



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

فصل اول: محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات (4 نمره)

دنباله‌های حسابی و هندسی

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

مجموع جملات دنباله‌های هندسی:

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

حد جملات دنباله‌ی هندسی:

در این دنباله‌ها $|q| < 1$ و $n \rightarrow \infty$

به زبان ساده‌تر: تعداد جملات بسیار زیاد است و قدر نسبت بین $+1$ و -1 است.

$$S = \frac{a}{1-q}$$

1- در دنباله‌ی حسابی $3, 9, 15, \dots$ حداقل چند جمله‌ای آن را باید جمع کنیم تا از 300 بیشتر شود؟ (دی 93)

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$S_n > 300 \Rightarrow \frac{n}{2}(6 + 6(n-1)) > 300 \Rightarrow 3n^2 > 300 \Rightarrow n^2 > 100 \Rightarrow n > 10 \rightarrow n = 11$$

2- در دنباله‌ی حسابی زیر، مجموع بیست جمله‌ی اول دنباله را بیابید. (شهریور 92)

$-5, 0, 5, \dots$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) \Rightarrow S_{20} = 10(-10 + 19 \times 5) = 850$$

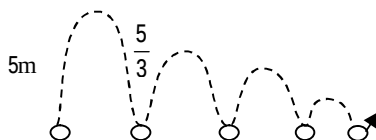
3- توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه‌ی $\frac{1}{3}$ ارتفاع اولیه‌ی خود بالا می‌رود. فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع 5 متری برسد. می‌خواهیم بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن این توپ چه قدر مسافت طی می‌کند؟ (خرداد 90)

ارتفاع توپ قبل از n امین برخورد با زمین را A_n می‌نامیم. در این صورت:

$$A_1 = 5, A_2 = \frac{5}{3}, A_3 = \frac{5}{9}, \dots$$

از طرفی مسافت طی شده توسط توپ بین دو برخورد متوالی، 2 برابر ارتفاع آن از سطح زمین است. بنابراین مسافت طی شده توسط توپ برابر است با:

$$S = 10 + \frac{10}{3} + \frac{10}{9} + \dots \xrightarrow{S = \frac{a}{1-q}} S = \frac{10}{1 - \frac{1}{3}} = 15$$



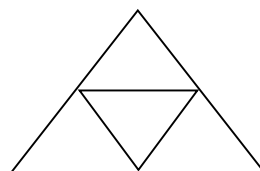
4- مجموع چند جمله‌ی اول از دنباله‌ی هندسی $6, -12, 24, \dots$ برابر 126- خواهد شد؟ (خرداد 90)

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow \frac{6(1-(-2)^n)}{1-(-2)} = -126 \Rightarrow 1-(-2)^n = -63 \Rightarrow (-2)^n = 64 = -(-2)^6 \Rightarrow n = 6$$

5- یک مثلث با محیط P در نظر بگیرید. وسط‌های اضلاع آن را به هم وصل کنید و مثلث کوچک‌تر جدیدی بسازید. این عمل را مجدداً روی مثلث کوچک‌تر انجام دهید و همین‌طور به طور متوالی این کار را تکرار کنید. مجموع محیط مثلث‌های به دست آمده چقدر است؟ (خرداد 94)

دنباله محیط مثلث‌ها $P, \frac{1}{2}P, \frac{1}{4}P, \dots$

$$q = \frac{1}{2} \rightarrow S_p = \frac{P}{1 - \frac{1}{2}} = 2P$$



6- طول ضلع مربعی 1 متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم سپس نیمی از مساحت باقی مانده را رنگ می‌کنیم به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌کنیم. پس از چند مرحله حداقل 99 درصد از سطح مربع رنگ شده است؟ (دی 94)

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{100} \rightarrow 2^n \geq 100 \rightarrow n = 7 \quad S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}(1-(\frac{1}{2})^n)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq \frac{99}{100} \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \dots$$

7- مجموع $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ برابر با چند است؟ (شهریور 94)

بخش پذیری

1- مقدار m را چنان بیابید که چند جمله‌ای $P(x) = 2x^3 - mx^2 + 2x + 1$ بر $2x + 1$ بخش پذیر باشد. (خرداد 93)

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - m\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}m - 1 + 1 = 0 \Rightarrow m = -1$$

2- اگر باقی مانده‌ی تقسیم چند جمله‌ای $P(x) = 2x^4 + mx + 2$ بر $x + 1$ برابر 2 باشد، باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x - 1$ را بیابید. (دی 92)

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow P(-1) = 2 \Rightarrow 2(-1)^4 + m(-1) + 2 = 2 \Rightarrow 2 - m = 0 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow P(x) = 2x^4 + 2x + 2$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow R = P(1) = 2(1)^4 + 2(1) + 2 = 6$$

3- $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه 2 است و ضریب بزرگ‌ترین توان آن 1 است. $P(x)$ را به گونه‌ای تعیین کنید که در شرایط روبه‌رو صدق کند. (خرداد 92)

$$P(1) = 1, P(2) = 3$$

چون $P(x)$ چند جمله‌ای درجه 2 است و ضریب بزرگ‌ترین توان آن 1 است، پس به صورت $P(x) = x^2 + ax + b$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} P(1) = 1 + a + b = 1 \\ P(2) = 4 + 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - b = 0 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 1 \Rightarrow P(x) = x^2 - x + 1$$

4- باقی مانده‌ی تقسیم $P(x) = 5x^3 + 2x^2 - x + 4$ بر $x + 1$ را بدست آورید. (خرداد 94)

5- اگر چند جمله‌ای $5x^2 - 5x + m - 7$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد مقدار m را بدست آورید (دی 94)

بسط دو جمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

$$a_k = \binom{n}{k-1}a^{n-(k-1)}b^{k-1}$$

جمله‌ای k ام در بسط دو جمله‌ای به صورت زیر می‌باشد:

تذکر: $k-1$ هم در ضریب جمله‌ی k ام ظاهر می‌شود $\left(\binom{n}{k-1}\right)$ و هم در توان b هم‌چنین در هر جمله مجموع توان‌های a و b برابر n است.

$$a = \binom{5}{2}x^3\left(\frac{2}{x}\right)^2 = \frac{5 \times 4}{2}x^3\left(\frac{4}{x^2}\right) = 40x$$

1- جمله‌ی سوم بسط $\left(x + \frac{2}{x}\right)^5$ را بنویسید. (دی 93)

$$\binom{n}{2} = \frac{n \times (n-1)}{2} \quad \text{تذکر:}$$

2- حاصل عبارت $(x-2)^4$ را به دست آورید. (شهریور 93)

$$\begin{aligned}(x-2)^4 &= x^4 - \binom{4}{1}x^3(2) + \binom{4}{2}x^2(2)^2 - \binom{4}{3}x(2)^3 + \binom{4}{4}(2)^4 = x^4 - 4x^3(2) + 6x^2(4) - 4x(8) + 16 \\ &= x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16\end{aligned}$$

3- جمله‌ی سوم از بسط $(2x-1)^2$ برابر است با (شهریور 92)

$$a_2 = \binom{7}{2}(2x)^5(-1)^2 = \frac{7 \times 6}{2}(32x^5) = 672x^5$$

4- مجموع ضرایب بسط دو جمله‌ای $(3x-1)^6$ را بدست آورید. (خرداد 94)

5- کدام جمله از بسط $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ مستقل از x است؟ (تالیفی)

ابتدا جمله $(k+1)$ ام بسط را می‌نویسیم. سپس توان متغیر x را به دست می‌آوریم و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\binom{10}{k}(\sqrt{x})^{10-k}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k \rightarrow x^{\frac{10-k}{2}} \times x^{-\frac{k}{2}} = x^{\frac{10-2k}{2}} = x^{5-k}$$

در جمله مستقل از x ، توان x برابر صفر است. پس $k=5$ می‌باشد، بنابراین جمله ششم مستقل از x است.

6- مقدار x را بیابید بطوریکه چهارمین جمله بسط $(x + \frac{1}{\sqrt[3]{x}})^6$ برابر 5 باشد. (تالیفی)

$$k+1=4 \Rightarrow k=3$$

$$\Rightarrow \text{جمله عمومی بسط} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \Rightarrow \binom{6}{3} x^3 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 = 20x^2 \Rightarrow 20x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک:

برای به دست آوردن ب.م.م چند عدد، آن‌ها را تجزیه می‌کنیم، سپس حاصل ضرب عوامل مشترک با کوچک‌ترین توان را به عنوان ب.م.م محاسبه می‌کنیم.

برای به دست آوردن ک.م.م چند عدد، حاصل ضرب همه‌ی عوامل با توان بزرگ‌تر را محاسبه می‌کنیم.

برای به دست آوردن ب.م.م چند جمله‌ای‌ها، آن‌ها را تجزیه کرده، حاصل ضرب عوامل مشترک با کوچک‌ترین توان را به دست می‌آوریم.

برای به دست آوردن ک.م.م چند جمله‌ای‌ها، آن‌ها را تجزیه کرده، حاصل ضرب همه‌ی عوامل با توان بزرگ‌تر را در نظر می‌گیریم.

1- سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلف زده می‌شود. اولین زنگ هر 18 دقیقه یک بار، دومین زنگ هر 24 دقیقه یک بار و سومین زنگ هر 32 دقیقه یک بار زده می‌شود. بعد از اولین بار که هر سه زنگ با هم زده شوند، حداقل چند دقیقه باید بگذرد تا آن‌ها دوباره با هم زده شوند؟ (شهریور 93)

$$\text{باید ک.م.م این اعداد را به دست آوریم: } 18 = 2 \times 3^2, 24 = 2^3 \times 3, 32 = 2^5 \Rightarrow \text{ک.م.م} = 2^5 \times 3^2 = 288$$

2- 144 لیتر آب‌میوه، 45 لیتر شیر و 63 لیتر دوغ در شیشه‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی شده‌اند. حداقل تعداد شیشه‌ها را بیابید. (گنجایش شیشه‌ها را برحسب لیتر، عدد طبیعی فرض کنید.) (خرداد 91)

برای به دست آوردن حداقل تعداد شیشه، باید حداکثر مقدار گنجایش شیشه‌ها را در نظر بگیریم. برای این کار ب.م.م اعداد را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{تعداد شیشه‌ها} = 28 = 16 + 5 + 7 = \frac{144}{9} + \frac{45}{9} + \frac{63}{9} = 3^2 = 9 = \text{ب.م.م} \Rightarrow 63 = 3^2 \times 7, 45 = 3^2 \times 5, 144 = 3^2 \times 2^4$$

3- حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید. (تالیفی)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2+2x+1} - \frac{2}{x+1} &= \frac{1}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2+2x+1} - \frac{2}{x+1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{2x}{(x+1)^2} - \frac{2}{x+1} = \frac{x+1+2x^2-2x-2x^2+2}{(x-1)(x+1)^2} \\ &= \frac{-x+3}{(x-1)(x+1)^2} \end{aligned}$$

4- ک.م.م دو عبارت $8b^3$ و $16ab^2$ را بدست آورید. (شهریور 94)

5- حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید. (دی 94)

$$\frac{a+5}{a-1} - \frac{6}{a^2+a+1} - \frac{6(a^2+2)}{a^3-1}$$

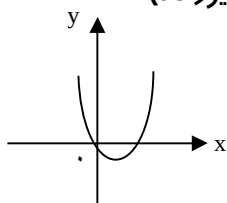
$$\frac{a+5}{a-1} - \frac{6}{a^2+a+1} - \frac{6(a^2+2)}{(a-1)(a^2+a+1)} = \frac{(a+5)(a^2+a+1) - 6(a-1) - 6a^2 - 12}{(a-1)(a^2+a+1)} =$$

$$\frac{a^3-1}{(a-1)(a^2+a+1)} = 1$$

توابع درجه دوم

در نمودار تابع درجه دوم، اگر سهمی رو به بالا باشد، $a > 0$ و اگر رو به پایین باشد $a < 0$ است. همچنین محل برخورد نمودار با محور y مقدار c را نشان می‌دهد. بنابراین اگر نمودار در قسمت مثبت محور y را قطع کند، $c > 0$ و اگر زیر محور x نمودار را قطع کند، $c < 0$ و اگر نمودار از مبدأ بگذرد، $c = 0$ است. با توجه به طول رأس سهمی و علامت a می‌توان علامت b را تعیین کرد. توجه کنید که مختصات طول رأس سهمی از رابطه‌ی $x = -\frac{b}{2a}$ به دست می‌آید.

1- شکل زیر نمودار تابع $P(x) = ax^2 + bx + c$ است. الف) علامت a و b را تعیین کنید. ب) مقدار c را بیابید. (شهریور 93)



سهمی رو به بالا است، پس $a > 0$ ، طول رأس سهمی مثبت است پس $-\frac{b}{2a} > 0$ است و چون $a > 0$ ، پس $b < 0$ است. سهمی از مبدأ می‌گذرد، پس $c = 0$.

2- آیا در معادله‌ی $x^2 - y^2 = 1$ ، y را می‌توان به صورت تابعی از x مشخص کرد؟ برای پاسخ خود، دلیل بیاورید. (شهریور 93)

$$y^2 = x^2 - 1 \Rightarrow y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

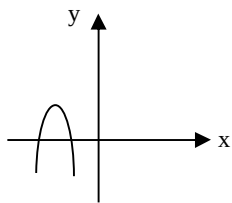
راه حل اول: خیر؛ زیرا

بنابراین برای یک مقدار x دو مقدار برای y به دست می‌آید.

راه حل دوم: خیر؛ به ازای $x = 2$ ، دو مقدار $\pm \sqrt{3}$ برای y به دست می‌آید.

3- در شکل زیر سهمی به معادله $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است.

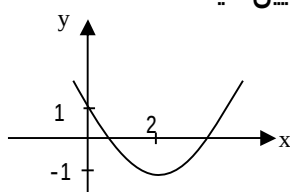
علامت ضرایب a و b و c و تعداد جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید. (خرداد 92)



سهمی رو به پایین است، پس $a < 0$ ، طول رأس سهمی منفی است پس $-\frac{b}{2a} < 0$ و چون $a < 0$ است، پس $b < 0$

باید باشد. سهمی در پایین محور x ها، محور y ها را قطع می‌کند، پس $c < 0$. هم‌چنین تعداد جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ برابر تعداد نقاط برخورد نمودار با محور x ها است که در این جا 2 است.

4- در شکل زیر نمودار سهمی به معادله $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. ضرایب a و b و c را تعیین کنید.



با توجه به نمودار، سهمی از نقاط $(0, 1)$ و $(2, -1)$ گذشته و طول رأس آن برابر 2 می‌باشد، پس داریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(0) = 1 \Rightarrow c = 1 \\ P(2) = -1 \xrightarrow{c=1} 4a + 2b + 1 = -1 \Rightarrow 4a + 2b = -2 \\ x_{\text{رأس}} = -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow -b = 4a \end{array} \right\} \Rightarrow -b + 2b = -2 \Rightarrow b = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

روابط بین ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، در این صورت حاصل جمع ریشه‌ها برابر $S = -\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب آنها $P = \frac{c}{a}$ می‌باشد. هم‌چنین اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را داشته باشیم، معادله‌ای که ریشه‌های آن α و β باشد، به صورت روبه‌رو می‌باشد: $x^2 - Sx + P = 0$

1- اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشد، معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن 2α و 2β باشد. (دی 93)

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{5}{4} \\ \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = -\frac{5}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = 2 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{2} \\ P = 2\alpha \times 2\beta = 4(\alpha\beta) = 4 \left(-\frac{5}{4} \right) = -5 \end{array} \right. \Rightarrow x^2 - \left(\frac{5}{2} \right)x - 5 = 0$$

2- معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $1 \pm \sqrt{5}$ باشد (تألیفی)

$$S = (1 + \sqrt{5}) + (1 - \sqrt{5}) = 2, P = (1 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{5}) = 1 - 5 = -4$$

$$\Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$

3- معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن عکس ریشه‌های معادله درجه دوم $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشد. (تألیفی)

اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشند می‌توانیم بنویسیم:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{5}{4}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{5}{4}$$

ریشه‌های معادله خواسته شده به صورت $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ هستند، بنابراین:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{\frac{5}{4}}{-\frac{5}{4}} = -1 \\ P &= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{-\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 + x - \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow 5x^2 + 5x - 4 = 0$$

4- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3mx + 4 = 0$ باشند، m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم: $\alpha\beta^2 + 4 = 0$ (خرداد 89)

$$\left. \begin{aligned} \alpha\beta^2 + 4 &= (\alpha\beta)\beta + 4 = 0 \\ P &= 4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4\beta + 4 = 0 \Rightarrow \beta = -1$$

$$\beta = -1 \Rightarrow 1 + 3m + 4 = 0 \Rightarrow m = -\frac{5}{3}$$

ریشه‌های معادله است

5- α و β ریشه‌های معادله $x^2 - \sqrt{2}x - 3 = 0$ می‌باشند. بدون حل معادله، مقدار عددی عبارت $\frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \beta^2}$ را محاسبه کنید. (خرداد 85)

$$\left\{ \begin{aligned} S &= \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \sqrt{2} \\ P &= \alpha\beta = \frac{c}{a} = -3 \end{aligned} \right. \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha + \beta}{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta} = \frac{S}{S^2 - 2P} = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2 - 2(-3)} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

6- در معادله‌ی درجه‌ دوم $4x^2 - 16x + m = 0$ یکی از ریشه‌های دو واحد بیش‌تر از ریشه‌ی دیگر است. مقدار m و هر دو ریشه‌ی معادله را بیابید. (خرداد 87)

اگر α و β دو ریشه‌ی معادله‌ی مذکور باشند داریم:

$$\begin{cases} \alpha = \beta + 2 \\ \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 3, \beta = 1 \xrightarrow{\alpha\beta = \frac{m}{4}} 3 \times 1 = \frac{m}{4} = m = 12$$

7- بدون حل معادله و با استفاده از Δ و P و علامت جواب‌های معادله $x^2 + x - 5 = 0$ بحث کنید. (شهریور 94)

$\Delta = 21 > 0$ ریشه مختلف علامت $P = -5 < 0$ و 2 ریشه دارد

$S = -1 < 0$ ریشه بزرگتر منفی

8- در معادله‌ی $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب‌ها دو واحد از جواب دیگر بزرگ‌تر باشد، m و هر دو جواب را پیدا کنید. (دی 92)

$$\alpha = \beta + 2, S = -\frac{b}{a} = \frac{8}{2} = 4 \Rightarrow \alpha + \beta = 4 \Rightarrow \beta + 2 + \beta = 4 \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$P = \frac{c}{a} \Rightarrow \alpha.\beta = \frac{m}{2} \Rightarrow 3 = \frac{m}{2} \Rightarrow m = 6$$

9- محیط یک زمین مستطیل شکل 18 متر و مساحت آن 14 مترمربع است. اندازه‌ی طول و عرض این زمین را تعیین کنید. (خرداد 93)

معادله‌ی درجه دومی می‌یابیم که جواب‌هایش طول و عرض مستطیل باشد:

$$\begin{cases} 2(\alpha + \beta) = 18 \Rightarrow \alpha + \beta = 9 \\ \alpha\beta = 14 \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 7$$

بنابراین طول مستطیل برابر 7 و عرض آن برابر 2 است.

