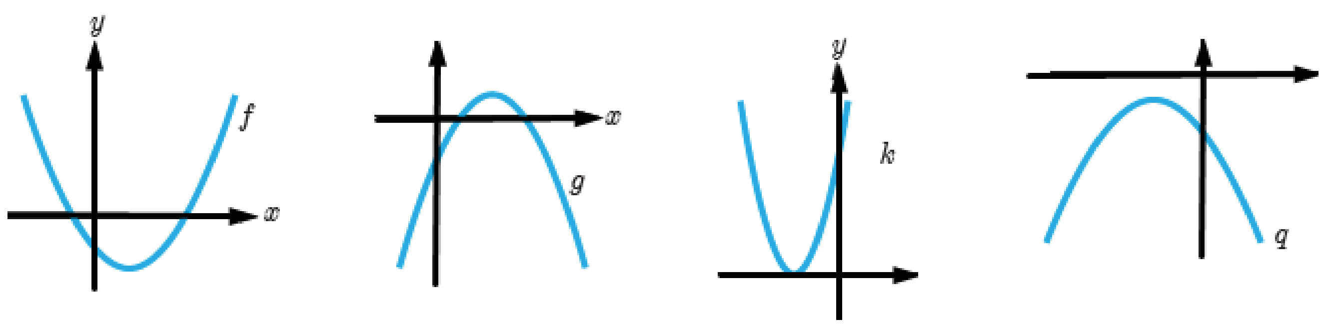
2. نقطه برخورد با محور عرض‌ها وضعیت علامت c را تعیین می‌کند :

3. برای علامت b، ابتدا موقعیت رأس سهمی را تعیین کرده و با توجه به علامت طول رأس سهمی $(-\frac{b}{2a})$ و علامت a ، علامت b تعیین می‌شود.(روش دیگر از شیب خط مماس بر نقطه تقاطع با y ها)

4- علامت Δ ، با توجه به تعداد برخورد نمودار سهمی با محور طول تعیین می‌شود یعنی:

بدون برخورد $\leftrightarrow$ $\Delta < 0$	یک نقطه برخورد $\leftrightarrow$ $\Delta = 0$	دو نقطه برخورد $\leftrightarrow$ $\Delta > 0$

مثال 1. در هر قسمت علامت Δ , c , b , a را تعیین کنید.



مثال 2. الف) یک نمودار سهمی در دستگاه مختصات رسم کنید که در آن c, b, a هم علامت باشند.

ب) یک نمودار سهمی در دستگاه مختصات رسم کنید که $0 > a$ و $b > 0$ و $c = 0$ باشند.

۵. حل معادله درجه سه با معلوم بودن یک جواب آن

به مثال‌های زیر دقت کنید:

مثال 1. اگر یکی از ریشه های معادله $x\,(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر با 2 باشد. مجموع دو ریشه دیگر را بیابید. (ریاضی87)

$$x = 2 \;\Rightarrow 2(4a - 2 - 5) = 2 \;\Rightarrow\; 4a = 8 \;\Rightarrow\; a = 2 \;\Rightarrow\; x(2x^2 - x - 5) = 2$$

$$2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; 2x^2 + 3x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; a + c = b \;\Rightarrow x = -1, -\frac{1}{2}$$

$$(2x^3 - x^2 - 5x - 2) \div (x - 2) = 2x^2 + 3x + 1 \qquad \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$$

مثال 2. به ازای چه مقدار a چندجمله‌ای $p(x) = x^4 + ax^3 - 8x$ بر $x + 2$ بخش پذیر است.

کوچکترین ریشه معادله $p(x) = 0$ را بیابید. (ریاضی94)

مثال 3. اگر $x = -1$ یکی از ریشه‌های معادله $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 6$ باشد. مجموع مکعبات ریشه‌های دیگر معادله این تابع را بیابید.

کار در کلاس:

1. در هر قسمت صفر تابع را در صورت وجود بیابید :

الف) $f(x) = (x-2)^2 + (x-2) - 6$

ب) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 24$

ج) $f(x) = x^6 - 10x^3 + 16$

2. اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ باشد. حاصلضرب ریشه‌های دیگر را بیابید.

3. در تعداد ریشه‌های معادله $ax^4 + bx^2 + c = 0$ در حالات مختلف بحث کنید.

4. منحنی با معادله $y = (2x+1)(x+8)$ با خطوط $y = mx$ نقطه مشترک ندارد. حدود m را بیابید .

۶. روش هندسی حل معادلات و نامعادلات

برای حل معادله $f(x) = g(x)$ به روش هندسی ابتدا نمودارهای تابع $f(x)$ و $g(x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنیم. طول نقطه تلاقی آنها در صورت وجود، جواب معادله است. این روش بیشتر برای تعیین تقریبی جواب‌ها یا تعیین تعداد ریشه‌های معادله $f(x) = g(x)$ مناسب است.

مثال 1. معادله $(x-1)^2 = \frac{1}{2}x + 1$ را به روش جبری و هندسی حل کنید .

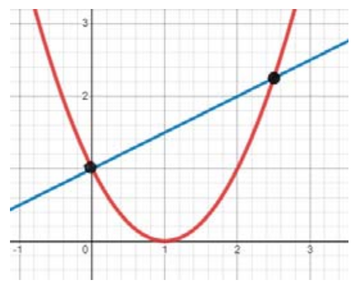
روش جبری A

$$(x-1)^2 = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{2}x + 1 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{2}x = 0 \Rightarrow$$

$$x(x - 2/5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2/5 \end{cases}$$

روش هندسیB

$$\begin{cases} f(x) = (x-1)^2 \\ g(x) = \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$



مثال 2. معادله $x^2 - 2x = |x|$ را به روش هندسی و جبری حل کنید .

مثال 3. نمودار تابع $y = x^2 + 2x + 5$ را 3 واحد به طرف x های مثبت، سپس2 واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه بالای نیمساز ربع اول است ؟ (ریاضی 97)

1) (3 , 4)
2) (2 , 5)
3) (3 , 5)
4) (2 , 6)

مثال4. کمترین مقدار تابع $y = mx^2 - 12x + 5m - 1$ برابر ۲ است. محور تقارن سهمی را تعیین کنید.

کاردر کلاس

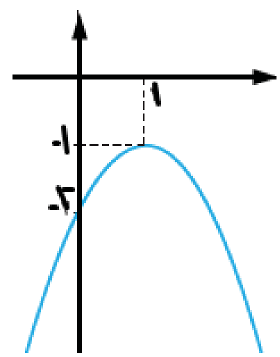
1. در هر قسمت معادله درجه دومی بنویسید که :

الف) ریشه‌های آن $2 \pm \sqrt{a^2+4}$ باشد.

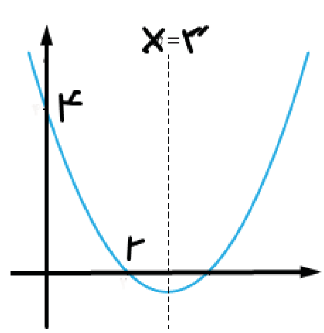
ب)یکی از ریشه‌های آن معکوس ریشه دیگری باشد.

2. در هر یک از شکل‌های زیر با نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$، مقایر c , b , a را تعیین کنید و پس از تعیین صفرهای تابع آن را تعیین علامت کنید .

الف)



ب)



3. مقدار ماکزیمم یا می‌نیمم توابع زیر را به دست آورید.

الف) $f(x) = -3x^2 + 2x$

ب) $q(x) = \sqrt{2}x^2 + 4x + 3$

ج) $h(x) = x + \frac{1}{x}$ $\qquad x > 0$

4. اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+1)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k ؟(ریاضی 83)

5. منحنی تابع $y = (m+2)x^2 - 2x + 1$ از هر چهار ناحیه مختصات می گذرد. حدود m را بیابید. (ریاضی87)

6. برد تابع $f(x) = \frac{x^2}{3} - 2x + 1$ را به دست آورید.

7. توپی را از ارتفاع 40 متری پرتاب کنیم. اگر معادله ارتفاع توپ از رابطه $h(t) = -t^2 + 13t - 40$ باشد .

الف)توپ در چه زمانی برای بار دوم به زمین می‌خورد ؟

ب)Max ارتفاعی که توپ بالا می‌رود چقدر است ؟

8. معادله ارتفاع توپی در یک ضربه پنالتی از رابطه $h(t) = -t^2 + 3t$ به دست می‌آید.

الف) توپ در چه زمان‌هایی روی زمین است ؟

ب) بیشترین ارتفاعی که توپ می‌گیرد چقدر است ؟

9. تعداد و مقدار ریشه‌های معادله $|x+1| = 1-x^2$ را به روش هندسی و جبری بیابید.

10. رضا و پارسا در یک مسابقه ورزشی، وزنه‌های خود را با زاویه‌های متفاوت α و β که $\alpha < \beta$ است پرتاب می کنند. رضا، زاویه α را انتخاب و مسیر طی شده از رابطه $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} + 2$ به دست می‌آید. پارسا زاویه β را انتخاب و مسیر طی شده از رابطه $y = 2x^2 + 3x + 2$ به دست می‌آید. در هر دو معادله، y ارتفاع وزنه از سطح زمین و x مسافت افقی طی شده بر حسب متر است.

الف) مسیر حرکت هر کدام از وزنه‌ها را رسم کنید.

ب) محل برخورد وزنه‌ها با زمین در چه نقاطی است ؟ کدام یک مسافت بیشتری طی می‌کند ؟

ج) کدامیک از وزنه‌ها ارتفاع بیشتری از سطح زمین پیدا کرده است ؟ مقدار آن چقدر است ؟

11. یک عکس 15×10 درون یک قاب با مساحت 300 قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر باشد، ابعاد قاب را بیابید .

12. طول نوعی کاشی یک سانتی متری بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشاندن دیوار به مساحت $52/8$ متر مربع، 2000 کاشی استفاده شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است ؟

7. معادلات گنگ (اصم)

به زبان ساده معادله‌هایی را که مجهول، زیر رادیکال باشند را معادله گنگ یا رادیکالی می‌گوییم. برای حل آنها ابتدا در صورت نیاز، جابجایی مناسب را انجام می‌دهیم و سپس دو طرف را به توان فرجه رادیکال می‌رسانیم و محاسبات لازم را انجام می‌دهیم. با جایگذاری در معادله اصلی جواب‌های به دست آمده را امتحان می‌کنیم. اگر به تساوی درستی رسیدیم جواب به دست آمده قابل قبول است. در حل معادله‌های گنگ برخی موارد خاص نیز می‌باشد که با توان دو رساندن مناسب نیست. در ضمن مثال‌ها با آنها آشنا خواهید شد.

مثال 1. مجموع جواب معادلات زیر را به دست آورید:

الف) $\boxed{\sqrt{x+1}+x=5}$

$$\sqrt{x+1}=5-x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+1}=(5-x)^2 \quad \Rightarrow \quad x+1=25-10x+x^2 \quad \Rightarrow$$

$$x^2-11x+24=0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x-8)=0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=3 \quad \longrightarrow \quad \sqrt{3+1}\ +3=5 \quad \longrightarrow \quad x=3 \\ x=8 \quad \longrightarrow \quad \sqrt{8+1}\ +3=5 \quad \longrightarrow \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

ب) $\boxed{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+7}=5}$ $\quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+2}=5-\sqrt{x+7} \quad \Rightarrow$

$$(\sqrt{x+2})^2 = \quad \sqrt{x+7})^2 \quad \Rightarrow \quad x+2=25-10\sqrt{x+7}+x+7 \quad \Rightarrow$$

$$-30=-10\sqrt{x+7} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+7}=3 \quad \Rightarrow \quad x+7=9 \quad \Rightarrow \quad x=2$$

$$\sqrt{2+2}+\sqrt{3+7}=5 \quad \Rightarrow \quad \text{ق ق}$$

ج) $\boxed{\sqrt{x^2+4}+9=0}$ $\quad \Rightarrow \quad \sqrt{x^2+4}=-9$

غیر ممکن، زیرا جواب رادیکال با فرجه زوج نمی‌تواند منفی باشد به عبارتی: $(\sqrt{A+B}\ ) \geq 0$

$\boxed{\text{د)}\ \sqrt{x+3}+\sqrt{x-3}=0} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+3}=-\sqrt{x-3} \quad \Rightarrow \quad \text{م ج}=\emptyset$

غیر ممکن، زیرا مجموع دو مقدارنامنفی وقتی صفر می‌شود که هر دو عبارت‌ها (سمت چپ سوال) همزمان صفر باشند.

$\boxed{\text{ه)}\ \sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-9}=0}$ زیرا $x=-3$ همزمان هر دو رادیکال را صفر می کند .

$$x+3=0 \quad \text{و} \quad x^2-9=0 \quad \Longrightarrow \cap \Rightarrow \quad \text{م ج}=\{-3\}$$

$$x=-3 \quad \cap \quad x=\pm 3$$

$\boxed{\text{و)}\ \sqrt{x^2-4}+3\sqrt{1-x^2}=16}$ گاهی اوقات با تعیین دامنه به جواب می رسیم.

$$x^2-4\geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x|\geq 2 \Rightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x\leq -2 \end{cases} \quad (1) \qquad \qquad \text{م.ج}=(1)\cap(2)=\emptyset$$

$$1-x^2\geq 0 \quad \Rightarrow \quad |x|\leq 1 \quad \Rightarrow \quad -1\leq x\leq 1 \quad (2)$$

$$\text{ز)}\ \sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}=4$$

$$\left(\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}\right)^2=16 \ \Rightarrow \cdots$$

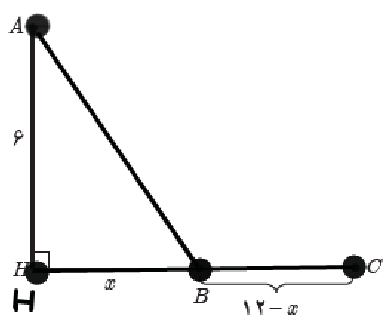
$$\text{ح)}\ \sqrt{x^2-x+3}=x^2-x+1$$

مثال2. الف) عددی بیابید که جمع دو برابر آن با جذرش برابر یک گردد.

ب) عددی بیابید که تفاضل جذرش از دو برابر ثلث آن برابر ۳ گردد.

مثال3. مختصات نقطه‌ای روی خط $y = x + 1$ بیابید که فاصله آن از دو نقطه $A(1, -1)$ و $B(-3, 3)$ به یک فاصله باشد.

مثال4. یک مرغ دریایی (A) به ارتفاع 6 متر از سطح آن است. فاصله تصویر او روی آب (H) از ماهی (C) 12 متر است. مرغ برای شکار ابتدا از A به B و سپس از B به C می رود. اگر مرغ در هوا برای هر متر 14 کیلو کالری و برای طی مسیر از سطح آب 10 کیلو کالری انرژی مصرف کند. نقطه B درچه فاصله‌ای از C باشد تا مرغ 180 کیلوکالری انرژی مصرف کند؟ اگر مرغ دریایی مستقیما از A به C برود چقدر کالری مصرف می‌کند؟



مثال5. مجموع جواب‌های معادله $\sqrt{x^2 - 2x} - 1 = |x|$ کدام است؟(قلم چی 95)

1) $-\frac{1}{4}$ 2) 0 3) $\frac{1}{4}$ 4) بدون جواب

مثال6. اگر $f\left(x + \sqrt{2x - 1}\right) = x^2 - 6$ باشد حاصل $f(1)$ کدام است؟

1) $-4\sqrt{2}$ 2) $-2\sqrt{2}$ 3) $2\sqrt{2}$ 4) $4\sqrt{2}$ (قلم چی 95)

مثال7. حاصلضرب ریشه‌های حقیقی معادله $2+\sqrt{4x^2-6x-1}=2x^2-3x$ کدام است؟

1) $-\frac{5}{4}$ 2) $-\frac{5}{2}$ 3) $\frac{5}{2}$ 4) $-\frac{5}{2}$ (گزینه ۲ ۱۴۰۰)

مثال8. اگر a یک ریشه معادله $\sqrt{3+x}=3\sqrt{x}+1$ باشد، مقدار $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟

1) 12 2) 3 3) 15 4) 17 (گزینه ۲ ۱۴۰۰)

معادلات گویا

به زبان ساده معادله‌ای که مجهول آن در مخرج نیز باشد را معادله گویا می‌گوییم. برای حل آن به کمک ضرب کل معادله در کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها آن را از حالت کسری خارج می‌کنیم و بعد از محاسبات لازم مجهول را می‌یابیم. جوابی قابل قبول است که باعث صفر شدن مخرج‌ها نگردد و یا در شرایط طبیعی صورت مسیله کاربردی داده شده صدق کند.

عموما بیشتر با چهار دسته سوال مواجهیم:۱. حل محاسباتی معادلات. ۲. مسایل حلّال(حل شدن مایعات) ۳. مسایل اتمام کاری توسط دو یا چند نفر. ۴. رفت و برگشت وسیله‌ای با سرعت متفاوت.

در زیر با انواع و شیوه حل هر یک آشنا می‌شوید.

مثال 1. مجموعه جواب معادله‌های زیر را بدست آورید.

$$A)\quad \frac{x^2}{x^2-2x}-\frac{4-x}{x-2}=\frac{x-1}{x}$$

$$B)\quad \frac{x}{x-1}-\frac{3}{x^2-1}=\frac{x-2}{x+1}$$

مثال 2. اگر $x=2$ یک جواب معادله $\frac{x}{a-x}-\frac{a-x}{x}=\frac{a}{x}$ باشد مقدار a را بیابید $(a\neq 2)$

مثال 3. به ازای چه مقداری از m حاصلضرب ریشه‌های معادله زیر برابر 15 است.

$$\frac{m}{x}-\frac{x}{x-3}=2$$

مثال 4. به ازای چه مقادیری از m ، معادله $\frac{m}{x^2-3x}-\frac{m}{x^2+3x}=\frac{x}{x^2-9}$ هیچ ریشه قابل قبولی ندارد؟

مثال 5. سیصد کیلوگرم آب نمک 4 درصدی را چگونه می توان با افزایش نمک یا کاهش آب به آب نمک 7 درصدی تبدیل کرد.(به دو روش)

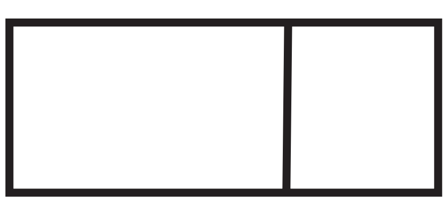
مثال6. خط مترو تجریش تا مرقد ۶۰ کیلومتر است. سرعت برگشت به تجریش، ۱۰ کیلومتر بر ساعت کمتر از مسیر تجریش به مرقد است. از اینرو نیم‌ساعت طولانی‌تر می‌شود. سرعت رفت به مرقد چقدر است؟

مثال7. علی مسیر۳۵کیلومتری A تا B را با دوچرخه رکاب زده و به مبداء بازگشته است. سرعت در برگشت ۶ کیلومتربرساعت کمتر بوده است. اگر مجموع زمان رفت و برگشت ۴ ساعت باشد، سرعت در رفت چقدر است؟

نکته : (عدد طلایی، نسبت طلایی)

عدد طلایی جواب مثبت معادله $x^2 - x - 1 = 0$ است و برابر $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ که تقریبا $1/618$ است و از طرفین وسطین تناسب زیر بدست می‌آید.

$$\boxed{\frac{x}{1} = \frac{x+1}{x}}$$



مثال 5- اگر در یک مستطیل با طول L و عرض W داشته باشیم: $\boxed{\frac{L}{W} = \frac{W+L}{L}}$ آنگاه در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

در حل سوالاتی که پاره‌خطی به طول l به دو قسمت a , b تقسیم شده و بین آنها نسبت طلایی برقرار است با تشکیل نسبت زیر و حل آن، مقادیر a , b را می‌یابیم.

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1/618$$

مثال8: اگر محیط یک زمین مستطل شکل برابر 144 متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد طول و عرض زمین چقدر است.

مثال 9. صد کیلوگرم آب و الکل با غلظت 20 درصد موجود است. اگر نیمی از اب آن را تبخیر کنیم چند کیلوگرم باید الکل اضافه کنیم تا غلظت آن 40 درصد گردد.

مثال 10. کار انجام شده توسط پارسا در 8 ساعت انجام می‌شود. اگر رضا به او کمک کند می‌توانند آن کار را در 1 ساعت و 36 دقیقه تمام کنند. رضا به تنهایی در چند ساعت کار را تمام می‌کند.

تمرین

1. **حاصلضرب ریشه‌های حقیقی معادله $\sqrt{x^2+4x+5}=x^2+4x+3$ را بدست آورید.(کنکور 94)**

2. **یازده کیلوگرم رنگ با غلظت 40 درصد با 4 کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت 70 درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم از آن، غلظت محلول به 50 درصد می‌رسد.(خارج 92)**

3. مجموعه جواب معادله روبرو را بدست آورید.

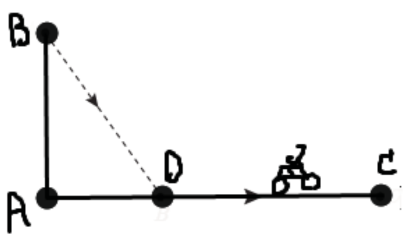
$$2=\sqrt{12+x}-\sqrt{2x+7}$$

4. امید نقاشی ساختمانی را به تنهایی 5 روز زودتر از امیر انجام می‌دهد. اگر هر دو نفر با همدیگر کار را در 10 روز تمام کنند. هر یک از آنها به تنهایی در چند روز نقاشی ساختمان را انجام می‌دهند.

5. مجموعه جواب را بیابید.

$$\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}=3\left(1-\frac{x-1}{x+1}\right)$$

6. در شکل زیر اگر $AB=4\ (km)$ و $AC=10\ (km)$ و قایق فقط 17 لیتر بنزین تا نقطه D داشته باشد. برای طی مسیر از B به D و سپس از D به C با موتور سیکلت می‌خواهیم از B به C برسیم. اگر قایق $4\ {lit}/{km}$ و موتور سیکلت $1\ {lit}/{km}$ مصرف سوخت داشته باشند با موجود بودن فقط 17 لیتر سوخت در قایق موقعیت نقطه D را تعیین کنید.



7. مجموعه جواب را بیابید.

$A)\quad 2\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}=x-4$

$$B)\quad 0=\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}$$

$$C)\quad \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}=4-x$$

$$D)\quad \sqrt{\frac{x+1}{3-x^2}}+\sqrt{\frac{3-x^2}{x+1}}=2$$

8. مجموعه جواب نامعادله زیر را بیابید.

$$\frac{3}{2x^2+x+3}\le\frac{1}{x^2-x+2}$$

۴. قدر مطلق و ویژگی‌های آن

1. فاصله a تا $b = |a-b|$ به عبارت دیگر جنس قدر مطلق فاصله است از اینرو همواره حاصل آن مقداری نامنفی است.

2. قدر مطلق عدد حقیقی a به صورت تحلیلیِ زیر تعریف می شود: (بطور کلی برای عبارت $p(x)$)

$$|p(x)|=\begin{cases}-p(x) & p(x)<0\\ p(x) & p(x)\ge 0\end{cases}$$

$$|a|=\begin{cases}-a & a<0\\ a & a\ge 0\end{cases}$$

3. با توجه به ویژگی رادیکال‌ها داریم : $|a| = \sqrt[2n]{a^{2n}} \quad ; \quad n \epsilon \mathbb{N}$

نکته :

1- داخل قدر مطلق هر عددی قرار می‌گیرد اما جواب قدر مطلق همواره عدد یا عبارتی نامنفی است.

2- نوشتن $|a| = \pm a$ غلط است.

3- طبق تعریف 1 داریم $|a| = |a - 0|$ و به معنای فاصله a تا مبدا است.

مثال1: حاصل را بدون قدر مطلق بنویسید.

$|7 - 2\pi| =$

$|x^2 + 1| =$

$|\sqrt{3} + \sqrt{2} - 4| =$

$\left|\frac{1}{8} - 1\frac{5}{3}\right| =$

$a < 0 < b \Rightarrow |a| + |a - b| =$

$-2 < x < 1 \Rightarrow |x + 2| + |x - 1| = \cdots \qquad , |1 - x| + |2 - x| = \cdots$

$|2x + 4| - 5 =$

$|x + 3| + |x - 2| =$

$\sqrt{1 - 2x + x^2} =?$

$a + |a| =?$

فاصله x تا 1 کمتر از 0/0001 است. $=?$

مثال2- مجموعه جواب را بیابید.

$A)\ |x^2 - 2| = x$

$B)\ |x - 2| = |3x - 5|$

$C)\ |x^2 - x| = -6$

$D)\ \left|x^2-2\right| = x|x|$

$E)\ \left|x^2-2\right| < 3$

$F)\ \left|x^2-2\right| < x$

$G)\ \left|x^2-2\right| < -|x|$

$H)\ |2x-2| \geq 5$

$I)\ |2x-2| \geq -5$

$J)\ |2x-2| \geq 1-x$

$K)\ |2x-2| \geq |2x|$

مثال3- مجموعه جواب را بیابید.

A) $|x-1||x+1| = 3$

C) $(x-1)^2 + |x-1| - 2 = 0$

D) $\left|\frac{x+2}{2x-3}\right| > 1$

E) $|x| + |3-x| - 3 = 0$

F) $\left|x^2\right| + \left|4-x^2\right| - 3 > 0$

مثال4- اگر $f(x) = Max\{|2x|, |x+1|\}$ باشد $minf = ?$ (از رسم کمک بگیرید)

مثال5- نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$A;\quad y=|x+3|+2x$

$B;\quad y=|x+1|+|x-2|$

$C;\quad y=|x+1|-|x-2|$

$D\,;\ y=|x-1|-x$

$E;\quad y=\frac{|x|}{x}+x$

$F;\quad y=\sqrt{x^2-2x+1}+|x+1|+|x-2|$

الف) ویژگی‌های قدرمطلق. برای هر ویژگی یک کاربرد مثال بزنید.

