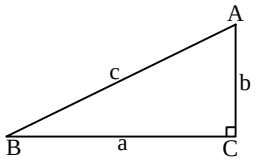
دانلود از سایت ریاضی سرا
WWW.RIAZISARA.IR

۳-۱: توابع مثلثاتی

بحث مثلثات یکی از بحث‌های بسیار مهم ریاضی است که اهمیت ویژه‌ای در حساب دیفرانسیل و انتگرال و علوم مهندسی دارد. شما در درس ریاضی (۱) با تعریف نسبت‌های مثلثاتی و بعضی از اتحادهای مقدماتی مربوط به آن‌ها آشنا شده‌اید. در درس ریاضی (۲) نیز دایره‌ی مثلثاتی و کاربردهای مثلثات در مسائل هندسی را آموخته‌اید. به این ترتیب حال آماده‌اید که با مثلثات به شکل مجرد و جبری‌تر از سال‌های قبل روبه‌رو شوید. در این بخش ضمن مروری کوتاه و مختصر بر آن‌چه پیش از این آموخته‌اید، چهار تابع اصلی مثلثاتی و نمودار آن‌ها را یاد می‌گیریم و اتحادهای مقدماتی را خواهیم آموخت.

تعریف نسبت‌های مثلثاتی برای زوایای حاده

مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را با زاویه‌ی قائم $\hat{C}$ و اضلاع c، b و a در نظر بگیرید. از روی این شکل نسبت‌های سینوس (sin) و کسینوس (cos)، تانژانت (tan) و کتانژانت (cot)، سکانت (sec) و کسکانت (csc) به صورت زیر تعریف می‌شوند:[۱]



$$\sin A = \frac{a}{c} \qquad \cos A = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{a}{b} \qquad \cot A = \frac{b}{a}$$

$$\csc A = \frac{c}{a} \qquad \sec A = \frac{c}{b}$$

ارتباط بین نسبت‌ها

با استفاده از تعریف اولیه‌ی نسبت‌های مثلثاتی می‌توان رابطه‌ی بین آن‌ها را پیدا کرد:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ ,\ \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{۱}{\cos\alpha}\ ,\ \csc\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha}$$

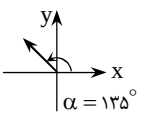
همچنین با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورث و استفاده از اولین تساوی فوق دو اتحاد بدیهی زیر به‌دست می‌آید:

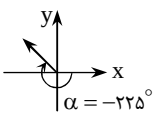
۱) $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ ۲) $\tan\alpha.\cot\alpha = ۱$

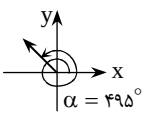
زاویه‌ی مثلثاتی

در مثلثات ما فقط با زاویه‌های حاده سروکار نداریم. برای این منظور، مفهوم زاویه را به شکل جبری گسترش می‌دهیم.

چنان‌چه می‌دانید، در صفحه‌ی مختصات یک زاویه‌ی استاندارد با جهت چرخش و میزان چرخش یک نیم‌خط مشخص می‌شود. حرکت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت (پاد ساعتگرد) با علامت + و در جهت ساعتگرد با علامت − مشخص می‌شود. میزان چرخش نیز اندازه‌ی عددی زاویه را تعیین می‌کند. در شکل‌های زیر سه زاویه‌ی مختلف را مشخص کرده‌ایم که همگی با یک نیم‌خط مشخص شده‌اند (میزان چرخش از محور x ها تا نیم‌خط در نظر گرفته می‌شود).







[۱] – نسبت‌های مثلثاتی سکانت و کسکانت کاربرد زیادی ندارند. در این‌جا فقط برای کامل بودن بحث به آن‌ها اشاره کرده‌ایم.

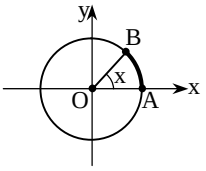
واحد رادیان

در حساب دیفرانسیل و انتگرال، برخلاف هندسه معمولاً برای زاویه از واحد رادیان استفاده می‌کنیم. در مباحث حد و مشتق در توابع مثلثاتی و فرمول‌های آن‌ها، زاویه‌ها برحسب رادیان هستند. به‌طور کلی اگر در مسأله‌ای عددی بدون علامت درجه برای اندازه‌ی یک زاویه دیدید، آن را بر حسب رادیان باید در نظر بگیرید.

یادآوری: **اگر زاویه‌ای برحسب درجه اندازه‌ی D و برحسب رادیان اندازه‌ی R داشته باشد، این دو عدد را می‌توانیم با رابطه‌ی $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$ به هم مربوط سازیم.**

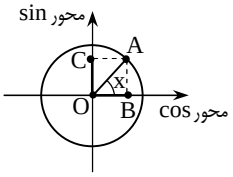
◄ **مثال:** زاویه‌ی ۲۷۰° برحسب رادیان برابر است با: $\pi\times\frac{۲۷۰}{۱۸۰}=\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان.

دایره‌ی مثلثاتی



با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی می‌توانیم مقادیر نسبت‌های مثلثاتی را برای هر زاویه‌ی مثلثاتی (نه فقط زاویه‌های حاده) بیابیم. منظور از دایره‌ی مثلثاتی، دایره‌ای به شعاع ۱ و به مرکز مبدأ مختصات است که محورهای x و y دو قطر آن هستند. با توجه به آن‌که شعاع دایره ۱ است، پس طول کمان AB، از نظر عددی با اندازه‌ی زاویه‌ی مقابل آن (یعنی x) برابر است.