10- اگر جمع دو عدد $\frac{3}{5}$ و حاصل ضربشان $-\frac{2}{5}$ باشد، آن دو عدد را بیابید. (خرداد 92 خارج از کشور)

$$S = \alpha + \beta = \frac{3}{5}, P = \alpha.\beta = -\frac{2}{5}$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{2}{5} = 0 \Rightarrow 5x^2 - 3x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرب=0}} \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{c}{a} = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

تذکر: اگر در معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، مجموع ضرایب برابر صفر باشد، یعنی $a + b + c = 0$ ، یکی از ریشه‌ها برابر 1 و دیگری برابر $\frac{c}{a}$ است و اگر $a + c = b$ باشد، یکی از ریشه‌ها برابر -1 و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

ماکزیم و مینیم توابع درجه دوم

تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ در حالت $a > 0$ به کم‌ترین مقدار و در حالت $a < 0$ به بیشترین مقدار خود می‌رسد.

1- اگر با 100 متر نرده بخواهیم یک زمین مستطیل شکل را محصور کنیم، بیشترین مساحت ممکن چه قدر است؟ (خرداد 90 خارج از کشور)

$$2(x + y) = 100 \Rightarrow x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x$$

$$S = xy = x(50 - x) \Rightarrow S(x) = 50x - x^2 \Rightarrow x_{\max} = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{-2} = 25 \Rightarrow S_{\max} = S(25) = 50(25) - 25^2 = 625$$

2- بیشترین مقدار تابع $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ را تعیین کنید. (دی 90)

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow y_{\max} = f(2) = -4 + 8 + 1 = 5$$

3- موشکی از سکوی پرتاب، با معادله‌ی $f(t) = -t^2 + 20t$ پرتاب می‌شود. این موشک در چه زمانی به اوج خود می‌رسد؟ (تالیفی)

$$t = \frac{-b}{2a} \Rightarrow t = \frac{-20}{2(-1)} = 10$$

واضح است که نقطه‌ی ماکزیم سهمی مورد سوال است. بنابراین:

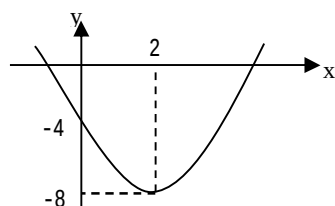
4- تابع f با ضابطه‌ی $f = \{(x, y) \mid x^2 - 4x - y - 4 = 0\}$ مفروض است. مقدار مینیم تابع f را تعیین کنید. (نهایی - 86)

نقاط تشکیل دهنده‌ی تابع f در واقع نقاط روی سهمی به معادله‌ی $y = x^2 - 4x - 4$ می‌باشند. لذا برای حل مسئله از دو روش زیر استفاده می‌کنیم:

$$F_{\min} = y_{\min} = \frac{4ac - b^2}{4a} \Rightarrow y = \frac{4 \times 1 \times (-4) - (-4)^2}{4 \times 1} = -8$$

روش اول از فرمول مختصات رأس سهمی $S = \left[\begin{array}{c} -\frac{b}{2a} \\ \frac{4ac - b^2}{4a} \end{array} \right]$ استفاده می‌کنیم.

روش دوم:

نمودار تابع را رسم می کنیم. با توجه به شکل، مقدار می نیمم تابع f برابر 8- خواهد بود.

5- با صد متر طناب بیشترین مساحتی که می توان از یک زمین مستطیل شکل و در کنار دریا بدست آورد را محاسبه کنید (تالیفی)

6- کم ترین مقدار تابع $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$ را بدست آورید. (نهایی - 94)

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

قدر مطلق

1- با فرض آن که a و b دو عدد حقیقی باشند، نشان دهید: $|ab| = |a||b|$. (دی 91)

$$|ab| = \sqrt{a^2 b^2} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b^2} = |a||b|$$

2- برای هر دو عدد حقیقی ثابت کنید: $|a + b| \leq |a| + |b|$ (خرداد 90)

$$\left. \begin{array}{l} -|a| \leq a \leq |a| \\ -|b| \leq b \leq |b| \end{array} \right\} \Rightarrow -(a + |b|) \leq a + b \leq (a + |b|) \Rightarrow |a + b| \leq |a| + |b|$$

حل معادله و نامعادله به روش جبری

1- معادله $(x^2 - 1)^4 + (x^2 - 1)^2 - 2 = 0$ را حل کنید. (شهریور 92)از تغییر متغیر $t = (x^2 - 1)^2$ استفاده می کنیم:

$$t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow (t + 2)(t - 1) = 0 \Rightarrow t = -2, t = 1 \Rightarrow \begin{cases} (x^2 - 1)^2 = -2 \text{ ندارد جواب} \\ (x^2 - 1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \\ x^2 - 1 = -1 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

2- جاهای خالی را با عدد یا عبارت ریاضی مناسب پر کنید. الف) جواب‌های معادله $|x+1|=4$ برابر با و است.

ب) مجموعه‌ی جواب نامعادله $|2x-1| \leq 7$ بازه‌ی است. (دی 93)

$$\text{الف) } |x+1|=4 \Rightarrow \begin{cases} x+1=4 \Rightarrow x=3 \\ x+1=-4 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$

$$\text{ب) } |2x-1| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq 2x-1 \leq 7 \Rightarrow -6 \leq 2x \leq 8 \Rightarrow -3 \leq x \leq 4 \Rightarrow \text{مجموعه جواب} = [-3, 4]$$

3- معادله‌ی $||x|-2|=3$ را حل کنید. (شهریور 93)

$$||x|-2|=3 \Rightarrow \begin{cases} |x|-2=3 \Rightarrow |x|=5 \Rightarrow x=\pm 5 \\ |x|-2=-3 \Rightarrow |x|=-1 \text{ جواب ندارد} \end{cases}$$

4- جواب معادله‌ی $\sqrt{2-x^2}=x$ برابر می‌باشد. (خرداد 93)

$$\sqrt{2-x^2}=x \Rightarrow 2-x^2=x^2 \Rightarrow 2x^2=2 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$

دقت کنید که جواب‌های معادله را در پایان در معادله قرار می‌دهیم تا جواب‌های قابل قبول مشخص شود.

5- معادله $\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$ را حل کنید. (خرداد 94)

$$\frac{5(x-2)-4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2} \rightarrow 5x-14 = x^2-4x \rightarrow x^2-9x+14=0 \rightarrow \begin{cases} x=2 \text{ غ ق} \\ x=7 \end{cases}$$

6- معادله رادیکالی $2+\sqrt{1+x}=x-3$ را حل کنید. (شهریور 94)

$$\sqrt{1+x}=x-5 \Rightarrow 1+x=x^2-10x+25 \Rightarrow x^2-11x+24=0 \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=3 \text{ غ ق} \end{cases}$$

7- مجموعه جواب معادله $x + \sqrt{x} = 6$ برابر است با (خرداد 92)

$$x + \sqrt{x} = 6 \Rightarrow \sqrt{x} = 6 - x \Rightarrow x = 36 + x^2 - 12x \Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 & \text{قابل قبول} \\ x=9 & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

با جایگذاری جواب‌ها در معادله جواب‌های قابل قبول را مشخص کرده‌ایم.

$$\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-1} \leq 1$$

8- نامعادله‌ی زیر را به روش جبری حل کنید. (خرداد 92 خارج از کشور)

$$\frac{x+1}{x} - \frac{x}{x-1} \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2-x} - \frac{x^2}{x^2-x} \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{x^2-x} \leq 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{x^2-x} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-x+1}{x^2-x} \geq 0$$

$$\Rightarrow x < 0 \text{ یا } x > 1 \Rightarrow \text{مجموعه جواب } (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$$

x	0	1
$x^2 - x + 1$	+	+
$x^2 - x$	0	0
$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x}$	+	+

تذکره: Δ در عبارت $x^2 - x + 1$ منفی است. بنابراین این عبارت ریشه ندارد و علامت آن همواره موافق علامت ضریب x^2 یعنی مثبت است.

9- معادله‌ی $\sqrt{2x+1} = 1 + \sqrt{2x-4}$ را حل کنید. (خرداد 91 خارج از کشور)

$$\sqrt{2x+1} = 1 + \sqrt{2x-4} \Rightarrow 2x+1 = 1 + 2x-4 + 2\sqrt{2x-4} \Rightarrow 4 = 2\sqrt{2x-4} \Rightarrow \sqrt{2x-4} = 2 \Rightarrow 2x-4 = 4 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4 \text{ قابل قبول}$$

10- جواب نامعادله‌ی $\sqrt{x+\sqrt{x-2}} - \sqrt{2x-2} = 0$ را به دست آورید. (خرداد 90 خارج از کشور)

$$\sqrt{x+\sqrt{x-2}} = \sqrt{2x-2} \Rightarrow x + \sqrt{x-2} = 2x-2 \Rightarrow \sqrt{x-2} = x-2 \Rightarrow x-2 = (x-2)^2 \Rightarrow (x-2)^2 - (x-2) = 0 \Rightarrow (x-2)(x-2-1) = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 & \text{قابل قبول} \\ x=2 & \text{قابل قبول} \end{cases}$$

رسم نمودار

نمودار خطی: برای رسم یک خط، کافی است دو نقطه از تابع را به دست آورده و آن‌ها را به هم وصل و امتداد دهیم.

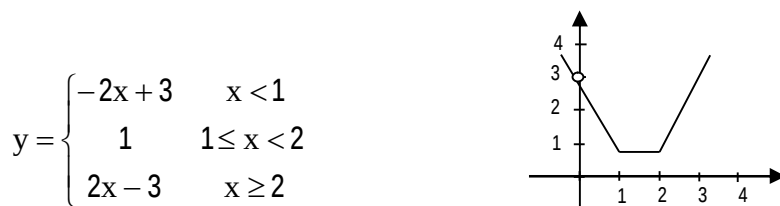
نمودار سهمی: برای رسم سهمی ابتدا طول رأس سهمی یعنی $x = -\frac{b}{2a}$ را به دست می‌آوریم. سپس 2 نقطه با طول کم‌تر و بیشتر از رأس را به تابع می‌دهیم و تابع را به کمک این 5 نقطه رسم می‌کنیم. (البته به کمک 3 نقطه (یعنی رأس، یک نقطه با طول کم‌تر از ریشه و یک نقطه با طول بیشتر از ریشه) نیز می‌توان نمودار را رسم کرد ولی با 5 نقطه دقیق‌تر رسم می‌شود).

نمودار توابع قدرمطلق: برای رسم توابع قدرمطلق، ابتدا به کمک ریشه‌های درون قدرمطلق و جدول تعیین علامت، تابع را چندضابطه‌ای می‌کنیم و سپس آن را رسم می‌کنیم. (البته در شرایطی می‌توان به کمک انتقال تابع $y = |x|$ نیز تابع را رسم کرد).

نمودار توابع رادیکالی: در توابع رادیکالی ابتدا به x ریشه عبارت زیر رادیکال را می‌دهیم تا عبارت زیر رادیکال صفر شود. سپس به x مقادیری می‌دهیم که عبارت زیر رادیکال مجذورهاها کامل 1 و 4 شود. در ادامه به کمک این نقاط نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

نمودار توابع چندضابطه‌ای: در توابع چند ضابطه‌ای، هر ضابطه را در محدوده‌ی داده شده رسم می‌کنیم. دقت کنید که حتماً نقطه‌ی مرزی جزء نقاطی است که به کمک آن‌ها تابع را رسم می‌کنیم. اگر این نقطه داخل ناحیه باشد، آن را توپر و اگر در ناحیه نباشد، آن را توخالی رسم می‌کنیم.

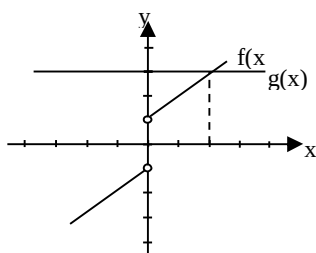
1- ابتدا ضابطه‌ی تابع $y = |x-1| + |2-x|$ را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید. سپس نمودار آن را رسم کنید. (خرداد 94)



حل معادله و نامعادله به روش هندسی

برای حل معادله و نامعادله به روش هندسی، نمودارهای مربوط به توابع دوطرف معادله یا نامعادله را رسم می‌کنیم و با توجه به نمودارها و موقعیت توابع نسبت به هم، معادله یا نامعادله را حل می‌کنیم. تذکر: در معادلات، نقاط برخورد دو نمودار جواب های معادله می‌باشند.

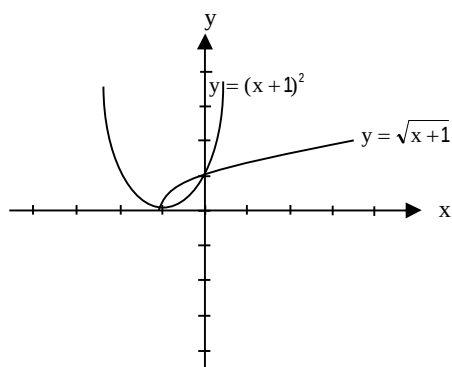
1- معادله‌ی $x + \frac{x}{|x|} = 3$ را به روش هندسی حل کنید. (خرداد 93)



$$f(x) = x + \frac{x}{|x|} = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l|l} x & y \\ \hline 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{array} \quad g(x) = 3$$

با توجه به نمودار جواب معادله $x = 2$ می‌باشد.

2- معادله $\sqrt{x+1} = x^2 + 2x + 1$ را به روش هندسی حل کرده و جواب آن را در صورت وجود به دست آورید. (دی 92)



$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$\frac{x}{y} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

جواب‌های معادله: $x = 0$ و $x = -1$

$$\frac{x}{y} \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

تذکر: در تابع $y = (x - \alpha)^2$ ریشه پراتنز یعنی $x = \alpha$ طول رأس سهمی می‌باشد.

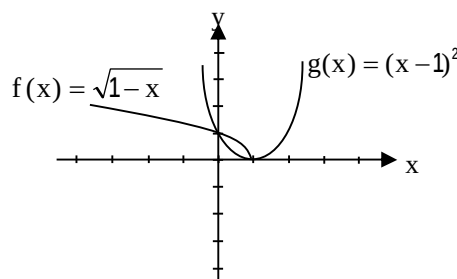
3- $\sqrt{1-x} - 1 = x^2 - 2x$ را به روش هندسی حل کنید. (خرداد 91)

$$\sqrt{1-x} - 1 = x^2 - 2x \Rightarrow \sqrt{1-x} = x^2 - 2x + 1$$

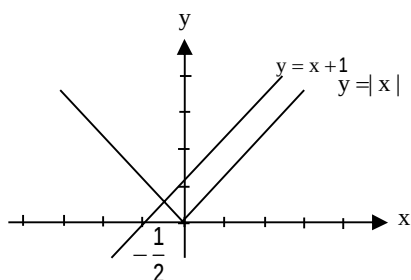
$$g(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

$$\frac{x}{y} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

جواب‌های معادله: $x = 0$ و $x = 1$

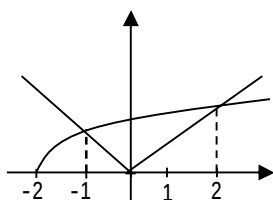


4- به روش هندسی نامعادله $|x| < x+1$ را حل کرده و مجموعه جواب را به صورت بازه نشان دهید. (شهریور 94)

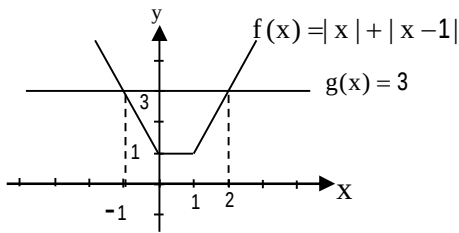


$$\text{جواب} = (-\infty, -\frac{1}{2})$$

5- به روش هندسی و جبری معادله $|x| = \sqrt{2+x}$ را حل نمایید. (دی 94)



$$x^2 = 2+x \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

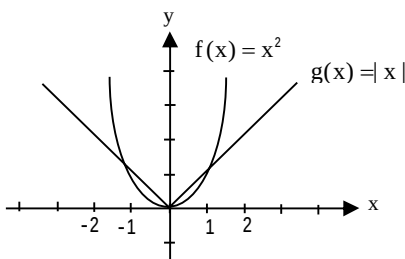


6- نامعادله $|x| + |x-1| \leq 3$ را با روش هندسی حل کنید. (خرداد 92)

$$g(x) = 3$$

$$\begin{array}{c|cc} x & 1 & 2 \\ \hline y & 1 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 1 \end{array} \quad f(x) = |x| + |x-1| = \begin{cases} x+x-1=2x-1 & x > 1 \\ x+1-x=1 & 0 \leq x \leq 1 \\ -x+1-x=-2x+1 & x < 0 \end{cases}$$

طول نقاط برخورد $x = -1$ و $x = 2$ می باشد و در بازه $[-1, 2]$ ، $f(x)$ زیر $g(x)$ قرار دارد و یا با آن مساوی است. پس در این بازه کم تر یا مساوی $g(x)$ می باشد و بنابراین جواب نامعادله بازه $[-1, 2]$ می باشد.