1- قدرمطلق همواره عدد نامنفی است. به عبارت دیگر $|x|\geq 0$

2- $|x|=|-x|$ همچنین $|x-a|=|a-x|$

3- $|x||y| = |xy|$ و $\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right| \quad ; \quad y \neq 0$

4- $\boxed{x^2 = |x|^2 = |x^2|}$

5- $-|x| \leq x \leq |x|$

6- $|x+y| \leq |x| + |y| \quad , \quad |x-y| \geq |x| - |y|$

7- $$\boxed{\begin{cases} x \times y < 0 & \Leftrightarrow \quad |x+y| = |x| + |y| \\ x \times y \geq 0 & \Leftrightarrow \quad |x+y| < |x| + |y| \end{cases}}$$

8- $$|A(x)| = B \quad ; \quad B \geq 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B \\ \cup \\ A(x) = -B \end{cases}$$

9- $$|A(x)| \leq B \quad ; \quad B \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -B \leq A(x) \leq B$$

10- $$\boxed{|A(x)| \geq B \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) \geq B \\ \cup \\ A(x) \leq -B \end{cases}}$$

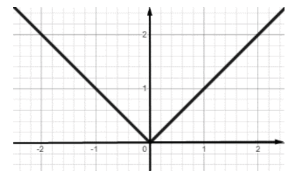
11- $$x \leq |A| \leq y \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x < A < y \\ \cup \\ -y < A < -x \end{cases}$$

x و $y \geq 0$

ب) تابع قدرمطلق

به صورت روبرو تعریف می‌شود و نمودار آن به صورت زیر است.

$$y = |x|$$



برای رسم تابع شامل قدرمطلق :

1–اگر فقط x از درجه یک داخل قدرمطلق باشد از روش انتقال کمک می‌گیریم. مانند:

$$y = |x - 2|$$

2– اگر تابعی از x مانند x^2 و $\sqrt{x}$ داخل قدرمطلق بود به روش حذف قسمت زیر محور x ها و قرینه کردن آن قسمت حذف شده، نسبت به محور x ها (روش استخری) استفاده می‌کنیم. مانند

$$y = \left|x^2 - 2\right|$$

3– اگر x نیز بیرون قدر مطلق باشد از روش تحلیلی، قدرمطلق را حذف می‌کنیم و رسم را انجام می‌دهیم. مانند

$$y = x + |x + 2|$$

4– اگر مجموع یا تفاضل دو یا چند قدرمطلق بود نمودار گلدانی یا سرسره‌ای یا نمودار شکسته است

مثال1. نمودار را به روش مناسب رسم کنید.

1) $y = |2x + 1| + 1$

2) $y = \left|1 - \sqrt{x}\right|$

3) $y = |x| - 2x$

4) $y = |x - 1| + |x|$

مثال2. در هر قسمت به کمک ویژگی‌های قدرمطلق معادله و نامعادله ها راحل کنید.

1) $x^2 - |x| - 6 = 0$

2) $\dfrac{|x+1|}{|2x+2|} = 1$

3) $\dfrac{3-x}{|x-2|} = 1$

4) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x - 2$

5) $\left|x^2 - 1\right| = |2x - 1|$

6) $|x - 1| = 4 - 3x$

7) $|3x - 5| \leq x$

8) $\left|x^2 - 1\right| \leq |x + 1|$

9) $|\,|x - 5| - 1| \geq 3$

10) $|x + 1| + |x| \geq 5$

کار در کلاس

1- بدون قدرمطلق بنویسید.

$$1)\ y = x|x-2|$$

$$2)\ y = \left|x^2 - 1\right|$$

$$3)\ y = |x-2| - |x-2|$$

2- نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی x و y

$$|x| - |y| \leq |x-y|$$

3- بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله آنها از دو نقطه به طول‌های (2-) و 4 روی محور طول‌ها برابر 7 باشد.

4- هریک را به صورت معادله یا نامعادله شامل قدرمطلق بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

A – نامعادله‌ای که مجموعه جواب آن بازه $\left(-2\text{ و }5\right)$ باشد.

B – نامعادله‌ای که مجموعه جواب آن بازه $\left(-\infty\text{ و }-4\right] \cup [8\text{ و }\infty)$ باشد.

C – فاصله بین x و (4-) برابر 9 باشد.

D –سه برابر فاصله بین x و 5 برابر 6 باشد.

E – فاصله بین t و 2 حداقل 4 باشد.

F – فاصله بین نصف m و $-\frac{3}{5}$ کمتر از 0/1 باشد.

5-مجموعه جواب را بیابید.

$$|5x-2|=-10 \quad , \quad |x+3|<-10 \quad , \quad |x+3|>-10$$

$$\left|x^2-1\right|=x-1$$

$$|3x+2|=-3x-2$$

$$|x^2-2x|=2$$

$$\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2-6x+9}=3$$

$$|x+1|<x-1$$

$$\left||x|-1\right|\geq 1$$

5-کدام یک در حالت کلی درست نیست.

$$|x|+|y|\geq|x-y|$$

$$|x|-|y|\leq|x-y|$$

$$|x|-|y|\geq|x-y|$$

$$|x|\leq x$$

6-اگر برای سه عدد حقیقی غیرصفر داشته باشیم

$$|x+y+z|\leq|x|+\ |y|+\ |z|$$

آنگاه سه عدد: 1-مساوی‌اند 2-هم‌علامت‌اند 3-هرسه مثبت‌اند 4-هرسه منفی‌اند.

7-با فرض

$$|2x-4|+|4x-2y-10|=|x-2|$$

حاصلضرب x و y را بیابید.

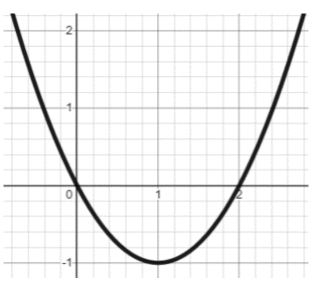
8-مجموعه جواب را بیابید. $x^2 = |x-6| + |-x^2+x-6|$

9-سطح محدود به نمودار $y = ||x|-1|-1$ و محور x ها را بیابید.

10- مساحت محدود به دو نمودار $y = x - |x|$ و $y = 1 - |x|$ را بیابید.

11- خط $x = -3$ خط تقارن $y = |3x+2| + |3x-k|$ است. مقدار k را بیابید.

12- اگر معادله $mx = |x-1| + |x+2|$ دارای دو ریشه باشد حدود m را بیابید.



13- اگر نمودار تابع f به صورت روبرو باشد نمودار توابع $|f(x)| + 1$ و $f(|x|+1)$ را رسم کنید.

14- مجموعه جواب نامعادله $(x-4)|x| < 2x-5$ به کدام صورت است (سراسری92):

1) $(1,5)$ 2) $(1-\sqrt{6}, 1+\sqrt{6})$

3) $(1-\sqrt{6}, +\infty) \cup (1,5)$ 4) $(1,5) \cup (-\infty, -1-\sqrt{6})$

۵. آشنایی با هندسه تحلیلی

۱– فاصله بین دو نقطه روی محور طول‌ها

اگر طول نقاط A , B را با x_A , x_B نشان دهیم در اینصورت فاصله بین A تا B از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$|AB| = |x_B - x_A|$$

مثال1. اگر طول نقاط A برابر 11 و طول نقاط B برابر $-\sqrt{2}$ باشد فاصله بین A تا B را بیابید.

۲– فاصله دو نقطه $A\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ تا $B\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$$

مثال2- اگر $C\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ سه راس مثلث باشند:

۱- رسم مثلث.۲-محیط آن را بیابید. ۳-نوع آن را تعیین کنید. ۴-شیب دوضلع AC و CB را بیابید.

مثال 3-معادله خط عمودمنصف پاره خطی را بیابید که دو نقطه $B\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ را بهم وصل می‌کند.

۳– شرط عمود و موازی بودن دوخط

1. دوخط L , L' را موازی گوییم اگر و تنها اگر شیب‌های آنها با هم برابر باشند یعنی $m = m'$

2. دو خط $L\,,L'$ را برهم عمود می گوییم و تنها اگر شیب یکی قرینه و معکوس دیگری باشد به عبارتی دیگر: $m=-\frac{1}{m'}$ یا $m\times m'=-1$

مثال : وضعیت خطوط زیر را نسبت به هم تعیین کنید :

الف) $\begin{cases} y=2x-3 \longrightarrow m=2 \\ x+2y=5 \longrightarrow m'=-\frac{x\text{ضریب}}{y\text{ضریب}}=-\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

$\Rightarrow$ دو خط برهم عمودند

ب) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \longrightarrow 3x+2y=6 \longrightarrow m=-\frac{3}{2} \\ x=-\frac{2}{3}y-4 \longrightarrow 3x+2y=4 \longrightarrow m'=-\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow m=m' \Rightarrow$

خط موازی اند

نکته : دو خط $ax+by+c=0$, $a'x=b'y+c'=0$ مفروض اند .

1. اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ باشد آن گاه دوخط با هم موازی‌اند و بالعکس .

2. اگر $aa'+bb'=0$ باشد ، آن گاه دو خط برهم عمودند و بالعکس .

3. اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ باشد آن گاه دو خط برهم منطبق‌اند .

مثال 1. دو خط $(m-1)x+2y=3$, $5x-\frac{m}{2}y-1=0$ برهم عمودند . مقدار m را بیابید.

مثال 2. اگر نقاط $A(a\,,1-2a)$, $B(1-2m\,,m)$, $C(0,1)$ در یک راستا باشند مقدار a,m را بیابید.

شراط اینکه سه نقطه بر یک استقامت باشند این است که
شیب هر دو نقطه دلخواه با شیب دو نقطه دیگر برابر باشند.

۴- متخصات نقطه وسط یک پاره‌خط

1. مختصات وسط پاره خط AB با طول های x_B , x_A از رابطه زیر به دست می آید :

$$AM = MB \Rightarrow x_m - x_A = x_A - x_m \Rightarrow 2x_m = x_A + x_B \Rightarrow x_m = \frac{xA+xB}{2}$$

مثال 1. اگر طول A ، -3 و طول B برابر 5 باشد و $AM = 3MB$

$$x_m - x_A = 3(x_B - x_m) \qquad x_B = 5 \ , \ x_A = -3$$

$$x_m - (-3) = 3(5 - x_m) \Rightarrow x_m + 3 = 15 - 3x_m \Rightarrow 4x_m = 12 \Longrightarrow x_m = 3$$

2. اگر $A\begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} x_B \\ y_B \end{bmatrix}$ آنگاه مختصات وسط پاره خط AB از رابطه

$$M\begin{bmatrix} \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{bmatrix}$$

بدست می‌آید.

مثال 2. اگر $A\begin{bmatrix} 2a+1 \\ 3 \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} 4 \\ k-1 \end{bmatrix}$ مفروض باشد و $M\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ مختصات وسط آنها باشد مقادیر a و k را بیابید.

مثال 3. در مثلثی با سه راس $A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, B\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, C\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ اندازه میانه AM را بیابید.

مثال4. خطوط $x = 0$ و $y = -\frac{3}{2}$ و $2x - 3 = 0$ را رسم کنید و و ضعیت هریک را نسبت به دیگری تعیین کنید.

۵– فاصله یک نقطه از یک خط

فاصله یک نقطه $A(x_0\ ,y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ از فرمول زیر محاسبه می شود

$$l: ax+by+c=0 \quad \text{و} \quad A(x_0,y_0) \Rightarrow \quad AH=d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

نکته: معادله خط حتما باید به صورت استاندارد $ax+by+c=0$ باشد یعنی مساوی صفر باشد .

مثال 1. فاصله نقطه $A(-3\ ,2)$ را از خط $y=2x+1$ به دست آورید .

مثال 2. فاصله نقطه $A(-1\ ,4)$ از خط $3x+4y=k+1$ برابر 2 است . مقدار k را بیابید .

مثال 3. نقطه $A(3\ ,-1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع ان منطبق بر خط $2y-x=5$ است.

مساحت این مربع را بیابید. (تجربی 93)

مثال 4. دو نقطه روی خط به معادله $y=x-1$ قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله $3x-3y=5$ برابر $\sqrt{13}$ است . طول این دو نقطه را بیابید . (تجربی 89)

۶– فاصله دو خط موازی

1. اگر دو خط $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ و موازی مفروض باشند فاصله آنها از یکدیگر از رابطه زیر به دست می آید :

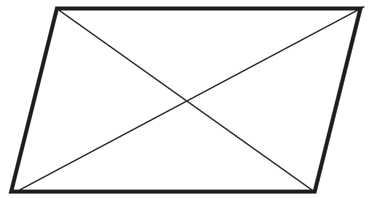
$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

2. معادله خطی که از وسط دو خط موازی $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ می گذرد از رابطه زیر به دست می آید :

$$l: ax+by+\frac{c+c'}{2}=0$$

3. در هر متوازی الاضلاع مجموع طول های مختصات رأس ها مقابل باهم برابرند همچنین مجموع عرض های مختصات رأس های مقابل نیز باهم برابرند به عبارت دیگر :

$$\begin{cases} x_A+x_C=x_B+x_D \\ y_A+y_C=y_B+y_D \end{cases}$$



مثال 1. فاصله دو خط $3x-2y=5$ و $9x=6y+2$ را به دست آورید.

مثال 2. در مثال قبل معادله خط میانی دو خط داده شده را بیابید.

مثال 3. تقطه (6 و 7) رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بردو خط معادلات $2y-3x=11$ و $3y+4x=8$ می باشند، مختصات وسط قطر را بیابید . (تجربی 90)

4. اگر $A(x_A\,,x_A)$ و $B(x_B\,,Y_B)$ و $C(x_C\,,y_C)$ مختصات رأس‌های مثلث ABC باشند آن گاه

الف) مختصات مرکز ثقل مثلث از رابطه $G\begin{bmatrix}\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\\ \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{bmatrix}$ به دست می آید.

(مرکز ثقل مثلث محل برخورد سه میانه مثلث است)

ب) مساحت مثلث از رابطه زیر به دست می آید :

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|(x_Ay_B+x_By_C+x_cy_A)-(y_Ax_B+y_Bx_C+y_cx_A)\right|$$

مثال 4. اگر $A(2\,,-1)$ و $B(3\,,5)$ و $C(4\,,-6)$ باشد.

الف) مرکزثقل مثلث را بیابید. ب) مساحت مثلث را حساب کنید.

تمرین در منزل

1. مثلث ABC را به رأس‌های $A(-1\,,3)$ و $B(1\,,1)$ و $3(1\,,3)$ در نظر بگیرید :

الف) مثلث را رسم کنید. ب)نوع مثلث را تعیین کنید. ج)محیط مثلث را به دست آورید.

د) معادله خط عمود منصف BC را به دست آورید. ه) طول ارتفاع AH را حساب کنید.

2. $A(-2\,,5)$ و $B(-6\,,11)$نقاط دو سر قطر یک دایره اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به دست آورید.

3. شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادله $Y = x^2 - 6x - 27$ مدل سازی شده است . الف) مختصات B , A ب) طول AB ج) بیشترین ضخامت عدسی

4. فاصله دو خط موازی $-3x + \sqrt{3}y + 6 = 0$ و $-x\sqrt{3} + y - 2 = 0$ را بیابید.

5. خط $6x + 8y = 10$ بر دایره 3 به مرکز $5(-2\,,1)$ مماس است. طول قطر دایره چقدر است ؟

6. نقطه $S(x\,,4)$ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع 5 در شکل روبرو داده است.

الف) x را بیابید. ب)شیب خط های AS و BS را بیابید و نشان دهید برهم عموداند.

7. اگر فاصله نقطه $A(-1\,,2)$ از خط $ax+3y=2$ برابر 2 باشد. مقدار a را به دست آورید .

8. فاصله نقطه $A(1\,,-4)$ از خط $8x-6y=2k$ برابر 3 باشد مقدار k را به دست آورید.

9. نقطه ای روی خط $y=3x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2\,,1)$ برابر 4 باشد.

10. $A(3\,,2)$ و $B(-1\,,1)$ و $C(5\,,3)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر M , H به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول M , H را به دست آورید .

11. فاصله دو خط به معادلات $y=\sqrt{3}x+2$ و $\sqrt{3}y-3x+6=0$ را به دست آورید.(تجربی88)

12. مساحت مثلث با سه رأس $A(2\,,5)$ و $B(3\,,0)$ و $3(0\,,2)$ را به دست آورید. (تجربی92)

13. اگر نقطه‌های $A(3\,,2)$ و $B(-1\,,-4)$ و $C(2\,,1)$ فاصله نقطه A از عمود منصف BC را به دست آورید.

14. نقطه $A(3\,,-1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط روی $2y-x=5$ است. مساحت این مربع؟

15. نقطه $A(3\,,2)$ مرکز لوزی $ABCD$ است. اگر قطرهای لوزی به موازات محورهای مختصات و خط $6x+y=8$ معادله یکی از اضلاع آن باشد، محیط لوزی؟

16. در مربع $ABCD$ مختصات راس $A(3\,,2)$ و ضلع BC روی خط $y=kx+1$ قرار دارد. اگر مساحت این مربع 5 باشد، حاصل جمع مقادیر قابل قبول برای k را بیابید.

فصل دوم   تابع

1- آشنایی بیشتر با تابع 2- انواع تابع 3- وارون تابع 4- اعمال روی تابع

1-آشنایی بیشتر با تابع:

در سال دهم با مفهوم تابع آشنا شدید. در این فصل ضمن یادآوری تابع و بررسی اجزای آن، چند نوع دیگر تابع و ویژگی‌های آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس ویژگی یک به یک بودن و وارون تابع و اعمال جبری را روی توابع یاد می‌گیرید.

تعریف تابع :

یک تابع از مجموع A به مجموعه B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A، دقیقا یک عضو از مجموعه B نسبت داده می‌شود. به مجموعه A ; دامنه تابع و به مجموعه B ; هم‌دامنه تابع می‌گویند. برد تابع زیر مجموعه‌ای از هم‌دامنه است.

$$f\begin{cases} A \longrightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$$

به زبان ساده‌تر : تابع

الف) از روی زوج مرتب : مجموعه زوج های مرتب که دارای مؤلفه اول یعنی (x) برابر نباشد.

ب) از روی نمودار : هر خط موازی محور yها رسم کنیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

ج) از روی ضابطه : معمولا y نباید داخل قدر مطلق باشد یا توان زوج داشته باشد.

مثال 1. کدام یک تابع است ؟

ه) $y = \frac{2}{x}$ د) $|y| = |x|$ ج)   ب)   الف)

ز) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ 2x & x<1 \end{cases}$ ح) $f=\left\{\left(\sqrt{a},2\right)\ ,\ (a\,,-1)\ ,\ (\frac{a}{\sqrt{a}}\,,+2)\right\}$

ط) $g=\{(0\,,1)\,,(1\,,2)\,,(2\,,4)\,,(3\,,8)\,,\ldots\}$

کار در کلاس

1. در هر قسمت نمودار تابع را رسم کنید :

$h(x):\begin{cases}\{-2\,,0\,,1\}\longrightarrow N \\ f(x)=x^2\end{cases}$ $y:\begin{cases}[-2\,,1)\longrightarrow[4\,,1) \\ f(x)=x^2\end{cases}$ $f:\begin{cases}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ f(x)=x^2\end{cases}$

2. نمایش جبری توابع زیر را به صورت کامل بنویسید .

3. تفاوت هم‌دامنه و برد را با ذکر یک مثال نشان دهید .

4. برای مشخص کردن یک تابع باید چه چیزهایی کاملا مشخص و معین باشند. مثال بزنید.

5. هر تابع را از سه دیدگاه می‌توان بررسی کرد:

1. به عنوان یک ماشین که ورودی می گیرد و خروجی تحویل می‌دهد.

2.به عنوان دستور یا قاعده ای (ضابطه ای) که با ورودی های مشخص خروجی می‌دهند.

3. به عنوان نموداری از صفحه xy که شامل تمام زوج مرتب‌هایی به صورت $\left(x\,,f(x)\right)$ است.

با یک مثال هر سه مورد را نشان دهید .

مثال 6. برای تابع $f:\begin{cases}[-1\,,2]\longrightarrow[0\,,+\infty)\\ f(x)=|x|\end{cases}$ کدام یک از نمایش های زیر قابل قبول است ؟

الف) $f:\begin{cases}\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\\ f(x)=|x|\end{cases}$

ب) $f:\begin{cases}[-1\,,2]\longrightarrow[0\,,2]\\ f(x)=|x|\end{cases}$

ج) $\begin{cases}f:[-1\,,2]\longrightarrow\mathbb{R}\\ f(x)=\sqrt{x^2}\end{cases}$

د) $\begin{cases}f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{\geq 0}\\ f(x)=|x|\end{cases}$

7. در هر قسمت دامنه و برد تابع را تعیین کنید.

الف) $f(x)=-\frac{1}{2}$

ب) $V(x)=20-2t$ تابع خالی شدن آب یک منبع

ج) $h(t)=-t^2+5t-4$ تابع ارتفاع سیبی که از زیر زمین به هوا پرتاب شده است:

:

د) $f(x)=\frac{255x}{100-x}$ تابع هزینه پاک سازی شهری و صنعتی از یک رودخانه(x درصد از آلودگی‌های):

ه) $g(x)=\sqrt{2t+3}$ تابع برچیده شدن رطوبت از بتنی که تازه ریخته شده برحسب زمان:

و) $k(t)=3^t$ تابع رشد یک نوع سلول سرطانی برحسب زمان

ه) $g(x)=7\sqrt{x}+50$ تابع رشد قد یک کودک برحسب ماه

تابع به عنوان ماشین

x متغییر مستقل و y متغییر وابسته می‌شود. در این صورت y از روی عملی که روی x انجام می-دهد به دست می‌آید. به عبارت دیگر

به عنوان مثال در تابع f با ضابطه $f(x)=|x|$

ماشین تابع : $f(x)=|\quad|$ است که برای هر ورودی x فاصله آن را از مبدا مختصات $f(x)$ یا y نتیجه می‌دهد. مثلا برای ورودی ۳-، $f(x)=|-۳|$ خواهد بود.

یا مثال دیگر در تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x}$ ماشین تابع $f(x)=\sqrt{}$ است که برای هر ورودی x جذر آن برای خروجی (y) نتیجه می‌دهد. مثلا برای ورودی ۳۶ خروجی۶ خواهد بود.

اما

تابع $f(x)=|x|$ از منظر تعریف به صورت $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geq 0\end{cases}$ معرفی می‌شود.

و

از منظر نمودار، تمام زوج مرتب‌هایی به شکل $(x،|x|)$ در صفحه مختصات است. یعنی:

کار در کلاس

ماشین f به عنوان ورودی، شما را دریافت می‌کند. بعد از شش ماه کار کردن روی شما در زمینه تیوری، بدنسازی، تمرین بازی و تکنیک‌های فردی یک فوتبالیست با قیمت‌های مختلف برا ی باشگاهها ارایه می‌دهد.

الف) این ماشین به ازای آقای بیرانوند چه خروجی می‌دهد؟

ب) اگر خروجی، بازیکنی ۱۰۰ میلیون تومانی باشد، ورودی چه فردی می‌تواند باشد؟

ج) نمایش جبری این تابع را بنویسید.

د) آیا می‌توانید نموداری برای این تابع رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

تساوی دو تابع

دو تابع g و f را برابر می‌گوییم هرگاه :

الف) $D_f=D_g$ و ب) برا ی هر x از دامنه آنها : $f(x)=g(x)$

از منظر نمودار:

هنگامی دو تابع برابرند که نمودارهای آنها کاملا بر هم منطبق باشند.

از منظر زوج مرتب:

اگر دو تابع با زوج مرتب داده شده باشند، هنگامی با هم برابرند که به عنوان دو مجموعه با هم برابر باشند.

مثال: کدام جفت توابع زیر با هم مساوی‌اند؟

الف) $\begin{cases} f(x) = \frac{|x|}{x} \\ g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}^2 \\ g(x) = \sqrt{x^2} \end{cases}$

ج) $\begin{cases} f = \{(۱،۲), (-۱،۱۲), (-۲،۳)\} \\ g = \{(۱،۱۲), (-۱،۳), (-۲،۲)\} \end{cases}$

د) $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-4}{x+2} \\ g(x) = \frac{2x-4}{2} \end{cases}$

مثال ۲. تابعی بنویسید که مساحت یک مربع را برحسب طول ضلع آن بیان می‌کند و نمودار آن را رسم کنید تابع $y=x^2$ را رسم کنید و آن را با تابع مساحت برحسب طول ضلع مقایسه کنید. شباهت‌ها و تفاوت‌ها را بنویسید.

کار در کلاس

۱. درست و نادرست را با ذکر دلیل بیان کنید.

الف) اگر دامنه دو تابع برابر و برد آنها نیز باهم برابر باشند آنگاه دو تابع برابرند.

ب) برد تابع همان هم‌دامنه تابع است.

ج) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنه آن بازه $[0\,,2]$ است.

د) تعداد توابع $A = \{a_1\,, a_2\,, \dots, a_m\}$ به $B = \{b_1\,, b_2\,, b_3\,, \dots, b_n\}$ برابر m^n است.

۲. تابعی مثال بزنید که دامنه آن مجموع اعداد حقیقی منفی باشد. چه تعداد از این توابع وجود دارند.

۳. کدام جفت توابع زیر مساوی‌اند؟ چرا؟

الف) $\begin{cases} f: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = |x| \end{cases}$

ب) $\begin{cases} g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ g(x) = x \end{cases}$

ج) $\begin{cases} h: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} \end{cases}$

د) $\begin{cases} t: [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ t(x) = \sqrt{x} \end{cases}$

ه) $\begin{cases} m: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ m(x) = 2 \end{cases}$

و) $\begin{cases} n: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\} \\ n(x) = \frac{2x-2}{x-1} \end{cases}$

۴. تابع $f(x) = x + 3$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ k^2 - 9 & x = 3 \end{cases}$ با یکدیگر برابرند. مقدار k را به دست آورید.

۵. کدام جفت توابع زیر مساوی‌اند؟ چرا؟

الف) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} \times \sqrt{x-1} \\ g(x) = \sqrt{x^2 - 1} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{1 + x^2} + x \\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} - x} \end{cases}$

ج) $\begin{cases} f(x) = x \times sgn(x) \\ g(x) = |x| \end{cases}$

د) $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} \div \frac{x+1}{x+2} \\ g(x) = \frac{x^2+2x}{x+1} \end{cases}$

۶. تابع f در همه شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) $Df = [-2, +\infty)$ و $f(2) = 1$ و $f(0) = 0$

ب) تابع در بازه $[-2, 0]$ همانی است و در بازه $[0, 3)$ ثابت و در بازه $(3, +\infty)$ خطی است.

۷. تابع g در شرایط زیر صدوق می‌کند. g را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه آن اعداد حقیقی نامثبت باشد.

ب) تابع g به هر عدد بزرگتر از (-2) قرنیه مربع آن را نسبت می‌دهد.

ج) تابع g به هر عدد کوچکتر از یا مساوی (-2) قدر مطلق آن را نسبت می‌دهد.

۸. دامنه توابع زیر را به دست آورید

الف) $f(x) = -\frac{5}{3}$ ب) $f(x) = \frac{x+2}{5}$ ج) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}$

د) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-2x}$ ه) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+4}$ و) $f(x) = \frac{x+1}{|2x-1|-3}$

ز) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ح) $f(x) = \sqrt{10 - x^2}$ ط) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 2}$

ی) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{3-x}}$ ک) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+2}{3-x}}$ ل) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{|x|-2}}$

م) $f(\mathrm{x}) = \sqrt{2x+1} + \sqrt{2-x}$ ن) $f(x) = \frac{1+\frac{x+1}{x}}{2-\frac{x+1}{x-1}}$

۹- سود حاصل از تولید کالا در یک شرکت از رابطه $y = 6x - 300$ به‌دست آید. دامنه این تابع را مشخص کنید و مقادیر به‌دست آمده (برد) این تابع را تفسیر کنید.