محورهای سینوس و کسینوس

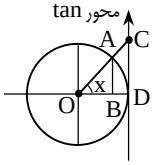


می‌توانیم دو محور عمودی قطر دایره را به‌عنوان محورهای $\cos x$ و $\sin x$ در نظر بگیریم. به این ترتیب برای به‌دست آوردن سینوس و کسینوس یک زاویه مانند x، کافی است از نقطه‌ی انتهای کمان متناظر آن روی دایره (یعنی نقطه‌ی A در شکل) به این دو محور خط‌هایی عمود کنیم. پاهای عمود مقادیر $\cos x$ و $\sin x$ را نشان می‌دهند. برای زاویه‌های حاده مانند شکل بالا، به راحتی می‌توان نشان داد که این تعریف با تعریف اولیه‌ی نسبت‌ها سازگار است. چون $OA=۱$ و در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OAB داریم: $\cos x=\frac{OB}{OA}$. با توجه به $OA=۱$ نتیجه می‌گیریم $OB=\cos x$.

تذکّر: با توجه به تعریف بالا اگر انتهای کمان x در یکی از چهار ربع دایره باشد، می‌توانیم علامت نسبت‌ها را به راحتی تعیین کنیم:

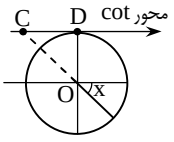
انتهای کمان متناظر x	ربع اول	ربع دوم	ربع سوم	ربع چهارم
$\sin x$	+	+	−	−
$\cos x$	+	−	−	+

محورهای تانژانت و کتانژانت



برای دایره‌ی مثلثاتی می‌توانیم خطی مماس بر دایره مطابق شکل رسم کنیم و آن را محور تانژانت در نظر بگیریم. به این ترتیب برای به‌دست آوردن تانژانت یک زاویه مانند x کافی است نیم‌خط آن زاویه را امتداد دهیم تا محور را در نقطه‌ای قطع کند (در شکل نقطه‌ی C). این نقطه همان $\tan x$ را روی محور نشان می‌دهد. برای توجیه دقت کنید $AB=\sin x$ و $OB=\cos x$. از طرفی طبق قضیه‌ی تالس در مثلث OCD داریم:

$$\frac{AB}{CD}=\frac{OB}{OD}\xrightarrow{OD=۱}\frac{AB}{CD}=OB\Rightarrow CD=\frac{AB}{OB}\Rightarrow CD=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow CD=\tan x$$

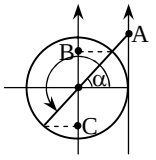


شبیه محور تانژانت، می‌توانیم خطی مماس بر دایره مانند شکل روبه‌رو رسم کنیم و آن را محور کتانژانت در نظر بگیریم. برای پیدا کردن کتانژانت هر زاویه کافی است نیم‌خط آن زاویه را امتداد دهیم تا محور را قطع کند. به این ترتیب نقطه‌ی قطع شده، مقدار $\cot x$ را نشان می‌دهد.

برای تمرین با روش مشابه روش ما برای تانژانت، در شکل روبه‌رو نشان دهید که $\cot x=-CD$. (چرا از علامت $-$ استفاده کرده‌ایم؟)

➢ **تذکّر:** با توجه به محور تانژانت واضح است که اگر $n \in Z$، آن‌گاه $\tan(n\pi + \frac{\pi}{2})$ تعریف نشده است، زیرا نیم‌خط زاویه با محور تانژانت موازی می‌شود. به همین ترتیب $\cot(n\pi)$ نیز تعریف نشده است.

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی براساس دایره‌ی مثلثاتی



با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی می‌توانیم به راحتی ارتباط بین نسبت‌های مثلثاتی زوایایی چون α، $\pi \pm \alpha$، $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ و ... را به‌دست آوریم.

برای مثال زاویه‌ی α و $\pi + \alpha$ را در نظر بگیرید. انتهای کمان این دو زاویه نسبت به مبدأ متقارن است. مثلاً با توجه به شکل، اگر نیم‌خط‌های این دو زاویه را امتداد دهیم هر دو در یک نقطه محور تانژانت را قطع می‌کنند (نقطه‌ی A در شکل)، پس $\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$.

به همین ترتیب، می‌بینید که پای عمودهای انتهای کمان‌ها بر محور سینوس‌ها دو نقطه‌ی قرینه می‌شود (نقاط B و C)، پس $\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$.

با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی روابط متنوعی از این نوع می‌توانیم به‌دست آوریم که مهم‌ترین آن‌ها در نکته‌ی زیر آمده است (اثبات آن‌ها به خودتان واگذار شده است).

نکته:

برای هر زاویه‌ی α و هر عدد صحیح n روابط زیر برقرار است:

۱- تمام نسبت‌های مثلثاتی α و $2n\pi + \alpha$ کاملاً یکسان‌اند.

۲- داریم: $\sin(n\pi + \alpha) = (-1)^n \sin\alpha$ و $\cos(n\pi + \alpha) = (-1)^n \cos\alpha$.

همچنین داریم: $\tan(n\pi + \alpha) = \tan\alpha$ و $\cot(n\pi + \alpha) = \cot\alpha$.

۳- داریم: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$، **ولی سه نسبت دیگر زاویه‌های α و $-\alpha$ قرینه‌اند.**

٤- داریم: $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$، **ولی سه نسبت دیگر زاویه‌های α و $\pi - \alpha$ قرینه‌اند.**

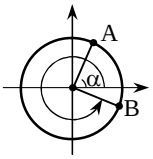
➢ **تذکّر:** توصیه می‌کنیم که از حفظ کردن روابط بالا خودداری کنید. با هر بار رجوع به دایره‌ی مثلثاتی، هر چند در ابتدا سرعت کمی دارید، ولی به مرور بر این روابط به خودی‌خود مسلط می‌شوید و البته هیچ‌وقت آن‌ها را فراموش نمی‌کنید.