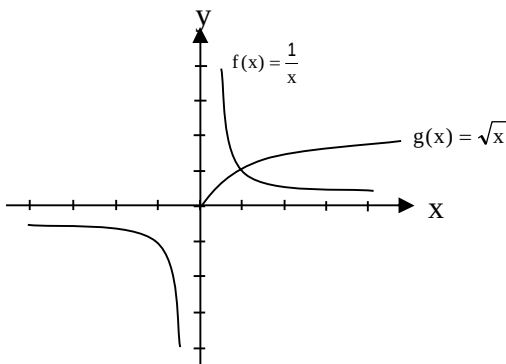


7- نامعادله $x^2 \leq |x|$ را به روش هندسی حل کنید. (شهریور 91)

$$\begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline y & 1 & 0 & 1 \end{array} \quad g(x) = |x| \quad \begin{array}{c|cccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 4 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \quad f(x) = x^2$$

در بازه $[-1, 1]$ نمودار $f(x) = x^2$ پایین تر یا مساوی نمودار $g(x) = |x|$ قرار دارد. بنابراین مجموعه جواب نامعادله $[-1, 1]$ است.

8- نامعادله $\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$ را به روش هندسی حل کنید و مجموعه جواب را به دست آورید. (شهریور 90)



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \sqrt{x} \quad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 4 \\ \hline y & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\frac{1}{x} = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = x \Rightarrow x^3 = 1 \rightarrow x = 1$$
 محل برخورد

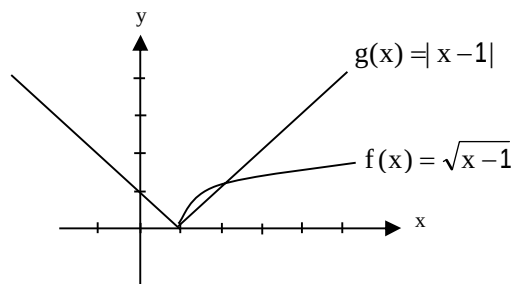
با توجه به نمودار، مجموعه جواب $[1, +\infty)$ می باشد.

تذکر: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ در کتاب درسی حسابان صفحه 38 آمده است با دادن نقاط مثبت و منفی آن را رسم می کنیم.

9- نامعادله $\sqrt{x-1} \leq |x-1|$ را با روش هندسی حل کنید. (خرداد 90)

$$f(x) = \sqrt{x-1} \quad \frac{x}{y} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$g(x) = |x-1| \quad \frac{x}{y} \overset{\text{ریشه}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}$$



همان‌طور که در نمودار مشاهده می‌شود، تابع $|x-1|$ در بازه $(2, +\infty)$ بالاتر از $\sqrt{x-1}$ است و در دو نقطه به طول‌های $x_1=1$ و $x_2=2$ با آن برخورد دارد. پس جواب نامعادله $\{1\} \cup [2, +\infty)$ می‌باشد.

خودآزمایی

1- در دنباله‌ی حسابی $1, 2, 5, \dots$ حداقل چند جمله آن را باید با هم جمع کنیم تا حاصل از 125 بیشتر شود؟

2- جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

الف) باقیمانده تقسیم $P(x) = x^3 - 6x - 4$ بر $x + 1$ برابر با است.

ب) ضریب جمله‌ی سوم در بسط $(a + b)^5$ ، است.

ج) کمترین مقدار تابع $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$ ، است.

3- معادله $\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2} - 1\right) - 2 = 0$ را حل کنید.

4- به روش هندسی نامعادله‌ی $|x - 1| \leq x + 1$ را حل کرده و مجموعه‌ی جواب را به صورت بازه نشان دهید.

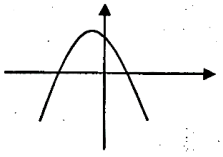
5- در دنباله هندسی نامتناهی روبه رو، مجموع تمام جملات را بیابید.

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{20}, \frac{1}{80}, \dots$$

6- معادله مقابل را حل کنید.

$$(4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0$$

7- در شکل زیر سهمی به معادله $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a و b و c و تعداد ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.



8- به روش جبری معادله $|x| = \sqrt{2-x}$ را حل کنید.

9- در چند جمله‌ای $p(x) = x^2 + ax^2 + x + b$ مقدار a و b را چنان بیابید که باقی مانده تقسیم آن بر $x-1$ برابر 4 بوده و بر $x+2$ بخش پذیر باشد.

10- اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشد معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{1}{\alpha+1}$ و $\frac{1}{\beta+1}$ باشد.

11- نامعادله‌ی $|x-1| \leq \sqrt{x+1}$ را به روش هندسی حل کنید.

فصل دوم: تابع 4 نمره

چند اتحاد مهم

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

$$a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots + 1) \quad (n \text{ فرد})$$

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

به کمک اتحادها، عبارت زیر را ساده کنید. (دی 91)

$$A = \frac{(x^5 + 1)(x - 1)}{x^2 - 1} \quad A = \frac{(x^5 + 1)(x - 1)}{x^2 - 1} = \frac{(x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

تساوی دو تابع

دو تابع f و g زمانی با هم برابرند که: 1- دامنه‌هایشان برابر باشند. 2- ضابطه‌های یکسان داشته باشند.

1- آیا دو تابع زیر با هم مساوی‌اند؟ چرا؟ (خرداد 92)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & x \neq 5 \\ 6 & x = 5 \end{cases}, \quad g(x) = x + 5 \quad \text{خیر: } D_F = D_g, \quad g(5) = 5 + 5 = 10, \quad f(5) = 6$$

2- آیا دو تابع $f(x) = \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 + x^2}}$ و $g(x) = \sqrt{1 + x^2} - 1$ با هم مساوی‌اند؟ چرا؟ (دی 90)

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \Rightarrow \begin{cases} 1 + x^2 \geq 0 & \text{همواره برقرار} \\ 1 + \sqrt{1 + x^2} \neq 0 & \text{همواره برقرار} \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \quad \text{بله، زیرا:}$$

$$g(x) = \sqrt{1 + x^2} - 1 \Rightarrow 1 + x^2 \geq 0 \Rightarrow D_g = \mathbb{R} \quad \text{همواره برقرار}$$

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \times \frac{1 - \sqrt{1 + x^2}}{1 - \sqrt{1 + x^2}} = \frac{x^2(1 - \sqrt{1 + x^2})}{1 - (1 + x^2)} = \frac{x^2(1 - \sqrt{1 + x^2})}{-x^2} = \sqrt{1 + x^2} - 1 = g(x)$$

بنابراین دو تابع با هم مساوی‌اند.

3- بررسی کنید که آیا دو تابع f و g با هم مساوی‌اند یا خیر؟ $g(x) = \sqrt{x+1}$ و $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$ (خارج از کشور - شهریور 91)

شرط اول برقرار است $D_f = D_g = [-1, \infty)$

شرط دوم برقرار نیست، پس دو تابع مساوی نیستند.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1} \times \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{x(\sqrt{x+1}-1)}{x+1-1} = \sqrt{x+1}-1 \neq g(x)$$

4- بررسی کنید آیا دو تابع f, g با هم مساوی‌اند یا خیر؟ $g(x) = |x+2|\sqrt{x-3}$ و $f(x) = \sqrt{(x+2)^2(x-3)}$ (شهریور 89)

$$(x+2)^2(x-3) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow D_f = [3, +\infty) \cup \{-2\}$$

$$x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \Rightarrow D_g = [3, +\infty) \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

5- بررسی کنید آیا دو تابع f, g با هم مساوی‌اند یا خیر؟ $g(x) = 1$ و $f(x) = \tan x \cot x$ (شهریور 88)

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \mid x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}, D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f(x) \neq g(x)$$

6- اگر $f(x) = 2x-1$ ، $g(x) = \begin{cases} \frac{4x^2-1}{2x+1} & x \neq -\frac{1}{2} \\ 1-k & x = -\frac{1}{2} \end{cases}$ ، k را طوری بیابید که به ازای هر x متعلق به دامنه، $f(x)=g(x)$ باشد. (تالیفی)

$$D_f = D_g = \mathbb{R} \quad x \neq -\frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x+1} = 2x-1 = f(x) \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow -2 = 1-k \Rightarrow k = 3$$

7- آیا دو تابع زیر مساوی‌اند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید. (خرداد 94)

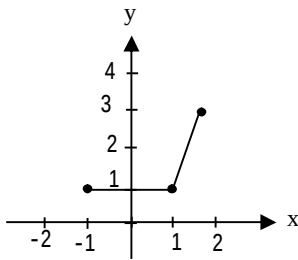
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2-x} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1} \end{cases}$$

$$D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty), \quad D_g = [1, +\infty)$$

پس مساوی نیستند، زیرا دامنه‌ها برابر نیستند.

نمودار تابع

1- ضابطه‌ی تابع f که نمودار آن در زیر آمده است را بنویسید. (دی 93)



تابع داده شده از دو قسمت تشکیل شده که در بازه‌ی $[-1, 1]$ مقدار ثابت 1 دارد و در بازه‌ی $[1, 2]$ قسمتی از خط است که از دو نقطه‌ی $A(1, 1)$ و $B(2, 3)$ می‌گذرد. با استفاده از این دو نقطه، معادله خط این قسمت را می‌نویسیم:

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 1}{2 - 1} = 2$$

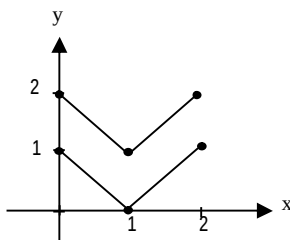
$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه این تابع که تابعی چند ضابطه‌ای است، به شکل زیر است:

تذکر: دقت کنید که تابع در هر دو ضابطه در $x = 1$ مقدار یکسان دارد. پس ایرادی ندارد که 1 در هر دو ضابطه مساوی داشته باشد.

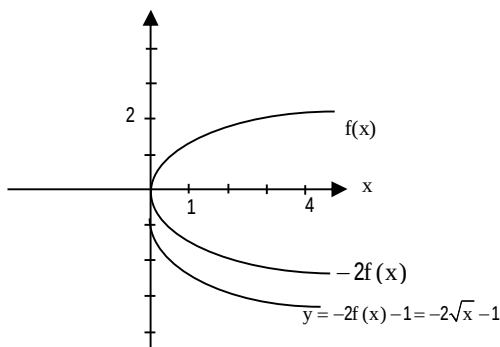
2- ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - 1|$ را با دامنه‌ی $[0, 2]$ رسم کنید. سپس نمودار $y = f(x) + 1$ را رسم کرده و برد آن را به دست آورید. (شهریور 93)



$$f(x) = |x - 1| \quad \begin{array}{c|ccc} \text{ریشه} & x & 0 & 1 & 2 \\ \hline & y & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

با توجه به نمودار y ، برد تابع بازه‌ی $[1, 2]$ می‌باشد.

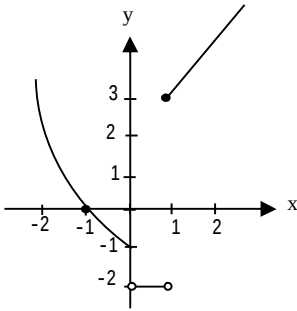
3- ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم نموده، سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x) = -2f(x) - 1$ را رسم کنید. (خرداد 92)



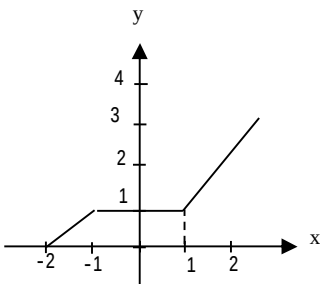
$$f(x) = \sqrt{x} \quad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 1 & 4 \\ \hline y & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

4- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ -2 & 0 < x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید. (دی - 90)

$R_f = [-1, +\infty) \cup \{-2\}$ $D_f = R$



5- نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر داده شده است. با استفاده از آن نمودار $g(x) = f(-2x)$ را رسم کنید. (خرداد 92 خارج از کشور)



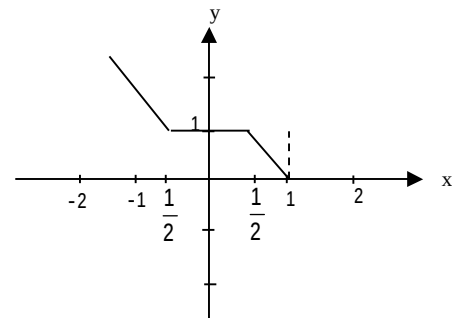
ابتدا نقاط مشخص تابع را در نظر می‌گیریم. یعنی نقاط $(2, 2)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$ و $(-2, 0)$. البته نقطه $(2, 2)$ را خودمان در نظر گرفتیم! حال طول این نقاط را به ترتیب برابر $-2x$ قرار می‌دهیم و x های جدید هر کدام که مربوط به تابع g می‌شود را به دست می‌آوریم:

$$-2 = -2x \Rightarrow x = 1 \Rightarrow g(1) = f(-2) = 0$$

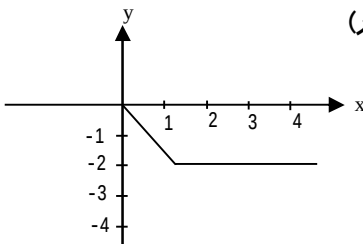
$$-1 = -2x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right) = f(-1) = 1$$

$$1 = -2x \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow g\left(-\frac{1}{2}\right) = f(1) = 1$$

$$2 = -2x \Rightarrow x = -1 \Rightarrow g(-1) = f(2) = 2$$



6- با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار تابع $y = 3f(2x)$ را رسم کنید. (خرداد 91 خارج از کشور)

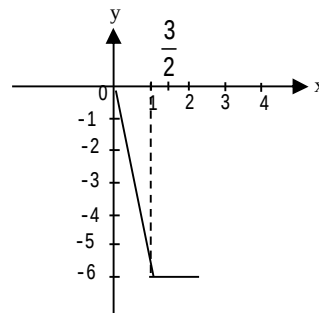


ابتدا نقاط مشخص تابع را در نظر می‌گیریم: $(0, 0)$, $(2, -2)$, $(3, -2)$. حال طول این نقاط را برابر $2x$ قرار می‌دهیم و ...

$$2x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow g(0) = 3f(0) = 0$$

$$2x = 2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow g(1) = 3f(2) = 3 \times (-2) = -6$$

$$2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow g\left(\frac{3}{2}\right) = 3f(3) = -6$$



اعمال جبری روی توابع و ترکیب توابع

برای دو تابع f و g که روی یک مجموعه A تعریف شده‌اند، توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

برای دو تابع f و g ، ترکیب دو تابع f و g به صورت $f \circ g$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

تذکر: با توجه به این که $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ و در این رابطه $g(x)$ دیده می‌شود، پس باید $x \in D_g$ باشد و چون $f(g(x))$ داریم، پس باید $g(x) \in D_f$ باشد.

1- اگر $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ و $g(x) = \frac{1}{x+2}$ باشند، دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را تعیین کنید. (دی 93)

از آن جا که $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ ، پس:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid f(g(x)) \in D_f\}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}, \quad D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid \frac{1}{x} - 1 \neq -2\} = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} \mid x \neq -1\} = \mathbb{R} - \{0, -1\}$$

2- دو تابع $f = \{(1,3), (-2,5), (0,7), (3,-4)\}$ و $g = \{(1,4), (3,1), (0,0), (5,-2)\}$ را در نظر بگیرید. (شهریور 93)

الف) تابع $f \times g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) مقدار $f \circ g(0)$ را به دست آورید.

الف) $D_{f \times g} = D_f \cap D_g = \{1, 3, 0\}$

$$f \times g = \{(1,12), (3,-4), (0,0)\}$$

ب) $f \circ g(0) = f(g(0)) = f(0) = 7$

3- اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ باشد، تابع $g(x)$ را به گونه‌ای مشخص کنید که $(fog)(x) = x^2 - 4x + 5$. (خرداد 93)

$$fog(x) = f(g(x)) = g^2(x) + 2g(x) + 2 = x^2 - 4x + 5 \Rightarrow g^2(x) + 2g(x) + 1 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow (g(x) + 1)^2 = (x - 2)^2 \\ \Rightarrow g(x) + 1 = \pm(x - 2) \Rightarrow g(x) = \pm(x - 2) - 1 \Rightarrow g(x) = x - 3 \text{ یا } g(x) = -x + 1$$

دو تابع با این شرایط وجود دارد.

4- دو تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x+4}$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار $(f+g)(0)$ را به دست آورید.

ب) دامنه‌ی $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید. (خرداد 93)

$$\text{الف) } (f+g)(0) = f(0) + g(0) = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

$$\text{ب) } D_f = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}, D_f = \mathbb{R} - \{2\}, D_g = [-4, +\infty), g(x) = 0 \Rightarrow x = -4 \\ \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{2\} \cap [-4, +\infty) - \{-4\} = (-4, +\infty) - \{2\}$$

5- دو تابع $f(x) = x - 1$ و $g(x) = \sqrt{x+2}$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنه‌ی تابع $g \circ f$ را بدون محاسبه‌ی $(g \circ f)(x)$ را به دست آورید.

ب) ضابطه‌ی $g \circ f$ را به دست آورید. ج) مقدار $(\frac{f}{g})(2)$ را محاسبه کنید. (دی 92)

$$\text{الف) } D_f = \mathbb{R}, D_g = [-2, +\infty) \quad D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 1 \geq -2\} = [-1, +\infty)$$

$$\text{ب) } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = \sqrt{x - 1 + 2} = \sqrt{x + 1} \quad \text{ج) } (\frac{f}{g})(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{1}{2}$$

6- اگر $f = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ و $g = \{(1,2), (3,5)\}$ دو تابع باشند:

الف) تابع $f + g$ را به صورت زوج‌های مرتب مشخص کنید.

ب) مقدار $(g \circ f)(3)$ را بیابید. (شهریور 92)

$$\text{الف) } D_{f+g} = \{1,3\}, f+g = \{(1,3), (3,8)\} \quad \text{ب) } (g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(3) = 5$$

7- اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ دو تابع باشند:

الف) مقدار $3(f-g)(4)$ را به دست آورید.

ب) دامنه‌ی تابع $f \circ g$ را بیابید. (خرداد 92)

$$\text{الف) } 3(f-g)(4) = 3(f(4) - g(4)) = 3\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -2$$

$$\text{ب) } D_f = \mathbb{R} - \{1\}, D_g = [3, +\infty), D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in [3, +\infty) \mid \sqrt{x-3} \neq 1\} = \{x \in [3, +\infty) \mid x \neq 4\} = [3, +\infty) - \{4\}$$

8- اگر $f = \{(-12), (15), (3, -1), (0, 3)\}$ و $g = \{(-2, 5), (3, 2), (4, 6), (0, 2), (-10)\}$ باشند، تابع $\frac{f}{g}$ را با اعضا بنویسید.