انواع تابع

1- **تابع ثابت** : تابعی که دارای مولفه دوم مشخص و ثابتی باشد. مانند:

$$g:\begin{cases}[1,3] \to N \\ g(x) = 5\end{cases} \qquad h(x) = 5f = \{(1,4),(2,4),(3,4)\}$$

2- **تابع همانی** : تابعی که مولفه اول و دوم آنها در هر زوج مرتب، برابرند. مانند:

$$g:\begin{cases}[1,3] \to \mathbb{R} \\ g(x) = x\end{cases} \qquad h(x) = xf = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$$

3- **تابع خطی** : هر تابع به صورت $f(x) = ax + b$ را تابع خطی گویند. (توابع ثابت و همانی نوع خاصی از توابع خطی‌اند). مانند:

$$p(x) = 2x - 1 \qquad g(x) = \frac{x}{2} + 1 \qquad h(x) = \frac{x}{2} + 1f(x) = -x + 3$$

$$D = [0,2] \qquad D = \{-1,0,1,2\}$$

4_ **تابع سهمی**: هر تابع به فرم $f(x) = ax^2 + bx + c \quad : a \neq 0$ را تابع درجه دو یا سهمی می‌گویند.

ویژگی‌ها:

الف) دامنه آن $\mathbb{R}$ است مگراینکه صورت سوال دامنه مشخص را مدنظر داشته باشد.

ب) برد این تابع از محاسبه $\frac{-\Delta}{4a}$ و با توجه به علامت a تعیین می‌شود.

$$a > 0 \Rightarrow \qquad \Rightarrow \text{برد} = R = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$$

$$a < 0 \Rightarrow \qquad \Rightarrow \text{برد} = R = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$$

ج) **یادآوری برای تعیین علامت عبارت** $f(x) = ax^2 + bx + c$ **مطابق زیر:**

$$\Delta > 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{دو ریشه حقیقی} \qquad \Rightarrow$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} \quad \text{یک جواب مضاعف} \qquad \Rightarrow$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد} \qquad \Rightarrow$$

5- **تابع گویا** : به زبان ساده تابع به فرم کسری که متغییر در مخرج باشد. مانند $y = \frac{x+3}{5x}$ یا

هر تابع به صورت $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامند، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای‌اند و $Q(x) \neq 0$

مثال: کدام یک تابع گویا است؟ چرا؟

الف) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ ب) $g(x) = \frac{x+3}{\sqrt{2}x-2}$ ج) $h(x) = \frac{x+2}{5}$ د) $p(x) = \frac{5}{x+2}$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $\begin{cases} g: \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\} \\ g(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\} \\ f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

ج) $\begin{cases} h: (-\infty, 0) \to (-\infty, 0) \\ h(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$

6- **تابع رادیکالی** : به زبان ساده تابعی که متغییر زیر رادیکال باشد. مانند $y = \sqrt{3x^2 + 6}$ یا

تابعی که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت می‌دهد، تابع رادیکالی(ریشه دوم) می‌نامند و به صورت $f(x)=\sqrt{x}$ نمایش می‌دهند.

مثال1-

$f(x)=\sqrt{x}$: دامنه: $D=[0,+\infty)$: برد $R=[0,+\infty)$

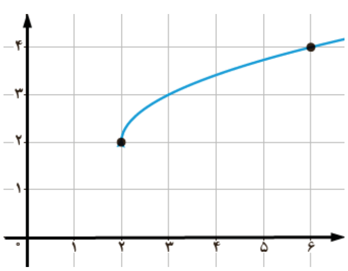
2-تابع ریشه‌سوم را به صورت $y=\sqrt[3]{x}$ داریم. دامنه و برد این تابع را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

3- رسم کنید:

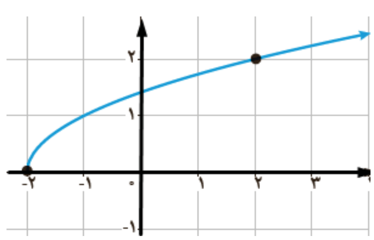
الف) $y=\sqrt{x+2}$ ب) $y=\sqrt{x}+3$ ج) $y=-\sqrt{-x}+1$

د) $y=\sqrt{2x-3}$ ﭺ) $y=2-\sqrt{x}$ ه) $y=\sqrt{2-x}$

4-نمایش جبری توابع زیر را بر اساس $y=\sqrt{x}$ بنویسید.

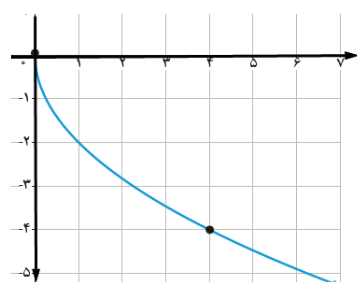


الف)



ب)

ج)



5-تابع $y=\sqrt{x}$ را ابتدا نسبت به محور xها قرینه می‌دهیم (قرینه استخری) سپس یک واحد به سمت راست منتقل کرده و ۲ واحد بالا می‌آوریم. نمایش جبری این تابع را بنویسید و دامنه و برد آن را مشخص کنید و نمودار آن را رسم کنید.

6-شکل روبرو نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ را بیابید. (ریاضی ۹۲)

7-اگر عبارت $\left(\sqrt[2]{\frac{2}{x^2}-\frac{9}{2}}+\sqrt[3]{2x-x^2}\right)$ عدد حقیقی باشد. مجموعه مقادیر x را تعیین کنید.(تجربی ۹۶)

8-دامنه تابع $y=\frac{1}{\sqrt{mx^2-mk+2}}$ برابر تمام اعداد حقیقی است. حدود m را بیابید.

9-به کمک توصیف فارسی توضیح دهید نمودار $y=3\sqrt{6x+1}$ چگونه از روی نمودار $y=\sqrt{x}$ به دست آورید.

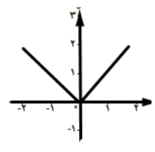
10-نمودار تابع $y=\sqrt{|x|}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بنویسید.

11-تابع $f(x)=7\sqrt{x}+50$ قد متوسط کودکان را به تقریب برحسب (cm) تا حدود ۶۰ سالگی نشان می‌دهد. x نشان دهند ماه‌های پس از تولد است. دامنه و برد این تابع را مشخص کنید و نمودار

آن را رسم کنید. قد یک کودک شش ساله تقریبا چقدر است؟ کودکی با قد (cm) ۸۵ حدودا چند ماهه است؟

۷- قدر مطلق:

تابع $y=|f(x)|$ که $f(x)$ عبارت جبری است را تابع شامل قدر مطلق قدر مطلق می‌گوییم. ساده‌ترین نوع

تابع قدر مطلق $y=|x|$ است که نمودار آن  است و $D=\mathbb{R}$ و $R=[0,+\infty)$

۸- تابع چند جمله‌ای:

هر تابع به شکل $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ که $a_n\neq 0$ را یک تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌گوییم. $(n\in W)$ مانند :

$$f(x)=\frac{1}{3}x^{10}+\sqrt{2}x^8-3x^5+2$$

۹- تابع نمایی، لگاریتمی : مانند

$y=2^{x-1}$ or $y=\log(x+1)-2$

در فصل‌های بعدی بررسی می‌گردد.

۱۰– تابع چندضابطه‌ای: اگر دامنه تابع به چند بخش تقسیم شود و برای هر بخش ضابطه‌ای جداگانه تعریف شود **تابع را چند ضابطه‌ای** گوییم. توابع چند ضابطه‌ای به فرم زیرند :

$$f(x)=\begin{cases} f_1 & D_1 \\ f_2 & D_2 \\ f_3 & D_3 \end{cases}$$

۱۱- **تابع مثلثاتی** : تابعی که متغییر، کمان مثلثاتی باشد. مانند $y = tan(\frac{\pi}{2} - x)$ یا

تابعی که متغییر جلوی نسبت مثلثاتی باشد را تابع مثلثاتی می‌گوییم مانند $f(x) = sinx$. نمودار و ویژگی‌های این نوع توابع در فصل‌های بعدی و سال‌های بعد مورد بررسی قرار می‌گیرند.

مثال : اگر تابع f به صورت زیر باشد حاصل $f(f(5)) - f(f(1))$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x > 3 \\ x - \sqrt{x+4}, & x \le 3 \end{cases}$$

۱۲- تابع علامت:

تابع به فرم $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ یا $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ را تابع علامت می‌گوییم. این تابع را

به صورت $f(x) = sgn(x)$ نیز معرفی می‌کنند. نمودار آن را رسم کنید.

۱۳- تابع پله‌ای:

تابعی که دامنه آن به چند قسمت تقسیم شود و برای هر قسمت دامنه آن تابع ثابت تعریف کنیم، تابع پله‌ای می‌نامند.

مثال: در یک پارکینگ هزینه پارک خودرو مطابق جدول روبروست. ضابطه تابع را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & 0 < x < 2 \\ 3 & 2 \le x < 2/5 \\ 4 & 2/5 \le x < 3 \\ 5 & 3 \le x \le 5 \end{cases}$$

مثال2- برای تابع پله‌ای روبرو یک مسئله کاربردی بسازید و نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 7 & 0 < x \le 2 \\ 11 & 2 < x < 5 \\ 15 & 5 \le x < 8 \\ 25 & 8 \le x \le 12 \end{cases}$$

۱۵- تابع جزء صحیح

اگر x عدد حقیقی دلخواهی باشد، جزء صحیح آن بزرگترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم.

$$[-1/3]=-2 \quad , \quad [2/8]=2 \quad , \quad [4]=4 \quad , \quad [-3]=-3$$

مثال 1- حاصل را بنویسید :

۱) $[-\pi]+[\sqrt{2}]-\left[\frac{\pi}{3}\right]=$ ۴) $|[-5/2]|+[|-5/2|]=$

۲) $[1+\sqrt{5}]+[1-\sqrt{5}]=$ ۳) $[1]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{35}]=$

تابعی که هر عدد حقیقی x را به جزء صحیح آن نسبت می‌دهد تابع جزء صحیح نامیده می‌شود.

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\to Z\\ f(x)=[x]\end{cases} \qquad D_f=\mathbb{R} \quad \text{و} \quad R=Z$$

مثال2- نمودار تابع $y=[x]$ را رسم کنید.

نکته: برای رسم نمودار $[kx]$ در بازه $[a,b]$ مطابق دستورالعمل زیر می‌رویم:

1 - $[a,b]\Rightarrow a\le x\le b\Rightarrow ka\le kx\le kb$ **(بازه را در k ضرب می‌کنیم.)**

2 - $ka\le kx<n \quad , \quad n\le kx<n+1 \;, \ldots \quad , \;\ldots\le kx<kb$

n اولین عدد صحیح بعد از ka است

3- با توجه به تقسیم‌بندی (۲) مقدار جزء صحیح از نامساوی‌ها می‌یابیم و y را محاسبه می‌کنیم.

4- تمام موارد قسمت (۲) را بر k تقسیم کرده و با تعیین آن روی محور xها و مقدار y آنها، نمودار را رسم می‌کنیم.

مثال3-نمودار $y=[3x]+1$ را در بازه $[-2,1]$ رسم کنید.

۱) $\left[-\frac{2}{3}, 1\right] \Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \ -2 \leq 3x \leq 3$

4-نمودار تابع $y = \left[\frac{x}{3}\right]$ را در بازه $[-6, 5]$ رسم کنید.

۱) $[-6, 5] \Rightarrow -6 \leq x \leq 5 \quad \Rightarrow \ -2 \leq \frac{x}{3} < \frac{5}{3}$

ویژگی‌های جزء صحیح:

1) $\boxed{[x] = n \quad \Leftrightarrow \quad n \in Z\,,\ n \leq x < n+1}$

2) با توجه به رسم نمودار محور xها به صورت مایل و حفره‌دار بودن نقاط صحیح و توضیحات سر کلاس که بیانگر تعریف جزء صحیح است این نامساوی واضح است $\boxed{[x] \leq x}$

به طور کلی داریم: $\boxed{x - 1 < [x] \leq x \quad : \ x \in \mathbb{R}}$

مثال: $[10/2] \leq 10/2$ $\qquad [-12] \leq -12$

مثال: $[x + (-2)] = [x] - 2$

3) $\boxed{[x + k] = [x] + k \ \Leftrightarrow k \in Z}$

4) $\boxed{y = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in Z \\ -1 & x \notin Z \end{cases}}$ دامنه $= D = \mathbb{R}$ ، برد $= R = \{0, -1\}$

5) $\boxed{y = x - [x] \qquad D = \mathbb{R}}$ و $\boxed{R = [0, 1)}$

$0 \leq x < 1 \qquad y = x - 0$ و $-1 \leq x < 0 \qquad y = x - (-1)$ و ...

کار در کلاس

1- مجموعه جواب معادله‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $[2x - 3] = -8$

ب) $2[x + 1] = 10$

ج) $3[x] = 5$

د) $[x] - 3 > 0$

ه) $[x] - 3 \geq 0$

و) $[x] - 3 < 0$

ز) $[x] - 3 \leq 0$

2- نمودار توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y = \left[\frac{x}{3}\right] \quad [-3, 7]$

ب) $y = \frac{1}{3}[x] \quad [-1, 2]$

ج) $y = [x] - [-x]$

د) $y = x + [x]$

ه) $y = \left[x + \frac{1}{2}\right] \quad [-2, 2]$

3- نمودار توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ \sqrt{x - 1} & x \geq 0 \end{cases}$

ب) $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}+1 & x>0 \\ \sqrt{x-1} & -2\le x\le 0 \end{cases}$

ج) $h(x) = \begin{cases} [x] & 0<x<2 \\ \frac{x+1}{x} & -4<x<0 \end{cases}$

معادلات و توابع:

معادلاتی که شامل دو متغییر هستند یک رابطه را نشان می‌دهند مانند $x=t^3$ و $y=x^2+3y^2$ معادلاتی معرفی کننده یک تابع هستند که به ازای تمام زوج مرتب‌هایی که می‌سازند دارای مولفه اول برابر نباشد. معمولا برای نشان دادن تابع نبودن از مثال نقض کمک می‌گیریم.

مثال: کدام یک از رابطه‌های زیر معرف یک تابع است.

الف) $x^2+y^2=2$

$x=1 \Rightarrow y^2+1=2 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow |y|=1 \Rightarrow y=\pm1 \Rightarrow \begin{cases}(1,1)\\(1,1)\end{cases} =$ تابع نیست

ب) $x+|y-2|=3$

$x=0 \Rightarrow |y-2|=3 \Rightarrow \begin{cases} y-2=3 \rightarrow y=5 \\ y-2=-3 \rightarrow y=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases}(0,5)\\(0,-1)\end{cases} \Rightarrow$ تابع نیست

ج) $|y|+|x|=0$

$x=0 \Rightarrow y=0 \rightarrow y=0 \Rightarrow (0,0)$ رابطه یک زوج مرتب دارد پس تابع است.

مثال2-کدام رابطه معرف تابع است.

الف) $x+y=2$

و) $y\begin{cases} x-1 & x>1 \\ x+2 & x<2 \end{cases}$

ب) $x^2 + y = -1$ ‌ ‌ ‌ ‌ ه) $|y| + x = 2$

ج) $x + y^2 = 2$ ‌ ‌ ‌ ‌ ز) $x = 2$

د) $|x| + |y| = 3$ ‌ ‌ ‌ ‌ ح) $|y| = 2$

کار در منزل

1- اگر $[x^2 + x] = -1$ باشد حاصل $[x^{20}]$ کدام است؟ (تجربی۸۸)

2- در تابع $f(x) = x^2 - 2[x]$ مقدار؟ $f(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3}))$ (تجربی۹۰)

3- نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = \frac{1}{[x]}$ ‌ ‌ ب) $y = x[x]$ ‌ ‌ ج) $y = \frac{x}{[x]}$

4- دامنه توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y = \frac{x}{[x]+[-x]+1}$ ‌ ‌ ب) $y = \sqrt{[x] + [-x]}$ ‌ ‌ ج) $y = \frac{x^2+x}{x-[x]}$

5- برای $n > 2$ و $n \in N$ حاصل را به‌دست آورید: (تجربی۹۱)

$$\left[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}\right] - 2\left[\sqrt{n^2 - 2n}\right] = ?$$

۶- اگر $f(x) = x - [x]$ برد تابع $g(x) = f(2x-3) - 2f(x)$ را بیابید. (ریاضی۹۲)

وارون تابع:

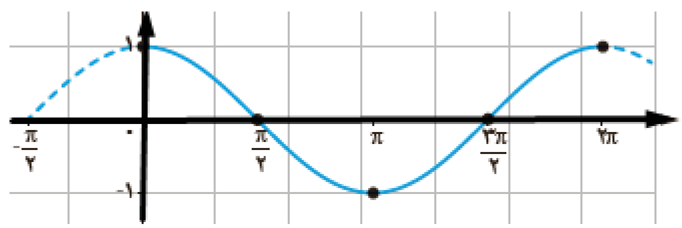
تابع یک به یک: تابعی یک به یک است که مولفه دوم برابر نداشته باشد.

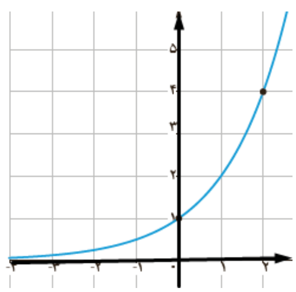
مثال۱- تابع f، $(1-1)$ است. اما تابع g یک به یک نیست.

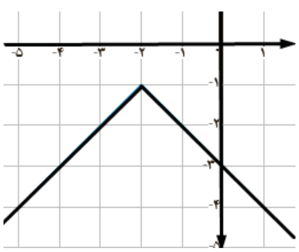
$$g = \{(1,3),(2,3),(3,5)\} \quad , \quad f = \{(1,7),(2,9),(3,1)\}$$

برای تشخیص یک به یک بودن تابع از روی نمودار داده شده: اگر هر خطی موازی محور xها بکشیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

مثال۲- کدام تابع یک به یک است.







وارون تابع و تابع وارون :

اگر رابطه بین دو مجموعه به‌صورت زوج مرتب داده شده باشد، رابطه که از جابجایی دو مولفه هر زوج مرتب به‌دست می‌آید وارون آن رابطه می‌نامیم. اگر f رابطه باشد، وارون آن را با f^{-1} نشان می‌دهیم.

$$f = \{(1,2),(3,5),(3,2)\} \xrightarrow{\text{وارون}} f^{-1} = \{(2,1),(5,3),(2,3)\}$$

در حالت کلی:

$$f^{-1} = \{\,(y,x) \mid (x,y) \in f\,\}$$

(-1) در f^{-1} یک نماد است و معنی توان منفی را نمی‌دهد، یعنی:

$$f^{-1} \neq \frac{1}{f}$$

اگر تابعی یک به یک باشد آن تابع را وارون پذیر می‌گوییم و f^{-1} را تابع وارون f می‌نامند واضح است که وارون تابع و تابع وارون با یکدیگر متفاوت‌اند. در واقع وارون تابع الزاما تابع نیست اما تابع وارون الزاما تابع است.

مثال: وارون توابع زیر را بنویسید. کدام تابع وارون پذیر است؟

$$f = \{(1,2),(3,7),(-1,8)\} \xrightarrow{\text{وارون}} f^{-1} = \{(2,1),(7,3),(8,-1)\}$$

f وارون‌پذیر است. زیرا تابعی یک به یک است. f^{-1} تابع وارون است.

$$g = \left\{\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{1}{3}\right),(-1,1),(1,1)\right\} \xrightarrow{\text{وارون تابع}} g^{-1} = \left\{\left(\frac{1}{2},2\right),\left(\frac{1}{3},3\right),(1,-1),(1,1)\right\}$$

g وارون پذیر نیست. زیرا تابعی یک به یک نیست. g^{-1} تابع وارون نیست و صرفا وارون تابع است.

برای به‌دست آوردن تابع وارونِ یک تابع وارون پذیر :

الف) اگر تابع به صورت زوج مرتب باشد، در هر زوج مرتب جای y,x را عوض می‌کنیم.

ب) اگر نمودار تابع باشد، قرینه آن را نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ربع اول و سوم) رسم می‌کنیم.

ج) اگر ضابطه تابع $y=f(x)$ داده شده باشد، ابتدا معادله تابع را برحسب x حل می‌کنیم (یعنی x را می‌یابیم) و سپس در مرحله آخر جای x و y را عوض می‌کنیم. آخرین y همان f^{-1} است.

مثال: در هر قست تابع وارون را به‌دست آورید:

الف) $f = \{(1,1),(2,4),(3,9),(4,16)\} \quad \rightarrow \quad f^{-1} = \{(1,1),(4,2),(9,3),(16,4)\}$

ب)

ج)

د) $f(x) = x^2 - 2x + 1 \quad ; \quad x \leq 1$

$$y = (x-1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{y} = \sqrt{(x-1)^2} \rightarrow \sqrt{y} = |x-1| \xrightarrow{x\leq 1} \sqrt{y} = -(x-1) \rightarrow$$

$$\sqrt{y} = -x+1 \rightarrow x = 1-\sqrt{y} \xrightarrow{\text{جای } y,x \text{ عوض می‌شود}} y = 1-\sqrt{x} \rightarrow f^{-1}(x) = 1-\sqrt{x}$$

محاسبه وارون تابع به کمک ماشین تابع:

مثال 1- وارون تابع $y = \sqrt{x+1} - 2$ را به کمک ماشین تابع به‌دست آورید.

ماشین تابع f:

مثال2- به روش ماشین تابع، تابع وارون $f(x) = x^2 - 4x + 3$

مثال3- به روش ماشین تابع ، تابع وارون $g(x) = ax + b \quad (a \neq 0)$ را به‌دست آورید.

مثال4- وارون تابع $y = \frac{x+1}{2x-3}$ را بیابید.

ویژگی‌های تابع وارون:

اگر f^{-1} تابع وارون با ضابطه f باشد.

1) $\boxed{D_f = R_{f^{-1}} \quad , \quad R_f = D_{f^{-1}}}$

2) توابع f , f^{-1} در صورتی که همدیگر را قطع کنند باشرط صعودی بودن همدیگر را روی خط $y = x$ قطع می‌کنند. از این رو برای یافتن نقطه تقاطع یکی از معادلات $f = f^{-1}$ یا $f = x$ یا $f^{-1} = x$ را حل می‌کنیم. اگر تابع نزولی باشد ممکن است همدیگر را قطع کنند و روی خط $y = x$ نباشد.

3) در تابع خطی $y = ax + b$:

الف) $a = 1$, $b = 0$ ب) اگر $a = -1$, $b \in \mathbb{R}$ در این صورت $f = f^{-1}$.

4) در تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$:

اگر $a + d = 0$ یا $a = -b$) باشد در این صورت $f = f^{-1}$.

5) تابع چند ضابطه‌ای در صورتی وارون‌پذیر است که 2 شرط زیرا را همزمان داشته باشد :

1- تک‌تک ضابطه‌ها در دامنه خود یک‌به‌یک باشند. و 2- اشتراک بردها تهی باشد.

بهتر است به‌روش رسمِ تابع چند ضابطه‌ای از یک به یک بودن کلی تابع مطمئن شویم و برای یافتن f^{-1} در تک تک ضابطه‌ها x را برحسب y می‌یابیم.

6) برای یافتن نمودار f^{-1} از روی نمودار تابع f ، قرینه تابع f را براساس خط $y = x$ می‌یابیم.

7) اگر تابعی یک به یک نباشد با محدود کردن دامنه آن (تحدید دامنه) می‌توانیم آن را وارون پذیر کنیم.

کار در منزل :

1- تابعی مثال بزنید که یک به یک (وارون‌پذیر نباشد). توصیفی – نموداری – ضابطه‌ای – زوج مرتبی.

2- آیا تابع $f(x)=\frac{3}{7}x$ و $g(x)=\frac{7}{3}x$ وارون یکدیگرند؟ دو تابع $f(x)=\frac{3}{7}$ و $g(x)=\frac{7}{3}$ چطور؟ چرا؟

3- به کمک رسم نمودار وارون پذیری توابع را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هرکدام که وارون پذیر است. به‌دست آورید:

الف) $g=x^2+6x+9 \quad ; \; x\leq -3$

ب) $f(x)=2-|x+1| \quad ; \; x>0$

ج) $f(x)=x^2+10x+24 \quad ; \; x>-5$

د) $y=\sqrt{x-2}-1$

4- ابتدا نمودار تابع $y=x^2-2x+2$ را رسم کنید و نشان دهید یک به یک نیست. با تحدید دامنه آن را وارون پذیر کنید و ضابطه وارون آن را به‌دست آورید. نمودار f^{-1} را رسم کنید و دامنه و برد آن را بنویسید.

5- نمودار تابعی مانند g رسم کنید که وارون پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی: $x>g(x)$

6- درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) وارون تابع $y=-x+\frac{1}{2}$ با خودش برابر است.

ب) در تابع $y=\frac{x+2}{3x}$ ، دامنه f^{-1} برابر $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ است.

ج) وارون تابع $y=-2$ همان $y^{-1}=\frac{-1}{2}$ است.

د) اگر f و g دو تابع باشند که وارون یکدیگر باشند آنگاه :

$$(fog)(x) = x \;;\; x \in D_g \quad , \quad (gof)(x) = x \quad ; \quad x \in D_f$$

ه) وارون تابع $f(x)\begin{cases} x^2 & x > 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$ برابر $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ است.

ز) وارون تابع $y = \frac{2x+3}{x-3}$ باخودش برابر است.

ح) وارون تابع $y = \sqrt{x-2}$ برابر $f^{-1}(x) = x^2 + 2$ است.

7- اگر رابطه $f(x) = \{(3,2),(a,5),(3,a^2-a),(b,2),(-1,4)\}$ تابعی $(1-1)$ باشد دوتایی (a,b) را بیابید.

8- در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ مقدار f^{-1} را بیابید. (ریاضی۸۸)

9- اگر ضابطه $f(x) = x^2 - x + 1$ باشد ، نمودار f^{-1} الزاما از کدام نقطه می‌گذرد.

1) $(-1,0)$ 2) $(0,-1)$ 3) $(1,0)$ 4) $(0,1)$

10- ضابطه وارون تابع $y = \frac{x}{1+|x|}$ را به‌دست آورید. (تجربی۹۱)

11- ضابطه معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ را به‌دست آورید. (تجربی۹۲)

12- تابع با ضابطه $f(x) = 2x - |4 - 2x|$ در بازه‌ای وارون پذیر است. ضابطه f^{-1} در آن بازه را بیابید. (ریاضی۹۲)

13- ضابطه وارون تابع $y = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & x < 0 \end{cases}$ را به‌دست آورید. (تجربی۹۱)

14- ضابطه معکوس تابع $y = \begin{cases} \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ به کدام صورت است. (تجربی۹۲)

1) $y = x\sqrt{|x|} \quad x \in \mathbb{R}$

2) $y = x\sqrt{|x|} \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$

3) $y = x|x| \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$

4) $y = x|x| \quad x \in \mathbb{R}$

15- اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد، ضابطه تابع $f^{-1}(\sin x)$ را به‌دست آورید. (ریاضی۹۰)

16- اگر به‌ازای $f(x) = x^3 - 3x$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1}, f با کدام طول متقاطع‌اند؟ (ریاضی۸۸)

17- تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(-1, +\infty)$ مفروض است. نمودارهای دو تابع f^{-1}, f در چند نقطه متقاطع‌اند؟ (ریاضی۹۲)

اعمال روی تابع

اگر g, f دو تابع با ضابطه‌های $g(x), f(x)$ باشد، اعمال جبری روی توابع را چنین تعریف می‌کنیم.