نکته:

ارتباط نسبت‌های مثلثاتی α و $n\frac{\pi}{2} \pm \alpha$ (n عدد فرد)

در این موارد جای سینوس و کسینوس (و همچنین تانژانت و کتانژانت) در دو زاویه عوض می‌شود. ممکن است علاوه بر تعویض، علامت هم عوض شود که تغییر علامت را با توجه به جایگاه زاویه در دایره‌ی مثلثاتی می‌توان متوجه شد.

◄ **مثال:** فرض کنید می‌خواهیم ارتباط نسبت‌های مثلثاتی α و $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ را به‌دست آوریم.



برای $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ می‌دانیم باید از $\cos\alpha$ استفاده کنیم (تغییر sin و cos)، همچنین با توجه به شکل برای یک زاویه‌ی مثالی α، $\cos\alpha$ مثبت و $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ منفی است. بنابراین: $\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos\alpha$

با استدلالی مشابه نتیجه می‌گیریم $\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin\alpha$ (چرا این‌جا علامت منفی نداریم؟)، همچنین $\tan(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cot\alpha$ و $\cot(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\tan\alpha$.

❍ **مسأله‌ی (۱): حاصل هر یک از عبارات زیر را بیابید.**

الف) $A = 2\cos(-\frac{1250\pi}{4}) + 3\tan(\frac{1250\pi}{4}) + 4\cot(-\frac{1250\pi}{4})$

ب) $(n \in N) \quad B = \sin(\frac{n\pi}{2}) + \cos(\frac{n\pi}{2})$

حل: الف) با توجه به دایره‌ی مثلثاتی داریم: $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$ و $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$. در نتیجه:

$$A=2\cos(31\pi+\frac{\pi}{4})+3\tan(31\pi+\frac{\pi}{4})-4\cot(31\pi+\frac{\pi}{4})$$
$$=2\times(-1)^{31}\cos(\frac{\pi}{4})+3\tan(\frac{\pi}{4})-4\cot(\frac{\pi}{4})=2\times(-1)^{31}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+3\times1-4\times1=-\sqrt{2}-1$$

ب) مسأله را به دو حالت تقسیم می‌کنیم (حالت زوج بودن n و حالت فرد بودن n):

۱) $n=2k\rightarrow B=\sin k\pi+\cos k\pi=0+(-1)^k=(-1)^k$

۲) $n=2k+1\rightarrow B=\sin(k\pi+\frac{\pi}{2})+\cos(k\pi+\frac{\pi}{2})=(-1)^k+0=(-1)^k$

➢ **تـذکّر:** با توجه به این‌که در هر دو حالت $n=2k$ و $n=2k+1$، داریم $k=[\frac{n}{2}]$، پس می‌توان دو نتیجه‌ی بالا را به صورت زیر با هم ترکیب کرد:

$$\sin(\frac{n\pi}{2})+\cos(\frac{n\pi}{2})=(-1)^{[\frac{n}{2}]}$$

اتحادهای مثلثاتی مقدماتی

با استفاده از دو رابطه‌ی اصلی $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ و $\tan\alpha\cot\alpha=1$ و ارتباط مقدماتی بین نسبت‌های مثلثاتی می‌توانیم چند اتحاد ساده و پرکاربرد را به‌دست آوریم: (اثبات این اتحادهای ساده را به خودتان واگذار می‌کنیم)

۱) $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ ۲) $1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

۳) $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\tan^2\alpha}$ ۴) $\sin^2\alpha=\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

مسألهٔ (۲): هر یک از اتحادهای زیر را ثابت کنید.

الف) $\frac{(1-\sin x\cos x)(1+\sin x\cos x)-\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^4 x+\sin^4 x}=1$

ب) $\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}=1-\sin x\cos x$

پ) $\frac{\sin^2 x}{1+\tan^2 x}-\frac{\cos^2 x}{1+\cot^2 x}+\sec^2 x=1+\tan^2 x$

ت) $\frac{2(1-\sin^3 x-\cos^3 x)}{\sin x+\cos x+2}=(1-\sin x-\cos x)^2$

حل: الف) از یک طرف تساوی (در این مثال طرف چپ که آن را A می‌نامیم) شروع می‌کنیم و با ساده‌کردن آن به طرف دیگر می‌رسیم:

$$A=\frac{1-\sin^2 x\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\frac{1-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$$

حال با توجه به $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ داریم:

$$A=\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=\frac{\sin^4 x+\cos^4 x}{\sin^4 x+\cos^4 x}=1$$

ب) طبق اتحاد چاق و لاغر می‌توان نوشت:

$$\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)$$
$$\Rightarrow\sin^3 x+\cos^3 x=(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)$$

با تقسیم دو طرف تساوی بر $\sin x+\cos x$ اتحاد ثابت می‌شود.