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = \{-1, 3, 0\} - \{-1\} = \{3, 0\} \quad \frac{f}{g} = \{(3, \frac{-1}{2}), (0, \frac{3}{2})\}$$

9- اگر $f(x) = \frac{x}{x+1}$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x^2-1}{x^2+2}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ را به دست آورید. (خرداد 90 خارج از کشور)

$$f(g(x)) = \frac{g(x)}{g(x)+1} = \frac{x^2-1}{x^2+2} \Rightarrow x^2 g(x) + 2g(x) = x^2 g(x) - g(x) + x^2 - 1 \Rightarrow 3g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow g(x) = \frac{x^2-1}{3}$$

10- اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ باشد، تابع $g(x)$ را به گونه‌ای مشخص کنید که $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 5$. (خرداد 93)

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = g^2(x) + 2g(x) + 2 = x^2 - 4x + 5$$

$$\Rightarrow g^2(x) + 2g(x) + 1 = x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow (g(x) + 1)^2 = (x - 2)^2 \Rightarrow g(x) = \pm(x - 2) - 1$$

11- اگر $g(x) = \frac{1}{x-3}$ و $f(x) = 3x - 2$ باشد آن گاه حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(3f + 2g)(4)$

ب) $D_{f \circ g}$ (خرداد 90)

$$\text{الف) } (3f + 2g)(4) = 3f(4) + 2g(4) = 3(10) + 2(1) = 32$$

$$\text{ب) } D_{f \circ g} = \left\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{3\} \mid \frac{1}{x-3} \in \mathbb{R}\right\} \Rightarrow D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{3\}$$

12- توابع $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ مفروض اند.

الف) در صورت وجود دامنه $g \circ f$ را تعیین کنید

ب) ضابطه $g \circ f$ را بنویسید. (دی 89)

$$D_f = [-2, 2], \quad D_g = \mathbb{R} - \{1\}, \quad D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

$$\Rightarrow D_{g \circ f} = \left\{ x \in {}_{(1)}[-2, 2] \mid \underbrace{\sqrt{4-x^2}}_{(2)(x \neq \pm\sqrt{3})} \in \mathbb{R} - \{1\} \right\}$$

$$(1) \cap (2) = [-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2] \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{\sqrt{4-x^2} + 2}{\sqrt{4-x^2} - 1}$$

13- اگر $f = \left\{ (0, 2), (1, -1), (3, -\frac{1}{4}), (-2, 3), (-1, 0) \right\}$ و $g = \left\{ (2, \sqrt{2}), (-1, 2), (\frac{1}{4}, 3), (1, \frac{3}{2}) \right\}$ باشند.

الف) تابع $g - 2f$ را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

ب) تابع $g \circ f$ را بدست آورید. پ) مقدار $(\frac{f}{g})(1)$ را محاسبه کنید. (خرداد 94)

$$\text{پ: } \left(\frac{f}{g}\right)(1) = -\frac{2}{3}$$

$$\text{ب: } g \circ f = \{(0, \sqrt{2}), (1, 2)\}$$

$$\text{الف: } 2f - g = \left\{ \left(1, -\frac{7}{2}\right), (-1, -2) \right\}$$

14- دو تابع $f(x) = \sqrt{x} + 2$ و $g(x) = \frac{1}{x-4}$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بدست آورید.

ب) مقدار $(f \circ g)(5)$ را محاسبه کنید. (شهریور 94)

$$\text{الف) } D_f = [0, +\infty), D_g = \mathbb{R} - \{4\} \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = [0, +\infty) - \{4\} \quad \text{یا} \quad [0, 4) \cup (4, +\infty)$$

$$\text{ب) } f(g(5)) = f(1) = 3$$

15- برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ و $g(x) = \frac{2}{x}$ بدون نوشتن ضابطه، دامنه $f \circ g$ را بدست آورید. (دی 94)

$$D_f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}, \quad D_g = \mathbb{R} - \{0\} \quad D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \rightarrow \{x \neq 0 \mid \frac{2}{x} \neq \pm 2\} \rightarrow D_{f \circ g} = \mathbb{R} - \{0, 1, -1\}$$

توابع زوج و فرد

برای تعیین زوج یا فرد بودن تابع، دو شرط زیر را بررسی می‌کنیم:

1- دامنه متقارن باشد.

2- $f(-x)$ را تشکیل می‌دهیم، اگر با $f(x)$ برابر باشد، تابع زوج و اگر با $-f(x)$ برابر باشد، تابع فرد است و در غیر این صورت تابع نه زوج و نه فرد است.

تذکر: توابع زوج نسبت به محور x ها متقارن‌اند و توابع فرد نسبت به مبدأ مختصات.

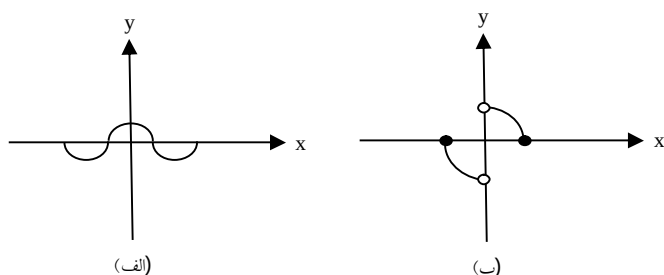
1- زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{2x^8 + x^2}$ را مشخص کنید. (دی 93)

دامنه متقارن است. $2x^8 + x^2 \neq 0 \Rightarrow x^2(2x^6 + 1) \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow D = R - \{0\}$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 - 3(-x)}{2(-x)^8 + (-x)^2} = \frac{-x^3 + 3x}{2x^8 + x^2} = -\frac{x^3 - 3x}{2x^8 + x^2} = -f(x)$$

بنابراین تابع فرد است.

2- زوج یا فرد بودن توابعی که نمودار آنها در زیر آمده است را مشخص کنید. (خرداد 93)



تابع (الف) نسبت به محور y ها متقارن است، پس تابعی زوج است و

تابع (ب) نسبت به مبدأ مختصات متقارن است، پس تابعی فرد می‌باشد.

3- زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = x^2 + \cos x$ را معلوم کنید. (دی 91)

متقارن است. $D_f = R$

$$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x)$$

پس تابع f زوج می‌باشد.

4- زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = x\sqrt{27 - 3x^2}$ را معلوم کنید. (دی 89)

$$27 - 3x^2 \geq 0 \Rightarrow 9 - x^2 \geq 0,$$

$$\Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \Rightarrow D = [-3, 3]$$

$$f(-x) = -x\sqrt{27 - 3(-x)^2} = -x\sqrt{27 - 3x^2} = -f(x)$$

پس تابع فرد است.

x	-3	3
$9 - x^2$	-	+

5- زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = x^3 - \sin x$ را بررسی کنید. (شهریور 94)

دامنه متقارن $D = R$

$$f(-x) = (-x^3) - \sin(-x) = -x^3 + \sin x = -(x^3 - \sin x) = -f(x) \Rightarrow \text{تابع فرد است}$$

6- زوج یا فرد بودن تابع زیر را بررسی کنید (شهریور 83)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \begin{cases} \text{دامنه متقارن } D: 1-x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow D_f = (-1,1) \\ f(-x) = \frac{1-x}{\sqrt{1-(-x)^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -f(x) \Rightarrow \text{تابع فرد است} \end{cases}$$

7- زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = x^2 + \cos x$ را معلوم کنید. (دی 91)

دامنه متقارن $D_f = R$

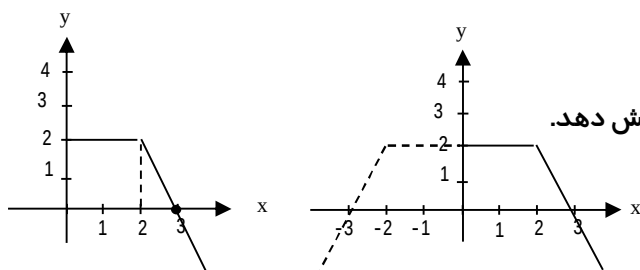
$$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x) \Rightarrow \text{تابع زوج است}$$

8- با توجه به شکل داده شده زیر:

الف) ضابطه تابع را بنویسید.

ب) تابع در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی یا ثابت است؟

ج) نمودار را به گونه‌ای تکمیل کنید که نمودار جدید یک تابع زوج را نمایش دهد.



$$\text{الف) } f(x) = \begin{cases} 2 & 0 \leq x \leq 2 \\ -2x + 6 & x > 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{نزولی } [2, +\infty) \\ \text{و ثابت } [0, 2] \end{matrix} \quad \text{ب)}$$

9- زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را بررسی کنید. (خرداد 94)

10- زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = |x| + \sin^2 x$ را بررسی کنید. (خرداد 92 خارج از کشور)

متقارن $D = R$

$$f(-x) = |-x| + \sin^2(-x) = |x| + (-\sin x)^2 = |x| + \sin^2 x = f(x)$$

پس تابع زوج است.

توابع صعودی و نزولی

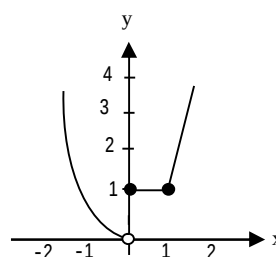
- تابع $f(x)$ را صعودی نامیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی f که $x_1 < x_2$ باشد، داشته باشیم $f(x_1) \leq f(x_2)$ و آن را صعودی اکید نامیم هرگاه $f(x_1) < f(x_2)$.
- تابع $f(x)$ را نزولی نامیم، هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی f که $x_1 < x_2$ باشد، داشته باشیم $f(x_2) \leq f(x_1)$ و آن را نزولی اکید گوئیم هرگاه $f(x_2) < f(x_1)$.
- تابع $f(x)$ را ثابت نامیم، هرگاه برای هر دو عضو x_1 و x_2 از دامنه‌ی f ، داشته باشیم $f(x_1) = f(x_2)$.

1- ابتدا نمودار تابع زیر را رسم کنید، سپس بازه‌هایی را که در آن تابع، صعودی اکید، نزولی اکید یا ثابت است را مشخص کنید. (شهریور 92)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & x > 1 \end{cases}$$

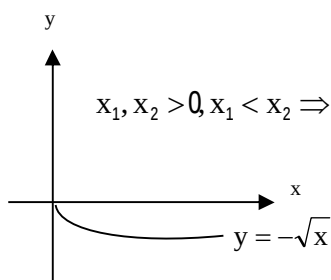
x	-2	-1	0
y	4	1	0

x	1	2
y	0	1



در بازه‌ی $(-\infty, 0)$ نزولی اکید، در بازه‌ی $[0, 1]$ ثابت، در بازه‌ی $(1, +\infty)$ صعودی اکید.

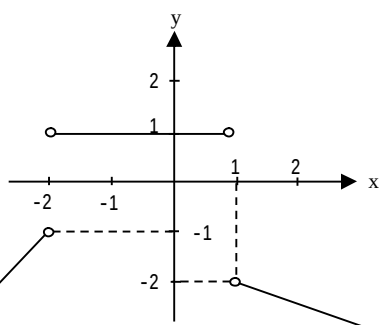
2- تابع $f(x) = -\sqrt{x}$ است. (خرداد 90 از کشور)



الف) صعودی ب) نزولی
 $x_1, x_2 > 0, x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Rightarrow -\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

بنابراین تابع نزولی است. با توجه به شکل زیر این مطلب واضح است.

3- نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 < x < 1 \\ -2x & 1 < x \end{cases}$ را رسم کنید و بازه‌هایی که در آن‌ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است را مشخص کنید. (خرداد 90)

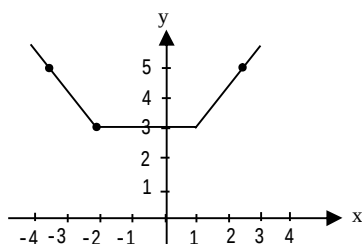


تابع f در بازه‌ی $(-\infty, -2)$ صعودی اکید، در بازه‌ی $(-2, 1)$ ثابت و در بازه‌ی $(1, +\infty)$ نزولی اکید است.

4- تابع $y = x^2 - 1$ در بازه $(-\infty, 0)$ صعودی است یا نزولی؟ (خرداد 94)

5- تابع $y = |x| + 1$ در بازه صعودی است. (دی 94)

6- با رسم نمودار $y = |x + 2| + |x - 1|$ مشخص کنید تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است؟ (خرداد 91 خارج از کشور)



$$y = |x + 2| + |x - 1| = \begin{cases} x + 2 + x - 1 = 2x + 1 & x > 1 \\ x + 2 + 1 - x = 3 & -2 \leq x \leq 1 \\ -x - 2 + 1 - x = -2x - 1 & x < -2 \end{cases}$$

در بازه $(-\infty, -2]$ نزولی اکید ولی در بازه $[-2, 1]$ نزولی است.

در بازه $[1, +\infty)$ صعودی اکید ولی در بازه $[-2, +\infty)$ صعودی است.

تذکر: تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.

توابع یک‌به‌یک و وارون‌پذیر

شرط وارون‌پذیری یک تابع (یعنی تابعی که وارونش نیز تابع باشد)، یک‌به‌یک بودن آن است. برای بررسی یک‌به‌یک بودن تابع از $y_1 = y_2$ شروع می‌کنیم. اگر به $x_1 = x_2$ رسیدیم، تابع یک‌به‌یک است. در صورتی که تابع یک‌به‌یک نباشد، از مثال نقض می‌توان استفاده کرد.

تذکر: در توابع یک‌به‌یک، هر خط موازی محور x ها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

1- آیا تابع $f(x) = x^2 - 2x$ یک‌به‌یک است؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید. (خرداد 93)

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow f(0) = 0, f(2) = 0$$

خیر، یک‌به‌یک نیست. مثلاً اگر $y = 0$ باشد، داریم:

2- ضابطه‌ی وارون تابع $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ را به دست آورید. (دی 93)

$$y = \sqrt{2x + 3} \Rightarrow y^2 = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{y^2 - 3}{2} \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = \frac{x^2 - 3}{2} \text{ یا } f^{-1}(x) = \frac{x^2 - 3}{2}$$

3- وارون پذیری تابع زیر را بررسی کنید و در صورت وارون پذیر بودن تابع، ضابطه‌ی وارون آن را به دست آورید. (شهریور 92)

$$f(x) = \sqrt{x+3} - 5 \quad D_f : x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow D_f = [-3, +\infty)$$

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \sqrt{x_1+3} - 5 = \sqrt{x_2+3} - 5 \Rightarrow \sqrt{x_1+3} = \sqrt{x_2+3} \Rightarrow x_1 = x_2$$

بنابراین تابع یک به یک است و وارون پذیر نیز می باشد.

$$y = \sqrt{x+3} - 5 \Rightarrow y+5 = \sqrt{x+3} \Rightarrow x+3 = (y+5)^2 \Rightarrow x = (y+5)^2 - 3 \xrightarrow{x \leftrightarrow y} y = (x+5)^2 - 3$$

4- وارون پذیری تابع $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$ را بررسی کرده و برد تابع را تعیین کنید. (خرداد 91 خارج از کشور)

$$y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{x_1-1}{2x_1+3} = \frac{x_2-1}{2x_2+3} \Rightarrow 2x_1x_2 + 3x_1 - 2x_2 - 3 = 2x_1x_2 + 3x_2 - 2x_1 - 3 \Rightarrow 3x_1 + 2x_1 = 3x_2 + 2x_2$$

$$\Rightarrow 5x_1 = 5x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \text{تابع یک به یک است بنابراین وارون پذیر نیز می باشد.}$$

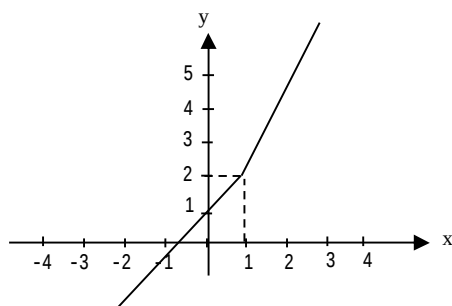
تذکر: دامنه تابع هموگرافیک $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ برابر $D_f = R - \{-\frac{d}{c}\}$ و برد آن $R_f = R - \{\frac{a}{c}\}$ می باشد. بنابراین برد تابع داده شده $R_f = R - \{\frac{1}{2}\}$ است.

5- ابتدا نمودار تابع $f(x) = 2x + |x-1|$ را رسم کرده و با استفاده از شکل، وارون پذیری آن را بررسی کنید. (خرداد 90 خارج از کشور)

$$f(x) = 2x + |x-1| = \begin{cases} 2x + x - 1 & x \geq 1 \\ 2x + 1 - x & x < 1 \end{cases} = \begin{cases} 3x - 1 & x \geq 1 \\ x + 1 & x < 1 \end{cases}$$

$\frac{x}{y}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{x}{y}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$

با توجه به نمودار تابع، چون هر خط موازی با محور x ها، تابع را در یک نقطه قطع می کند، تابع یک به یک و وارون پذیر می باشد.



6- نشان دهید تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{2x-3}$ یک به یک است سپس تابع وارون آن را حساب کنید (دی 87)

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\sqrt{2x_1-3} = \sqrt{2x_2-3} \xrightarrow{\text{طرفین به توان 2}} 2x_1-3 = 2x_2-3$$

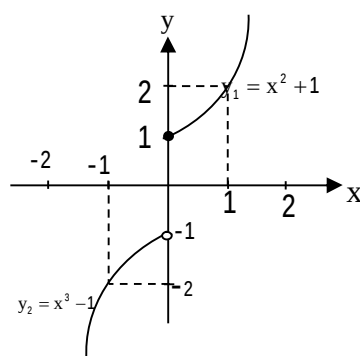
$$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ یک به یک است، پس وارون پذیر است.}$$

$$y = \sqrt{2x-3} \Rightarrow x = \frac{y^2+3}{2} \Rightarrow x^2 = 2y-3$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2+3}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}$$

7- نمودار تابع زیر را رسم کرده، یک به یک بودن آن را بررسی کنید. سپس ضابطه ی وارون f را در صورت وجود به دست آورید. (خرداد 89)

$$R_{y_1} = [1, +\infty) \quad R_{y_2} = (-\infty, -1) \quad f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq 0 \\ x^3-1 & x < 0 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \geq 0 \\ x^3-1 & x < 0 \end{cases}$$



با توجه به نمودار مشخص است که تابع f یک به یک است. (تابع f روی دامنه اش اکیداً صعودی است. پس یک به یک است)

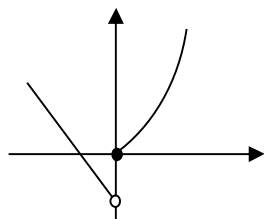
یادآوری: توابع چند ضابطه ای وقتی یک به یک هستند که: 1- هر کدام از ضابطه ها در دامنه ی خودشان یک به یک باشند. 2- برد هیچ دو ضابطه ای اشتراک نداشته باشد.

$$x \geq 0 \rightarrow y_1 = x^2 + 1 \rightarrow x^2 = y_1 - 1 \rightarrow x = \sqrt{y_1 - 1} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x - 1}$$

$$x < 0 \rightarrow y_2 = x^3 - 1 \rightarrow x^3 = y_2 + 1 \rightarrow x = \sqrt[3]{y_2 + 1} \rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 1}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & x \geq 1 \\ \sqrt[3]{x+1} & x < -1 \end{cases}$$

8- به کمک رسم نمودار، ثابت کنید تابع زیر وارون پذیر نیست. (خرداد 94)



یک به یک نیست، بنابراین وارون پذیر نیست.