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) \qquad D_{f\pm g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \qquad D_{f\times g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x|g(x) = 0\}$$

نکته:

$$1) \qquad (f)^2(x) = (f \times f)(x) = f(x) \times f(x)$$

$$2) \qquad (kf)(x) = kf(x)$$

2- به زبان ساده‌تر برای اعمال جبری روی توابع :

روی دامنه مشترکِ توابع داده شده، عمل جبری گفته شده را روی yهای آنها انجام می‌دهیم.

مثال1- در هر قسمت جواب را بنویسید.

الف) $f = \{(1,2),(4,-5),(7,\sqrt{2})\}$, $g = \{(1,4),(4,0),(7,2),(-4,1)\}$

1) $f + g = \{(1,2+4),(4,-5+0),(7,\sqrt{2}+2)\}$

2) $\frac{3f}{g} = \left\{\left(1,\frac{3\times2}{4}\right),\left(4,\frac{3\times(-5)}{0}\right),\left(7,\frac{3\times\sqrt{2}}{2}\right)\right\} = \left\{\left(1,\frac{3}{2}\right),\left(7,\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\right\}$

3) $(f \times g)(4) + g^2(1) = f(4) \times g(4) - g(1) \times g(1) =$

$$(-5) \times (0) - 4 \times 4 = 0 - 16 = -16$$

4) $\sqrt{f} = \left\{\left(1,\sqrt{2}\right),\left(4,\sqrt{-5}\right),\left(7,\sqrt{\sqrt{2}}\right)\right\} = \{(1,\sqrt{2}),(7,\sqrt[4]{2})\}$

مثال 2- اگر $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$, $g(x) = \frac{x-7}{x+3}$ باشد، ضابطه و دامنه تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ را بیابید.

ضابطه تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{x+2}{x-1}}{\frac{x-7}{x+3}}=\frac{(x+2)(x+3)}{(x-1)(x-7)}$

$\frac{D_f}{g}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}=\{\mathbb{R}-\{1\}\cap\mathbb{R}-\{-3\}\}-\{x\left|\frac{x-7}{x+3}=0\right\}=$
$(\mathbb{R}-\{1,-3\})-\{x=7\}=\mathbb{R}-\{1,-3,7\}$

مثال 3- اگر $f(x)=\sqrt{x+6}$ ، $g(x)=\frac{x+2}{x-5}$ باشند، مقدار $\frac{1}{5}(2f-g)(3)$ را به‌دست آورید.

$\frac{1}{5}\big(2f(3)-g(3)\big)=\frac{1}{5}\left(2\times\sqrt{3+6}-\frac{3+2}{3-5}\right)=\frac{1}{5}\left(2\times3-\frac{5}{-2}\right)=\frac{1}{5}(6+2/5)=$
$\frac{1}{5}\times 8/5=1/6$

مثال 4- اگر $f(x)=2x-\sqrt{4x^2-1}$ ، $g(x)=2x+\sqrt{4x^2-1}$ باشند، آنگاه نمودار تابع $(f.g)(x)$ را رسم کنید.

$$(f.g)(x)=f(x)\times g(x)=\left(2x-\sqrt{4x^2-1}\right)\times\left(2x+\sqrt{4x^2-1}\right)$$

$$=4x^2-(4x^2-1)=1$$

$$D_{f.g}=D_f\cap D_g=\left(+\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$$

$$D_f: 4x^2-1\geq 0\Rightarrow x^2\geq\frac{1}{4}\Rightarrow |x|\geq\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x\geq\frac{1}{2}\\ \cup\\ x\leq-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$D_g: 4x^2-1\geq 0\Rightarrow x^2\geq\frac{1}{4}\Rightarrow |x|\geq\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x\geq\frac{1}{2}\\ \cup\\ x\leq-\frac{1}{2}\end{cases}$$

مثال 5- اگر $f(x)=\sqrt{x+3}$ ، $h(x)=\sqrt{5-x}$ باشد، ضابطه و دامنه $\frac{f}{h}$ ، $(h/2g)(1)$ را به‌دست آورید.

مثال 6- نمودارهای دو تابع g,f داده شده است.

الف) ابتدا ضابطه توابع g,f را بنویسید.

ب) حاصل $(f+g)(x)$ را حساب کنید نمودار آن را رسم کنید.

مثال7- فرض کنیم $\begin{cases} h: N \to N \\ h(n) = \frac{n}{2} \end{cases}$ ، $f: A \to N$ به این صورت تعریف شود:

که در آن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $\qquad$ $f = \{(1, -2), (-2, -4), (3, 6), (4, A)\}$

ضابطه توابع $(f-g)(x), (f^2 - fg)(x)$ را به‌دست آورید.

ترکیب توابع:

اگر g, f دو تابع باشند ترکیب g با f را با gof نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) \quad ; \quad D_{gof} = \{x \in D_g \big| f(x) \in D_g\}$$

$$x \longrightarrow f(x) \longrightarrow g(f(x)) \longrightarrow (gof)(x)$$

به عبارت دیگر :

اگر $f: A \longrightarrow B$ $\quad$ $g: C \longrightarrow D$ $\quad$, $B \subseteq C$ باشد آنگاه می‌توانیم f, g را ترکیب کنیم. به این نحو که ابتدا f را روی x اعمال کنیم و سپس تابع g را روی خروجی f اعمال کنیم به بیان دیگر :

$$gof : \begin{cases} A \longrightarrow D \\ (gof)(x) = g(f(x)) \end{cases}$$

به زبان ساده‌تر در ترکیب تابع f و g به صورت

$(gof)_{(x)}$ تابع g به‌جای اینکه روی x عمل

کند، روی $f(x)$ عمل می‌کند.

مثال1- اگر $f(x)=\frac{5}{9}(x-32)$, $g(x)=x+273$ دو تابع باشند، ضابطه توابع , gof و fog را بیابید و تفسیر معنایی کنید:

f : تابع تبدیل درجه فارنهایت به درجه سانتی‌گراد و g : تابع تبدیل درجه سانتی‌گراد به درجه کلوین.

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=\frac{5}{9}(g(x)-32)=\frac{5}{9}(x+273-32)=\frac{5}{9}(x+141)$$

ورودی این تابع x برحسب سانتی‌گراد است که آن را به درجه کلوین تبدیل کرده و سپس کلوین را به فارنهایت تبدیل می‌کند.

$$(gof)(x)=g\big(f(x)\big)=f(x)+273=\frac{5}{9}(x-32)+273=\frac{5}{9}x+\frac{2297}{9}$$

مثال 2- اگر $f=\{(1,2),(3,5),(2,7),(-1,4)\}$, $g=\{(2,3),(9,-1)(=,(4,1)\}$ باشد توابع زیر را به‌دست آورید :

قاعده کار این است که yتابع دوم $=x$ تابع اول آنها را حذف می‌کنیم و هر چه مانده سرجای خودش می‌نویسیم .

الف) $fog=\{(2,5),(9,4),(4,2)\}$

ب) $gof=\{(1,3),(-1,1)\}$

ج) $fof=\{(1,7)\}$

د) $gog=\emptyset$

$$\left.\begin{array}{r} fog(2)=f\big(g(2)\big)=f(3)=5\to(2,5)\\ fog(9)=f\big(g(9)\big)=f(-1)=4\to(9,4)\\ fog(4)=f\big(g(4)\big)=f(1)=2\to(4,2)\end{array}\right\}\epsilon fog$$

مثال 3- اگر $f(x)=x^2+9$, $g(x)=\sqrt{x}+1$ باشد به‌دست آورید :

الف) $(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=$

ج) $(fof)(x)=$

ب) $(gof(x) =$

مثال 4- اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ ، $g(x) = \frac{2}{x-1}$ باشد ضابطه و دامنه تابع gof را به‌دست آورید :

$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = \frac{2}{f(x)-1} = \frac{2}{\sqrt{x-3}-1}$

$D_{gof} = \{x \in D_f \big| f(x) \in D_g\}$ (۱)

$D_f = x-3 \geq 0 \longrightarrow x \geq 3$ یا $[3,+\infty)$ (۲)

$D_g = x-1 \neq 0 \to \mathbb{R}-\{1\}$ (۳)

$1\,,2\,,3 \quad \Longrightarrow \quad \{x \in \big[3,+\infty)\big|\sqrt{x-3} \in \mathbb{R}-\{1\}\ \} \Longrightarrow \quad D_{gof} = [3,+\infty) - \{4\} \quad \sqrt{x-3} \neq 1 \Longrightarrow x-3 \neq 91 \quad x \neq 4$

برای به دست آوردن D_{gof} ابتدا دامنه توابع g, f را جداگانه به‌دست می‌آوریم و سپس مطابق روند زیر فرمول دامنه را می‌نویسیم و بعد از تفسیر آن به نماد ریاضی مرحل آن دامنه gof را تعیین می‌کنیم

مثال 5- اگر $f(x) = -x^2-1$, $g(x) = \sqrt{x}$ آیا ضابطه $(gof)_{(x)}$ قابل تعریف است ؟ چرا؟

$R_f = (-\infty,-1]$

$D_g = [0,+\infty)$ $\Longrightarrow D_f \cap R_f = \emptyset \Longrightarrow$ قابل تعریف نیست

نکته: شرط اینکه gof قابل تعریف باشد این است که : $R_f \cap D_g \neq \emptyset$.

مثال 6- اگر $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2+1$ باشد، توابع gof , fog و دامنه آنها را به‌دست آورید.

مثال 7- اگر $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ باشد، توابع gof و دامنه آن را به‌دست آورید.

مثال 8- اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$, $(fog)(x) = x^2 - 6x + 10$ باشد، تابع g را به‌دست آورید.

$$\left.\begin{array}{c}(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = g^2(x) - 2g(x) + 2 \\ \text{داده مسئله}: f\big(g(x)\big) = x^2 - 6x + 10\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad g^2 - 2g + 2 = x^2 - 6x + 10 \Longrightarrow \; g^2 - 2g + 1 + 1 = x^2 - 6x + 9 + 1 \Longrightarrow (g-1)^2 = (x-3)^2 \Longrightarrow$$

$$|g-1| = |x-3| \Longrightarrow g - 1 = x - 3 \longrightarrow g(x) = x - 2 \quad g - 1 = -x + 3 \longrightarrow g(x) = -x + 4$$

مثال 9- اگر $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, $g(x) = 2x + 1$ ، تابعی مانند f بیابید به قسمتی که $fog = h$

$$(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = f(2x+1) = 4x^2 + 4x + 7$$

$$f(2x+1) = 4x^2 + 4x + 1 + 6 \Longrightarrow f(2x+1) = (2x+1)^2 + 6$$

$$f(t) = t^2 + 6 \Longrightarrow f(x) = x^2 + 6$$

مثال 10- یک پی (فدنداسیون) بتنی مربع شکل به عنوان پایه‌ای برای یک مخزن گازوییل استوانه‌ای استفاده می‌شود.

الف) شعاع مخزن ، r را به عنوان تابعی از x (ضلع مربع) بنویسید.

ب) مساحت A پایه دایره‌ای شکل را به عنوان تابعی از r بنویسید.

ج) $(Aor)(x)$ را بیابید و تعبیر کنید.

مثال 11- درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) $f(x)=x^2-4$, $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ آنگاه $(fog)(5)=-25$, $(fog)(x)=-x^2$

ب) اگر $g(4)=7$, $f(7)=5$ آنگاه $(fog)(4)=35$

ج) $g(x)=2x-1$, $f(x)=\sqrt{x}$ آنگاه $(fog)(5)=g(2)$

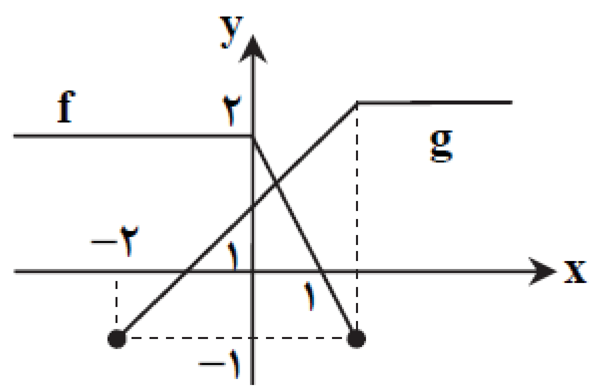
د) برای سه تابع g,f,h داریم : $fo(goh)=(fog)oh$

کار در منزل :

1- اگر $f(x)=x^2$, $g(x)=x+3$ ، توابع fog , gof را حساب کنید و نشان دهید

$fog\neq gof$

2- با توجه به نمودارهای g,f ، مقادیر خواسته شده را بیابید.



الف) $(f+g)(-4)=$

ب) $(f-2g)(3)=$

ج) $\left(\frac{f}{g}\right)(0)=$

د) $(fg)\left(\frac{1}{3}\right)=$

ه) $(fog)\left(-\frac{1}{2}\right)=$

و) $(fof)(7)=$

3- اگر $f(x)=3x+7$ باشد fof^{-1} , $f^{-1}of$ را به‌دست آورید و نمودارهای آنها را رسم کنید.

آیا $fof^{-1}=f^{-1}of$

4- اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $f = \{(x, 2x-1), x \in A\}$ باشند تابع fof را تشکیل دهید .

5- اگر $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = 7x + 3$ باشد نشان دهید : الف) $(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$

ب) $(f^{-1})^{-1} = f$

6- اگر $f(x) = \sqrt{x + 2|x|}$ باشد مقدار $f(f(-144))$ را بیابید. (تجربی۸۸)

7- اگر $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2 + 2x$ آنگاه حاصل

$(fog)(1-\sqrt{2}) - (gof)(1-\sqrt{2}) = ?$

(تجربی۸۹)

8- تابع $f = \{(2,1), (4,5), (1,7)\}$, $g = \{(1,2), (3,1), (a,3), (b,1)\}$ مفروض‌اند. اگر

$(4,2) \in fog$, $(4,1) \in gof$ باشند. دوتایی (a,b) کدام است؟ (ریاضی۹۰)

9- اگر $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x - 1$ باشند ضابطه fog^{-1} را بیابید.

10- اگر $f(x) = (2x-3)^2$, $g(x) = x+2$ باشند، نمودارهای دو تابع f , fog با کدام طول متقاطع‌اند؟ (تجربی۹۲)

11- اگر $f(x) = 2 - |x-2|$ باشد ، ضابطه تابع $f(f(x))$ را به‌دست آورید. (ریاضی۹۰)

12- اگر $y = f(x)$ یک تابع خطی باشد که از دو نقطه $(2,0)$,$(0,2)$ بگذرد ، ضابطه fof را به‌دست آورید.

13- اگر $f(x) = \sqrt{x + |x+2|}$ باشد، دامنه تابع $f(-x)$ را بیابید. (تجربی ۹۱)

14- اگر $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ باشد ، دامنه تابع $f(3-x)$ را بیابید. (تجربی۹۲)

15- اگر $f(x) = x - [x]$ باشد، آنگاه برد تابع $g(x) = f(2x-3) - 2f(x)$ را بیابید. (ریاضی۹۲)

16- اگر خروجی ماشین مقابل $\frac{4}{3}$ باشد ، مقدار ورودی را بیابید.(۸۶)

ورودی $\longrightarrow 2x-2 \longrightarrow \frac{x}{\sqrt{x}+1} \longrightarrow$ خروجی

17- اگر خروجی ماشین مقابل برای ورودی 2 ، برابر 5- باشد ، مقدار A را بیابید.

ورودی $\longrightarrow 2x+A \longrightarrow \sqrt{x}-2x-4 \longrightarrow$ خروجی

18- اگر $f(x)=2x+3 \quad , \quad g\big(f(x)\big)=8x^2+22x+20$ باشند. ضابطه تابع fog را بیابید. (ریاضی۹۲)

19- دو تابع $f=\{(1,2),(2,3),(4,5),(3,4)\} \quad , \quad g=\{(2,1),(3,2),(5,4)\}$ مفروض است. $(g^{-1}of^{-1})=?$ (تجربی۹۰)

20- اگر $f(x)=\frac{1+x^2}{1-x^2} \quad , \quad g(x)=\sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه تابع gof را بیابید. (ریاضی۹۲)

21- دو تابع $f=\{(2,5),(6,3),(3,7),(4,1),(1,9)\} \quad , \quad g(x)=\frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}\big(g(2x)\big)=6$ مقدار a را بیابید. (تجربی۹۶)

22- اگر $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$, $g(x)=\frac{2x+2}{2-x}$ باشند. ضابطه تابع $g(f(x))$ را بیابید. (تجربی۹۶)

23- اگر $g(x)=3x-1\,,(fog)(x)=9x^2-6x+3$ باشد $f(x)$ را به‌دست آورید.

24- اگر $f\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}$, $g(x)=2(0)^2x$ باشند مقدار $(fog)(\frac{\pi}{3})$ را بیابید.

25- اگر $f(x)=1-\sqrt{x+1}$ باشد نمودار $y=fof^{-1}(x)$ را رسم کنید.

26- اگر $f(x)=\frac{3x+2}{x-3}$ باشد حاصل $\left(fofofo..\text{مرتبه}\,53..of\right)(12)=?$.

فصل سوم

توابع نمایی و لگاریتم

۱-تابع نمایی ۲-تابع لگاریتمی و لگاریتم ۳-ویژگی های لگاریتم و معادلات لگاریتمی

۱-توابع نمایی و لگاریتم

در این فصل ابتدا با تابع نمایی و نمودار آن و ویژگی‌های این تابع و کاربردهایی از آن آشنا می‌شویم. سپس با تابع لگاریتم و نمودار آن و قوانین آن و چند مورد از کاربرد لگاریتم را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

الف) **تابع نمایی**: هر تابع با نمایش جبری $f(x) = \mathrm{a}^{\mathrm{x}}$ که در آن $a \neq 1$ و $a > 0$ را یک تابع نمایی می‌نامیم.

مثال۱. نمودار تابع $y = 2^x$ را رسم کنید و ویژگی‌های آن را بنویسید.

A) تابع (۱-۱) است. پس وارون دارد

B) این تابع صعودی است (افزایشی است)

C) $D_f = \mathrm{R}$, $\mathrm{R}_f = (0, +\infty)$

مثال ۲. نمودار تابع $y = 2^{-x}$ را رسم کنید و ویژگی‌های آن را بنویسید .

مثال ۳. کدام یک از توابع زیر نمایی نیستند؟ چرا؟

الف) $y=(-2)^x$ ه) $y=\sqrt{2}^x$

ب) $y=\pi^x+1$ ج) $y=2\times 3^{x-1}$ د) $y=1^x$

مثال ۴. جاهای خالی را پر کنید.

در تابع $f(x)=a^x$:
A اگر $a>1$ با افزایش مقدار x مقادیر f .... می یابند.
B اگر $0<a<1$ با افزایش مقدار x مقادیر تابع f............. می یابند.

مثال۵. نیمه عمر یک ماده رادیواکتیو ۱۰ ساعت است (یعنی بعد از گذشت ۱۰ ساعت نصف مقدار اولیه آن از دست می‌رود و این روند ادامه دارد. اگر مقدار اولیه این ماده ۴ گرم باشد.

الف)بعد از گذشت ۴۰ ساعت چه مقدار ماده می ماند؟

ب)بعد از چه مدت ۱۰ گرم از این ماده باقی می‌ماند؟

ج) آیا با گذشت زمان این ماده تمام می شود؟ چرا؟

نکته:

تابع نمایی یک ماده با مقدار اولیه k واحد جرم و نیمه عمر i بعد از گذشت زمان t ، $f(t)$ مقدار ماده باقی می‌ماند.مقدار ماده باقی مانده از تابع زیر به دست می‌آید.

$$f(t)=k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{i}}$$

در این تابع k مقدار اولیه $k=$ مقدار اولیه $t=$ زمان $f(t)=$ مقدار ماده مانده

الف) $t=40$

$$f(t)=4\times(\frac{1}{2})^{\frac{t}{j}} \Rightarrow f(40)=4\times(\frac{1}{2})^{\frac{40}{10}}=4\times 2^{-4}=4\times\frac{1}{16}=\frac{1}{4} \Rightarrow$$

ب)

$$f(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad 4 \times (\frac{1}{2})^{\frac{t}{10}} = 1 \quad \Rightarrow \quad (\frac{1}{2})^{\frac{t}{10}} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad 2^{-\frac{t}{10}} = 2^{-2} \quad \Rightarrow \quad t = 20$$

ج)خیر، زیرا این تابع نمایی است و مقدار آن به صفر نزدیک می شود اما صفر نمی شود.

مثال6.

الف) نمودار سه تابع $y = 2^x$ و $y = 3^x$ و $y = 5^x$ را رسم کنید و آنها را با هم مقایسه کنید.

ب) نمودار سه تابع $y = (\frac{1}{2})^x, y = (\frac{1}{3})^x, y = (\frac{1}{5})^x$ را رسم کنید و آنها را با هم مقایسه کنید.

مثال۷. نیمه عمر کربن ۱۴، ۵۷۳۰ سال است مقدار آن بعد از t سال از رابطه $Q(t) = 10(\frac{1}{2})^{\frac{t}{5730}}$ به دست می آید.

الف)مقدار اولیه این کربن چقدر است؟ ب)بعد از گذشت ۱۷۱۹۰ سال مقدار این نوع کربن چقدر است؟

ج)بعد از گذشت چند سال مقدار این کربن صفر می شود؟

مثال۸. اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ ، x و y دو عدد حقیقی دلخواه باشند حاصل عبارت زیر را بنویسید و مثال بزنید:

1) $a^0 =$ 2) $a^1 =$ 3) $a^x \times a^y =$

4) $a^x \div a^y$ 5) a^{-x} 6) $(a^x)^y =$

7) $(ab)^x =$ 8) $(\frac{a}{b})^x =$ 10) $a^{\frac{x}{y}} =$

مثال۹. نامعادله و معادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $3^x \times 9^{x+1} = 81 \div 3^{-5}$

ب) $2^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \times 3^{\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} = 36^{x+\sqrt{3}}$

ج) $8^{2x-1} > \frac{1}{512}$

۱۰. داروها در بدن با ادرار دفع می شوند. فرض کنید ۱۰ میلی گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t) = 10 \times (0/8)^t$ به دست می‌آید.

الف)مقدار دارو پس از ۶ ساعت چقدر است؟ ب)چه درصدی دارو در دو ساعت از بین می رود؟

مثال۱۱. درست و نادرست را تعیین کنید:

الف) عدد $\sqrt{8}$ بین 2^2 و 2^3 است.

ب) مقدار تقریبی $2^{\sqrt{7}}$ برابر $5/3$ است.

ج) هر تابع به فرم $y = ka^x \quad ; k \neq 0 , a \neq 1 , a > 0$ رفتار تابع نمایی دارد.

د)رابطه $q(t) = 10 \times (\frac{4}{5})^t$ مقدار نمک حل نشده در آب پس از t دقیقه است. پس از ۲ دقیقه مقدار نمک حل نشده در آب $6/4$ گرم است.

ه) $a^x < a^y < a^z \quad : \quad x, y, z \in R$

تمرین در منزل

۱. نمودار توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید

۱) $y = 2^{x+1}$

۲) $y = 2^{-x-1}$

۳) $y = -2^{x}$

4) $y = 2^{x} + 1$

۵) $y = 2 \times (\frac{1}{3})^{x} + 1$

۲. نمودارهای دو تابع $f(x) = 4^{x}$ و $g(x) = (\frac{1}{2})^{2x} + \frac{3}{2}$ در نقطه A متقاطع اند. فاصله نقطه A از نقطه $A(-1,1)$ را بیابید.(ریاضی ۹۶)

۳. نمودارهای دو تابع $y = (\frac{\sqrt{3}}{3})^{2x}$ و $y = 3^{x} + \frac{8}{3}$ در نقطه A متقاطع اند. فاصله نقطه A از نقطه $A(-1,1)$ را بیابید. (ریاضی ۹۶)

۴. در تابع $f(x) = ab^{x}$ و $f(0) = \frac{3}{2}$ و $f(-2) = \frac{3}{32}$ و $b > 0$. مقدار ?= $f\left(\frac{3}{2}\right)$ را بیابید.

(تجربی ۹۲)

۵. مجموعه جواب را بیابید :

الف) $16^{x^2-\frac{1}{4}} < 8^x$

ب) $9^x - 3^x - 2 = 0$

ج) $2^{x+2} = 12$

۶. رفتار کدام یک از توابع زیر نمایی است؟

الف) $y = 2x + 1$ ب) $y = x^2 + 1$ ج) $y = \frac{x-2}{x}$ د) $y = \sqrt{2}^x - 1$

۷. جدول مقابل معرفی یک تابع نمایی است. نمایش جبری آن را بنویسید

۸. اگر نمودار $f(x) = ab^x - 1$ از دو نقطه $A(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ و $B(1, 11)$ بگذرد , $f(-1) = ?$

(تجربی ۹۳)

۹. در شکل رو به رو نمودار تابع $f(x) = 1 - 8^{ax}$ رسم شده است. مقدار a را بیابید.

۱۰. نمودار $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} - 1 & x \leq 1 \\ 2^x & x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = x^2$ در چند نقطه متقاطع اند؟(قلم چی ۹۵)

۲– تابع لگاریتمی و لگاریتم

تابع $y = a^x$ $(a \neq 1, a > 0)$ یک به یک است بنابراین وارون پذیر است. نمودار وارون آن را نسبت به خط $y = x$ رسم می کنیم و آنرا f^{-1} می نامیم و با نماد $y = log_a^x$ معرفی می کنیم.

مثال ۱. وارون توابع $y = 3^x$ و $y = (\frac{1}{5})^x$ را بنویسید و نمودار آنها را رسم کنید.

$y = 3^x \rightarrow$

$y = (\frac{1}{5})^x \rightarrow$

مثال ۲. عبارات زیر را با نماد لگاریتم بنویسید:

الف) $7^3 = 343 \quad \rightarrow$

ب) $4^0 = 1 \quad \rightarrow$

ج) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81} \quad \rightarrow$

د) $5^1 = 5 \quad \rightarrow$

ه) $2^{-5} = \frac{1}{32} \quad \rightarrow$

و) $(\frac{1}{10})^{-3} = 1000 \quad \rightarrow$

مثال ۳. با توجه به یافتن تابع لگاریتمی از روی تابع نمایی دامنه تابع $f(x) = log_{B(x)}^{A(x)}$ را تعیین کنید.