پ) ابتدا با ساده کردن دو جزء از مجموع سمت چپ تساوی داریم:

$$\frac{\sin^۲ x}{۱+\tan^۲ x}-\frac{\cos^۲ x}{۱+\cot^۲ x}=\frac{\sin^۲ x}{\frac{۱}{\cos^۲ x}}-\frac{\cos^۲ x}{\frac{۱}{\sin^۲ x}}=(\sin x\cos x)^۲-(\sin x\cos x)^۲=۰$$

بنابراین طرف چپ برابر است با:

$$۰+\sec^۲ x=\frac{۱}{\cos^۲ x}=۱+\tan^۲ x$$

ت) فرض می‌کنیم $\sin x+\cos x=t$ و $\sin^۳ x+\cos^۳ x$ را بر حسب t می‌یابیم. داریم:

$$t^۲=(\sin x+\cos x)^۲=۱+۲\sin x\cos x\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^۲-۱}{۲}$$

از طرفی مانند قسمت (ب) می‌توان ثابت کرد:

$$\sin^۳ x+\cos^۳ x=(\sin x+\cos x)(۱-\sin x\cos x)\Rightarrow \sin^۳ x+\cos^۳ x=t(۱-\frac{t^۲-۱}{۲})=\frac{t}{۲}(۳-t^۲)$$

به این ترتیب با شروع از طرف چپ تساوی داریم:

$$\frac{۲(۱-(\sin^۳ x+\cos^۳ x))}{\sin x+\cos x+۲}=\frac{۲(۱-\frac{t}{۲}(۳-t^۲))}{t+۲}=\frac{۲-۳t+t^۳}{t+۲}=\frac{(t+۲)(t^۲-۲t+۱)}{t+۲}=(t-۱)^۲=(\sin x+\cos x-۱)^۲$$

تست (۱): حاصل عبارت $\frac{\sin^۴ x+\cos^۴ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x}-(\tan x+\cot x)^۲$ **کدام است؟ (آزاد – ۸۳)**

۱) -۲ **۲)** ۲ **۳)** -۱ **۴)** صفر

حل: با استفاده از تساوی $\sin^۴ x+\cos^۴ x=۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x$ داریم:

$$\frac{\sin^۴ x+\cos^۴ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x}-(\tan x+\cot x)^۲=\frac{۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x}-(\frac{\sin^۲ x+\cos^۲ x}{\sin x\cos x})^۲$$
$$=\frac{۱-۲\sin^۲ x\cos^۲ x}{\sin^۲ x\cos^۲ x}-\frac{۱}{\sin^۲ x\cos^۲ x}=-۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

مسألهٔ (۳): اگر عبارت زیر برای جمیع مقادیر x یک اتحاد باشد، a و b را بیابید.

$$(a+b\sin x-b\cos x)^۲=۲(۱-\sin x)(۱+\cos x)$$

حل: یک تساوی در صورتی اتحاد است که برای تمام مقادیر دامنه‌ی آن برقرار باشد.

راه اول: فرض کنید: $\sin x-\cos x=t$. در این صورت داریم (برای سادگی محاسبات قرار داده‌ایم $\sin x\cos x=y$):

$$t^۲=(\sin x-\cos x)^۲=۱-۲\sin x\cos x=۱-۲y$$

با جای‌گذاری این نتیجه در تساوی اولیه به‌دست می‌آوریم:

$$(a+bt)^۲=۲(۱-t-y)\Rightarrow a^۲+b^۲t^۲+۲abt=۲-۲t-۲y\xrightarrow{t^۲=۱-۲y}a^۲+b^۲(۱-۲y)+۲abt=۲-۲t-۲y$$

با مرتب‌کردن دو طرف تساوی به‌دست می‌آوریم:

$$a^۲+b^۲+(۲ab)t+(-۲b^۲)y=۲-۲t-۲y$$

برای آن‌که تساوی فوق یک اتحاد باشد، باید ضرایب دو طرف مساوی باشند. یعنی:

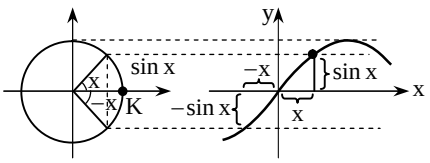
$$\{a^۲+b^۲=۲\ ,\ ۲ab=-۲\ ,\ -۲b^۲=-۲\}\Rightarrow (a,b)=(۱,-۱)\ \text{یا}\ (-۱,۱)$$

راه دوم: چون تساوی باید برای هر مقدار x برقرار باشد، برای $x=۰$ و $x=\pi$ نیز صادق است. با جای‌گذاری این مقادیر به دو معادله می‌رسیم که از حل دستگاه آن‌ها مقادیر a و b به‌دست می‌آید.

توابع مثلثاتی

اگر ورودی یک تابع، زاویه‌ای برحسب رادیان باشد و خروجی آن یکی از نسبت‌های مثلثاتی قبل یا عبارتی شامل آن‌ها، در واقع با یک تابع مثلثاتی مواجه‌ایم. با استفاده از توابع مثلثاتی می‌توانیم بسیاری از پدیده‌های طبیعی را مدل کنیم، چرا که در بسیاری پدیده‌ها با روندی تناوبی مواجه‌ایم و چنان‌چه در فصل ۲ دیده‌اید، بخش مهمی از توابع متناوب، تابع‌های مثلثاتی هستند.

با استفاده از دایره‌ی مثلثاتی می‌توانیم درکی از نمودار توابع مثلثاتی داشته باشیم. برای مثال، تابع $f(x)=\sin x$ را در نظر بگیرید. این تابع به هر زاویه‌ی x، مقدار $\sin x$ را نسبت می‌دهد. به شکل روبه‌رو دقت کنید.

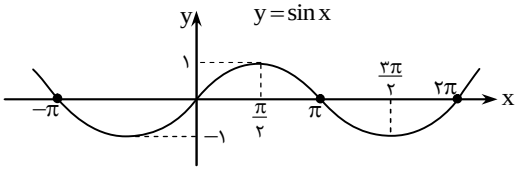


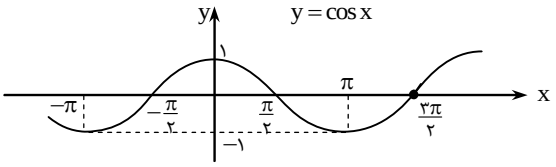
می‌بینید که چگونه x، $-x$، $\sin x$ و $\sin(-x)$ را روی نمودار تابع f با طول‌های متناظر روی دایره تطبیق داده‌ایم. در واقع اگر شما از نقطه‌ی K روی دایره شروع به حرکت در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت کنید، مانند آن است که از مبدأ مختصات روی نمودار تابع $y=\sin x$ در حال حرکتید. در هر لحظه فاصله‌ی عمودی شما تا محور xها برابر فاصله‌ی عمودی شما در دایره تا محور xها است.