9- تحقیق کنید آیا دو تابع $f(x) = \frac{1}{x} + 3$ و $g(x) = \frac{1}{x-3}$ وارون یکدیگرند؟ (شهریور 94)

این دو تابع وارون یکدیگرند، زیرا:

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2 \rightarrow \frac{1}{x_1} + 3 = \frac{1}{x_2} + 3 \Rightarrow \frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \text{تابع یک به یک است.}$$

$$y = \frac{1}{x} + 3 \Rightarrow \frac{1}{x} = y - 3 \Rightarrow x = \frac{1}{y-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{x-3} = g(x)$$

10- یک به یک بودن تابع $y = (x+2)^3 - 2$ را بررسی کرده و وارون آن را بدست آورید. (دی 94)

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

$$(x_1+2)^3 - 2 = (x_2+2)^3 - 2 \Rightarrow x_1+2 = x_2+2 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ تابع یک به یک است}$$

$$\Rightarrow y = (x+2)^3 - 2 \rightarrow y+2 = (x+2)^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{y+2} - 2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2} - 2$$

تابع متناوب

تابع f را متناوب نامیم، هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد که برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ و $f(x+T) = f(x)$. کوچکترین عدد مثبت T با این خاصیت را دوره تناوب f گوئیم.

• دوره تناوب توابع $y = a \sin(bx+c)+d$ و $y = a \cos(bx+c)+d$ $T = \frac{2\pi}{|b|}$ می باشد.

• دوره تناوب توابع $y = a \tan(bx+c)+d$ و $y = a \cot(bx+c)+d$ $T = \frac{\pi}{|b|}$ می باشد.

1- دوره تناوب تابع $y = \sin 3x$ برابر با است. (دی 92)

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3}$$

2- ثابت کنید تابع $f(x) = \cot \frac{x}{2}$ متناوب است و سپس دوره‌ی تناوب اصلی آن را بیابید. (خرداد 89)

$$1) \forall x \in D_f \Rightarrow (x \pm t) \in D_f$$

$$2) \forall x \in D_f \Rightarrow f(x+t) = f(x) \Rightarrow \cot \frac{x+t}{2} = \cot \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{t}{2} = k\pi + \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{t}{2} = k\pi \Rightarrow t = 2k\pi \xrightarrow[k=1]{\substack{\text{کوچکترین } t \\ \text{مثبت}}} t = 2\pi$$

3- دوره‌ی تناوب تابع $y = \frac{4 \sin 7x}{\sqrt{3} + 5 \sin 7x}$ را بدست آورید. (شهریور 89)

$$T = \frac{2\pi}{7}$$

4- ثابت کنید دوره تناوب تابع $f(x) = nx - [nx]$ برابر $\frac{1}{n}$ است. (تألیفی)

$$f(x) = nx - [nx], D_f = \mathbb{R}$$

$$1) \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \pm T \in \mathbb{R}$$

$$2) \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x+T) = f(x) \Rightarrow n(x+T) - [n(x+T)] = nx - [nx] \Rightarrow nx + nT - [nx + nT] = nx - [nx]$$

$$nx + nT - [nx] - nT = nx - [nx]$$

تساوی زمانی برقرار است که nT یک عدد صحیح باشد تا از جزء صحیح خارج شود:

$$\Rightarrow nT = 1 \Rightarrow T = \frac{1}{n} \text{ کوچکترین عدد صحیح مثبت}$$

$$nT \in \mathbb{Z} - \{0\} \text{ پس داریم:}$$

تابع جزء صحیح یا براکت

جزء صحیح اعداد صحیح برابر خودشان است. در صورتی که عدد صحیح نباشد، جزء صحیح آن، عدد صحیح قبل از آن می‌باشد. برای رسم تابع براکتی، عبارت داخل براکت را بین اعداد صحیح متوالی، محدوده‌بندی می‌کنیم و با توجه به آن، تابع را در بازه‌های مشخص شده ساده و رسم می‌کنیم.

1- اگر $f(x) = [x+3]$ باشد، در این صورت حاصل $f(2-\sqrt{2})$ برابر است. (خرداد 93)

$$f(2-\sqrt{2}) = [2-\sqrt{2}+3] = [5-\sqrt{2}] = [5-1/\dots] = [3/\dots] = 3$$

2- اگر $a = 1-\sqrt{2}$ ، حاصل عبارت $[\sqrt{(a-2)^2}]$ کدام است؟ (خرداد 90 خارج از کشور)

$$[\sqrt{(a-2)^2}] = [a-2] = [1-\sqrt{2}-2] = [-1-\sqrt{2}] = [1+\sqrt{2}] = [1+1/\dots] = 2$$

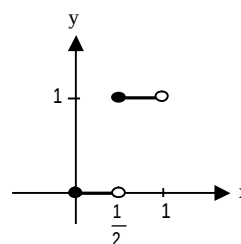
3- نمودار تابع $f(x) = [2x]$ را در بازه $[0,1]$ رسم کنید. (شهریور 93)

همان‌طور که گفتیم باید عبارت داخل براکت یعنی $2x$ را بین اعداد صحیح متوالی محدوده‌بندی کنیم. ابتدا محدوده‌ی $2x$ را با توجه به محدوده‌ی x به دست می‌آوریم:

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq 2x < 2$$

$$0 \leq 2x < 1 \Rightarrow [2x] = 0 \Rightarrow y = 0, 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$1 \leq 2x < 2 \Rightarrow [2x] = 1 \Rightarrow y = 1, \frac{1}{2} \leq x < 1$$



4- دامنه توابع زیر را بدست آورید. (تألیفی)

$$y = \frac{3x}{|x| - [x]} \quad (\text{پ})$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{[x]}} \quad (\text{ب})$$

$$y = \frac{x}{[x] - 2} \quad (\text{الف})$$

$$[x] - 2 = 0 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow x \in [2, 3) \Rightarrow D = \mathbb{R} - [2, 3)$$

الف.

$$y = \frac{1}{\sqrt{[x]}} \Rightarrow [x] > 0 \rightarrow x \geq 1 \rightarrow D_f = [1, +\infty)$$

ب.

$$y = \frac{3x}{|x| - [x]} \Rightarrow |x| - [x] = 0 \Rightarrow |x| = [x] \Rightarrow x \in \mathbb{W} \Rightarrow D = \mathbb{R} - \mathbb{W} \quad (\text{مجموعه اعداد حسابی } \mathbb{W})$$

پ.

5- اگر $f(x) = [x+1]$ باشد حاصل $f(\sqrt{3}-1)$ برابر با است. (دی 94)

$$f(\sqrt{3}-1) = [\sqrt{3}-1+1] = 1$$

6- تابع $y = f(x)$ با دامنه $[-2, 1]$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی تابع $g(x) = -f(2x) + 1$ بازه‌ی است. (خرداد 94)

$$\checkmark \left[-1, \frac{1}{2}\right] \quad (2)$$

$$[-4, 2] \quad (1)$$

خودآزمایی

1- درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) دو تابع $f(x) = x$ و $g(x) = \sqrt{x^2}$ با هم مساویند.

ب) اگر دامنه‌ی تابع f برابر با $[-1, 3]$ باشد، دامنه‌ی تابع $g(x) = -3f(2x)$ بازه‌ی $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ است.

ج) تابع $y = 2x^2 + 4x - 1$ در بازه‌ی $[-2, 5]$ صعودی است.

2- برای دو تابع $f = \{(11, 7), (-2, 4), (3, -5), (2, -5)\}$ و $g = \{(2, 11), (4, -2), (6, 3), (3, 2)\}$ ، تابع $f \circ g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

3- گزینه درست را انتخاب کنید.

- | | | |
|--|---|---|
| الف) تابع $y = \sin x$ تابعی است. | ☐ فرد | ☐ زوج |
| ب) دو تابع $f(x) = \frac{7}{x} + 3$ و $g(x) = \frac{x-7}{7}$ وارون یکدیگرند. | ☐ خیر | ☐ بله |
| ج) دوره‌ی تناوب تابع $y = \cos 3x$ برابر با است. | ☐ $\frac{2\pi}{3}$ | ☐ $\frac{3\pi}{2}$ |

4- یک به یک بودن تابع $y = \frac{x+5}{2x-1}$ را بررسی کنید.

5- گزینه مناسب را انتخاب کنید.

i. اگر فرض کنیم $f(x) = \sqrt{2-x}$ باشد آنگاه برد این تابع مجموعه است.

الف) $[1, \sqrt{2}]$ ب) $(\circ, +\infty]$

ii. در رسم نمودار $y = f(ax)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ اگر $0 < a < 1$ نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور x ها می‌شود.

الف) منبسط ب) منقبض

iii. تابع $y = x\sqrt{|x|}$ است.

الف) زوج ب) فرد $f = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (4, 5)\}$

6- اگر $f = \{ (1,1), (1,2), (2,3), (4,5) \}$ و $g = \{ (-1, \circ), (1,2), (2,4), (5,3) \}$ دو تابع باشند:

الف) مقدار $(-1)(3f - g)$ را حساب کنید.

ب) تابع $f \circ g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

7- وارون پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$ را بررسی کنید.

8- نمودار تابع $f(x) = 2[x]$ را در بازه $[-1,1]$ رسم کنید. (با راه حل)

9- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) چندجمله‌ای $x^n - a^n$ بر $x - a$ بخش پذیر است.

ب) بیشترین مقدار تابع $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 2 \circ x$ برابر $2 \circ$ است.

ج) وارون تابع $f(x) = \frac{7}{x} + 3$ برابر $g(x) = \frac{7}{x-3}$ است.

د) تابع $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ با تابع $g(x) = \sin x$ مساوی است.

10- نمودار تابع زیر را رسم کنید و به کمک آن برد تابع را مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < \circ \\ 2 & \circ \leq x \leq 2 \\ x - 1 & 2 < x \end{cases}$$

11- اگر $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$ دو تابع باشند:

الف) دامنه تابع $f \circ g$ را به دست آورید.

ب) ضابطه تابع $f \circ g$ را بنویسید.

ج) مقدار $(g - f)(2)$ را حساب کنید.

12- زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = \frac{x^2 - \cos x}{|x|}$ را بررسی کنید.

فصل سوم: مثلثات (3 نمره)

اتحادهای مثلثاتی و توابع مثلثاتی:

1- ثابت کنید. (دی 90 و 92)

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

اثبات: $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$

2- ثابت کنید. (خرداد 90 و 92)

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

اثبات: $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) = \sin x + \cos x$

3- ثابت کنید. (خرداد 90 خارج از کشور)

$$\frac{2\sin x \cos 3x}{\sin 2x} = 2\cos 2x - 1$$

اثبات: $\frac{2\sin x \cos 3x}{\sin 2x} = \frac{2\sin x (4\cos^3 x - 3\cos x)}{\sin 2x} = \frac{2\sin x \cos x (4\cos^2 x - 3)}{2\sin x \cos x} = 4\cos^2 x - 3 = 4\cos^2 x - 2 - 1$

$$= 2(2\cos^2 x - 1) - 1 = 2\cos 2x - 1$$

روش دوم: $\frac{2\sin x \cos 3x}{\sin 2x} = \frac{\sin(x + 3x) + \sin(x - 3x)}{\sin 2x} = \frac{\sin 4x + \sin(-2x)}{\sin 2x} = \frac{\sin 4x - \sin 2x}{\sin 2x}$

$$= \frac{2\sin 2x \cos 2x - \sin 2x}{\sin 2x} = \frac{\sin 2x (2\cos 2x - 1)}{\sin 2x} = 2\cos 2x - 1$$

تذکر:

$$2\sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$2\cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$2\sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

4- ثابت کنید. (شهریور 91)

$$\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

اثبات: $\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} = \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} = \frac{\cos 2x}{1} = \cos 2x$

5- ثابت کنید. (دی 89)

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\text{اثبات: } \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\frac{2 \sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\frac{2 \sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{2 \sin x \cos^2 x}{\cos x (\sin^2 x + \cos^2 x)} = \frac{2 \sin x \cos x}{1} = \sin 2x$$

برای به دست آوردن نسبت‌های زوایای غیر معروف با استفاده از زوایای معروف، از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$1) \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$2) \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$3) \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$4) \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$5) \tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

6- مطلوبست: $\tan 105^\circ$ (دی 93)

$$\tan 105^\circ = \tan(60 + 45) = \frac{\tan 60 + \tan 45}{1 - \tan 60 \times \tan 45} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \times \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}$$

7- مطلوب است، $\cos 15^\circ$ (شهریور 93)

$$\cos 15^\circ = \cos(45 - 30) = \cos 45 \cos 30 - \sin 45 \sin 30 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

8- مطلوب است، $\sin 75^\circ$ (شهریور 92)

$$\sin 75^\circ = \sin(30 + 45) = \sin 30 \cos 45 + \cos 30 \sin 45 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

9- اگر α زاویه‌ای در ربع اول و β زاویه‌ای در ربع دوم باشد و $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{2}{3}$ باشد، مقدار $\cos(\alpha - \beta)$ را به دست آورید. (خرداد 92 خارج از کشور)

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{25} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{24}}{5} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع اول}} \cos \alpha = \frac{\sqrt{24}}{5}$$

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta + \frac{4}{9} = 1 \Rightarrow \sin^2 \beta = \frac{5}{9} \Rightarrow \sin \beta = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \xrightarrow{\beta \text{ در ربع دوم}} \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{\sqrt{24}}{5} \times \frac{-2}{3} + \frac{1}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{-2\sqrt{24} + \sqrt{5}}{15} = \frac{-4\sqrt{6} + \sqrt{5}}{15}$$

10- عبارت $\sin(x+h) - \sin x$ را به حاصل ضرب تبدیل کنید. (خرداد 93)

$$\sin(x+h) + \sin(-x) = 2 \sin \frac{h}{2} \times \cos \frac{2x+h}{2}$$

11- سینوس و کسینوس $22/5^\circ$ را حساب کنید. (تالیفی)

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 22/5^\circ = \frac{1 - \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \Rightarrow \cos^2 22/5^\circ = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \cos 22/5^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

12- اگر α, β زاویه‌هایی در ربع سوم باشند و $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{5}{13}$ مقدار $\sin(\alpha + \beta)$ را محاسبه کنید. (شهریور 90)

$$\sin \alpha = -\frac{4}{5} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}} \cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{16}{25}} = -\frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\cos \beta = -\frac{5}{13} \xrightarrow{\beta \text{ در ربع سوم}} \sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13} \Rightarrow \sin \beta = -\frac{12}{13}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{13}\right) + \left(-\frac{12}{13}\right) \times \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{20}{65} + \frac{36}{65} = \frac{56}{65}$$

13- فرمول $\sin 2\alpha$ را از فرمول $\sin(\alpha + \beta)$ بدست آورید. (دی 91)

$$\sin(\alpha + \beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow \alpha} \sin(\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

14- در مثلثی که طول اضلاع آن 1، 3 و $\sqrt{7}$ باشد، زاویهی روبروی ضلع به طول $\sqrt{7}$ چه قدر است؟ (خرداد 90)

$$(\sqrt{7})^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \times \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

15- درستی رابطه‌ی زیر را بررسی کنید. (دی 90)

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$= \cos^2 \alpha - (1 - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$$

16- درستی رابطه‌ی زیر را بررسی کنید. (خرداد 88)

$$\frac{\sin 3\alpha - \sin 5\alpha}{\cos 5\alpha - \cos 3\alpha} = \cot 4\alpha$$

$$\frac{\sin 3\alpha - \sin 5\alpha}{\cos 5\alpha - \cos 3\alpha} = \frac{2\sin(\frac{3\alpha - 5\alpha}{2})\cos(\frac{3\alpha + 5\alpha}{2})}{-2\sin(\frac{5\alpha + 3\alpha}{2})\sin(\frac{5\alpha - 3\alpha}{2})} = \frac{-2\sin \alpha \cos 4\alpha}{-2\sin 4\alpha \sin \alpha} = \frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha} = \cot 4\alpha$$

17- درستی رابطه زیر را بررسی کنید. (خرداد 87)

$$\frac{4\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)}{\sin 5\alpha + \sin \alpha} = \frac{1}{\sin 3\alpha}$$

$$\frac{4\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha)\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)}{\sin 5\alpha + \sin \alpha} = \frac{4 \times \frac{-1}{2} \left[\cos(\frac{\pi}{4} + \alpha + \frac{\pi}{4} - \alpha) - \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha - \frac{\pi}{4} + \alpha) \right]}{2\sin(\frac{5\alpha + \alpha}{2})\cos(\frac{5\alpha - \alpha}{2})}$$

$$= \frac{-2(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 2\alpha)}{2\sin 3\alpha \cos 2\alpha} = \frac{2\cos 2\alpha}{2\sin 3\alpha \cos 2\alpha} = \frac{1}{\sin 3\alpha}$$

18- عبارتهای زیر را به حاصل ضرب تبدیل کنید.