مثال ۴. دامنه توابع زیر را به دست آورید:

الف) $y = log_{(2-x)}^{(x+1)}$

ب) $y = log_{(4-x^2)}^{(x^2-9)}$

ج) $y = \log(x^2 - 2x + 1)$

د) $y = \sqrt{log_{0/5}^{(x+1)}}$: $log_{0/5}(x+1) \geq 0 \Rightarrow 0 < x+1 \leq 1 \rightarrow -1 < x \leq 0 \Rightarrow$

$D_y = (-1 , 0]$

$y = \sqrt{log_3(2x-4)}$: $log_3(2x-4) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow [2/5, \infty) \qquad \begin{cases} 2x-4 > 0 \rightarrow x > 2 \\ 2x-4 \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow x \geq 2/5$

مثال1: نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$A)\ y = 2^x$

$B)\ y = (\frac{1}{2})^2$

$C)\ y = \log_2 x$

$D)\ y = \log_{\frac{1}{2}} x$

مثال ۵. درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) لگاریتم عدد صفر برابر یک است.

ب) $(m,n) \in f(x) = a^x \Leftrightarrow (n,m) \in f^{-1}(x) = log_a^x$

ج) در تابع $f(x) = \sqrt{2}^x$ **داریم** $f^{-1}(8) = 6$

د) نمودار تابع $y = log^{(x+10)}$

ه) $a > b > 0 \Rightarrow log_{\frac{1}{2}}^a > log_{\frac{1}{2}}^b$

تمرین در کلاس

۱. در هر قسمت مقدار a را به دست آورید.

الف) $log_{\frac{1}{2}}^{(x+1)} = 3$

ب) $log_{(x-1)}^{64} = 3$

ج) $log_2^{32} = x^2 + 1$

۲. حاصل عبارات زیر را به دست آورید :

الف) $log\,0/001 = \cdots$

ب) $log_{25}^{\frac{1}{5}} = \cdots$

ج) $log_3^{\sqrt{3}} = \cdots$

د) $log_{25}\sqrt[4]{125} = \cdots$

۳. نمودار توابع $y = log_3^x$ و $g = log_{\frac{1}{3}}^x$ را رسم کنید و با یکدیگر مقایسه کنید.

۴. الف) خط $y = 25$ نمودار تابع $y = 5^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

ب) خط $y = 100$ نمودار تابع $y = (0/1)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

ج) خط $y = -4$ نمودار $y = log_{0/5}^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

د) خط $y = -16$ نمودار تابع $y = 2^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

ه) نمودار دو تابع $y = 2^{-x}$ و $y = log_{0/5}^x$ یکدیگر را در چه نقطه یا نقاطی قطع می‌کنند؟

۵. نمودار هر یک توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید.

الف) $y = -2^x - 1$

ب) $y = log_3^{(x-2)}$

ج) $y = -(\frac{1}{2})^{x-1}$

د) $y = 1 - log_{\frac{1}{2}}^x$

۶. در چه بازه‌ای نمودار تابع $y = 2^x$ بالای نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد؟ (هر نمودار را در یک دستگاه رسم کنید)

۷. شکل روبرو نمودار $y = log_2\, U(x)$ است. $U(x)$ کدام است؟

۱) $x + 1$ ۲) $x - 1$

۳) $(x+1)^{-1}$ ۴) $1 - x$

۸. درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) تابع $y = log_{\frac{1}{2}}^{x}$ محور y ها را قطع می‌کند.

ب) از تساوی $log_{\mathrm{a}}^{\mathrm{x}} = \log(\mathrm{y}-1)$ نتیجه می‌گیریم که $x - y + 1 = 0$

(با شرط $a > 0$, $a \neq 1$)

ج) نمودار $y = log_2|x|$ تابعی یک‌به‌یک است.

د) با شرط $x > 0$; $logx^2 = log^2x$

۳– ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی

در این مبحث به بیان و اثبات روابط و ویژگی های لگاریتم می پردازیم.

1) $a^0 = 1 \implies log_a^1 = 0$ $(a > 0\,,\ a \neq 1)$: $log_2^1 = 0$

2) $a^1 = a \implies log_a^a = 1$ $(a > 0\,, a \neq 1)$ مثال : $log_5^5 = 1$

3) $log_c(A \times B) = log_c^A + log_c^B$: $A > 0\,,\ B > 0\,,\ c > 0, c \neq 1$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} log_c A = x \Longrightarrow c^x = A \\ log_c B = y \Longrightarrow c^x = B \end{array}\right\} \Longrightarrow A \times B = c^x \times c^y = c^{x+y} \Longrightarrow$$ طبق تعریف

$$log_c(A \times B) = x + y = log_c A + log_c B$$

4) $log_c(\frac{A}{B}) = \log_c A - \log_c B$; Aو Bو $C > 0$ و $C \neq 1$

اثبات:

$$\left.\begin{array}{l} log_c A = x \Longrightarrow c^x = A \\ \log_c B = y \Longrightarrow c^y = B \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{A}{B} = \frac{c^x}{c^y} = c^{x-y} \Longrightarrow$$ طبق تعریف

$$log_c(A/_B) = log_c A - log_c B$$

$\boxed{\text{۵) } log_{10} A = \log A \quad \text{اگر لگاریتمی مبنا نداشت. مبنای آن۱۰ محسوب می شود.}}$

6) $log_c A^m = m \times log_c A$, $log_{c^n} A = \frac{1}{n} \times log_c A$

$$log_{c^n} A^m = \frac{m}{n} log_c A$$

7) $A^{log_c B} = B$

8) $A^{log^C{}_B} = C^{log^A{}_B}$

$\boxed{9) log^A{}_{bB} \times log^B{}_c \times log^c{}_D = log^A{}_D \quad ; \quad log^A{}_B = \frac{1}{log^B{}_A}}$

مثال۱.حاصل را بنویسید :

الف) $\log 5 = \log\frac{10}{2} = log10 - log2 = 1 - log2 \Longrightarrow log5 = 1 - log^2$

ب) $log_3 15 = log_3\, 3 \times 5 = log_3 3 + log_3 5 = 1 + log_3 5$

ج) $\log\sqrt[3]{20} = \log 20^{\frac{1}{3}} = \log(10 \times 2)^{\frac{1}{3}} = {}^1/_3 (\log 10 + \log 2) = {}^1/_3 - {}^1/_3\, log^2$

د) $\log 0/25 = \log\frac{25}{100} = log\frac{1}{4} = log1 - log4 = 0 - \log 2^2 = -2log2$

ه) $\log 1/5 =$

و) $\log\sqrt[5]{50} =$

ز) $\log 2 \times \sqrt{8} =$

ح) $log\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt{20}} =$

ط) $log_8(9x+1) =?$ $\Longleftarrow$ $(0/4)^{2x-1} = (\frac{125}{8})^{x^2}$ (تجربی۹۸) اگر

مثال۲. اگر $\log 2 = 0/3$, $\log 3 = 0/4$ باشد مقدار عددی عبارت زیر را به دست آورید:

الف) $\log(15 \times \sqrt{45}) =$

$\text{Log}\,(3^2 \times 5^{\frac{3}{2}}) = \log 3^2 + \frac{3}{2}\log 5 = 2\log 3 + \frac{3}{2}(1 - log2) = 2\log 3 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}log2 =$

$$2 \times 0/4 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \times 0/3 = 0/8 + 0/7 \times 1/5 = 0/8 + 1/05 = 1/85$$

$15 \times \sqrt{45} = 3 \times 5 \times (45)^{\frac{1}{2}} = 3 \times 5 \times (3^2 \times 5)^{\frac{1}{2}} = 3 \times 5 \times 3^{2\times\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = \cdots$

ب) $2log5 + 3log2 - 4log3 = logA \Rightarrow A =?$

$2log5 + 3log2 - 4log3 = log5^2 + log3^2 - log3^4 = log\frac{25\times 8}{81} = \cdots$

ج) $\log_3 2 = 0/6 \Rightarrow \log_2 12 = ?$

$\text{Log}_2 12 = log_2 2^2 \times 3 = log^{2^2}{}_2 + log^3{}_2 = 2\log_2 2 + \frac{1}{\log_3 2} = \cdots$

د) $\log_{20} 24 = ?$ $\Rightarrow \frac{\log 24}{log20} = \frac{log^{2^3\times 3}}{log^{2^2\times 5}} = \frac{log^{2^3}+log3}{log^{2^2}+log5} = \frac{2log2+log^3}{2log2+1-log2} = \cdots$

$$log^A{}_B = \frac{log^A{}_c}{log^A{}_c}$$

ه) $10^{1/3}=?$ $10^{1/3}=10^{1}\times 10^{0/3}=10\times 10^{log^2}=10\times 2=20$

$A^{log^{B}{}_{A}}=B$

و) $log_2 12=d \Rightarrow 4^{d-2}=?$ (خارج۹۶)

$log_2 12=d \Rightarrow 2^d=12 \Rightarrow (2^d)^2=12^2 \Rightarrow 4^{d-2}=144\div 4^2 \Rightarrow \frac{4^d}{4^2}=9$

اگر b و a ریشه‌های معادله $x^2-10x+0/1=0$ باشد حاصل را بیابید: (تجربی ۸۸)

ز) $loga+logb-\log(b+a)=?$

$a\times b=\frac{c}{a}=0/1$ و $a+b=-\frac{b}{a}=10$

$loga+logb-\log(a+b)=\log(a\times b)-\log(a+b)=\cdots$

ح) (تجربی۹۰) $log2=k \Rightarrow \log(6-2\sqrt{5})+2\log(1+\sqrt{5})=?$

$\log(6-2\sqrt{5})+\log(6-2\sqrt{5})=\log(6-2\sqrt{5})(6+2\sqrt{5})=\cdots$

ط) (تجربی۹۰) $log5=3k \Rightarrow log\sqrt[3]{1/6}=?$

۱۰- درست و نادرست را تعیین کنید:(تمام لگاریتم ها تعریف شده‌اند)

الف) $\log(A+B)=\log A\times \log B$

ب) $\frac{logA}{logB}=log\frac{A}{B}$

د) $2<log153<3$

ج) $log^n A=logA^n$

ه) $log_B\sqrt[n]{A^m}=log_{n_B}A^m$

ح) $\log 3_{0/5}<0$

و) $log^3{}_2\times log^2{}_3=1$

ز) $10^{1-2log3}=\frac{1}{1/8}$

ط) $log^{(x^2+1)}>0$

۲- اگر $log2=a$ و $log3=b$ و $log7=c$ باشد حاصل را بدست آورید:

الف) $log_8\sqrt{49}=?$

ب)(تجربی۸۱): $log_b a = \frac{3}{2} \Rightarrow log_{\sqrt{b}} ab^2 =$

ج)(تجربی۸۶) $log^3 + log\sqrt[4]{3} = log(81)^k \Rightarrow log_2 \frac{5}{k} = ?$

د)(ریاضی۹۰) $log_8 2\sqrt[3]{0/25} = A \Rightarrow log_4(\frac{1}{A} - 1) = ?$

۳- تابع $f(x) = \log_3(ax+b)$ فقط برای مقادیر $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$ با معنی است. اگر $f(4) = 2$ باشد آن گاه $f\left(-\frac{4}{9}\right) = ?$

(ریاضی۹۰)

۴- نمودار یک تابع به صورت $f(x) = -2 + (\frac{1}{2})^{Ax+B}$ نمودار تابع $y = x^2 - x$ را در دو نقطه به طول های 2 و 1 قطع می کند.؟$= f(3)$ (ریاضی۹۷)

حل معادله و نامعادله های لگاریتمی

۱- برای حل معادله $log_B A(x) = C$ کافی است مطابق تعریف لگاریتم به معادله توانی تبدیل کنیم و x را بیابیم یعنی :

$$\log_B A(x) = C \Rightarrow B^C = A(x)$$

۲- برای حل معادله شامل لگاریتم ابتدا به کمک قوانین لگاریتم دو طرف تساوی را تبدیل به یک لگاریتم می کنیم یعنی $log_c A(x) = log_c B(x)$ ، حتما باید بر مبناها برابر باشند و ضریب نداشته باشند. سپس لگاریتم ها را از دو طرف حذف می کنیم و مقدار x را می یابیم.

۳- در هر دو قسمت (1) و (2) جوابی از x قابل قبول است که باعث صفریا منفی شدن عبارت جلوی لگاریتم نمی شود.

مثال ۱- در هر قسمت مجموع جواب معادله‌های زیر را بدست آورید :

الف) $log_2(2x+1) = 3 \Rightarrow 2^3 = 2x+1 \Rightarrow \cdots$

ب) $log_3(x+5) = 1 + \log_3(3x+1)$

$$log_3(x+5) = log_3^3 + log_3(3x+1) \Rightarrow \log(x+5) = log_3^{3(3x+1)} \Rightarrow$$

ج) $\left(\text{تجربی ۹۳}\right)$ $log_x(x^2+4)=1+\log_x^5 \quad \Rightarrow \quad \log_2^x=?$

$log_x(x^2+4)=log_x^x+log_x^5 \quad \Rightarrow \quad log_x(x^2+4)= \ log5x_x \quad \Rightarrow \quad x^2+4=$
$5x \quad \Rightarrow \quad x^2-5x+4=0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)(x-4)=0 \begin{cases} x=1 \longrightarrow \text{غ ق ق} \\ x=4 \longrightarrow \text{ق ج} \end{cases} \Rightarrow$

د) (خارج ۹۳) $log_x(3x+8)=2-log_x(x-6) \quad \Rightarrow \quad log_4^x=?$

ه) (خارج ۸۹) $log_2^x=1+log_2(y+1) \quad , \quad x^2-y^2=32 \quad \Rightarrow \quad log_4(x+y)=?$

$log_2^x=1+log_2(y+1) \quad \Rightarrow \quad log_2^x=log_2^2+log_2(y+1) \quad \Rightarrow$

$log_2^x=log_2 2(y+1) \quad \Rightarrow \quad x=2y+2 \quad \Longrightarrow \quad x=2y+2$

$x^2-y^2=32 \quad \Rightarrow (2y-2)^2-y^2=32 \quad \Rightarrow \quad 4y^2+8y+4-y^2$
$=32 \quad \Rightarrow \quad 3y^2+8y-28=0$

$(2y+2-y)(2y+2+y)=32 \quad \Rightarrow \quad (y+2)(3y+2)=32 \quad \Rightarrow 4\times 8$
$=32 \quad \Rightarrow \quad y+2=4 \quad \Rightarrow \quad y=2 \quad \longrightarrow \quad x=2\times 2+2=6$
$\longrightarrow \quad x=6 \quad \Rightarrow \quad log_4(2+6)= \ log_4^8=log_{2_2}^{2^3}=\frac{3}{2}log_2^2=\frac{3}{2}\times 1$

و) (تجربی ۹۱) $logx+\log(x-1)=1+log2 \quad \Rightarrow \quad x^2+x=?$

$logx+\log(x-1)=1+log2 \quad \Rightarrow \quad \log\ x(x-1)=log20 \quad \Rightarrow$

$x(x-1)=20 \quad \Rightarrow \quad x^2-x-20=0 \quad (x-5)(x+4)=0 \quad \longrightarrow$

$x=-4\,,5 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x=-4 \\ x=5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2+x \\ 25+5 \end{cases}=30$

ز) (تجربی ۸۳) $log\frac{2}{x}+\log(1+x)=1 \quad \Rightarrow \quad log_8^x=?$

تمرین در کلاس

۱.مجموعه جواب معادله های زیر را به دست آورید.

الف) $log_2(5x+1)+log_2^x=1$ (تجربی۸۰)

ب) $4\sqrt{2}=4^x \;,\; 1+log\sqrt{x+1}=logy \quad \Rightarrow \quad y=?$ تجربی(۸۵)

ج) (تجربی ۹۶) $\begin{cases} 2^{x-1}\times 4^{x+y} \\ logy=2log^3+logx \end{cases} \quad \Rightarrow y=?$

د) (ریاضی۹۵) $log_2(2x^2+1)-\log_2(x+2)=1 \;\Rightarrow\; \log_8(2x-1)=?$

ه) $log_2(x^2-x-6)-log_2(x-3)=\log_2(2x-5) \;\Rightarrow\; \log_4\sqrt[3]{x+1}$

و) $log_b^a+3log_b^n=3log_b(n-1) \quad \Rightarrow x=? \qquad (n\in N$ ، $b>0\,,\; b\neq 1)$

ز) $log_x^{(3x+8)}=2-log_x^{(x-6)} \;\Longrightarrow\; \log_{32}x=?$

ح) $\log(y-x)+\log(4x+y)=2$ و $\log(y+2)=1 \;\Longrightarrow x=?$

ط) $(\log_2 m)^2-\log_2 m^2=8$

ز) $\left(2^x-3^{2\log_3 8}\right)\left(4^x-5^{\log_{25}8}\right)=0$

2. دامنه تعریف توابع را به دست آورید.

الف) $y = \sqrt{log_{\frac{1}{5}}(2x+1)}$

ب) $y = \sqrt{1 - \log(x^2 + 3x)}$

ج) $y = log_{(1-x^2)}(x^2 - 4)$

د) $y = \sqrt{log_2 \frac{x-2}{x+2}}$

ز) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - log_{\frac{1}{3}}(x-1)}}$

مثال2: درست و نادرست را تعیین کنید.

A) $\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy$

$B)$ $\log_2 x \div \log_2 y = \log_2 x - \log_2 y$

C) $\log_2 3^2 \times 2 = 2 \log_2 6$

$D)$ $\log 5 = 1 - \log 2$

مثال3: اگر $\log_2(x^2 - 4) = 2 + \log_2(x - 1)$ حاصل $\log_3(2x - 1)$ را بیابید.

مثال4: دامنه توابع زیر را بیابید.

$f(x) = \sqrt{\log_2 (\log_{\frac{1}{2}}(2x-1))}$ $\quad$ $g(x) = \log_{(2x+1)}(1 - x^2)$

3. کدام راه حل درست است؟چرا؟

الف)
$$\begin{cases} 1) \quad log_3^x = 243 \;\Rightarrow\; 3^x = 243 \;\Rightarrow\; x = 5 \\ \qquad\qquad\qquad \text{یا} \\ 2) \quad log_3^x = 243 \qquad\qquad \Rightarrow\; 3^{243} = x \end{cases}$$

ب)
$$\begin{cases} 1)\ \log(2x-1) = 0 \;\Rightarrow\; log2x - log^1 = 0 \;\Rightarrow\; log2x = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{1}{2} \\ \qquad\qquad\qquad \boxed{log_A^1 = 0} \\ 2)\ \log(2x-1) = 0 \;\Rightarrow\; 2x - 1 = 10 \;\Rightarrow\; 2x = 11 \;\Rightarrow x = \frac{11}{2} \end{cases}$$

کاربردهای لگاریتم

در این مبحث با چهار نوع کاربرد لگاریتم در قالب مثال هایی آشنا می شویم:

۱. آهنگ رشد یا زوال جمعیت
۲. اندازه گیری بزرگی زمین لرزه
۳. میزان باقیمانده ماده‌ای که نیمه عمر دارد
۴. محاسبه PH یک محلول.

مثال۱. تابع جمعیت جهان در انتهای هر سال به صورت $g(x) = 0/008 \times (1/01376)^x$ برآورد می شود .

الف)جمعیت جهان در سال ۲۰۱۶ تقریبا چقدر است؟

$$g(2016) = 8 \times 10^{-3} \times (1/01376)^{2016} = 7385074512$$

ب) درچه سالی جمعیت جهان به ۸ میلیارد خواهد رسید؟

۸ میلیارد $= g(t) = 8 \times 10^9$

$$8 \times 10^{-3} \times (1/01376)^t = 8 \times 10^9 \;\Rightarrow\; (1/01376)^t = 10^{12} \;\Rightarrow$$

$$\log(1/01376)^t = log_{10}^{10^{12}} \;\Rightarrow$$

$$t\log(1/01376) = 12 \;\Rightarrow\; t = \frac{12}{\log(1/01376)} = \frac{12}{0/005935} = 2021$$

یعنی حدودا در سال ۲۰۲۱ جمعیت جهان به ۸ میلیارد می‌رسد.

مثال۲. جمعیت یک نوع باکتری برحسب زمان از رابطه $f(t) = 80 \times e^{0/03t}$ به دست می آید.

(t برحسب سال) در واقع ۸۰ مقدار اولی، ۳٪ نرخ رشد جمعیت در هر سال، $e \cong 2,718$ است.

الف)بعد از گذشت ۱۵ سال جمعیت چه قدر خواهد بود؟

$$f(15) = 80 \times e^{\frac{3}{100}\times 15} \quad = 80 \times (2718)^{0/45} =$$

ب) بعد از گذشت چه زمانی سه برابر جمعیت اولیه را خواهیم داشت. $(log_e^3 \simeq 1/1)$

سه برابر مقدار اولیه (۸۰) یعنی ۲۴۰.

$$f(t) = 80e^{0/3t} \;\Rightarrow\; 240 = 80e^{0/3t} \;\Rightarrow\; 3 = e^{0/3t} \;\Rightarrow$$

$$log_e^3 = log_e^{e^{0/3t}} \;\Rightarrow\; log_e^3 = 0/3\,t \;\Rightarrow\; 1/1 = 0/3\,t \;\Rightarrow\; t = \frac{1/1}{0/3} = \frac{11}{3}$$

یعنی حدود ۳ سال و ۸ ماه جمعیت سه برابر خواهد شد.

نکته: اساس کار در مسایل رشد و زوال استفاده از رابطه $f(t) = kx^{\frac{t}{i}}$ است.

مثال۳. در لحظه شروع کشت ۱۰۰۰۰ باکتری داریم.اگر ضریب رشد $k = 0/4$ باشد، پس از چند دقیقه ۳۰۰۰۰ باکتری وجود دارد؟$(log_e^3 = 1/1)$. تعداد باکتری ها در دو دقیقه اول چقدر است؟

نکته: مقدار انرژی آزاد شده برحسب ارگ(Erg) از رابطه زیر حاصل می شود:

$$\boxed{log\,E = 1/5M + 11/8}$$

مثال۴. ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین لرزه و نماد میزان انرژی آزاد شده در زلزله است. اگر بزرگی زمین لرزه برابر M در مقیاس ریشتر باشد.

الف)مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله $5/2$ ریشتری چقدر است؟

ب)اگر در یک زلزله $10^{17/8}$, ارگ انرژی آزاد شده باشد, زلزله چند ریشتری بوده است؟

ج) اگر یک ریشتر به یک زلزله M ریشتری افزوده شود,چه مقدار انرژی آزاد شده بیشتر می گردد؟

مثال۵. مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله $6/2$ ریشتری را محاسبه کنید.

مثال۶. اگر انرژی آزاد شده در یک زلزله $10^{19/3}$ ارگ باشد، بزرگی زلزله در واحد ریشتر چقدر است؟

مثال۷. نیمه عمر یک ماده هسته‌ای حدود ۲۰ سال است. اگر جرم نمونه‌ای از این ماده ۲۵ میلی گرم باشد، الف)رابطه بین t و مقدار جرم باقیمانده را بنویسید.

ب)بعد از گذشت چند سال جرم باقی مانده $2/5$ میلی‌گرم است.

ج)جرم باقی مانده بعد از گذشت چند ۶۰ سال چقدر است؟

د)بعد از گذشت چند سال جرم باقی مانده $0/5$ میلی‌گرم است؟

مثال۸. نیمه عمر یک نوع ماده هسته ای 40 سال است. نمونه ای از این ماده ۱۲۸ میلی گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند چقدر است؟

مثال۹. نیمه عمر ماده‌ای شش روز و جرم اولیه آن یک گرم است.

الف)جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می‌ماند بیابید

ب)طی چند روز این جرم به $0/01$ گرم کاهش می‌یابد.

نکته: **طبق تعریف، PH معیاری از میزان اسیدی، بازی (قلیایی)یا خنثی بودن یک محلول است و از رابطه زیر به دست می‌آید:**

$$PH = -log_{10}[H_3O^+]$$

در این رابطه $[H_3O^+]$ غلظت یون هیدرونیوم را نشان می دهد.

مثال۱۰. الف) PH هر یک از محلول های زیر را به دست آورید:

۱)در آب پرتقال غلظت یون هیدرونیوم $[H_3O^+]$ برابر $2/9 \times 10^{-2}$ مول بر لیتر است.

$(log29 \cong 1/39)$

۲)در شربت معده غلظت یون هیدرونیوم برابر $2/5 \times 10^{-11}$ مول بر لیتر است.

$(log25 \cong 1/39$

۳)در آب خالص غلظت یون هیدرونیوم برابر 1×10^{-7} مول بر لیتر است.

اسیدی $\mathrm{PH} < v$, بازی $PH > v$, خنثی $PH = v$

فصل چهارم

مثلثات

۱- یادوری سال دهم **۲- نسبت‌های مثلثاتی زوایای دیگر**

۳- نمودار توابع $cosx$ و $y = sinx$ **۴- نسبت‌های مثلثاتی $\alpha \pm \beta$ برحسب α و β**

۱- یادآوری:

در سال گذشته مباحث زیر را یاد گرفتید:

1) دایره مثلثاتی(دایره واحد) و ویژگی های آن.

2)نسبت های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه

3) نسبت های مثلثاتی برخی زوایای مهم از قبیل: 0° ، 30° ، 45° ، 60° ، 90° ، 180° ، 270° ، 360°

4) روابط بین نسبت های مثلثاتی

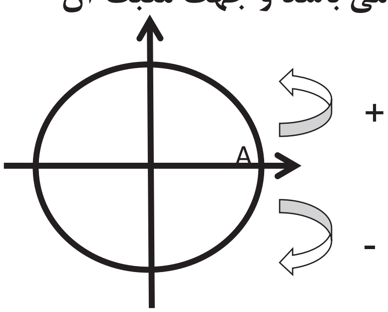
5) مساحت چند شکل هندسی

6) شیب خط و $\tan \alpha$

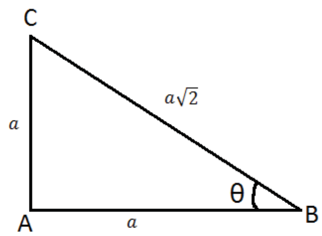
از هر قسمت چند مثال می زنیم.

مثال1) دایره مثلثاتی را تعریف کنید.

دایره ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع واحد و جهت دار که شروع از A می باشد و جهت مثبت آن خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است.



مثال2) در یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه ، نسبت های مثلثاتی زاویه ی ساق و قاعده را بیابید.



$$°\sin\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45$$

$$°\cos\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45$$

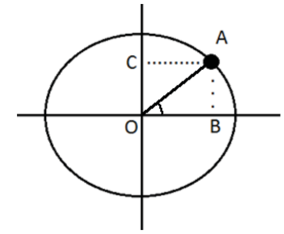
$$\tan\theta = \frac{AC}{AB} = \frac{a}{a} = 1 = \tan 45° \rightarrow \cot\theta = 1$$

مثال3) مقدار عددی عبارت زیر را بدست آورید.