با توجه به این توضیح می‌توانیم نمودار توابع مثلثاتی را رسم کنیم. در ادامه ما نمودار چهار تابع اصلی را بررسی می‌کنیم.

توابع $y=\sin x$ و $y=\cos x$

نمودار این دو تابع را در دو شکل مقابل مشاهده می‌کنید. چنان‌چه می‌بینید دو نمودار شباهت‌هایی دارند. هر دو دارای بیش‌ترین مقدار ۱ و کم‌ترین مقدار -۱ هستند.





در واقع نمودار $y=\cos x$ همان نمودار $y=\sin x$ است که به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۲}$ واحد به چپ انتقال یافته است. این نتیجه معادل اتحاد $\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{۲})$ است.

نکته:

ویژگی‌های اصلی نمودارهای $y=\sin x$ و $y=\cos x$

۱- هر دو نمودار بین خطوط $y=۱$ و $y=-۱$ واقع‌اند (این دو خط بر نمودارها مماس‌اند).

۲- نمودار $y=\sin x$ در نقاط $x=n\pi$ و نمودار $y=\cos x$ در نقاط $x=n\pi+\frac{\pi}{۲}$ با محور xها برخورد می‌کنند.

$(n\in Z)$

۳- نمودار $y=\sin x$ در نقاط به طول $x=n\pi+\frac{\pi}{۲}$ بر یکی از دو خط $y=\pm ۱$ مماس است و نمودار $y=\cos x$ در نقاط به طول $x=n\pi$. $(n\in Z)$

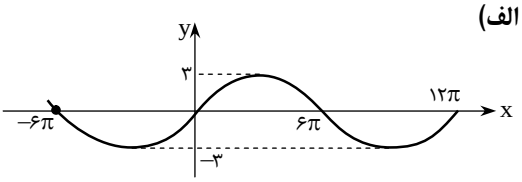
٤- دوره‌ی تناوب هر دو نمودار $T=۲\pi$ است.

٥- تابع $y=\sin x$ فرد است و نمودار آن نسبت به مبدأ متقارن است.

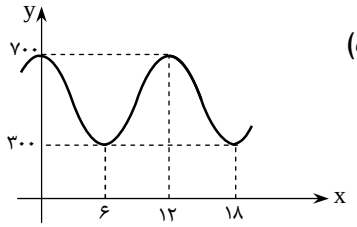
٦- تابع $y=\cos x$ زوج است و نمودار آن نسبت به محور yها متقارن است.

مسألهی (۱۴): در شکل‌های زیر نمودار توابعی مثلثاتی رسم شده است. ضابطه‌ی آن‌ها را بیابید. (دقت کنید که مقیاس‌های دو محور مساوی نیستند!)

الف)



ب)



حل: الف) نمودار تابع شبیه نمودار $y=\sin x$ است که در جهت افقی و عمودی باز شده است. اگر قرار دهیم $f(x)=a\sin bx$، داریم:

۱- چون بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع برابر ۳ و ۳− است، پس $a=3$.

۲- چون دوره‌ی تناوب تابع 12π است، پس $\frac{2\pi}{|b|}=12\pi$، بنابراین $b=\frac{1}{6}$ (چرا $b>0$؟). به این ترتیب نتیجه می‌گیریم $f(x)=3\sin\frac{x}{6}$.

ب) نمودار تابع شبیه نمودار $y=\cos x$ است که در جهت افقی و عمودی تغییر مقیاس داده و سپس به بالا منتقل شده است. اگر قرار دهیم $f(x)=a\cos bx+c$، داریم:

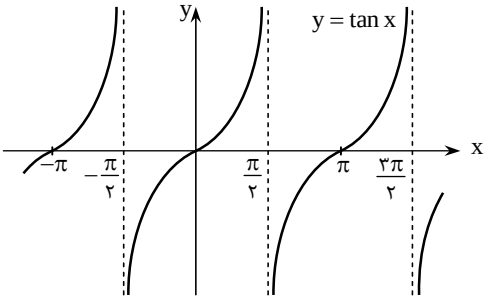
۱- بیش‌ترین و کم‌ترین مقدار تابع از روی نمودار ۳۰۰ و ۷۰۰ و از روی ضابطه $a+c$ و $-a+c$ است، پس $a=200$ و $c=500$.

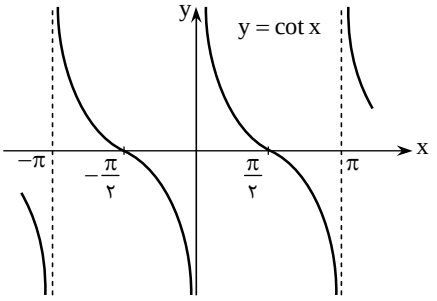
۲- دوره‌ی تناوب تابع ۱۲ است، پس $\frac{2\pi}{|b|}=12$، بنابراین $b=\frac{\pi}{6}$.