$$A = 2\cos x + \sqrt{3} \quad (\text{شهریور 89})$$

$$B = \cos^2 5x - \cos^2 x \quad (\text{شهریور 88})$$

$$C = 1 + 2\sin x \quad (\text{تالیفی})$$

$$D = \sin x + \sin 2x + \sin 3x \quad (\text{تالیفی})$$

$$A = 2\cos x + \sqrt{3} = 2\left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos x + \cos \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{6}}{2}\right)\cos\left(\frac{x - \frac{\pi}{6}}{2}\right) = 4\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{12}\right)\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$B = \cos^2 5x - \cos^2 x = (\cos 5x + \cos x)(\cos 5x - \cos x) = (2\cos 3x \cos 2x)(-2\sin 3x \sin 2x)$$

$$C = 1 + 2\sin x = 2\left(\frac{1}{2} + \sin x\right) = 2\left(\sin \frac{\pi}{6} + \sin x\right) = 4\sin\left(\frac{\frac{\pi}{6} + x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6} - x}{2}\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right)$$

$$D = \overbrace{\sin x + \sin 2x}^{2\sin 2x \cos x} + \sin 3x = \sin 2x + 2\sin 2x \cos x = 2\sin 2x\left(\frac{1}{2} + \cos x\right) = 2\sin 2x\left(\cos \frac{\pi}{3} + \cos x\right)$$

$$= 4\sin 2x \left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + x}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} - x}{2}\right) \right] = 4\sin 2x \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)$$

19- عبارت $A = \sin 2x \sin 3x$ را به حاصل جمع تبدیل کنید. (خرداد 84)

$$A = \sin 2x \sin 3x = -\frac{1}{2}[\cos(2x + 3x) - \cos(2x - 3x)] = -\frac{1}{2}(\cos 5x - \cos x) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\cos 5x$$

20- α زاویه‌ای حاده و β زاویه‌ای منفرجه، $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ است. مقدار $\cos(\alpha - \beta)$ را محاسبه کنید. (خرداد 94)

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{10}$$

21- با استفاده از فرمول $\sin(\alpha + \beta)$ و $\sin(\alpha - \beta)$ نشان دهید. (دی 94)

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\frac{1}{2}[\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta] = \frac{1}{2}[2\sin \alpha \cos \beta] = \sin \alpha \cos \beta$$

22- نشان دهید برای هر زاویه α داریم: $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ (شهریور 94)

روش اول:

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \frac{1 + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}{2} = \frac{(1 - \sin^2 \alpha) + (\cos^2 \alpha)}{2} = \frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{2} = \frac{2\cos^2 \alpha}{2} = \cos^2 \alpha$$

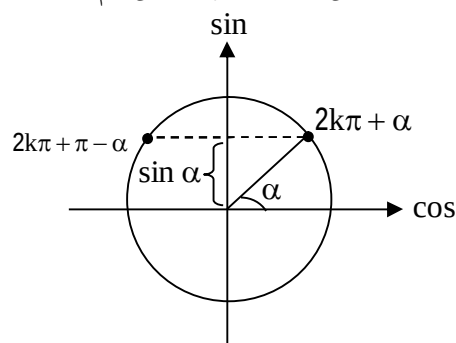
روش دوم:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow 2\cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

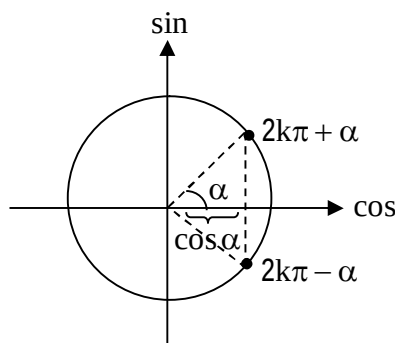
معادلات مثلثاتی

برای حل معادلات مثلثاتی، به نکات زیر دقت می کنیم:

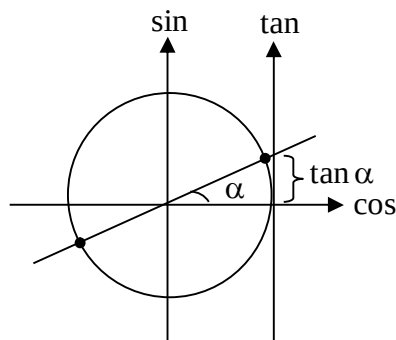
$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$$



$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha \quad (k \in \mathbb{Z})$$



1- معادله مقابل را حل کنید. (دی 92)

$$\sin \underbrace{5x}_x = \sin \underbrace{2x}_\alpha$$

$$\sin 5x = \sin 2x \Rightarrow \begin{cases} 5x = 2k\pi + 2x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \\ \text{یا} \\ 5x = 2k\pi + \pi - 2x \Rightarrow 7x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi + \pi}{7} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2- معادله مقابل را حل کنید. (خرداد 93)

$$2\sin^2 x + 9\cos x + 3 = 0$$

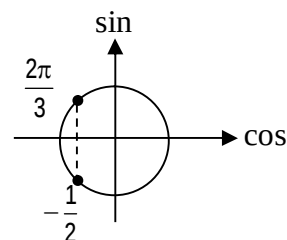
$$2\sin^2 x + 9\cos x + 3 = 0 \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + 9\cos x + 3 = 0 \Rightarrow 2 - 2\cos^2 x + 9\cos x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow -2\cos^2 x + 9\cos x + 5 = 0$$

$$\text{تغییر متغیر: } \cos x = t \Rightarrow -2t^2 + 9t + 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 81 + 40 = 121 \Rightarrow t = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{-4} = \frac{-9 \pm 11}{-4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 5 \text{ غیر قابل قبول} \\ \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$



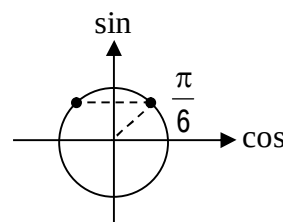
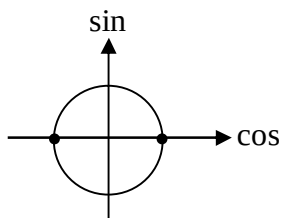
3- معادله مقابل را حل کنید. (دی 93)

$$2\sin^2 x - \sin x = 0$$

$$2\sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(2\sin x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ یا } x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$$

جوابها در بازه $[0, 2\pi]$:

$x = k\pi$	x	0	1	2
		0	π	2π
$x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$	x	0		
	y	$\frac{\pi}{6}$		
$x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$	x	0		
	y	$\frac{5\pi}{6}$		

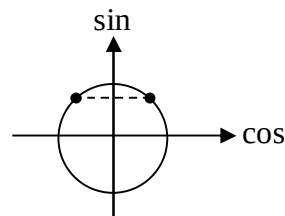
$$\text{مجموعه جواب} = \{0, \pi, 2\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$$

4- معادله مقابل را حل کنید. (شهریور 92)

$$\sin x - \cos x = 1$$

$$\sin x - \cos x = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



تذکر: برای حل این معادله از فرمول $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ استفاده کردیم.

5- کلیه جوابهای معادله مثلثاتی زیر را تعیین کنید. (خرداد 92)

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$\sin 2x - \sqrt{3} \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$\cos x (2 \sin x - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

6- کلیه جوابهای معادله مثلثاتی زیر را تعیین کنید. (دی 91)

$$\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 1$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{3 + \sqrt{1}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\cos x = \frac{3 - \sqrt{1}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

7- کلیه جوابهای معادله مثلثاتی زیر را تعیین کنید. (دی 90)

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

8- کلیه جواب‌ها معادله مثلثاتی زیر را تعیین کنید. (تالیفی)

$$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2\sin\left(\frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2}\right)\cos\left(\frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12} \\ x = 2k\pi + \frac{13\pi}{12} \end{cases}$$

9- کلیه جواب‌های معادله مثلثاتی زیر را تعیین کنید. (شهریور 90)

$$\tan x \tan 2x = 1$$

$$\tan x \cdot \tan 2x = 1 \Rightarrow \tan 2x = \frac{1}{\tan x} = \cot x$$

$$\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$$

10- کلیه جواب‌های معادله مثلثاتی زیر را تعیین کنید. (شهریور 91)

$$\sin x + \cos 2x - 1 = 0$$

$$\sin x + \cos 2x - 1 = 0 \Rightarrow \sin x + 1 - 2\sin^2 x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sin x(1 - 2\sin x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

11- معادله $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید. (خرداد 94)

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

12- معادله $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$ را حل کنید. (دی 94)

$$(\cos x - 1)(2\cos x - 1) = 0$$

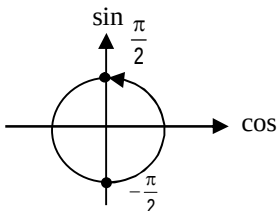
$$\cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

13- معادله $\sin^2 x = \cos^2 x + 1$ را حل کنید. (شهریور 94)

$$1 - \cos^2 x = \cos^2 x + 1 \Rightarrow 2\cos^2 x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

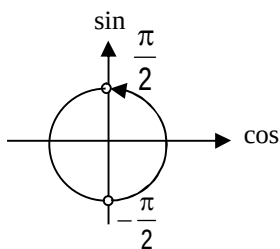
وارون توابع مثلثاتی



برد تابع $\sin^{-1} x$ بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ است. پس خروجی $\sin^{-1}$ ، زاویه‌ای بین $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ می‌باشد. اگر

$0 \leq x \leq 1$ باشد، $0 \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$ و اگر $-1 \leq x \leq 0$ باشد، $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq 0$ می‌باشد. هم‌چنین

$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$$

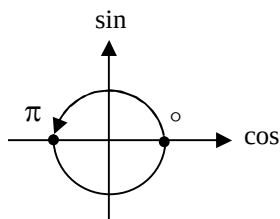


برد تابع $\tan^{-1} x$ بازه‌ی $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ است. اگر $x \geq 0$ باشد، $0 \leq \tan^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$ می‌باشد. هم‌چنین

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$$

برد تابع $\cos^{-1} x$ بازه‌ی $[0, \pi]$ است. اگر $0 \leq x \leq 1$ باشد، $0 \leq \cos^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$ و اگر $-1 \leq x \leq 0$ باشد،

$$\frac{\pi}{2} \leq \cos^{-1} x \leq \pi \text{ می‌باشد. ضمناً } \cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$$

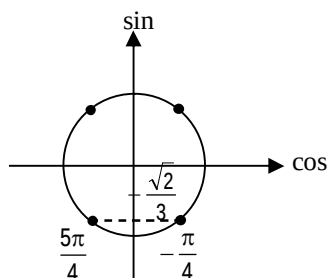


1- مطلوب است: (دی 93)

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

2- مطلوب است: (خرداد 93)

$$\sin^{-1}\left(\sin \frac{5\pi}{4}\right) = \sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$



(دقت کنید که $\sin^{-1} x$ همواره در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ می باشد و در

صورتی $\sin^{-1}(\sin \alpha) = \alpha$ است که $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ باشد.

3- مطلوب است (شهریور 92)

$$\sin^{-1}\left(\tan \frac{\pi}{4}\right) = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$$

4- مطلوب است (خرداد 92)

$$\sin\left(\underbrace{\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)}_{\alpha}\right)$$

$$\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

5- مطلوب است: (شهریور 93 و خرداد 90)

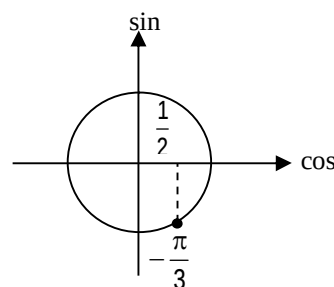
$$\cos^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{8}\right) \quad \cos^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{8}\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\cos \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

تذکر: $\cos^{-1}(\cos \alpha) = \alpha$ وقتی برقرار است که $0 \leq \alpha \leq \pi$ باشد.

6- مطلوب است: (شهریور 90)

$$\cos(\tan^{-1}(-\sqrt{3}))$$

$$\cos(\tan^{-1}(-\sqrt{3})) = \cos(-\tan^{-1}(\sqrt{3})) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$



7- مطلوب است: (دی 89 خارج از کشور)

$$\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\left(\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{1 - \frac{1}{2} \times 1} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3$$

دقت کنید که:

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{2} \quad \tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \tan \alpha = \frac{1}{2} \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

8- مقدار عبارت مقابل را بدست آورید. (دی 91)

$$\sin^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) \quad \sin^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

9- مقدار عبارت مقابل را بدست آورید. (تالیفی)

$$\tan\left(2\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right) \quad \tan\left(2\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right) \Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\xrightarrow{0 \leq \alpha \leq \pi} \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \tan\left(2\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right) = \tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{4}{3}}{1 - \frac{16}{9}} = \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}} = -\frac{24}{7}$$

10- برای هر x نشان دهید. (تالیفی)

$$\text{الف) } \cos(\tan^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{ب) } \sin(\tan^{-1} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{الف) } \cos(\underbrace{\tan^{-1} x}_{\alpha}) = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan^{-1} x = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = x \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha} = \frac{1}{1+x^2} \xrightarrow{-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}} \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\text{ب) } \sin(\underbrace{\tan^{-1} x}_{\alpha}) = \sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \begin{cases} \tan^{-1} x = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = x \\ \sin^2 \alpha = \frac{\tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha} \end{cases} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\tan \frac{4\pi}{3} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \rightarrow \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

11- مقدار $\tan^{-1}\left(\tan \frac{4\pi}{3}\right)$ را حساب کنید. (خرداد 94)12- حاصل $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ را بدست آورید. (دی 94)

$$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \alpha \rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

روش اول:

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} \rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4} \rightarrow \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

روش دوم:

13- حاصل $\sin^{-1}\left(\cos \frac{2\pi}{9}\right)$ را بدست آورید. (شهریور 94)

$$\sin^{-1}\left(\cos \frac{2\pi}{9}\right) = \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \cos \frac{2\pi}{9} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{9}\right) = \sin \frac{5\pi}{18} \Rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{18}$$

خودآزمایی

1- اگر α زاویه‌ای در ربع دوم باشد که $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\sin 2\alpha$ را محاسبه کنید.

2- معادله‌ی $\sin x + \cos x = 1$ را حل کنید.

3- مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف) $\cos^{-1}(\tan \frac{3\pi}{4})$

ب) $\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{2}}{2})$

4- سینوس زاویه 105° را حساب کنید.

5- معادله $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ را حل کنید.

6- حاصل $\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) + \tan^{-1}(\sqrt{3})$ را بنویسید.

7- درستی اتحاد روبرو را ثابت کنید.

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

8- معادله $2\sin^2 x - \sin x = 0$ را حل کنید.

9- مقدار $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$ را حساب کنید.

فصل چهارم: حد و پیوستگی توابع (4 نمره)

بررسی وجود حد از روی نمودار و ضابطه

1- با تکمیل جدول زیر، مقدار حد تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=1$ به دست آورید. (دی 93)

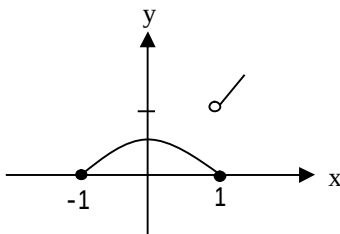
x	0/99	0/999	→	1	←	1/001	1/01
f(x)			→	?	←		

دقت کنید که برای اعداد بزرگ‌تر از 1، از ضابطه‌ی $2x$ و برای اعداد کوچک‌تر از 1، از ضابطه‌ی $x+1$ استفاده می‌کنیم:

x	0/99	0/999	→	1	←	1/001	1/01
f(x)	1/99	1/999	→	2	←	2/002	2/02

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

2- با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ ، مقادیر خواسته شده را به دست آورید. (شهریور 93)



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad (1)$$

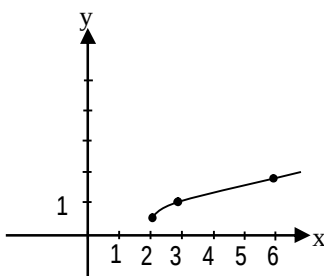
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

3- با رسم نمودار $y = \sqrt{x-2} + 1$ مقدار حد در اطراف نقطه‌ی $x=2$ بررسی کنید. (دی 92)



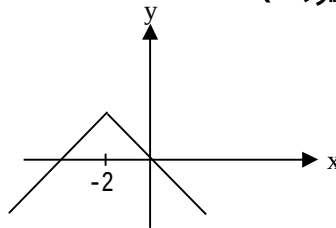
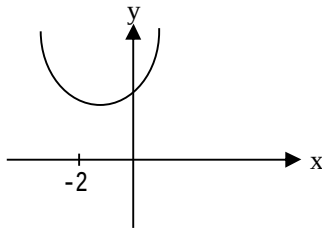
$$y = \sqrt{x-2} + 1 \quad x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

x	2	3	6
y	1	2	3

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$$

4- نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی 2- تعریف شده باشد و در این نقطه، حد داشته باشد و حد تابع برابر مقدار تابع در 2- باشد.

باید تابع در $x = -2$ پیوسته باشد. (شهریور 92)



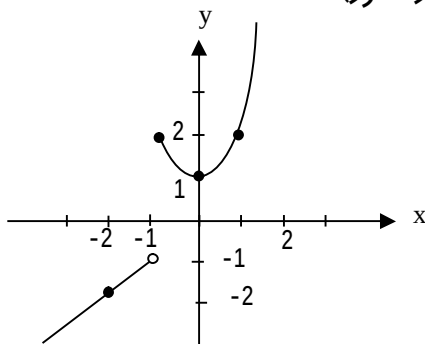
5- آیا تابع $f(x) = x - [x]$ در $x = 1$ حد دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید. حد چپ و راست تابع در $x = 1$ را به دست می آوریم: (خرداد 93)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x - [x] = \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x - [x] = \lim_{x \rightarrow 1^-} x = 1$$

چون حد چپ و حد راست برابر نیستند، تابع در $x = 1$ حد ندارد.

6- با استفاده از نمودار وجود حد تابع زیر را در نقطه‌ی $x = -1$ بررسی کنید. (دی 89 خارج از کشور)



$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq -1 \\ x & x < -1 \end{cases} \quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & 0 & 1 \\ y & 2 & 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} x & -1 & -2 \\ y & -1 & -2 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 2$$

بنابراین f در $x = -1$ حد ندارد.