الف) $A = \sin 30 \times \cos 180 + \sin 180 \times \cos 30 = \frac{1}{2} \times (-1) + 0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$

ب) $B = \tan 60 + 2\cot 30 - \sin 90 = \sqrt{3} + 2 \times \sqrt{3} - 1 = 3\sqrt{3}$

مثال4) اگر $\cos\alpha = \frac{2}{5}$ و α در ناحیه چهارم باشد ، سایر نسبت های مثلثاتی را بدست آورید.



می دانیم که در دایره مثلثاتی اگر $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ باش، آنگاه : $OC = \sin\theta$ و $OB = \cos\theta$ و $OA = 1$

با توجه به مطالب بالا داریم:

$$\cos\alpha = \frac{2}{5} = x \rightarrow x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^2 + y^2 = 1 \rightarrow y^2 = 1 - \frac{4}{25} = \frac{21}{25} \rightarrow |y| = \frac{\sqrt{21}}{5} \rightarrow y$$

$$= \pm\frac{\sqrt{21}}{5} \xrightarrow{\text{ناحیه در چهارم}} y = -\frac{\sqrt{25}}{5}, \tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{\sqrt{25}}{5}}{\frac{2}{5}} = -\frac{\sqrt{21}}{2}, \cot\alpha = -\frac{2}{\sqrt{25}}$$

مثال5) با توجه به دایره مثلثاتی حدود $\cos\theta$ و $\sin\theta$ را بدست آورید.

$-1 \leq \sin\theta \leq 1$ و $-1 \leq \cos\theta \leq 1$

مثال6) مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع 6 سانتیمتر، چند برابر مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع 4 سانتیمتر است؟

❶ $\boxed{S_{\Delta}=\frac{1}{2}\times a\times b\times \sin C}\Longrightarrow \frac{1}{2}\times 6\times 6\times \sin 60=18\times\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$

❷ $S_{\hexagon}=6\times\left(a^2\times\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\boxed{=a^2\times\frac{3\sqrt{3}}{2}}=16\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}\quad\Longrightarrow$ ❶,❷ $\frac{9\sqrt{3}}{24\sqrt{3}}$

مثال 7) درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) $\sin\theta+\cos\theta=1$ ب) $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$ ج) $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$

و) $\tan\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ه) $\sin(\propto+\beta)=\sin\propto+\sin\beta$ و) $\sin(90-\alpha)=\cos\alpha$

ز) $\cos(180-\alpha)=-\cos\alpha$

در سال یازدهم مباحث زیر را در مورد مثلثات مورد بررسی قرار می‌دهیم.

1) واحدهای زاویه (درجه و رادیان)

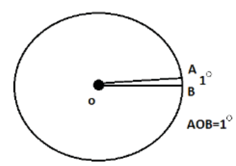
2) نسبت‌های مثلثاتی $\pi K\pm\alpha$ و $K\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ و $\alpha+\beta$ بر حسب α و β $(k\in z)$

3) توابع مثلثاتی (تابع سینوس و نمودار آن و ویژگی ها – تابع کسینوس و نمودار آن و ویژگی ها)

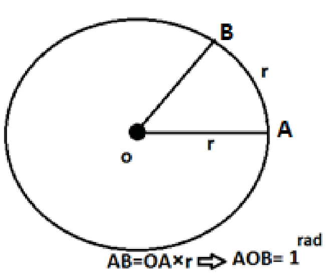
4) برخی کاربردهای مثلثاتی در حل مسائل

۱. واحد های زاویه:

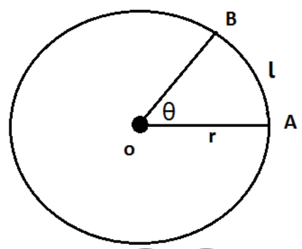
الف) درجه : اگر دایره را به 360 قسمت مساوی تقسیم کنیم، به یک قسمت آن درجه گفته می شود.



ب) رادیان : زاویه ای که اندازه ی کمان روبرو به آن برابر شعاع دایره باشد را یک رادیان می گوییم.



با توجه به این تعریف اندازه ی زاویه ی θ بر حسب رادیان که طول کمان رو به رو به آن زاویه l و شعاع دایره r باشد ، از رابطه زیر بدست می آید:



$$\theta^{rad} = \frac{l}{r} = \frac{AB}{r}$$

نکته: اگر D اندازه زاویه ای بر حسب درجه و R اندازه آن بر حسب رادیان :

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

مثال1) یک رادیان چند درجه است؟

$$\frac{D}{180} = \frac{1}{\pi} \rightarrow \pi D = 180 \rightarrow D = \frac{180}{3/14} = 57/6^{\circ}$$

ب) یک درجه چند رادیان است؟

$$\frac{1}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow 180R = \pi \rightarrow R = 180\pi = \frac{3/14}{180} = 0/01$$

مثال2) زوایای زیر را بر حسب درجه بدست آورید:

الف) $\frac{\pi}{20}^{rad} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{\frac{\pi}{20}}{\frac{\pi}{1}} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{1}{20} \rightarrow D = 9^{\circ}$

روش دیگر: به جای π ، 180 قرار میدهیم. یعنی:

$$\frac{\pi}{20} \Rightarrow \frac{180}{20} = 9^{\circ}$$

ب) $6^{rad} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{6}{\pi} \Rightarrow \pi D = 180 \times 6 \Rightarrow D = \frac{180 \times 6}{\pi} = 345^{\circ}$

ج) $15^{\circ} \Rightarrow \frac{15}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow 15\pi = 180R \Rightarrow R = \frac{15\pi}{180} \rightarrow R = \frac{\pi}{12}$

سوال: π برابر 180 است یا تقریباً 3/14؟

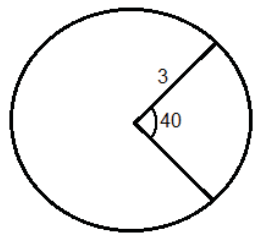
π یک عدد حقیقی گنگ است که تقریب آنرا 3/14 در نظر می گیریم اما به لحاظ واحد اندازه گیری زاویه خواهیم داشت: π رادیان برابر است با 180 درجه. یعنی:

$$3/14^{rad} \simeq \pi^{rad} = 180^{\circ}$$

نکته: طول کمان AB و مساحت قطاع AOB از دایره به شعاع r از روابط زیر نیز بدست می‌آید:

$$\text{طول کمان} = L = \pi r \frac{\alpha^{\circ}}{180} \qquad \text{و} \qquad \text{مساحت قطاع} = S = \pi R^2 \frac{\alpha^{\circ}}{360}$$

مثال 2) در شکل روبرو اندازه‌ی زاویه α را برحسب رادیان بدست آورید؛ سپس طول کمان AB و

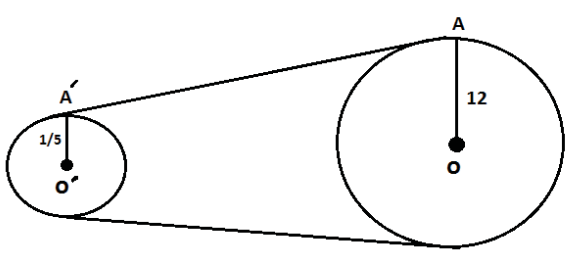


مساحت قطاع کوچک آن را حساب کنید.

$$\boxed{\frac{40}{180}=\frac{R}{\pi}} \Rightarrow 180R = 40\pi \Rightarrow R = \frac{40\pi}{180} = \frac{2\pi}{9}^{rad} \quad \text{و} \quad \boxed{\theta = \frac{l}{\pi}} \Rightarrow \frac{2\pi}{9} = \frac{l}{3} \Rightarrow l = \frac{2\pi}{3}$$

مثال3) در دایره ای به شعاع 4 س.م توسط زاویه ای θ کمانی به طول 6 س.م بریده می شود. مقدار θ به رادیان چقدر است؟

مثال4) در شکل مقابل وقتی قرقره بزرگتر $\frac{\pi}{4}$ رادیان بچرخد ، قرقره کوچکتر چند رادیان می چرخد؟



ابتدا مسافتی که قرقره بزرگتر طی می کند را حساب می کنیم. $l = PP´$

$$\theta = \frac{l}{r} \to \frac{\pi}{4} = \frac{l}{12} \to l = 3\pi = 9/42$$

به دلیل متصل بودن دو قرقره به یکدیگر، قرقره‌ی کوچک نیز همین مسافت را طی می کند؛ یعنی در قرقره کوچک داریم:

$$\theta = \frac{l}{r} \to \theta = \frac{3\pi}{\frac{1}{5}} = \frac{\frac{3\pi}{1}}{\frac{3}{2}} = 2\pi \to \theta = 2\pi^{rad}$$

یعنی وقتی قرقره بزرگتر $\frac{1}{8}$ دور ($\frac{\pi}{4}$) میچرخد، قرقره کوچکتر یک دور کامل می چرخد.

نکته: $\boxed{\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{r_2}{r_1}}$ پس: $\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{r_2}{r_1} \Rightarrow \frac{\frac{\pi}{4}}{\theta_2} = \frac{\frac{3}{2}}{12} \Rightarrow \theta = 2\pi$

مثال5) اندازه زاویه ای که عقربه ی ساعت شمار از ساعت 1 بعد از ظهر تا 4 بعد از ظهر حرکت می کند را بر حسب درجه و رادیان بیان کنید.

عقربه ساعت شمار از ساعت 1 تا 4 ، 3 تا 5 دقیقه حرکت می کند. هر یک دقیقه ، شش درجه است بنابرین $15 \times 6 = 90$ حرکت کرده است.

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \to \frac{90}{180} = \frac{R}{\pi} \to R = \frac{90\pi}{180} = \frac{\pi}{2} rad$$ یعنی $\frac{\pi}{2}$ رادیان حرکت کرده است

مثال6) زاویه ی بین عقربه های ساعت شمار ودقیقه شمار از چه رابطه ای بدست می آید؟ در ساعت h و M دقیقه

1) زاویه عقربه شمار با عدد 12: $0.5 \times (M + 60h) = \alpha$

2) زاویه دقیقه شمار با عدد 12: $6 \times M = \beta$

3) زاویه ی A بین عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه شمار:

$$\boxed{\hat{A} = \alpha - \beta = 5.5M - 30h}$$

مثال7) چه مدت طول می‌کشد تا عقربه دقیقه شمار به اندازه‌ی $\frac{5\pi}{2}$ رادیان دوران کند؟

مثال8) چرخ و فلکی 40 کابین شماره گذاری شده دارد. اگر در آغاز حرکت از نقطه A خلاف عقربه های ساعت، شما روی کابین 4 نشسته باشید ، بعد از $\frac{49\pi}{10}$ رادیان دوران ، شما در موقعیت کدام کابین قرار دارید؟

مثال9) در شکل فاصله ی بین دو تهران و مشهد تقریباً چندکیلومتر است؟(O مرکز زمین)

تهران : A و مشهد : B و $AB = 6320$ و $A\hat{O}B = 10^{\circ}$

مثال10) در یک مخروط، شعاع 5 س.م و ارتفاع 12 س.م می باشد. اندازه زاویه قطاع حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟

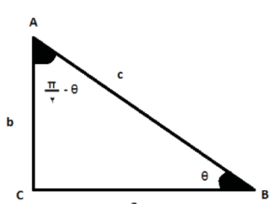
مثال11) طول برف پاک کن جلوی اتومبیلی35 س.م است. اگر برف پاک کن کمانی به اندازه ی 120 درجه طی کند:

الف) اندازه کمان بر حسب رادیان چقدر است؟

ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک کن چقدر است؟

۲. نسبت های مثلثاتی برخی زوایا:

در سال قبل نسبت های مثلثاتی زوایای 30 ، 60 ، 45 ،0 ،90 ، 180 ، 270 و 360 درجه و علامت نسبت ها را در چهار ناحیه یاد گرفتید. جهت یاد آوری:



$$\sin(\theta) = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$$

$$\cos(\theta) = \ldots\ldots\ldots\ldots =$$

نکته: **در ناحیه اول دایره ی واحد، زوایا و نسبت‌های مثلثاتی آنها برای سینوس و تانژانت رابطه مستقیم دارند و در کسینوس و کتانژانت رابطه عکس دارند. مثلاً:**

$\sin 41^\circ > \sin 30^\circ$ و $\tan 20 > tan 10$ و $cos 90 < \cos 40^\circ$ و $\cot 18^\circ < \cot 17^\circ$

نسبت های مثلثاتی زوایای مهم:

زاویه	0	۳۰	۴۵	۶۰	۹۰	۱۸۰	۲۷۰	۳۶۰
Sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	0
Cos								
tan								
cot								

مثال: حاصل را بدست آورید.

$$A: \frac{\sin^2 30° - 2\cos^4 30° + \cos 180° - \sin 360°}{\tan^2 60° - 3\cot 60° + \sqrt{3}\tan 45° - \tan 360} = \ ...$$

۳. نسبت‌های مثلثاتی $K\pi \pm \alpha$ (K عددی صحیح است)

1) زاویه را به صورت مجموع و یا تفاضل مضرب صحیحی از $180°$ و α می‌نویسیم.

2) مضرب صحیح و 180 و علامت را حذف می‌کنیم ($\pm K\pi$) و نسبت را با α می‌نویسیم.

3) علامت نسبت مثلثاتی زاویه‌ی اصلی سوال را در ناحیه‌ی مربوطه‌اش پشت نسبت مثلثاتی جواب می گذاریم.

مثال:

$\sin 240 = \sin(180+60) = -\sin 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ **240** در ناحیه سوم است

$\cos(3\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ $\quad$ $3\pi - \alpha$ در ناحیه دوم است

$\tan(121\pi + \beta) = -\tan\beta$ $\quad$ مضارب زوج π همان 2π هستند و مضارب فرد π همان π هستند

نسبت های مثلثاتی $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$; (K فرد صحیح است)

1) زاویه را به صورت مجموع و یا تفاضل مضرب صحیح فردی از $\frac{\pi}{2}$ و α می نویسیم.

2) ($\frac{k\pi}{2} \pm$) را حذف و نسبت مثلثاتی متقابل آن را می نویسیم. یعنی $\sin \leftrightarrow cos$ و $\tan \leftrightarrow cot$

3) علامت نسبت مثلثاتی صورت سوال را با توجه به زاویه‌ی اصلی پشت جواب می‌گذاریم.

مثال: $\sin 250° = \sin(270 - 20°) = -\cos 20°$

$$\cos 130° = \cos(90 + 40°) = -\sin 40°$$

$$\cot(\frac{125\pi}{2} + \alpha) = \left(\frac{124\pi + \pi}{2} + \alpha\right) = \tan(62\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot\alpha$$

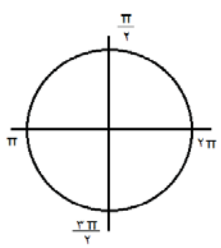
مثال: حاصل؟

الف) $\sin(-\frac{7\pi}{3}) =$

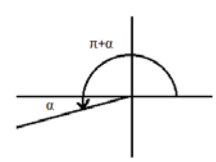
ب) $\cos(135°) + \sin\left(405\pi + \frac{\pi}{6}\right) =$

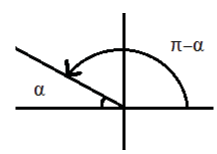
ج) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) - sin^3\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{97\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) =$

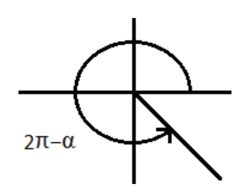
6. علامت نسبت های مثلثاتی را در چهار ناحیه دستگاه مختصات تعیین کنید:



نسبت های مثلثاتی $\pi \pm \alpha$ و $2\pi \pm \alpha$ و بطور کلی $K\pi \pm \alpha$



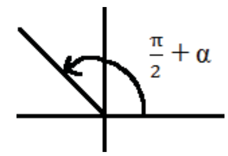




نسبت های مثلثاتی $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ و $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$

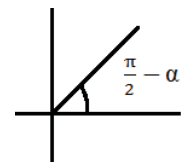
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=$



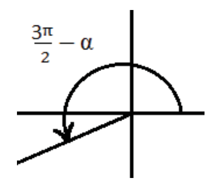
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$



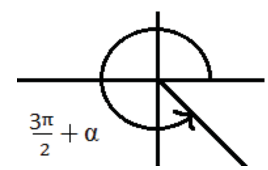
$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=$



$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$ $\qquad$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=+\sin\alpha$

$\tan\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha$ $\qquad$ $\cot\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$



4. بین نسبت های مثلثاتی روابط زیر برقرارند:

A: $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ $\qquad$ $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ $\qquad$ $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$

B: $\tan\theta\,.\cot\theta=1$ $\qquad$ $\tan\theta=\frac{1}{\cos\theta}$ $\qquad$ $\cot\theta=\frac{1}{\sin\theta}$

C: $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\qquad$ $cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

D: $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$ $\qquad$ $1+\cot^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta}$

مثال2) 6 درجه چند رادیان است؟ 3 رادیان چند درجه است؟

$$\frac{D}{180}=\frac{3}{\pi}\rightarrow D=\frac{180\times3}{\pi}=172^\circ \quad \frac{6}{180}=\frac{R}{\pi}\rightarrow R=\frac{6\pi}{180}\xrightarrow{rad} R=\frac{\pi}{30}\ rad$$

مثال3) زوایای زیر کاربرد بیشتری دارند. در دایره ی مثلثاتی جایگاه آنها را تعیین کنید.

$\pi=$ $\qquad$ $\frac{\pi}{2}=$ $\qquad$ $\frac{\pi}{4}=$ $\qquad$ $\frac{\pi}{8}=$ $\qquad$ $\frac{3\pi}{4}=$

$\frac{7\pi}{4} =$ $\frac{\pi}{3} =$ $\frac{\pi}{6} =$ $\frac{\pi}{12} =$ $\frac{5\pi}{3} =$ $\frac{7\pi}{6} =$

مثال4) حاصل را بدست آورید.

$$A = \sin\frac{121\pi}{3} + \cos\left(18\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\sin\frac{121\pi}{3} = \sin\left(\frac{120\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\left(40\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2} \ , \cos\left(18\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 60$$

$$B{:}\ \sin(\alpha - 3\pi) + \tan\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha - \cot\alpha$$

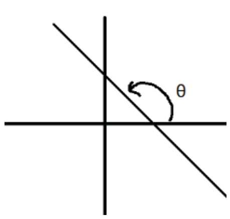
$$\sin(\alpha - 3\pi) = -\sin\alpha \quad , \ \tan\left(\frac{11\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot\alpha$$

مثال5) اگر $\tan 15 = 0/28$ باشد، حاصل عبارت زیر را بیابید.(زوایا درجه‌اند) (تجربی 94)

$$A = \frac{\cos 285 - \sin 255}{\sin 525 - \sin 105} = \cdots$$

مثال6) اگر $\tan\theta = 0/2$ باشد ، مقدار $\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) - \cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi-\theta) - \sin(3\pi+\theta)}$ را بیابید.(ریاضی 91)

نکته: اگر خط l با محور Ox زاویه ی θ در جهت مثبت مثلثاتی بسازد، در این صورت شیب خط l برابر است با $\tan\theta$ یعنی:



y=mx+b

m= tan θ

مثال5) خط l با محور Ox زاویه $\frac{5\pi}{6} rad$ می سازد. شیب خط را بدست آورید.

$$m = \tan\frac{5\pi}{6} = \tan\frac{6\pi - \pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

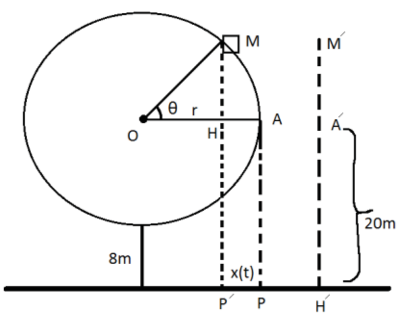
توابع مثلثاتی:

هر تابعی که متغیر در جایگاه زاویه‌ی نسبت مثلثاتی قرار بگیرد را تابع مثلثاتی نامند.

مثال6) حاصل را بیابید.

$$f(x) = -2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right) - cos6x + 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\left(\frac{2\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right) - cos\frac{6\pi}{6} + 1 = -2sin120^{\circ} - (-1) + 1 = -2\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 = \cdots$$



مثال7) فرض کنید چرخ و فلکی به قطر 24متر داریم که هر 4 دقیقه یک دور در جهت مثبت می چرخد. اگر پایین ترین نقطه چرخ و فلک 8 متر بالای زمین باشد و کابین خاصی از چرخ و فلک را در نظر گرفته باشیم که در لحظه t = 0 در نقطه ی A باشد و روبه بالا در حال حرکت است.الف) در هر لحظه ارتفاع کابین از سطح زمین را مشخص کنید.

۱. پس از گذشت t ثانیه ، کمانی که کابین طی می کند چند رادیان است؟

۲. تابعی بنویسید که ارتفاع کابین را نسبت به زمان نشان دهد.

ارتفاع کابین = M´H´= H´A´+A´M´ $\qquad$ h(θ)=20+12sinθ

A´H´=12+8=20 $\quad$ OMH: $\sin\theta = \frac{MH}{OM} = \frac{MH}{12} \Rightarrow MH = 12\sin\theta \qquad \theta = \frac{\pi t}{120}$

جواب الف : $h(t) = 20 + 12\sin\frac{\pi t}{120}$

ب) اگر در لحظه ی t فاصله سایه این کابین روی زمین تا نقطه P را با $x(t)$ نمایش دهیم ، تابع آن:

$$x(t) = PP' = AH = OA - OH$$

$$= 12 - 12\cos\theta \ , OMH: \quad \cos\theta = \frac{OH}{12} \to OH = 12\cos\theta$$

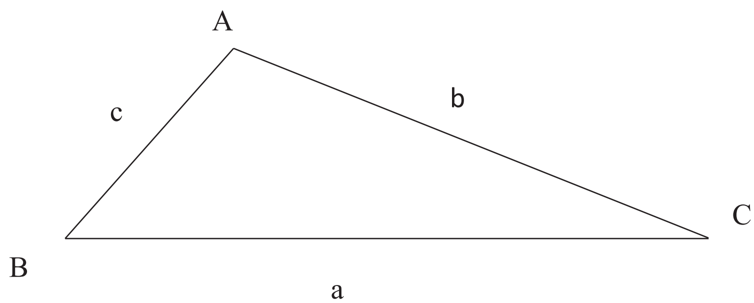
$$\Rightarrow x(\theta) = 12 - 12\cos\theta \ \text{ و } \ \theta = \frac{\pi t}{120} \qquad \Rightarrow \boxed{x(t) = 12 - 12\cos\frac{\pi t}{120}}$$

ج) اگر کابین از نقطه ی A ، زاویه ی $\frac{7\pi}{6}$ رادیان طی کند ، ارتفاع کابین و طول سایه را بیابید.

قانون کسینوس‌ها:

تعمیم یافته ی قضیه ی فیثاغورس در مورد تمام مثلث ها به صورت زیر است که روابط آن به قانون کسینوس ها معروف است.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\widehat{B}$$
$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba\cos\widehat{C}$$



دستور مساحت‌ها:

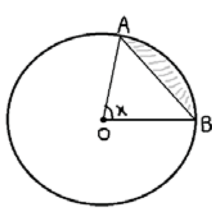
مساحت مثلث ABC با توجه به معلوم بودن طول دو ضلع و زاویه‌ی بین آنها :

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\widehat{C} = \frac{1}{2}ac\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}cb\sin\widehat{A}$$

قانون سینوسها:

به کمک دستور مساحت‌ها (مساوی قرار دادن رابطه های بالا) رابطه زیر را بدست می‌آید:

$$\frac{\sin\widehat{A}}{a} = \frac{\sin\widehat{B}}{b} = \frac{\sin\widehat{C}}{c}$$



مثال12) وتر AB به سمت مرکز دایره در حال حرکت است. (x برحسب رادیان) الف) تابعی بسازید که مساحت قطاع دایره را بر حسب x نمایش دهد.

ب) تابع تغییرات وتر بر حسب x را به دست آورید. $AB = \sqrt{2r^2(1-cosx)}$

$\frac{1}{2}r \times r \times sinx =$ مساحت مثلث و $\frac{1}{2}r^2x =$ مساحت قطاع

$$AB^2 = r^2 + r^2 - 2r.r.cosx$$
$$AB^2 = 2r^2 - 2r^2cosx \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{2}r^2x - \frac{1}{2}r^2sinx \Rightarrow$$

$$AB = r\sqrt{2(1-cosx)} \quad \text{و} \quad S(x) = \frac{1}{2}r^2(x - sinx)$$

رسم نمودار تابع سینوس

با توجه به جدول روبرو نمودار سینوس به شکل زیر است:

مثال: نمودار توابع $y = sinx + 1$ و $g = sin(x - \frac{\pi}{3})$ و $t = -sin2x$ و $h = 2sinx$ را رسم کنید.

ویژگی‌ها: (در تمام نکات $k \in \mathbb{Z}$)

۱- دوره تناوب ان $T = \frac{2\pi}{|\text{ضریب ایکس}|}$ یعنی نمودار تابع $y = sinx$ در فاصله 2π تکرار می‌شود.

۲- نمودار، محور طول‌ها را در نقاط $x = k\pi$ قطع می‌کند. در واقع صفرهای تابع $2k\pi$ است.

۳- مقدار ماکزیمم تابع در نقاطی به طول $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ است که برابر با یک است.

۴- مقدار مینیمم تابع در نقاطی به طول $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ است که برابر با منفی یک است.

مثال: نکات ۱ الی ۴ را در مورد تابع $f(x) = 2sin\left(\frac{x}{5}\right) - 1$ بررسی و تعیین کنید.

رسم نمودار تابع کسینوس

با توجه به جدول روبرو نمودار کسینوس به شکل زیر است:

مثال: نمودار توابع $y = sinx + 1$ و $g = sin(x - \frac{\pi}{3})$ و $t = -sin2x$ و $h = 2sinx$ را رسم کنید.

ویژگی‌ها:

۱- دوره تناوب ان $T = \frac{2\pi}{|\text{ضریب ایکس}|}$ یعنی نمودار تابع $y = cosx$ در فاصله 2π تکرار می‌شود.

۲- نمودار، محور طول‌ها را در نقاط $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$ قطع می‌کند. یعنی صفرهای تابع $2k\pi$ است.

۳- مقدار ماکزیمم تابع در نقاطی به طول $x = 2k\pi$ است که برابر با یک است.

۴- مقدار مینیمم تابع در نقاطی به طول $x = (2k + 1)\pi$ است که برابر با منفی یک است.

مثال: نکات ۱ الی ۴ را در مورد تابع $f(x) = -\frac{1}{2}cos(-2x) + 1$ بررسی و تعیین کنید.