به این ترتیب نتیجه می‌گیریم $f(x)=200\cos(\frac{\pi}{6}x)+500$

توابع $y=\tan x$ و $y=\cot x$

در شکل‌های مقابل نمودار این دوتابع را رسم کرده‌ایم. چنان‌چه می‌بینید نمودار این دو تابع شبیه یکدیگر است. در واقع اگر نمودار $y=\tan x$ را نسبت به محور yها قرینه کنیم و سپس آن را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{2}$ واحد به راست منتقل کنیم به نمودار $y=\cot x$ می‌رسیم. این نتیجه معادل اتحاد $\cot x=\tan(\frac{\pi}{2}-x)$ است.





از نکات قابل توجه در نمودارهای دو تابع بالا، وجود خط‌چین‌های عمودی است. می‌دانیم دامنه‌ی این توابع R نیست، به همین دلیل برای بعضی مقادیر تعریف نشده‌اند. در این مقادیر خط‌چین‌های عمودی رسم شده‌اند. اصطلاحاً به این خط‌چین‌های عمودی «مجانب قائم» می‌گوییم. می‌بینید که وقتی به این خطوط نزدیک می‌شویم، مقدار تابع به سرعت زیاد یا به سرعت کم می‌شود (اصطلاحاً به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند).

نکته: **ویژگی‌های اصلی نمودارهای $y=\tan x$ و $y=\cot x$**

۱- تابع $y=\tan x$ مجانب‌های قائمی در نقاط $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ دارد و تابع $y=\cot x$ در نقاط $x=n\pi$ (که $n\in Z$). به ازای این مقادیر توابع تعریف نشده‌اند.

۲- دوره‌ی تناوب هر دو تابع برابر π است.

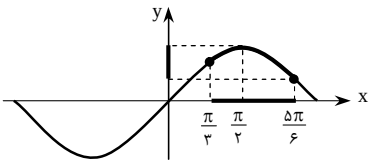
۳- در یک دوره‌ی تناوب با شروع از یک خط مجانب، تابع $y=\tan x$ صعودی اکید و تابع $y=\cot x$ نزولی اکید است.

۴- هر دو تابع فرد و نمودارهای آن ها نسبت به مبدأ مختصات متقارن هستند.

مسألهٔ (۵): **الف) اگر** $x \in (\frac{\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۶})$ **و** $\sin x = \frac{۳-m^۲}{۳+m^۲}$**، مقدار** m **در چه فاصله‌ای قرار دارد؟**

ب) اگر $\alpha \in (\frac{\pi}{۴}, \frac{۳\pi}{۴})$ **و** $\sin ۲\alpha = \frac{m}{۱+۲m}$**، حدود تغییرات** m **را بیابید.**

حل: الف) به نمودار تابع $y = \sin x$ توجه کنید:



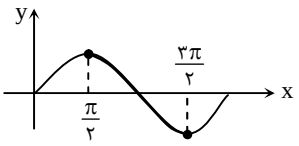
فاصله‌ی $x \in (\frac{\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۶})$ روی محور طول‌ها فاصله‌ای را مشخص می‌کند که متناظر آن روی نمودار قسمت مورد نظر پررنگ‌تر شده است. به این ترتیب محدوده‌ی تغییرات $\sin x$ (یا همان برد تابع) نیز مشخص شده است. با توجه به این‌که $\sin(\frac{\pi}{۳}) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و $\sin(\frac{۵\pi}{۶}) = \frac{۱}{۲}$، در این فاصله داریم:

$$\frac{۱}{۲} \le \sin x \le ۱$$

. پس باید نامعادله‌ی $\frac{۱}{۲} \le \frac{۳-m^۲}{۳+m^۲} \le ۱$ را حل کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{۱}{۲} \le \frac{۳-m^۲}{۳+m^۲} \Rightarrow \frac{۳-m^۲}{۳+m^۲} - \frac{۱}{۲} \ge ۰ \Rightarrow \frac{۳-۳m^۲}{۳+m^۲} \ge ۰ \xrightarrow{۳+m^۲>۰} ۳-۳m^۲ \ge ۰ \Rightarrow |m| \le ۱ \\ \frac{۳-m^۲}{۳+m^۲} \le ۱ \Rightarrow \frac{۳-m^۲}{۳+m^۲} - ۱ \le ۰ \Rightarrow \frac{-۲m^۲}{۳+m^۲} \le ۰ \xrightarrow{۳+m^۲>۰} -۲m^۲ \le ۰ \Rightarrow m \in R \end{array}\right\} \Rightarrow m \in [-۱, ۱]$$

ب) داریم: $\frac{\pi}{۲} \le ۲\alpha \le \frac{۳\pi}{۲}$. این فاصله را در نمودار تابع $y = \sin x$ پررنگ کرده‌ایم. بنابراین:



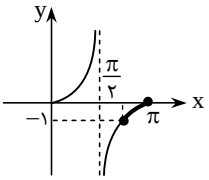
$$-۱ \le \sin ۲\alpha \le ۱ \Rightarrow |\frac{m}{۱+۲m}| \le ۱ \Rightarrow m^۲ \le ۴m^۲ + ۴m + ۱ \Rightarrow ۳m^۲ + ۴m + ۱ \ge ۰$$

$$\Rightarrow (m+۱)(۳m+۱) \ge ۰ \Rightarrow m \in R - (-۱, -\frac{۱}{۳})$$

تست (۲): **با فرض** $\frac{۳\pi}{۴} < \alpha < \pi$ **و** $\tan \alpha = \frac{۲}{m-۱}$**، حدود تغییرات** m **کدام است؟**

۱) $m < -۱$ **۲)** $m < ۱$ **۳)** $-۱ < m < ۱$ **۴)** $-۲ < m < ۲$

حل: با توجه به نمودار $y = \tan x$، در فاصله‌ی $\frac{۳\pi}{۴} < x < \pi$، داریم: $-۱ < y < ۰$. پس می‌توان نوشت:



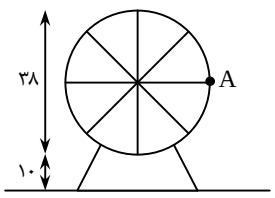
$$-۱ < \frac{۲}{m-۱} < ۰ \Rightarrow \begin{cases} \frac{۲}{m-۱} > -۱ \Rightarrow \frac{m+۱}{m-۱} > ۰ \Rightarrow m \in (-\infty, -۱) \cup (۱, +\infty) \\ \frac{۲}{m-۱} < ۰ \Rightarrow m \in (-\infty, ۱) \end{cases}$$

اشتراک دو جواب بالا برابر است با: $m \in (-\infty, -۱)$. بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

مدل‌سازی ریاضی با توابع مثلثاتی

بسیاری از حرکت‌ها و تغییرات تناوبی را می‌توانیم با توابع مثلثاتی مدل کنیم.

مسألهٔ (۶): **پایین‌ترین نقطه‌ی یک چرخ و فلک به قطر ۳۸ متر از سطح زمین ۱۰ متر فاصله دارد. این چرخ و فلک در هر ۸ دقیقه یک دور می‌زند. اگر در نخستین لحظه در نقطه‌ی A باشیم، با هر دور چرخش چرخ و فلک به نقطه‌ی A بازمی‌گردیم.**

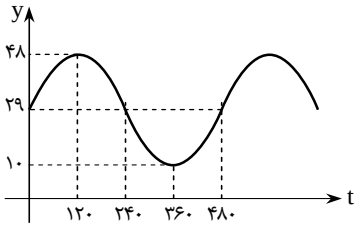


الف) اگر زاویه‌ی چرخش را به صورت تابعی از زمان نشان دهیم، دوره‌ی تناوب این تابع چقدر است؟

ب) اگر ارتفاع خود از سطح زمین را با $h(t)$ **(تابعی از زمان) نشان دهیم، ضابطه‌ی** $h(t)$ **را به‌دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.**

حل: الف) در هر $۴۸۰ = ۶۰ \times ۸$ ثانیه، ۲π رادیان دور می‌زنیم. پس دوره‌ی تناوب $\frac{۲\pi}{۴۸۰} = \frac{\pi}{۲۴۰}$ می‌شود.

ب) بیش‌ترین ارتفاع ۳۸ و کم‌ترین ۱۰ است. در لحظه‌ی اول نیز در ارتفاع ۲۹ متری هستیم. به این ترتیب نمودار تابع به شکل روبه‌رو می‌شود (هر ربع حرکت در ۲ دقیقه یا ۱۲۰ ثانیه طی می‌شود). می‌توانیم قرار دهیم $h(t) = a\sin bt + c$، پس $a + c = ۴۸$ و $-a + c = ۱۰$، یعنی $c = ۲۹$ و $a = ۱۹$. همچنین با توجه به دوره‌ی تناوب تابع، داریم $\frac{۲\pi}{b} = ۴۸۰$، پس $b = \frac{\pi}{۲۴۰}$. به این ترتیب نتیجه می‌گیریم:



$$h(t) = ۱۹\sin(\frac{\pi}{۲۴۰}t) + ۲۹$$

تمرین‌های بخش ۳-۱

۱- **هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.**

الف) $$\frac{\sin ۶۰^\circ \cos ۶۰^\circ \tan ۶۰^\circ \csc ۶۰^\circ \sec ۶۰^\circ \cot ۶۰^\circ}{\sin ۸۰^\circ \cos ۸۰^\circ \tan ۸۰^\circ \csc ۸۰^\circ \sec ۸۰^\circ \cot ۸۰^\circ} = ۱$$

ب) $$\sin ۲۴۰^\circ + \sin ۲۱۰^\circ + \sin ۱۸۰^\circ + \sin ۱۵۰^\circ + \sin ۱۲۰^\circ + \sin ۹۰^\circ = ۱$$

۲- **حاصل هریک از عبارات زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.**

الف) $$A = \cos(a + ۳\pi)\sin(a + \frac{\pi}{۲}) + \tan(a - ۵\pi)\cot(a + ۷\pi)$$

ب) $$B = \frac{\log_a(\tan ۱^\circ) + \log_a(\tan ۲^\circ) + \cdots + \log_a(\tan ۸۹^\circ)}{۱ + \log_a(\tan ۱^\circ) \times \log_a(\tan ۲^\circ) \times \cdots \times \log_a(\tan ۸۹^\circ)}$$

۳- **هریک از اتحادهای زیر را ثابت کنید.**

الف) $$(x\sin\theta - y\cos\theta)^۲ + (x\cos\theta + y\sin\theta)^۲ = x^۲ + y^۲$$

ب) $$(r\sin\theta\cos\varphi)^۲ + (r\sin\theta\sin\varphi)^۲ + (r\cos\theta)^۲ = r^۲$$

پ) $$\sin x\cos x(۱ + \tan x)(۱ + \cot x) = (\sin x + \cos x)^۲$$

ت) $$\sec^۴ x - \sec^۲ x = \tan^۴ x + \tan^۲ x$$

ث) $$(\sin^۶ x + \cos^۶ x - ۱)^۳ = ۲۷\sin^۶ x\cos^۶ x$$

ج) $$\frac{۱}{\sin^۴ x} + \frac{۱}{\tan^۴ x} = ۱ + ۲\cot^۲ x + ۲\cot^۴ x$$

۴- **هریک از اتحادهای زیر را ثابت کنید.**

الف) $$\sqrt{\frac{۱+\sin x}{۱-\sin x}} - \sqrt{\frac{۱-\sin x}{۱+\sin x}} = ۲\tan x \quad (۰ < x < \frac{\pi}{۲} \text{ برای})$$