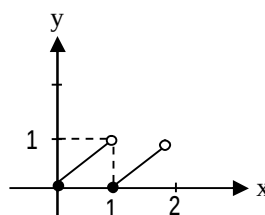
7- نمودار تابع $y = x - [x]$ را رسم کنید و با استفاده از آن وجود حد راست و حد چپ در نقطه‌ی 1 را مشخص کنید. (خرداد 92 خارج از کشور)

تابع را در بازه‌ی $[0, 2)$ رسم می کنیم:

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow y = x$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow y = x - 1$$

با توجه به نمودار داریم:



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

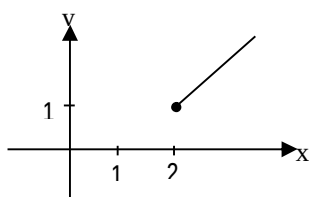
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$$

8- حد تابع $y = \frac{1}{[x]-3}$ را در $x = 3$ در صورت وجود، بیابید. (خرداد 92)

ابتدا دامنه‌ی تابع را به دست می‌آوریم: $[x]-3=0 \Rightarrow [x]=3 \Rightarrow 3 \leq x < 4 \Rightarrow D = \mathbb{R} - [3, 4) = (-\infty, 3) \cup [4, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{[x]-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{[x]-3} = \frac{1}{2-3} = -1$$

بنابراین تابع در همسایگی راست 3 تعریف نشده و داریم:



9- نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی راست 2 تعریف شده باشد، ولی در هیچ همسایگی چپ 2 تعریف نشده باشد و در این نقطه حد داشته باشد. (خرداد 91 خارج از کشور)

10- دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف a تعریف شده باشند و هیچ‌کدام در a حد نداشته باشند ولی $f \times g$ در a حد داشته باشد.

$$f = \begin{cases} 1 & x \geq a \\ 0 & x < a \end{cases}, \quad g = \begin{cases} 0 & x \geq a \\ 1 & x < a \end{cases} \quad f \times g = \begin{cases} 1 \times 0 = 0 & x \geq a \\ 0 \times 1 = 0 & x < a \end{cases} \Rightarrow f \times g = 0$$

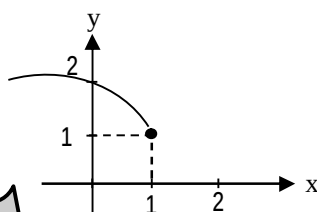
تابع ثابت 0 در همه‌جا پیوسته است.

11- حد تابع $y = \sqrt{2-x}$ را در $x = 2$ در صورت وجود بیابید. (خرداد 90)

دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ ، به صورت $D_f = (-\infty, 2]$ می‌باشد لذا فقط حد f را در همسایگی چپ 2 می‌توان محاسبه کرد.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2-x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2-x} = 0$$

12- با رسم نمودار تابع $y = \sqrt{1-x} + 1$ ، مقدار حد را در اطراف نقطه‌ی $a = 1$ بررسی کنید (دی 90)



$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{1-x} + 1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (\sqrt{1-x} + 1) = 1 \quad 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (\sqrt{1-x} + 1) = \text{تعریف نشده} \quad D_f \text{ با توجه به}$$

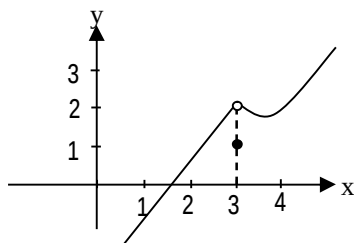
13- تابع f, g را طوری مثال بزنید که در اطراف a تعریف شده‌اند و f در a حد داشته باشد، g در a حد نداشته باشد ولی $f \times g$ در a دارای حد باشد (تالیفی)

تابع $f(x) = x - 1$ در نقطه $x = 1$ حد دارد و تابع $g(x) = [x]$ در $x = 1$ حد ندارد ولی تابع $f(x) \cdot g(x)$ در $x = 1$ حد دارد و

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)[x] = 0$$

14- نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در یک همسایگی 3 تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در 3 باشد. (خرداد 90)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2 \\ f(3) = 1 \end{cases}$$



15- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x > 2 \\ ax + 7 & x < 2 \end{cases}$ وقتی $x \rightarrow 2$ دارای حد باشد، مقدار a چه قدر است؟ (تالیفی)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + 7) = 2a + 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + x) = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \Rightarrow 2a + 7 = 6 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

16- در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{2x-b} & x \geq 2 \\ ax^2 + bx - 2 & x < 2 \end{cases}$ مقادیر a و b را چنان بیابید که $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 4$ باشد (شهریور 83)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+a}{2x-b} = 1 \Rightarrow \frac{2+a}{4-b} = 1 \Rightarrow 2+a = 4-b \Rightarrow a+b = 2 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (ax^2 + bx - 2) = a - b - 2 = 4 \Rightarrow a - b = 6 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \begin{cases} a+b=2 \\ a-b=6 \end{cases} \Rightarrow a=4, b=-2$$

17- تابع f با ضابطه $f(x) = a[x] + [x+1]$ مفروض است. مقدار a را چنان بیابید که $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود باشد (شهریور 85)

تابع در $x=1$ حد دارد بنابراین داریم:

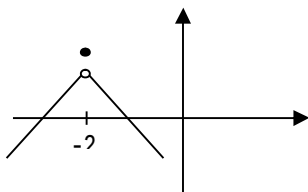
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a[x] + \overbrace{[x+1]}^{[x]+1}) = a+2 \quad (1) \quad (x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow [x] = 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (a[x] + \overbrace{[x+1]}^{[x]+1}) = a(0) + 0 + 1 = 1 \quad (2)$$

$$(x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow [x] = 0) \quad \xrightarrow{(1),(2)} a+2=1 \rightarrow a=-1$$

18- نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ی 2- تعریف شده باشد. در این نقطه حد داشته ولی حد آن غیر از مقدار تابع در عدد 2- باشد. (خرداد 94)



محاسبه‌ی حد:

1- حدود توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{2x^2+2x}$ (دی 93 و شهریور 92)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{2x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2}-1}{2x^2+2x} \times \frac{\sqrt{x+2}+1}{\sqrt{x+2}+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+2-1}{2x(x+1)(\sqrt{x+2}+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{2x(\sqrt{x+2}+1)} = -\frac{1}{4}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\sin x - \cos x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} -(\cos x + \sin x) = -\left(\sqrt{\frac{2}{2}} + \sqrt{\frac{2}{2}}\right) = -\sqrt{2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+3x-5}{x^2-1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+3x-5}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+5)}{(x-1)(x+1)} = \frac{7}{2}$$

تذکر: برای تجزیه ی $2x^2 + 3x - 5$ می توانیم آن را بر عامل صفرکننده یعنی $x - 1$ تقسیم کنیم. ببینید:

$$2x^2 + 3x - 5 \quad \left| \begin{array}{l} x - 1 \\ 2x + 5 \end{array} \right.$$

$$2x^2 - 2x$$

$$5x - 5$$

$$5x - 5$$

$$0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 \times 1 = 2 \quad (\text{شهریور 93})$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \tan \left(\frac{\pi}{8} \times x \right) \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \tan \left(\frac{\pi}{8} \times x \right) = 0 \times 1 = 0 \quad (\text{شهریور 93})$$

تذکر: این حد ابهامی ندارد و با جایگذاری حل می شود.

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 3x}{2x^2} \quad (\text{خرداد 93})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 3x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{2x^2} + \frac{\sin^2 3x}{2x^2} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \times \sin 3x \times \frac{\sin 3x \times (3x)}{3x}}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \times 3x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{9}{2} = 5$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{6}{5} \quad (\text{شهریور 92})$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \sqrt{x+1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \sqrt{x+1} = 0 \times \sin 1 = 0 \quad (\text{دی 91})$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - [x]) \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} (x - [x]) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x - 3 = 0 \quad (\text{خرداد 91})$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-2} \times \frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{2x-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{2x}+2)}{2(x-2)} = 2 \quad (\text{شهریور 90})$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times \sin x \times \sin x}{3 \times x \times x} = \frac{2}{3}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{3x^2 - 12} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{3x^2 - 12} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{3(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{3(x+2)} = 1 \quad (\text{خرداد 90})$$

$$13) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 - 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - x - 1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 1}{x-1} = \frac{1}{-2} \quad (\text{شهریور 90})$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{1 - \cos x}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2x}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{2}} = \frac{2}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{4}{\sqrt{2}} \quad (\text{خرداد 90})$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x^2 - 5x - 24} \Rightarrow \quad (\text{شهریور 89})$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{(x-8)(x+3)} \times \frac{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4} = \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x-8)}{(x-8)(x+3)(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4)} = \frac{1}{132}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{|\cos x|}{x - \frac{\pi}{2}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\cos x}{\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{-(\frac{\pi}{2} - x)} = 1 \quad (\text{شهریور 89})$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - x)}{-(\frac{\pi}{2} - x)} = -1 \quad \Rightarrow 1 \neq -1 \quad \text{حد موجود نیست}$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 3}{x^2 - 9} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 3}{x^2 - 9} = \frac{[3^+] - 3}{0^+} = \frac{0 \text{ مطلق}}{0^+} = 0 \quad (\text{خرداد 89})$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x - \pi)}{x - \frac{\pi}{3}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x - \pi)}{x - \frac{\pi}{3}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{3 \sin(3x - \pi)}{3x - \pi} = 3 \times 1 = 3 \quad (\text{دی 88})$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - \sin 5x}{\sqrt{1 - \cos 4x}} \Rightarrow \quad (\text{خرداد 89})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - \sin 5x}{\sqrt{1 - \cos 4x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin(-2x) \cos 3x}{\sqrt{2} |\sin 2x|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2 \sin 2x \cos 3x}{-\sqrt{2} \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos 3x}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] + |x|}{x + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x] + |x|}{x + 1} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x + 1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1 - x}{x + 1} = -1 \end{cases} \Rightarrow 0 \neq -1 \quad \text{حد ندارد} \quad (\text{شهریور 88})$$

2- اگر به ازای هر x داشته باشیم $|f(x) - 1| \leq (3 - x)^4$ ، آن گاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ را محاسبه کنید (خرداد 81)

یادآوری: $|u| \leq a \iff -a \leq u \leq a$

$$|f(x) - 1| \leq (3 - x)^4 \Rightarrow -(3 - x)^4 \leq f(x) - 1 \leq (3 - x)^4 \xrightarrow{+1} -(3 - x)^4 + 1 \leq f(x) \leq (3 - x)^4 + 1$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3} -(3 - x)^4 + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3} (3 - x)^4 + 1 = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{قضیه فشردگی}} \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$$

3- با استفاده از قضیه فشردگی حد زیر را محاسبه کنید (تالیفی)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2} \cos \frac{1}{x} \quad -1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1 \xrightarrow{x \sqrt[3]{x^2}} -\sqrt[3]{x^2} \leq \sqrt[3]{x^2} \cos \frac{1}{x} \leq \sqrt[3]{x^2}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (-\sqrt[3]{x^2}) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{قضیه فشردگی}} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x^2} \cos \frac{1}{x} = 0$$

4- با استفاده از قضیه فشردگی حد زیر را محاسبه کنید (شهریور 85)

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) \sin \frac{1}{x - 3} \quad (x \rightarrow 3^+ \Rightarrow x > 3 \Rightarrow x^2 > 9 \Rightarrow x^2 - 9 > 0)$$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x - 3} \leq 1 \xrightarrow{\times (x^2 - 9)} -(x^2 - 9) \leq (x^2 - 9) \sin \frac{1}{x - 3} \leq (x^2 - 9)$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} -(x^2 - 9) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{قضیه فشردگی}} \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \sin \frac{1}{x - 3} = 0$$

در حالت $x \rightarrow 3^-$ نیز به همین شکل است فقط جهت نامساوی عوض می شود بنابراین: $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 9) \sin \frac{1}{x - 3} = 0$

5- توابع زیر را در صورت وجود بیابید (خرداد 94)

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\frac{x}{2}}$

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{x - 1} = 5$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right|}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = -\sqrt{2}$

6- حدهای زیر را بدست آورید. (دی 94)

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{2 - 2 \cos x}}$

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - \sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x+\sqrt{x})}{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x+\sqrt{x})}{x^2 - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x+\sqrt{x})}{x(x-1)} = \frac{(1+1)(1+\sqrt{1})}{1} = 4 \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{2(1 - \cos x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin \frac{x}{2}} = 2$$

7- حد و توابع زیر را در صورت وجود بیابید. (شهریور 94)

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - x^2}{x^2 + 6x + 5}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{x^2}$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - x^2}{x^2 + 6x + 5} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1-x)(1+x)}{(x+1)(x+5)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos 2x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x \times \sin x}{x \times x} = 4$$

8- حد راست و چپ تابع $f(x) = x - [x]$ را در $x = 2$ محاسبه کنید (شهریور 94)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x - [x]) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x - [x]) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x - 1) = 1$$

9- حد تابع $y = x \sin \frac{1}{x}$ را در نقطه $x = 0$ بدست آورید (دی 94)

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1 \xrightarrow{x > 0} -x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (-x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} x$$

$$\rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{x}) \leq 0 \xrightarrow{\text{طبق قضیه فشردگی}} \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

به همین ترتیب برای $x < 0$ نیز برقرار است.

10- حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin \frac{x}{2}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2 \sin^2 x}}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} |\sin x|}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} \sin x}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} \times x \times \frac{\sin x}{x}}{\frac{x}{2} \times \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}} = 2\sqrt{2} \quad (\text{شهریور 90})$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{[x] - 3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{[x] - 3} = \frac{1}{2 - 3} = -1 \quad (\text{دی 90})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right)}{2x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} \times \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{2x \left(\frac{x \sin x}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{x}{2}\right) \left(\frac{x}{2}\right)}{2x(x)} = \frac{1}{4} \quad (\text{دی 89 خارج از کشور})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 1}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + 1}{\cos x} = \frac{0 + 1}{1} = 1 \quad (\text{خرداد 92 خارج از کشور})$$

برای پیوستگی تابع در $X = a$ باید حد تابع با مقدار تابع در $X = a$ برابر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

1- پیوستگی تابع زیر را در نقطه‌ی $a = 1$ بررسی کنید. (دی 93)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

$$f(1) = 1$$

چون حد تابع با مقدار تابع در $a = 1$ برابر نیست، پس تابع در $a = 1$ پیوسته نیست.

2- پیوستگی تابع زیر را در $x = 1$ بررسی کنید. (دی 92)

$$f(x) = \begin{cases} 4 - 3x & x \leq 1 \\ 2x^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 4 - 3x = 1 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x^2 + 1 = 3$$

چون حد چپ و راست تابع با هم برابر نیست، پس تابع در $x = 1$ پیوسته نمی‌باشد.

3- در تابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع پیوسته باشد. (شهریور 93)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} & x < 2 \\ ax + 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x(x - 2)}{x - 2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} ax + 1 = 2a + 1 = f(2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2a + 1 = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

باید حد چپ و حد راست و مقدار تابع با هم برابر باشند.

4- مقدار m را به گونه‌ای بیابید که تابع زیر در نقطه‌ی $a = 1$ پیوسته باشد. (دی 89 خارج از کشور)

$$f(x) = \begin{cases} |x-1| & x < 1 \\ 1-x & x = 1 \\ mx+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x}{1-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} mx+1 = m+1 = f(1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow m+1=1 \Rightarrow m=0$$

باید حد چپ و حد راست و مقدار تابع در $a=1$ با هم برابر باشند.

5- مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع زیر در $x=1$ پیوسته باشد. (خرداد 90 خارج از کشور)

$$f(x) = \begin{cases} [x] + bx & x > 1 \\ 2 & x = 1 \\ \frac{|x-1|}{x^2-1} + a & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + bx = 1 + b \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x^2-1} + a = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} + a = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-1}{(x+1)} + a = \frac{1}{2} + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} + a = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{2} \\ 1 + b = 2 \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$x=1$ پیوسته $\Rightarrow$ تابع در $x=1$ پیوسته

6- پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ را در نقطه‌ی $x=4$ بررسی کنید. (خرداد 90)

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{x-4} = 0$$

چون حد تابع با مقدار تابع برابر است، پس تابع در $x=4$ پیوسته است. دقت کنید که چون دامنه‌ی تابع $[4, +\infty)$ است، حد تابع در $x=4$ همان حد راست می‌شود.

7- مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x=1$ پیوسته باشد. (خرداد 91)

$$f(x) = \begin{cases} a - |x-1| & x \geq 1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} a - |x-1| = \lim_{x \rightarrow 1^+} a - (x-1) = a = f(1) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = 3$$

$$\text{شرط پیوستگی: } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow a = 3$$

8- آیا تابع $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ در 2 پیوسته است؟ چرا؟ (شهریور 90)

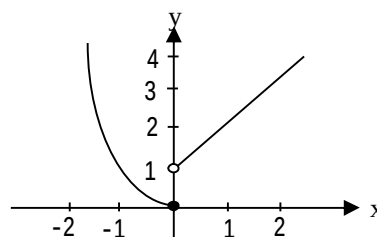
خیر، زیرا تابع f در $x=2$ تعریف نشده است و در مورد پیوستگی آن نمی توان صحبتی کرد.

9- ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$ را رسم کنید. سپس با بررسی حدود چپ و راست، پیوستگی تابع را در $x=0$ بررسی کنید. (خرداد 93)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x+1 & x > 0 \end{cases}$$

$\frac{x}{y}$	-2	-1	0
$\frac{y}{x}$	4	1	0

$\frac{x}{y}$	0	1
$\frac{y}{x}$	1	2



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

چون حد چپ و حد راست با هم برابر نیست، پس تابع در $x=0$ پیوسته نیست.