مثال: به روش رسم نمودار مقدار تقریبی $sin2$ و $sin2^{\circ}$ و $cos\sqrt{2}^{\circ}$ و $cos5$ را تعیین کنید.

مثال: به روش رسم مجموعه جواب معادلات را بیابید:

ب) $2sinx + 1 = 0 \quad : \quad [-\pi , \pi]$

الف) $0 = |cosx| - 1 \quad : \quad [-2\pi , 2\pi]$

ج) $4 = sinx + 2 \quad : \quad [-4\pi , 2\pi]$ د) $2cosx - \sqrt{3} = 0 \quad : \quad [-\pi , 2\pi]$

مثال: نمودار توابع زیر را رسم کنید:

الف) $y = -|sinx| + 1 \quad [0 , 2\pi]$ ب) $y = 2\sin(\frac{\pi}{2} + x) + 1 \quad [-\pi , \pi]$

ج) $y = [sinx] - 1 \quad [-2\pi , 2\pi]$ د) $y = \begin{cases} \sin(-x) & [0 , \pi] \\ -cosx & [-\pi , 0] \end{cases}$

نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو کمان ؛ $(\alpha \pm \beta)$ بر حسب β و α

در درس گذشته نسبت‌های مثلثاتی مضاربی از π و $\frac{\pi}{2}$ را که با $\frac{\pi}{3}$ و $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{6}$ جمع یا تفریق می شد را یاد گرفتید چگونه محاسبه کنید. مثلا برای نسبت های $240°$ آنرا با $(180+60)$ تبدیل کرده و نسبت های مثلثاتی 60 را ملاک کار قرار داده و با توجه به ناحیه ی 240، علامت نسبت‌ها را قرار می دادیم.

در این مبحث نسبت های مثلثاتی$(\alpha \pm \beta)$ را بر حسب βوα بررسی می کنیم.

ابتدا به فرمول‌های آن می پردازیم و بعد به کاربرد آنها و در آخر برخی را اثبات می‌کنیم.

$$\boxed{\sin(\alpha \pm \beta) = sin\alpha\, cos\beta \ \pm sin\beta\, cos\alpha}$$

مثال:

$sin75° = \sin(45 + 30) = sin45\, cos30 + sin30\, cos45 = \cdots$

$sin105° = \cdots$

$$\boxed{cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha\, cos\beta \ \mp sin\beta\, sin\alpha}$$

$cos\, 15° = \cos(60 - 45) = cos60\, cos45 \ \pm sin60\, sin45 = \cdots$

$cos75° = \cdots$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\times\tan\beta} \quad و \quad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\times\tan\beta}$$

مثال: $\tan105° = \tan(60+45) =$

$$\frac{\tan60+\tan45}{1-\tan60\times\tan45} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}\times1} = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\times\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{1^2-\sqrt{3}^2} = \cdots$$

tan75°=

$$\cot(\alpha+\beta) = \frac{\cot\alpha\times\cot\beta - 1}{\cot\alpha+\cot\beta} \quad و \quad \cot(\alpha-\beta) = \frac{\cot\alpha\times\cot\beta+1}{\cot\alpha-\cot\beta}$$

نسبت‌های مثلثاتی 2α و 3α بر حسب α

۲α بر حسب α

$sin2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) =$

$sin\alpha\,.\,cos\alpha + sin\alpha.cos\alpha = 2sin\alpha\ cos\alpha \Rightarrow \boxed{sin2\alpha = 2sin\alpha\ cos\alpha}$

$cos2\alpha = cos(\alpha+\alpha) = cos\alpha\,.\,cos\alpha - sin\alpha.sin\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$

$\boxed{cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha}$ $\boxed{cos2\alpha = 2cos^2\alpha - 1}$ $\boxed{cos2\alpha = 1-2sin^2\alpha}$

$$tan2\alpha = \frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\times\tan\alpha} \Rightarrow \boxed{tan2\alpha = \frac{2tan\alpha}{1-tan^2\alpha}}$$

$$cot2\alpha = \frac{\cot\alpha\,.\,\cot\alpha - 1}{\cot\alpha+\cot\alpha} = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} \Rightarrow \boxed{\cot2\alpha = \frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}}$$

۳α بر حسب α

$$\begin{aligned}\sin3\alpha = \sin(2\alpha+\alpha) &= sin2\alpha\,.\,cos\alpha + sin\alpha.cos2\alpha \\ &= 2sin\alpha\ cos\alpha\ cos\alpha + sin\alpha(1-2sin^2\alpha) \\ &= 2sin\alpha(1-sin^2\alpha) + sin\alpha - 2sin^3\alpha \\ &= 2sin\alpha - 2sin^3\alpha + sin\alpha - 2sin^3\alpha = 1sin\alpha - 4sin^3\alpha \\ &\Rightarrow \boxed{\sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha}\end{aligned}$$

$cos3\alpha = \cos(2\alpha + \alpha) =...$

مثال13) حاصل عبارات را بدست آورید:

A) $sin200\ cos40 + sin40\ cos200 = \sin(200+40) = sin240 = \sin\ (180+60)$

B) $\frac{\tan\alpha - \tan2\alpha}{1+\tan\alpha.\tan2\alpha} = \tan(\alpha - 2\alpha) = \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$

C) $cos\frac{\pi}{3}\ cos\frac{\pi}{3} + sin\frac{\pi}{3}\ sin\frac{\pi}{3} = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

D) $-cos45\ cos105 + sin45\ sin105 = \cdots$

E) $\tan^2\alpha - \tan^2 2\alpha =$

F) $sin\frac{13\pi}{12} =$

مثال14) مقادیر زیر را بدست آورید.

A) $\tan\frac{23\pi}{12} = \tan\left(\frac{24\pi - \pi}{12}\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) = -\tan\frac{\pi}{12} = -\tan(45-30) =$

$\frac{\tan45 - \tan30}{1+\tan45.\tan30} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\times\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{3}}{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \times \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{9-6\sqrt{3}+3}{9-3} = \frac{12-2\sqrt{3}}{6} = \frac{6(2-\sqrt{3})}{6} = \cdots$

B) $coc345 = \cdots =$

مثال15) ثابت کنید:

A) $\boxed{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta}$

اتحاد مزدوج= $(\sin\alpha\,.\cos\beta+\sin\beta\,.\cos\alpha)(\sin\alpha\,.\cos\beta-\sin\beta\,.\cos\alpha)=$ طرف اول

$\sin^2\alpha\,.\cos^2\beta-\sin^2\beta\,.\cos^2\alpha=$ با توجه به طرف دوم

$\sin^2\alpha\,(1-\sin^2\beta)-\sin^2\beta(1-\sin^2\alpha\,)=$

$\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\,\times\sin^2\beta-\sin^2\beta+\sin^2\beta\times\sin^2\alpha=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

$$\boxed{B)\ \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$$

مثال16) حاصل را بدست آورید.

A) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=$

$$\sin\alpha\,.\cos\beta+\sin\beta\,.\cos\alpha+\sin\alpha\,.\sin\beta-\sin\beta\,.\sin\alpha=2\sin\alpha\,.\cos\beta$$

B) $\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=$

C) $\tan(\alpha+\beta)+\tan(\alpha-\beta)=$

مثال17) درست و نادرست را تعیین کنید.

A) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$ $\qquad$ $B)\ \frac{\cos2\alpha}{2}=\cos\alpha$

C) $\cos(\alpha+10)\cos(\alpha-10)-\sin(\alpha+10)\sin(\alpha-10)=\cos2\alpha$

D) $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin^2x-\sin^2\frac{\pi}{6}$

E) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin x$

$$\tan3\alpha=\tan(2\alpha+\alpha)=\frac{\tan2\alpha+\tan\alpha}{1+\tan2\alpha\times\tan\alpha}=\frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\frac{\tan\alpha}{1}}{1-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\times\tan\alpha}$$

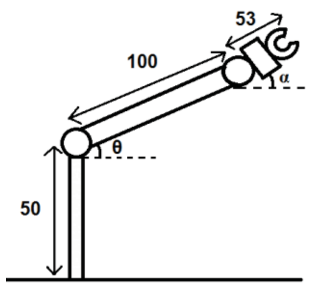
$$=\frac{\frac{2\tan\alpha+\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{\frac{1-\tan^2\alpha-2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}}=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\Longrightarrow$$

$$\boxed{\tan3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}}$$

روش دیگر اثبات: به عهده شما...

$$\tan 3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \cdots$$

مثال18) در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت ربات ها ، معمولا در مفصل مکانیکی برای بازوی آن، مطابق شکل زیر در نظر می گیرند. اگر $\frac{\pi}{2} \le \theta \le 0$ و $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ باشد؛



الف) ارتفاع نوک گیره را از سطح زمین تابعی بر حسب θ و α بنویسید.

ب) این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع 22/5 ، مفصل خود را در حالت α=−30 قرار داده است. تعیین کنید زاویه ی θ در این وضعیت چند درجه است؟

مثال19) هر گاه داشته باشیم $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\tan\beta = \frac{5}{12}$ ، مقدار عددی عبارات زیر را بیابید.

(α منفرجه و β حاده)

$\cos(\alpha+\beta) = ?$ و $\sin 2\alpha = ?$ و $\tan 2\beta = ?$

برای حل این نوع مسائل چند روش مختلف داریم:

روش اول: نسبت های α و β را به کمک مثلث قائم الزاویه بیابیم.

روش دوم: نسبت های α و β را به کمک روابط بین نسبت‌ها بیابیم.

روش سوم: نسبت های α و β را به کمک به کمک نسبت های رو برو بیابیم: $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$

$$\alpha: \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{4}{5} \xrightarrow{\text{منفرجه}\ \alpha} \cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\beta: 1 - \tan^2\beta = \frac{1}{\cos^2\beta} \rightarrow 1 + \frac{25}{144} = \frac{1}{\cos^2\beta} \rightarrow \cos\beta = \pm\frac{12}{13} \xrightarrow{\text{حاده}\ \beta} \cos\beta = +\frac{12}{13}$$

$$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1-\frac{144}{169} \rightarrow \sin\beta = \pm\frac{5}{13} \xrightarrow{\text{منفی غیر قابل قبول}} \sin\beta = \frac{5}{13}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,.\cos\beta - \sin\alpha\,.\sin\beta = \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right)-\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{-63}{65}$$

$$\sin2\alpha = 2\sin\alpha\,.\cos\alpha = 2\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{13} = \frac{6}{13}$$

$$\tan2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{2\times\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{114}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{119}{144}} = \frac{114\times5}{119\times6} = \frac{120}{119}$$

مثال20) اگر $\tan(\alpha+\beta)=3$ و $\tan\beta=\frac{2}{5}$ آن گاه $\tan\alpha$ را بیابید.

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan^2\beta} \xrightarrow{\tan\alpha=x} 3 = \frac{x+\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}x} \rightarrow 3-\frac{6}{5}x = x+\frac{2}{5}$$

$$\rightarrow 3-\frac{2}{5} = x+\frac{6}{5}x \rightarrow \frac{13}{5} = \frac{11}{5}x \rightarrow x = \frac{13}{11} = \tan\alpha$$

مثال21) عبارات زیر را ساده کنید.

$$A)\ \frac{\sin2\theta}{1+\cos2\theta} = \frac{2\sin\theta\,.\cos\theta}{1+2\cos^2\theta-1} = \frac{2\sin\theta\,.\cos\theta}{2\cos^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$B)\ \frac{\sin2\theta}{1-\cos2\theta} = \frac{2\sin\theta\,.\cos\theta}{1-1+2\sin^2\theta} = \frac{2\sin\theta\,.\cos\theta}{2\sin^2\theta} =$$

$$C)\ \frac{1+\cos2\theta}{1-\cos2\theta} =$$

مثال22) نسبت های مثلثاتی $\frac{\pi}{8}$ را بدست آورید.

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}\to\tan\frac{\pi}{8}=\frac{\sin 2\times\frac{\pi}{8}}{1+\cos\ 2\times\frac{\pi}{8}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{4}}{4-2}=\frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}$$

$$=\sqrt{2}-1\to\tan 22/5=\sqrt{2}-1\to\cot 22/5=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

روش اول یافتن کسینوس$\frac{\pi}{8}$:

$$1+\tan^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}}=1+(\sqrt{2}-1)^2=1+2-2\sqrt{2}+1=4-2\sqrt{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{8}}\to$$

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{4-2\sqrt{2}}\times\frac{4+2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\frac{4+2\sqrt{2}}{16-8}=\frac{2\left(2+\sqrt{2}\right)}{8}\Longrightarrow\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

روش ساده تر: (فرمول تقلیل درجه) $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1\to\boxed{\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}\Longrightarrow$

$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos 45}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\to\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

به همین ترتیب سینوس22/5: $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha\Longrightarrow\boxed{\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

$$\sin^2 22/5=\frac{1-\cos 45}{2}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\Rightarrow\sin 22/5=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

کار در کلاس

1) نمودارتوابع زیر را رسم کنید:

$A)\ y=\frac{1}{2}+|\cos x|\qquad[0,2\pi]$

$B)\ y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\qquad[0,2\pi]$

$C)\ y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$

$D)\ y = -\sin 2x + 1$

2) درست و نادرست را تعیین کنید.

الف) $\cos x$ یعنی کسینوس زاویه ای از دایره مثلثاتی که اندازه ی آن x درجه باشد.

ب) $\sin\sqrt{2}$ یک عدد حقیقی است. ج) $\sin 2 = \sin 2^\circ$

د) اگر $\frac{3\pi}{2} > x > \pi$ باشد ، آنگاه $-1 < \cos x < 0$

هـ) عددی می توان یافت که کسینوس آن $\frac{3}{2}$ باشد.

و) همواره داریم $|\sin x| \leq 1\ ,\ |\cos x| \leq 1$

ز) $x = -\frac{\pi}{2}$ صفر تابع $y = \cos x$ می باشد و $x = 0$ صفر تابع $y = \sin x$ است.

ح) همواره داریم $(k\epsilon z)$ $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$

ط) $\sin(\pi + \theta) - \sin\theta = 0$ ی) $\sin(\alpha + \alpha) = 2\sin\alpha$

3) مقدارهای مثلثاتی زیر را بدست آورید.

$A)\ \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) =$

$B)\ \tan 225^\circ + \cos(-\frac{7\pi}{4}) =$

$C)\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3}\right) =$

4) حاصل را بدست آورید.

$A)\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) =$

$B)\cos x - \sin x =$

$C)\ \sin\frac{2\pi}{3}\ .\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\ .\cos\frac{2\pi}{3} =$

$D)$ (ریاضی 96) $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} =$

5) اگر $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{3}$ باشد ، مقدار زیر را بدست آورید. (تجربی92)

$\cos 2x = ?$

6) اگر $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{3}$ و انتهای کمان آلفا در ربع چهارم باشد ، مقدار زیر را بدست آورید. (تجربی 96)

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=?$$

7) اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$ باشد ، مقدار زیر را بدست آورید. (تجربی 95)

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2\alpha\right)=?$$

8) اگر $\tan x=\frac{4}{3}$ باشد ، مقدار زیر را بدست آورید. (تجربی 96)

$$\tan\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=?$$

9) حاصل را بدست آورید. (A: تجربی 94 و B: ریاضی 91)

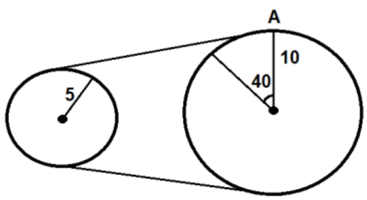
$A)\ \tan 15 = 0/28 \ \rightarrow \ \dfrac{\cos 285-\sin 255}{\sin 525-\sin 102}=?$

$B)\ \tan\theta = 0/2 \ \rightarrow \ \dfrac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right)-\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi+\theta)-\sin(3\pi+\theta)}=?$

$C)\ \dfrac{\sin 91^\circ+\sin 92^\circ+\cdots+\sin 179^\circ}{\sin 1^\circ+\sin 2^\circ+\sin 3^\circ+\cdots+\sin 89^\circ}=$

D) $\tan\frac{\pi}{7}+\tan\frac{2\pi}{7}+\tan\frac{3\pi}{7}+\cdots+\tan\frac{6\pi}{7}=$

10) در شکل اگر نقطه A ، 40 درجه جابه جا شود، چرخ کوچکتر چند درجه جابه جا می‌شود؟



11) نقاط برخورد دو تابع $y=\cos(x+\frac{\pi}{2})$ و $y=1-|sinx|$ را به کمک رسم نمودار بیابید.

12) مقادیر $\sin 5^\circ$, $\cos 7^\circ$, $\cos 0^\circ$, $\cos 85^\circ$, $\sin 100^\circ$, $\sin 5$ را با رسم نمودار بیابید.

13) زاویه قطاع حاصل از گسترده‌ی مخروطی با شعاع قاعده 4 و ارتفاع 10واحد چند رادیان است؟

14) حاصل عبارت $A=\frac{|\sin x-\cos x|}{2}+\frac{\sin x+\cos x}{2}$ به ازای $x\epsilon\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ را بدست آورید.

15) مساحت قطاعی از دایره به شعاع 5 سانتیمتر که طول کمان آن $\frac{3}{2}$ است را بیابید.

16) حاصل را بیابید.

$A)\ \sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+\sin(\pi+x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=$

$B)\ \tan(\alpha-13\pi).\cot(87\pi+\alpha)-\cos(16\pi-\alpha).\cos(\alpha-36\pi)=$

$C)\ \cot 34^\circ = 1/5 \ \rightarrow\ \frac{2\sin 326^\circ + 3\sin 56^\circ}{\cos 304} =$

17) نمودار توابع زیر را رسم کنید و دوره تناوب آنها را تعیین کنید.

$A)\ y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

$B)\ y = -\cos\frac{x}{3} + 1$

$C)\ y = \cos^2 x$

$[-\pi\ ,2\pi]$ مجموعه جواب x دربازه $\Rightarrow D)\ \frac{1}{2} = \cos x + 1$ و $\left|2\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{3}$

18) کمترین و بیشترین مقدار توابع زیر را تعیین کنید.

$y = -2\sin 3x + 1$

$y = 1 - 2|\cos x|$

$y = 4\sin^2 x - \frac{1}{3}$

19) اگر دوره ی تناوب تابع رو به رو 2 باشد و بیشترین مقدار تابع 7 باشد، حاصل $a + b = ?$

$y = -2\sin ax + \frac{b}{3}$

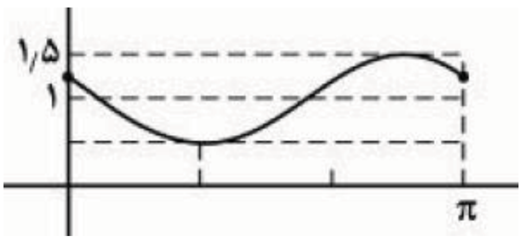
20) تابع $v = 0/8\sin\frac{\pi t}{3}$ (t ثانیه است) معرف سرعت جریان هوا طی یک دوره‌ی تنفسی برای یک شخص در حال استراحت است.

الف) زمان لازم برای یک دوره ی کامل دم و بازدم چقدر است؟

ب) اگر سرعت جریان هوا $\frac{2}{5}$(لیتر بر ثانیه) باشد ، مقدار t چقدر است؟

21) نمودار تابع به معادله $y = -4\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3\pi x\right)$ روی بازه $[-1,1]$ در چند نقطه بیشترین مقدار را دارد؟ (تجربی91)

22) شکل روبه رو قسمتی از نمودار $y = 1 + a\sin\left(bx - \frac{\pi}{6}\right)$ است. $a + b = ?$ (ریاضی95)



23) اگر $\tan\frac{2\pi}{3}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = 1$ باشد ، مقدار $\cos 2x = ?$ (تجربی88)

24) ساده شده کسر رو به رو را بدست آورید. (ریاضی91)

$$\frac{(1+\tan^2 x)(1+\cot^2 x)}{1-\sin^2 \alpha - \cos^4 x} = ?$$

25) اگر $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{5}$ باشد ، $\tan 2\alpha = ?$ (ریاضی88)

26) $a + b = \frac{\pi}{4}$ است. حاصل را بدست آورید.

$$8\cos a \cos b \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = ?$$

27) اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ و $g(x) = \sin^4 x$ باشند، ضابطه ی تابع fog را به ساده ترین شکل ممکن بنویسید. (تجربی93)

28) دامنه ی توابع زیر را بدست آورید. نمودار قسمت (B) و (C) را رسم کنید.

$$A)\, y = \frac{1}{[\cos \pi x]}$$

$$B)\, y = \frac{\sin x}{\sin x}$$

$$C)\, y = \frac{\cos x}{\cos x}$$

فصل پنجم

حد و پیوستگی

۱- مفهوم حد و حدهای یکطرفه ۲- همسایگی و قضایای حد ۳- اعمال جبری روی حد
۴- رفع ابهام صفر صفرم ۵- پیوستگی در یک نقطه و پیوستگی در یک بازه

در این فصل با موضوع‌های زیر آشنا شده و به بررسی آنها می پردازیم.

1)مفهوم و فرایندهای حدی(به کمک رسم نمودار و مسائل مفهومی و همسایگی یک نقطه)

2) حدهای یک طرفه : (حد چپ و راست) 3) قضایای حد: (به کمک حدگیری می آیند)

4) محاسبه حد توابع کسری: (رفع ابهام÷) 5) پیوستگی: (در یک نقطه و در یک بازه)

۱. مفهوم حد

برای پی بردن به مساحت دایره از مفهوم کمک گرفته شده است بدین صورت که:

تعداد اضلاع زیاد شود	**مساحت شش ضلعی منتظم**	**مساحت مربع**	**مساحت مثلث متساوی الاضلاع**
مساحت به دایره نزدیک تر می شود	$a^2 \times \frac{3\sqrt{3}}{2}$	a^2	$a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$

مثال۱) مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۴ واحد مفروض است. وسط اضلاع را به هم وصل کنید تا مثلث جدیدی ایجاد شود و این عمل را تکرار کنید.

الف) مجموع محیط تمام این مثلث های به دست آمده را بیابید.

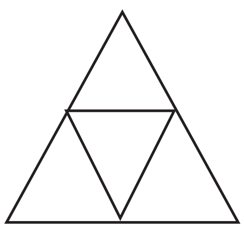
ب) مجموع مساحت های تمام این مثلث ها را بیابید.

ج) اندازه اضلاع به چه عددی نزدیک میشود؟

د) اندازه محیط به چه عددی نزدیک میشود؟

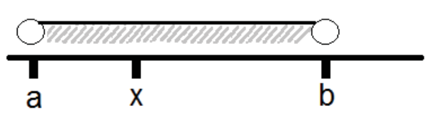
ه) اندازه مساحت به چه عددی نزدیک میشود؟

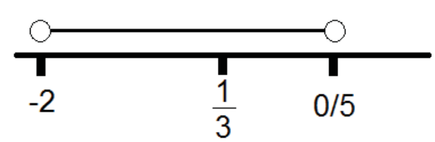
مساحت S_n	محیط P_n	طول ضلع x_n	مرحله
$4^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$	4×3	4	1
$2^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$	2×3	2	2
...	...	$\frac{1}{2^{n-2}}$	N



تعریف همسایگی:

اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد هر بازه باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌گوییم. به لحاظ شهودی یعنی :





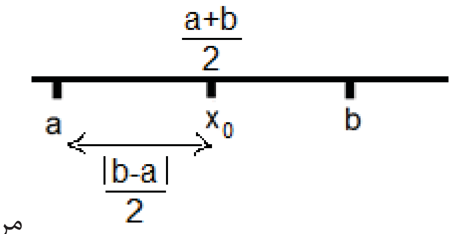
(−2 و 0/5) یک همسایگی $\frac{1}{3}$ است. $\frac{1}{3} \in (-2, 0/5)$

(a,b) یک همسایگی x_0 است هرگاه $x_0 \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$

الف) اگر x_0 را از بازه حذف کنیم ؛ مجموعه $(a,b)-\{x_0\}$ را همسایگی محذوف x_0 می نامیم.

ب) اگر x_0 وسط بازه ی (a,b) باشد ، همسایگی متقارن x_0 نامیده می شود و می توان نوشت:

$$\mathbf{x_0}\epsilon(a,b) \Longrightarrow \mathbf{x_0} \text{همسایگی متقارن} (a,b) \to \{x \mid \left|x-\frac{a+b}{2}\right| < \frac{|b-a|}{2}\}$$

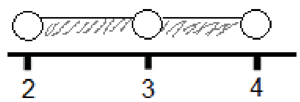


$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{|b-a|}{2} =$ شعاع همسایگی $\quad \boldsymbol{\delta} = \frac{a+b}{2} =$ مرکز همسایگی

ج) اگر x_0 در همسایگی متقارن، حذف شود ؛ $(a,b)-\{x_0\}$ را همسایگی محذوف x_0 می گوییم.

$$(a,b)-\{\mathbf{x_0}\} = \{x \mid 0 < |x-\delta| < \varepsilon \,;\; \delta = \frac{a+b}{2} \,,\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$$

مثال) $\{3\} - (2,4)$ یک همسایگی متقارن محذوف به مرکز 3 و شعاع 1 می باشد.



$(2,4)-\{3\} = \{x \mid |x-3| < 1$

همسایگی راست و همسایگی چپ:

د) اگر $r > 0$ باشد، در این صورت بازه‌ی $(a, a+r)$ را یک همسایگی راست a و بازه‌ی

$(a+r, a)$ را یک همسایگی چپ a می‌نامیم. مانند بازه‌ی $(1, 1/02)$ که یک همسایگی راست عدد یک و بازه‌ی $(-0/98, 1)$ که یک همسایگی چپ عدد یک است.

مثال2) مجموعه جواب $\left\{x \mid \frac{1}{|x-2|} > 1\right\}$ همسایگی متقارن محذوف به مرکز چه عدد و شعاع چه عددی است؟

مثال3) با رسم توابع $y = \sqrt{x+1}$ و $y = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$ ، همسایگی‌های چپ و راست را در نقاط بارز نمودار تشریح کنید.

مثال 4) عدد $x = 2$ در تابع $y = \frac{1}{[x]-2}$ چه نوع همسایگی دارد؟ عدد$x = 3$ چه نوع همسایگی دارد؟

مثال5) مرکز و شعاع همسایگی $(-1\,,1/04)$ را بدست آورید و آنرا به صورت یک نامساوی شامل قدر مطلق بنویسید.

مثال6) بازه‌ی $(\mathrm{x}-2\,, 2\mathrm{x}+1)-\{2\}$ یک همسایگی متقارن محذوف است. مقدار x را بیابید.

مثال7) اگر $(2a+3\,, a+5)$ یک همسایگی نقطه $x = 1$ باشد ؛ حدود a را بیابید.