ب) $$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} + \frac{۲\cos^۲ x - ۱}{\cos^۲ x(۱ - \tan^۲ x)} = \frac{۲\tan x}{\tan x - ۱}$$

* پ) $$\frac{۱ - \cos\alpha}{(۱ + \tan^۲\alpha)^۲} = \frac{۱}{(۱ + \cos\alpha)(۳ + \cot^۲\alpha + ۳\tan^۲\alpha + \tan^۴\alpha)}$$

۵- **اگر** $\tan\alpha = \frac{۲}{۳}$، **حاصل** $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{۲}) + \sin(۳\pi + \alpha)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ **را به‌دست آورید.**

۶- اگر $\begin{cases}\tan x+\tan y=۳\\ \cot x+\cot y=۵\end{cases}$، آن‌گاه حاصل $\frac{\tan x}{\tan y}+\frac{\cot x}{\cot y}$ را به‌دست آورید.

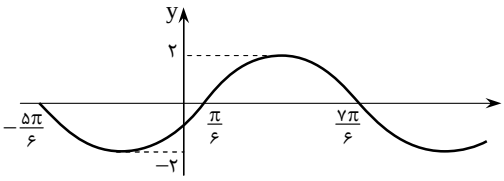
۷- با فرض $\tan(\frac{\pi}{۱۳۸۶})\sqcup ۰/۰۰۲$، حاصل $\frac{۱}{۱+\cot(\frac{\pi}{۱۳۸۶})}+\frac{۱}{۱+\tan(\frac{\pi}{۱۳۸۶})}$ را به‌دست آورید.

۸- مقدار m را چنان بیابید که تابع زیر، تابعی ثابت باشد.

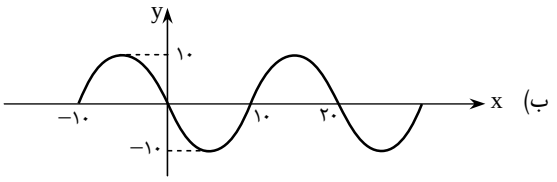
$$F(x)=\sin^۶ x+\cos^۶ x+m(\sin^۴ x+\cos^۴ x)$$

۹- در شکل‌های زیر نمودار چند تابع مثلثاتی رسم شده است. ضابطه‌ی آن‌ها را به‌دست آورید. (مقیاس‌های روی محورها برابر نیستند!)

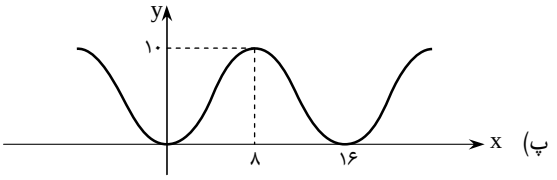
الف)



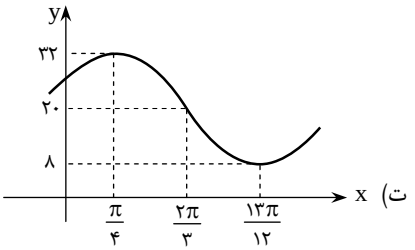
ب)



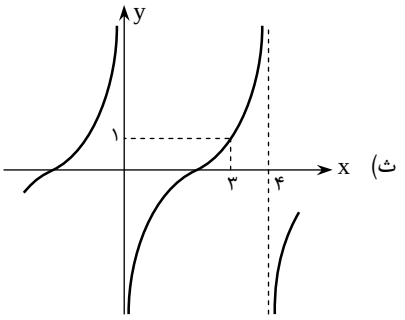
پ)



ت)



ث)



۱۰- اگر $x\in(-\frac{\pi}{۶},\pi)$ و $\sin x=\frac{۴-m}{m+۱}$، محدوده‌ی تغییرات m را به‌دست آورید.

۱۱- اگر $\alpha\in(-\frac{\pi}{۴},\frac{\pi}{۳})$ و $۲m\cos ۲\alpha-۱=m$، محدوده‌ی تغییرات m را به‌دست آورید.

۱۲- اگر $x\in(\frac{\pi}{۴},\frac{۳\pi}{۴})$، برد توابع $y=\tan x$ ، $y=\cot x$ ، $y=۲\cos ۳x-۱$ و $y=\pi\sin(-x+\frac{\pi}{۴})$ را به‌دست آورید.

۱۳- عمق آب در یک منطقه‌ی دریایی در ساعات مختلف شبانه روز مطابق جدول زیر تغییر می‌کند:

زمان (ساعت)	۰	۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲
عمق (متر)	۳/۱	۷/۸	۱۱/۳	۱۰/۹	۶/۶	۱/۷	۰/۹

می‌دانیم بیش‌ترین و کم‌ترین عمق آب را یادداشت کرده‌ایم. همچنین می‌دانیم روند تغییر عمق متناوب با مدلی مثلثاتی است.

الف) اگر عمق آب را بر حسب زمان به صورت تابع $h(t)$ بیان کنیم، دوره‌ی تناوب و ضابطه‌ی $h(t)$ را بیابید.

ب) اگر یک قایق برای حرکت در این منطقه به حداقل عمق ۱۰ متر آب نیاز داشته باشد، در چه ساعت‌هایی از شبانه‌روز می‌تواند در این منطقه حرکت کند؟

دانلود از سایت ریاضی سرا
WWW.RIAZISARA.IR