مثال8) با عبارت مناسب پر کنید:

بازه باز $(-۲-۰/۰۲, -۲+۰/۰۲)$ را یک همسایگی متقارن به مرکز ... و شعاع .... گوییم

و می‌نویسیم:$N(\dots,\dots) = \{x\,;\ |x-\cdots| < \cdots\}$

به طور کلی:

بازه‌ی باز $(a-\delta, a+\delta)-\{a\}$ را یک همسایگی متقارن محذوف a گوییم و می‌نویسیم:

$$(a-\delta, a+\delta)-\{a\} = \{x\,; 0 < |x-a| < \delta\}$$

همچنین $a < x < b$ یک همسایگی به مرکز $\frac{a+b}{2}$ و شعاع $\frac{|a-b|}{2}$ است.

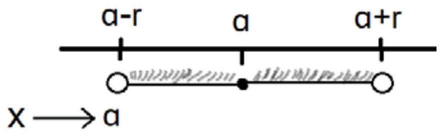
مثال 1-کدام برای همسایگی متقارن محذوف نادرست است؟

1) $\{x\,;\ |x-a| < \delta\}$ 2) $(a-\delta, a+\delta)-\{a\}$

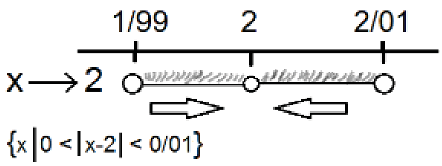
3) $(a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$ 4) $\frac{1}{|x-a|} > \frac{1}{\delta}$

تعریف و معرفی چند اصطلاح و نماد

میل کردن (نزدیک شدن) : $x \to a$ می خوانیم : متغیر x به سمت عدد a میل می کند. (نزدیک می شود.) در این حالت x از دو طرف a ، می تواند به a نزدیک شود.

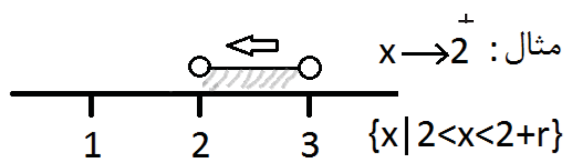


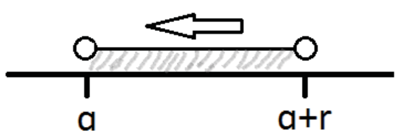
مثال)



$x \to a^+$: می خوانیم x از سمت راست به عدد a نزدیک می شود. به عبارت دیگر a < x است.

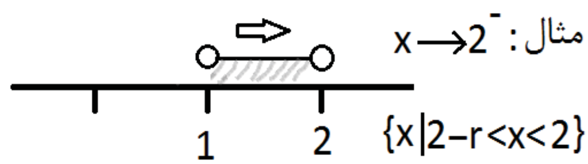
مثال :

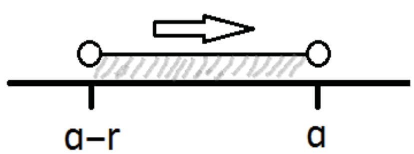




$x \to a^-$: می خوانیم x از سمت چپ به عدد a نزدیک می شود. به عبارت دیگر a > x است.

مثال :





حد تابع f در نقطه مانند a

فرض کنیم تابع f با ضابطه f(x) در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالا خود a) تعریف شده باشد.

می‌گوییم: حد تابع f وقتی x به a نزدیک میشود برابر عدد حقیقی $\mathcal{L}$ است هرگاه با نزدیک شدن متغیر x به عدد a $(x\neq a)$ مقادیر y تابع f به عدد $\mathcal{L}$ $(\mathcal{L} \in \mathbb{R})$ نزدیک میشود و ان را به صورت روبرو می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \mathcal{L}$$

نکته: شرط لازم در بحث وجود حد تابع f در نقطه a ، وجود حداقل یک همسایگی محذوف a می باشد و به عبارت دیگر اگر تابع در $x = a$ هیچ همسایگی نداشته باشد، تابع در a حد ندارد.

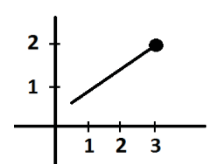
تعریف حد چپ و راست:

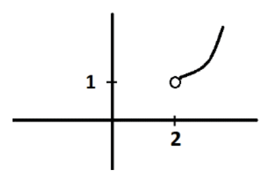
فرض کنیم تابع f در همسایگی چپ نقطه‌ی a تعریف شد باشد. می‌گوییم : حد چپ تابع f در نقطه‌ی a برابر عدد $\mathcal{L}$ است. هرگاه x را از سمت چپ به اندازه کافی به a نزدیک کنیم، آنگاه مقادیر $f(x)$ به عدد $\mathcal{L}$ نزدیک می شود و آنرا با نماد روبرو می نویسیم: $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \mathcal{L}$

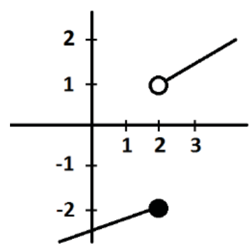
به طور مشابه برای حد راست داریم: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \mathcal{L}$ یعنی اگر x را به اندازه‌ی کافی از سمت راست به a نزدیک کنیم، آنگاه مقادیر $f(x)$ به عدد $\mathcal{L}$ نزدیک می‌شود.

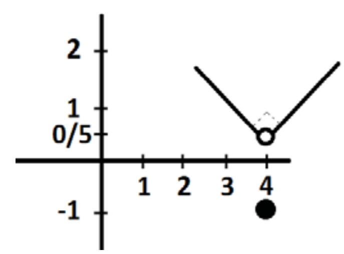
نکته : برای تعیین حد یک تابع از روی نمودار ابتدا عدد a (که به ان نزدیک میشویم) را روی محور xها مشخص کرده و بررسی می‌کنیم که از سمت چپ و راست آن yان به چه عددی نزدیک می‌شود.

مانند: $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = 2$ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$









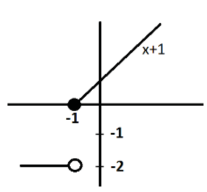
در ۲حد ندارد$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -2$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 1$

$\Leftrightarrow$ در ۴حد نیم دارد$\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = 0/5$ و $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = 0/5$

قضیه: شرط کافی برای اینکه حد تابع f در نقطه a برابر $\mathcal{L}$ باشد این است که حد راست تابع f در نقطه a برابر حد چپ تابع f در نقطهa برابر $\mathcal{L}$ باشد به عبارت دیگر :

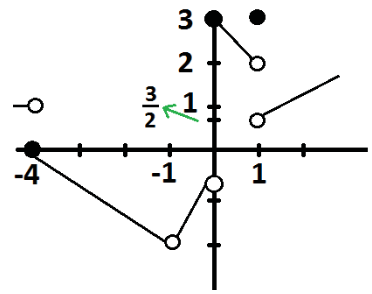
$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \mathcal{L} \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \mathcal{L}\ ,\ \lim_{x\to a^-} f(x) = \mathcal{L}}$$

مثال: آیا تابع f با ضابطه‌ی زیر در نقطه $x = -1$ حد دارد؟ $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -2 & x < -1 \end{cases}$



$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x) = 0$ و $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x) = -2 \Rightarrow \lim\limits_{x\to(-1)} f(x) =$ موجود نیست

مثال: نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. حدها را بیابید.



A) $\lim_{x\to(-4)} f(x) =$

B) $\lim_{x\to 0} f(x^2 - x) =$

C) $f(1) + \lim_{x\to 1^-} f(x) =$

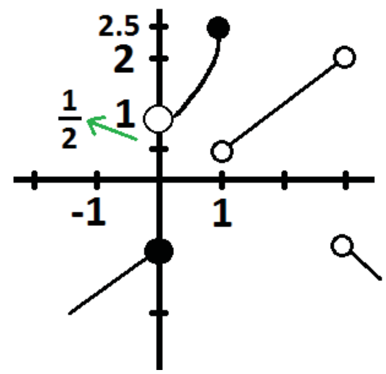
D) $\lim_{x\to -1} f(f(x)) =$

E) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) =$

F) $\lim_{x\to -1} f(x-1) =$

تمرین در کلاس

1. با توجه به نمودار تابع f در روبه رو ، حاصل را بدست آورید.



A) $f(1) - \lim_{x\to 2} f(x) =$

B) $\lim_{x\to 1^-} f(x) =$

C) $\lim_{x\to 0^-} f(x) + \lim_{x\to 1^+} f(x) =$

D) $\lim_{x\to 0^+} fof(x) =$

$E)$ $\lim_{x\to 3} f(x) =$

E) $\lim_{x\to 0} f(1-x^2) =$

2. تابع روبرو مفروض است: $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x>1 \\ 4-x & x<1 \end{cases}$

الف) نمودار تابع f را رسم کنید.

ب) حد تابع f را در نقاط $x=1$, $x=-1$ بررسی کنید.

ج) مقادیر f را در این دو نقطه در صورت وجود بنویسید.

3. $f(x) = [x] + [-x]$

الف) حد تابع f را در نقاط $x = -2 \,,\, x = \sqrt{3}$ تعیین کنید.

ب) حدتابع f را در نقطه $x = a \quad (a \in \mathbb{R})$ در صورت وجود تعیین کنید.

4. با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -2 & x \in \mathbb{Z} \\ x+3 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ در بازه‌ی $[-4 \,,\, 5]$ حد توابع زیر را بنویسید.

A) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$

B) $\lim\limits_{x\to(-4)^+} f(x) =$

C) $\lim\limits_{x\to\frac{4}{3}} f(x) =$

D) $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}} f(x) =$

5. الف) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - x}$ را تعیین کنید.

ب) حد تابع f را در نقاط $x = 1 \;,\; x = 0$ بررسی کنید.

6. الف) دامنه تابع $f(x) = \frac{x}{[x]-1}$ را بدست آورید.

ب) حد تابع f را در نقاط $x = 1 \;,\; x = 3$ بررسی کنید.

7. الف) نمودار تابع $f(x) = 2x - x^2$ را رسم کنید.

ب) با توجه به نمودار رسم شده ، حدهای زیر را بیابید.

A) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)] =$

B) $\lim\limits_{x\to -1}[f(x)] =$

C) $[\lim\limits_{x\to 1} f(x)] =$

8. تابع روبرو مفروض است: $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$

الف) دامنه تابع را بدست آورید.

ب) دامنه تابع ، شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

ج) آیا این تابع در همسایگی 3.99 تعریف شده است؟

د) آیا این تابع در همسایگی راست $x = 2$ تعریف شده است؟ در همسایگی چپ $x = 2$ چطور؟

هـ) اگر تابع بصورت $y = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} & |x| > 2 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ باشد؛ به تمام قسمت های الف تا د مجددا پاسخ دهید.

قضایای حد

1) قضیه:

الف) حد تابع ثابت $f(x) = c \quad (c \in \mathbb{R})$ در هر عدد دلخواه a برابر مقدار ثابت است.

یعنی: $\lim_{x \to a} c = c$

ب) حد هر تابع همانی $i(x) = x$ در هر عدد دلخواه a برابر a است.

یعنی : $\lim_{x \to a} x = a$

مثال: A) $\lim_{x \to 7}(-5) = -5$ B) $\lim_{x \to -3}(x) = -3$

2) **قضیه:** اگر دو تابع f و g در نقطه $x = a$ حد داشته باشند

و $\lim_{x \to a} g(x) = \mathcal{L}_2$ و $\lim_{x \to a} f(x) = \mathcal{L}_1$ ، آنگاه:

الف) مجموع و تفاضل و ضرب این دو تابع در نقطه $x = a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x \to a}(f \pm g)(x) = \lim_{x \to a}(f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = \mathcal{L}_1 \pm \mathcal{L}_2$$

$$\lim_{x\to a}(f\times g)(x)=\lim_{x\to a}(f(x)\times g(x))=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x)=\mathcal{L}_1\times\mathcal{L}_2$$

ب) تابع $\frac{f}{g}$ به شرط آنکه $\mathcal{L}_2\neq 0$ در $x=a$ حد دارد و داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{\mathcal{L}_1}{\mathcal{L}_2}$$

نتایج قضیه2:

A) $\lim_{x\to a}kf(x)=k\times\lim_{x\to a}f(x)=\mathrm{k}\times\mathcal{L}$

B) $\lim_{x\to a}f^n(x)=(\lim_{x\to a}f(x))^n$

C) $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim_{x\to a}f(x)}\ ;(\lim f(x)\neq 0)$

نکته: برای استفاده از قضیه 2، ابتدا باید بررسی شود که حد توابع f و g در نقطه a موجود باشد.

3) **قضیه:** هر چند جمله ای مانند $p(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x^1+b_0$ در هر نقطه دلخواه a حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله‌ای در نقطه $x=a$ برابر است. یعنی :

$$\lim_{x\to a}(b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0)=b_na^n+b_{n-1}a^{n-1}+\cdots+b_1a+b_0$$

4) **قضیه:** اگر تابع f در همسایگی محذوف a نامنفی باشد و در این نقطه حد داشته باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a}f(x)}$$

به طور کلی برای هر عدد طبیعی n ، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد،آنگاه

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a}f(x)}$$

5) **قضیه:** برای هر عدد حقیقی a داریم: $\lim_{x\to a}\sin x=\sin a\ ,\ \lim_{x\to a}\cos x=\cos a$

مثال ها:

1) توابع $f(x)=\begin{cases}3-x^2 & x<1\\ x+1 & x\geq 1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & x<1\\ 1-x & x\geq 1\end{cases}$ مفروض‌اند. پاسخ حدها را بدست آورید.

A) $\lim_{x\to 1}(f+g)(x)=$

B) $\lim_{x\to 0}(f\times g)(x)=$

C) $\lim_{x\to 2}\left(\frac{f}{g}\right)(x)=$

D) $\lim_{x\to(-1)}(2f-g)(x)=$

2) مقدار حد های زیر را بدست آورید.

A) $\lim_{x\to(-\sqrt{2})}(-x^3)=-(-\sqrt{2})^3=-\left(-\sqrt{8}\right)=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

B) $\lim_{x\to(-2)}\frac{x^2-|x|+1}{3x+1}=\frac{(-2)^2-|-2|+1}{3(-2)+1}=\frac{4-2+1}{-6+1}=\frac{3}{-5}$

C) $\lim_{x\to(\sqrt{2})}\frac{x-[x]}{2-x}=\frac{\sqrt{2}-[\sqrt{2}]}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

D) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x+\frac{\pi}{3})}{\cos(2x-\frac{\pi}{4})}=\frac{\sin(\pi+\frac{\pi}{3})}{\cos(2\pi-\frac{\pi}{4})}=\frac{-\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

E) $\lim_{x\to\pi}\frac{|\sin x|}{x-\frac{\pi}{2}}=\frac{|\sin\pi|}{\pi-\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{\frac{\pi}{2}}=0$

F) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x - x^2 - 2\pi\cos 2x} = \sqrt{\sin\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2})^2 - 2\pi\cos 2(\frac{\pi}{2})} = \cdots$

3) فرض کنید f یک تابع باشد ؛ بطوریکه $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 5$ ، آیا می توان گفت که f تابعی ثابت است؟ چرا؟

4) تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم:

$$\lim_{x\to 3}\frac{g(x)+x}{x^2-2} = 2$$

5) اگر $\lim\limits_{x\to(-2)} f(x) = 3$ باشد، حاصل حدهای زیر را بیابید.

A) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3}{x^2} =$

B) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)+1}{f(x)} =$

6) الف) اگر حد تابع f در $x = a$ موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد، در مورد وجود تابع g+f و g−f چه می‌توان گفت؟

ب) اگر توابع f و g در $x = a$ حد نداشته باشند، در مورد حد تابع g±f در a چه می‌توان گفت؟

7) تابع f با ضابطه‌ی رو برو در نقطه $x = -2$ حد دارد. مقدار a را بدست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + [x]}{|x|} & x < -2 \\ \sqrt{-2x} + 2a & x > -2 \end{cases}$$

8) تابع g در مجموعه اعداد حقیقی حد دارد. مقادیر a و b را بیابید.

$$g(x)=\begin{cases} x^2-ax & |x|>1 \\ \frac{b}{x}+[x] & |x|<1 \end{cases}$$

9) الف) توابع f و g مثال بزنید بطوریکه $(f+g)$ در $x=2$ حد داشته باشد اما حداقل یکی از f یا g در $x=2$ حد نداشته باشد.

ب) توابع f و g را چنان مثال بزنید که در در $x=3$ حد نداشته باشند اما g×f در $x=2$ حد داشته باشد.

محاسبه حد توابع کسری (رفع ابهام $\frac{0}{0}$)

برای محاسبه حد f با ضابطه $f(x)$ در نقطه $x=a$، عدد a را در تابع f جایگزین می‌کنیم:

اگر بعد از محاسبه به یک عدد حقیقی رسیدیم، جواب حدِ تابع است.

اگر تابع به صورت $\frac{f}{g}$ باشد و با جایگذاری $x=a$ به کسر $\frac{0}{0}$ رسیدیم به طوریکه صفرهای به دست آمده در صورت و مخرج بسیار نزدیک به صفر باشند، با حالت مبهم رو برو هستیم که باید رفع ابهام شود. منظور از رفع ابهام $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ این است که به کمک ترفندهایی مناسب که در مثال‌ها خواهد آمد، عامل $(x-a)$ را در صورت و مخرج ایجاد کرده و آنها را حذف کنیم و بعد از حذف $(x-a)$ عمل جایگذاری a و محاسبه را دوباره انجام دهیم تا به یک عدد حقیقی برسیم که جواب حد است.

مثال: حاصل حدها را بیابید.

A) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{4^2-16}{4-4}=\frac{16-16}{0}=\frac{0}{0}$ مبهم است، باید رفع ابهام گردد.

1 به کمک تجزیه:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}=4+4=8$$

$$B)\ \lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-5x+6}\times\frac{\sqrt{x+1}+2}{\sqrt{x+1}+2}=\lim_{x\to3}\frac{x+1-4}{(x+3)(x-2)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{1}{4}$$

② به کمک ضرب مزدوج:

$$C)\ \lim_{x\to0}\frac{2-2\cos x}{4x^2}=\frac{2-2\cos 0}{4x^2}=\frac{2-2}{0}=\frac{0}{0}$$

مبهم است، باید رفع ابهام گردد.

$$\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x)}{4x^2}\times\dots$$

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

③به کمک (مثال صفحه ۱۲۰ کتاب) یعنی (ایکس بر حسب رادیان است)

مثال:

$$\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos x}{4x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x)}{4x^2}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{2x^2(1+\cos^2 x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{2x^2(1+\cos^2 x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{2(1+\cos x)}=1\times1\times\frac{1}{2\times2}$$

پیوستگی:

الف) پیوستگی در یک نقطه $(x=a)$

تعریف پیوستگی: تابع f را در $x=a$ پیوسته گوییم هرگاه : $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

به عبارت دیگر برای پیوسته بودن تابع f در نقطه $x=a$ باید سه شرط زیر همزمان برقرار باشد:

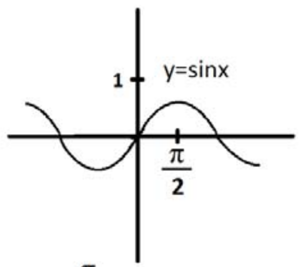
1) $f(a)=A$ موجود و تعریف شده

2) $\lim_{x\to a}f(x)=\mathcal{L}\ ,\ \mathcal{L}\in\mathbb{R}$

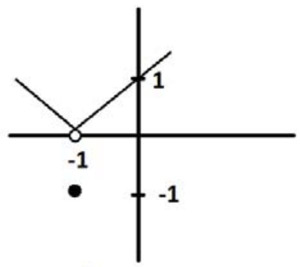
3) حد در (۲) = مقدار در (۱) : $A=\mathcal{L}$

نکته: اگر حداقل یکی از سه شرط گفته شده برقرار نباشد، می‌گوییم f در $x=a$ پیوسته نیست.

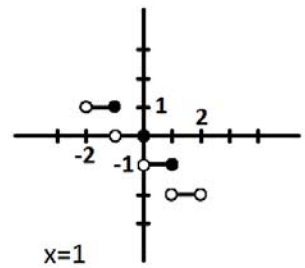
مثال: پیوستگی توابع زیر را در نقاط مشخص شده بررسی کنید.



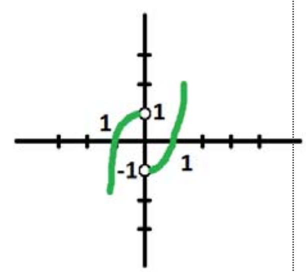
$x=\frac{\pi}{2}$



$x=-1$



$x=1$, $x=-\frac{1}{2}$



$x=0$

مثال: توابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ و $g(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1} & x\neq 1\\ -2 & x=1\end{cases}$ مفروض‌اند.

پیوستگی توابع را در $x=1$ بررسی کنید. $f(1)=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$ موجود نیست بنابراین f در $x=1$ پیوسته نیست

---

① $g(1)=-2$

$\lim_{x\to 1} g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)}=1+1=2 \quad \to ②$

③ $g(1)\neq \lim_{x\to 1} g(x)$ پس g در $x=1$ پیوسته نیست.

تعریف پیوستگی راست و چپ:

تابع f در $x=a$ را از راست پیوسته می‌گوییم (پیوستگی راست دارد) هرگاه: $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

تابع g در $x=a$ از چپ پیوسته است (پیوستگی چپ دارد) هرگاه:

$$\lim_{x\to a^-} g(x)=g(a)$$

مثال: پیوستگی تابع ها را در نقاط تعیین شده بررسی کنید.

الف) تابع $f(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ در نقطه $x=0$:

① $f(0)=1$

بنابراین f در $x=0$ پیوسته نیست. اما

چون حد راست $f(0)=$ است، f

در $x=0$ پیوستگی راست دارد.

② $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1 \end{cases}$

③ $f(0) \neq \lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ب) تابع $g(x) = (x-2)[x]$ در نقطه $x = 2$:

① $g(2) = (2-2)[2] = 0 \times 2 = 0$

② $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2}(x-2)[x]$

$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)[x] = (2-2)[2^+] = 0 \times 2 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 2^-}(x-2)[x] = (2-2)[2^-] = 0 \times 1 = 0 \end{cases} \to \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$

③ $g(2) = \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0 \quad \to$ تابع g در $x = 2$ پیوسته است.

ج) تابع $h(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & x < -1 \\ -3 & x = -1 \\ \cos(\pi - x\pi) & x > -1 \end{cases}$ در نقطه $x = -1$:

① $h(-1) = -3$

② $\lim\limits_{x\to(-1)^-} h(x) = -(-1)^2 + 2(-1) = -1 - 2 = -3 \, , \lim\limits_{x\to(-1)^+} h(x)$

$= \cos(\pi + \pi) = \cos 2\pi \quad \searrow$

h در 1- حد ندارد. درنتیجه h در (1-) پیوسته نیست؛ اما پیوستگی چپ دارد.

ب) پیوستگی در یک بازه:

A) تابع f را بر بازه‌ی باز (a,b) پیوسته گوییم هرگاه در بازه‌ی (a,b) پیوسته باشد.

B) تابع f را بر بازه‌ی بسته $[a,b]$ پیوسته گوییم هرگاه :

۱. تابع در هر نقطه بازه (a,b) پیوسته باشد.

۲. تابع در $x = a$ پیوستگی راست داشته باشد.

۳. تابع در $x = b$ پیوستگی چپ داشته باشد.

c) پیوستگی تابع f بر بازه‌ی (b و a] و [b و a) نیز به طور مشابه تعریف می شود.

مثال:

1) تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ بر بازه ی $[1,2]$ پیوسته است. چرا؟

2) تابع $f(x)=[x]$ بر بازه ی $(0,1)$ پیوسته است اما بر بازه ی $[0,1]$ پیوسته نیست.
همچنین بر بازه ی $[0,1)$ نیز پیوسته است. چرا؟

مثال: پیوستگی تابع $f(x)=[x]+[-x]$ را در مجموعه ی $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ بررسی کنید.

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\Leftrightarrow x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$a\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\to\begin{cases}f(x)=[a]+[-a]=-1\\ \lim\limits_{x\to a}f(x)=-1\\ f(a)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\end{cases}\Longrightarrow$$

در هر نقطه دلخواه از مجموعه $a\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ ؛ پیوسته است. بنابراین f در $\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ پیوسته است.

کار در منزل

1) تابع با ضابطه ی $f(x)=\begin{cases}x^2-bx-1 & x<2\\ ax+b & x>2\end{cases}$ با شرط $f(2)=5$ ، روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار a را بیابید.(تجربی91)

2) به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}3x-[x] & x<2\\ a & x=2\\ x+2 & x>2\end{cases}$ در $x=2$ پیوسته است؟ (تجربی92)

3) به ازای چه مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{x} & 1\le x\le 6\\ a+\cos^2\frac{\pi x}{36} & x>6\end{cases}$ روی مجموعه‌ی عددهای حقیقی بزرگتر از 1 پیوسته است؟ (تجربی94)

4) به ازای چه مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & 0<x<a\\ 1-\frac{x}{4} & x\ge a\end{cases}$ در دامنه اش پیوسته است؟ (ریاضی95)

5) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}ax-a+2 & x\le 1\\ \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & x>1\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x=2$ پیوسته است؟ (تجربی96)

6) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}[x]+[-x] & x\notin\mathbb{Z}\\ a & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a روی مجموعه عددهای حقیقی پیوسته است؟ (ریاضی96)

7) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{2x-\pi} & x\neq \frac{\pi}{2}\\ a & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a روی بازه $[0,2\pi]$ پیوسته است؟ (تجربی92)

8) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos 3x}{\cos x} & 0\leq x<\frac{\pi}{2}\\ \sin 5x-a & \frac{\pi}{2}\leq x\leq 2\pi\end{cases}$ به ازای کدام مقدار a روی بازه $[0,2\pi]$ پیوسته است؟ (تجربی94)

9) اگر $f(x)=[x]+[-x]$ و $g(x)=\begin{cases}f(x) & x\notin \mathbb{Z}\\ f(x)-1 & x\in \mathbb{Z}\end{cases}$ باشد، آنگاه تعداد نقطه‌های ناپیوستگی تابع g روی بازه ی $[-4,4]$ کدام است؟ (ریاضی92)

10) تابع $f(x)=[3x]$ روی بازه ی $(1,4)$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

11) تابع $f(x)=[x]$ روی بازه ی $(k,-2)$ پیوسته است. کمترین مقدار k را بیابید.

12) تابع $f(x)=\frac{x+1}{x^2-mx+1}$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. حدود m را تعیین کنید.

13) بزرگترین بازه ای که تابع $f(x)=\sqrt{2-|x+1|}$ روی آن پیوسته است را بیابید.

14) تابع $f(x) = (-1)^{[x]} \times \sin\frac{\pi x}{2}$ در نقطه های $x \in \mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟
(ریاضی93)

15) تابع $f(x) = [x^2]$ روی بازه ی $(2, 2+k)$ پیوسته است. بیشترین مقدار $\mathbf{k}$ را بیابید.

16) تابع $f(x) = \begin{cases} 4 & x^2 = |x| \\ x+2 & x^2 \neq |x| \end{cases}$ در چند نقطه از دامنه اش ناپیوسته است؟

سعید میری

تلفن: ۰۹۱۲۳۱۵۷۱۵۵