10- مقادیر a, b را طوری تعیین کنید که تابع f در نقطه $x = 0$ پیوسته باشد. (شهریور 89)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} & x > 0 \\ a + 1 & x = 0 \\ [x + 2] + b & x < 0 \end{cases}$$

حد راست: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 - \cos x} = 2$

حد چپ: $\lim_{x \rightarrow 0^-} ([x] + 2 + b) = -1 + 2 + b = 1 + b$

تابع: $f(0) = a + 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 + b = 2 \\ a + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow b = 1, a = 1$

11- تابع f به معادله‌ی زیر در نقطه $x = 3$ پیوسته است. $a + b$ را بدست آورید (خرداد 89)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 9|}{x - 3} + ax + 5 & x < 3 \\ 2 & x = 3 \\ \frac{2x - 6}{x^2 - 5x + 6} + bx & x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \left(\frac{-(x-3)(x+3)}{x-3} + ax + 5 \right) = 3a - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{2(x-3)}{(x-3)(x-2)} + bx \right) = 2 + 3b$$

$$f(3) = 2 \Rightarrow \begin{cases} 3a - 1 = 2 \\ 2 + 3b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 0 \Rightarrow a + b = 1$$

12- مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = 1$ پیوسته باشد. (خرداد 94)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & 0 \leq x < 1 \\ [x] + a & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + a = 1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \rightarrow 1 + a = \frac{1}{2} \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

13- پیوستگی تابع زیر را در $x = -1$ بررسی کنید (دی 94)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & x \leq -1 \\ 2x+1 & x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{-x} = \frac{1}{-(-1)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 2x+1 = 2(-1)+1 = -1 \quad f(-1) = 1$$

f در $x = -1$ پیوسته نمی باشد $\Rightarrow$ حد راست $\neq$ حد چپ = مقدار تابع14- پیوستگی تابع زیر را در $a = 1$ بررسی کنید. (شهریور 94)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & x > 1 \\ x - \frac{1}{2} & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1}{2} \neq 1 = f(1) \Rightarrow \text{تابع در این نقطه پیوسته نیست}$$

خودآزمایی

1- با تکمیل جدول زیر وجود حد تابع $f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$ وقتی $x \rightarrow 1$ را بررسی کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

x	0/99	0/999	1	1/001	1/01
f(x)					

2- حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 - 1} =$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\cos 2x} =$

3- a را چنان بیابید که تابع زیر در $x = 2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a[x] + 1 & x \geq 2 \\ \frac{|x-2|}{x-2} & x < 2 \end{cases}$$

4- نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی راست 1- تعریف شده باشد ولی در هیچ همسایگی چپ 1- تعریف نشده باشد و در این نقطه حد راست داشته باشد.

5- حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 6}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin 5x}$

6- در تابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a|x| + 1 & x \leq 1 \\ x^2 + 2ax + 2 & x > 1 \end{cases}$$

7- آیا تابع $f(x) = \frac{x}{|x|}$ در $a = 0$ حد دارد؟ چرا؟

8- حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 4}{2x^2 - 2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 2x}{1 - \cos x}$

9- پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ را در نقطه $a = 1$ بررسی کنید.

فصل پنجم: مشتق توابع (5 نمره)

مشتق پذیری با استفاده از تعریف مشتق و کاربرد آن

اگر f در همسایگی نقطه‌ی $X = a$ تعریف شده باشد، در این صورت حد زیر را در صورت وجود مشتق تابع f در a می‌نامیم.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

اگر تابع f در یک همسایگی راست $X = a$ تعریف شده باشد $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ را در صورت وجود، مشتق راست f در a می‌نامیم و با $f'_+(a)$ نشان می‌دهیم و اگر در همسایگی چپ $X = a$ تعریف شده باشد، $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ را در صورت وجود، مشتق چپ f در a می‌نامیم و با $f'_-(a)$ نمایش می‌دهیم.

* مشتق پذیری یک تابع در نقطه‌ی درونی a معادل با آن است که مشتق‌های چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و با هم مساوی باشند.

تعبیر هندسی مشتق:

مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول $X = a$ ، شیب خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ای به طول $X = a$ می‌باشد. بنابراین برای به دست آوردن معادله‌ی خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ای به طول a ، شیب آن را از $m = f'(a)$ به دست می‌آوریم و برای شیب خط قائم از $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{f'(a)}$ استفاده می‌کنیم.

1- با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = x^3$ را در نقطه‌ی دلخواه a حساب کنید. سپس معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع را در نقطه‌ی $A(1,1)$ به دست آورید. (خرداد 93)

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} x^2 + ax + a^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

برای نوشتن معادله‌ی خط قائم، ابتدا شیب خط مماس در $X = 1$ را به دست می‌آوریم، سپس آن را قرینه و معکوس می‌کنیم تا شیب خط قائم در $X = 1$ به دست آید:

$$m_{\text{مماس}} = f'(1) = 3(1)^2 = 3 \Rightarrow m_{\text{قائم}} = -\frac{1}{3}$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

2- با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x} + 1$ را در نقطه‌ی $x = 1$ محاسبه کنید. (شهریور 93)

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 1 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

3- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \leq 1 \\ x^2 + 3 & x > 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید. (دی 92)

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x + 1 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x - 1)}{x - 1} = 3$$

چون $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ پس تابع f در $x = 1$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

4- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق‌های چپ و راست تابع زیر را در $x = 2$ ، در صورت وجود بیابید. (خرداد 92)

$$f(x) = |x - 2| \quad f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1$$

چون $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ است، پس تابع f در $x = 2$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

5- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{x + 1}$ را در $x = 2$ حساب کنید. (شهریور 90)

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{3}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{3 - (x + 1)}{3(x + 1)}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x + 2}{3(x + 1)(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{3(x + 1)} = \frac{-1}{9}$$

6- آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق پذیر است؟ (دلیل خود را توضیح دهید.) (خرداد 91)

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$$

وجود ندارد

بنابراین f در $x=0$ مشتق پذیر نمی باشد.

7- اگر f تابع مشتق پذیری در نقطه‌ای a باشد و c عدد دلخواهی باشد، با محاسبه نشان دهید تابع cf نیز در نقطه‌ای a مشتق پذیر است و $(cf)'(a) = cf'(a)$. (دی 90)

$$(cf)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(cf)(x) - (cf)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{cf(x) - cf(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c(f(x) - f(a))}{x - a} = c \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = cf'(a)$$

8- اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه‌ای a تعریف شده باشد و ناصفر باشد و f در a مشتق پذیر باشد و $f'(a) \neq 0$ ، با استفاده از تعریف نشان دهید که $\frac{1}{f}$ نیز در a مشتق پذیر است و $(\frac{1}{f})'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$. (خرداد 90)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{f}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{1}{f}\right)(x) - \left(\frac{1}{f}\right)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{f(a) - f(x)}{f(x)f(a)}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(a) - f(x)}{(x - a) \times f(x)f(a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-(f(x) - f(a))}{x - a} \times \frac{1}{f(x)f(a)} = -f'(a) \times \frac{1}{f(a)f(a)} = -\frac{f'(a)}{f^2(a)} \end{aligned}$$

9- مشتق پذیری تابع $y = \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x + 1}$ را در نقطه‌ای $x = 1$ بررسی کنید. (دی 89 خارج از کشور)

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x + 1} - \frac{\sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 + 1}}{1 + 1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \\ f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

چون $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ است، پس تابع f در $x = 1$ مشتق پذیر نیست.

10- با استفاده از تعریف مشتق، وجود مشتق‌های راست و چپ و مشتق‌پذیر بودن تابع $f(x) = |x - 3|$ را در نقطه $x = 3$ بررسی کنید (دی 93)

مشتق‌پذیر نیست، زیرا

$$f'_+(3) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3| - 0}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1 \quad f'_-(3) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

11- مشتق تابع $y = x^3$ را در $x = 1$ ، با استفاده از تعریف مشتق بیابید. (دی 91)

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

12- مشتق‌پذیری تابع $\begin{cases} x^2 - 2 & x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x + 1 & x > 2 \end{cases}$ را در $x = 2$ بررسی کنید (خرداد 90)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2 = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2}x + 1 = f(2) = 2$$

تابع در $x = 2$ پیوسته است، زیرا:

مشتق‌پذیری را بررسی می‌کنیم.

$$\text{مشتق چپ: } f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x^2 - 2) - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4 \quad (1)$$

$$\text{مشتق راست: } f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\frac{1}{2}x + 1) - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{1}{2}(x-2)}{x-2} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

در $x = 2$ مشتق‌پذیر نیست $\rightarrow (1), (2)$

13- با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = x^2 + 1$ را در نقطه a محاسبه کنید. (خرداد 94)

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 1 - (a^2 + 1)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = 2a$$

14- اگر $f(x)$ تابعی مشتق پذیر در نقطه‌ای مانند a باشد نشان دهید $g(x) = f(x) + b$ نیز در نقطه a مشتق پذیر بوده و مشتق آن برابر است با $g'(a) = f'(a)$ (دی 94)

$$g'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \frac{f(a+h) + b - (f(a) + b)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

15- با استفاده از تعریف، مشتق پذیری تابع $f(x) = x|x-2|$ را در نقطه $x=2$ مورد بررسی قرار دهید. (شهریور 94)

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x|x-2| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x-2)}{x-2} = 2 \quad f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x(x-2)}{x-2} = -2$$

پس تابع مشتق پذیر نیست.

فرمول‌های مشتق

$$(1) y = c \rightarrow y' = 0 \quad c \in \mathbb{R}$$

$$(2) y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$$

$$(3) y = u \pm v \rightarrow y' = u' \pm v'$$

$$(4) y = u \times v \rightarrow y' = u'v + v'u$$

$$(5) y = \frac{u}{v} \rightarrow y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(6) y = \sin u \rightarrow y' = u' \cos u$$

$$(7) y = \cos u \rightarrow y' = -u' \sin u$$

$$(8) y = \tan u \rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u)$$

$$(9) y = \cot u \rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u)$$

$$(10) (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$(11) y = \sin^{-1} u \rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u'^2}}$$

$$(12) y = \cos^{-1} u \rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u'^2}}$$

$$(13) y = \tan^{-1} u \rightarrow y' = \frac{u'}{1+u'^2}$$

$$(14) y = \sqrt[n]{u^m} \rightarrow y' = \frac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{n-m}}}$$

مشتق توابع زیر را بیابید. (ساده کردن الزامی نیست.)

$$1) y = (3x^2 + 5x)(4x^2 + \sin x) \Rightarrow y' = (6x + 5)(4x^2 + \sin x) + (8x + \cos x)(3x^2 + 5x) \quad (\text{دی } 92)$$

$$2) y = \sqrt{4 - x^2} + 2\sin^{-1} x \Rightarrow y' = \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (\text{دی } 93)$$

$$3) y = (3x^2 - \sqrt{x} + 5)^3 \Rightarrow y' = \left(6x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \times 3(3x^2 - \sqrt{x} + 5)^2 \quad (\text{شهریور } 93)$$

$$4) y = (3x + 5)\cos(4x^3 + 1) \Rightarrow y' = 3\cos(4x^3 + 1) + 12x^2(-\sin(4x^3 + 1))(3x + 5) \quad (\text{شهریور } 93)$$

$$5) y = \frac{3x^3 - 1}{2x + 1} \Rightarrow y' = \frac{9x^2(2x + 1) - 2(3x^3 - 1)}{(2x + 1)^2} \quad (\text{خرداد } 93)$$

$$6) y = (x^2 + 1)^3 \Rightarrow y' = 2x \times 3(x^2 + 1)^2 \quad (\text{خرداد } 93)$$

$$7) y = 2\tan^{-1} x \Rightarrow y' = \frac{2}{1 + x^2} \quad (\text{خرداد } 93)$$

$$8) y = \sqrt{\sin 5x} \Rightarrow y' = 5 \times \cos 5x \times \frac{1}{2\sqrt{\sin 5x}} \quad (\text{شهریور } 92)$$

$$9) y = x(x^5 + 1) = x^6 + x \Rightarrow y' = 6x^5 + 1 \quad (\text{خرداد } 92)$$

$$10) y = \sqrt[3]{x} + \cos^{-1} x \Rightarrow y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{خرداد 92})$$

$$11) y = \sqrt[3]{5x^2 - 1} \Rightarrow y' = 10x \times \frac{1}{3\sqrt[3]{(5x^2 - 1)^2}} \quad (\text{شهریور 91})$$

$$12) y = (2x + 3)^5 (\sin x) \Rightarrow y' = 2 \times 5(2x + 3)^4 (\sin x) + \cos x (2x + 3)^5 \quad (\text{شهریور 91})$$

$$13) y = \frac{1}{x+1} + \tan^{-1} x \Rightarrow y' = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{شهریور 91})$$

$$14) y = 3(2x - 5)^4 + \sqrt[3]{x} \Rightarrow y' = 3 \times 2 \times 4(2x - 5)^3 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \quad (\text{خرداد 91})$$

$$15) y = (4x^5 + 2) \cos x \Rightarrow y' = (20x^4) \cos x - (\sin x)(4x^5 + 2) \quad (\text{خرداد 94})$$

$$16) y = \sqrt[3]{x^2 + \sin x - 1} \Rightarrow y' = \frac{2x + \cos x}{3\sqrt[3]{(x^2 + \sin x - 1)^2}} \quad (\text{خرداد 94})$$

$$17) y = 1 + 3 \cos^{-1} x \Rightarrow y' = 3 \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{خرداد 94})$$

$$18) f(x) = (x^3 + 5x) \sin^{-1} x \Rightarrow f'(x) = (\sin^{-1} x)(3x^2 + 5) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} (x^3 + 5x) \quad (\text{شهریور 94})$$

$$19) g(x) = (\tan x + 3x^2)^5 \Rightarrow g'(x) = 5(\tan x + 3x^2)^4((1 + \tan^2 x) + 6x) \quad (\text{شهریور 94})$$

$$20) y = \sqrt[3]{\cos x} + 2\sin^{-1} x \Rightarrow y' = \frac{1 \times (-\sin x)}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}} + \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{دی 94})$$

$$21) y = (2x - x^3)^5(\sqrt{2x}) \Rightarrow y' = 5(2x - x^3)^4(2 - 3x^2)(\sqrt{2x}) + \frac{2}{2\sqrt{2x}}(2x - x^3)^5 \quad (\text{دی 94})$$

$$22) y = \frac{\sin \sqrt{x}}{1+x^2} \Rightarrow y' = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \times \cos \sqrt{x}\right)(1+x^2) - 2x(\sin \sqrt{x})}{(1+x^2)^2} \quad (\text{خرداد 91})$$

$$23) y = \sqrt[3]{x^5 - \cos 2x} \Rightarrow y' = 5x^4 - 2(-\sin 2x) \times \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^5 - \cos 2x)^2}} \quad (\text{دی 90})$$

$$24) y = 2\tan^{-1} x + 3\sin^{-1} x + \frac{4}{x} \Rightarrow y' = \frac{2}{1+x^2} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{x^2} \quad (\text{خرداد 90})$$

$$25) y = \sqrt{1-2\cos 3x} \Rightarrow y' = \frac{-2 \times 3 \times (-\sin 3x)}{2\sqrt{1-2\cos 3x}} \quad (\text{خرداد 90})$$

$$26) y = \sin(\sqrt{2x+5}) \Rightarrow y' = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x+5}} \times \cos(\sqrt{2x+5}) \quad (\text{شهریور 90})$$

$$27) y = (1 + \tan x) \cos^{-1} x \Rightarrow y' = (1 + \tan^2 x) \cos^{-1} x + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}(1 + \tan x) \quad (\text{شهریور 90})$$

آهنگ تغییرات لحظه‌ای و متوسط

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

آهنگ تغییرات متوسط تابع f در دو مقدار x_1 و x_2 از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

آهنگ لحظه‌ای (آنی):

آهنگ تغییرات تابع f در لحظه‌ی x_0 برابر $f'(x_0)$ است.

1- آهنگ تغییرات مساحت دایره نسبت به محیط آن، برای دایره‌ای به محیط 3π را بیابید، ابتدا باید فرمول مساحت دایره را برحسب محیط آن به دست آوریم. (دی 93)

$$P = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{P}{2\pi}, \quad S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{P}{2\pi} \right)^2 = \frac{P^2}{4\pi}$$

حال مشتق S نسبت به P را محاسبه می‌کنیم:

$$S'(P) = \frac{2P}{4\pi} = \frac{P}{2\pi} \Rightarrow P = 3\pi \text{ در } 3\pi \quad S'(3\pi) = \frac{3\pi}{2\pi} = \frac{3}{2}$$

2- آهنگ تغییرات مساحت یک دایره که قطر آن 4 است را به دست آورید. (دی 92)

$$r = 2, \quad S(r) = \pi r^2 \Rightarrow S'(r) = 2\pi r \Rightarrow S'(2) = 4\pi$$

3- آهنگ تغییرات حجم یک کره نسبت به شعاع آن هنگامی که حجم کره $\frac{\pi}{6}$ سانتی‌متر مکعب است، را حساب کنید. (دی 89 خارج از کشور)

ابتدا شعاع کره در لحظه‌ای که حجم آن $\frac{\pi}{6}$ است را به دست می‌آوریم:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow 4r^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow r^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$V'(r) = 4\pi r^2 \Rightarrow V'\left(\frac{1}{2}\right) = 4\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$$

4- آهنگ تغییر مساحت مربع نسبت به ضلع آن در لحظه‌ای که محیط آن 8 واحد است را به دست آورید. ابتدا ضلع مربع را به دست می‌آوریم: (خرداد 90 خارج از کشور)

$$P = 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

$$S = a^2 \Rightarrow S' = 2a \Rightarrow S'(2) = 4$$

تذکر: اگر در سوال آهنگ تغییرات مساحت نسبت به محیط را خواسته بود، باید مساحت را برحسب محیط به دست می‌آوردیم و مشتق می‌گرفتیم.

5- آهنگ تغییرات مساحت یک مربع را نسبت به محیط آن برای مربعی که محیط آن 16 واحد است به دست آورید. (خرداد 90)

$$\left. \begin{array}{l} S = x^2 \\ P = 4x \Rightarrow x = \frac{P}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow S(P) = \frac{P^2}{16} \Rightarrow S'(P) = \frac{P}{8} \Rightarrow S'(16) = 2$$

6- آهنگ تغییرات مساحت دایره به شعاع $R = 4$ را بدست آورید (خرداد 94)

$$S(R) = \pi R^2 \rightarrow S'(R) = 2\pi R \rightarrow S'(4) = 8\pi$$

7- محیط هر دایره‌ای تابعی از مساحت آن است. تغییرات محیط دایره را نسبت به مساحت آن برای دایره‌ای به مساحت 2π حساب کنید. (دی 94)

$$P = 2\pi R \quad (\text{محیط دایره})$$

$$S = \pi R^2 \rightarrow R^2 = \frac{S}{\pi} \rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad P = 2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}} \rightarrow P'(S) = 2\pi \frac{1}{2\sqrt{\pi S}} \xrightarrow{S=2\pi} \frac{2\pi}{2\sqrt{2\pi^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

خط مماس و قائم بر منحنی - تابع صعودی - تابع نزولی

1- با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = x^3$ را در نقطه دلخواه a حساب کنید. سپس معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع را در نقطه $A(1,1)$ به دست آورید. (خرداد 93)

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = 3a^2$$

$$m_1 = 3 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

2- در چه نقاطی از بازه‌ی $[0, 2\pi]$ ، خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \sin x$ موازی محور x ها است؟ (خرداد 93)

$$f'(x) = \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$$

3- معادله خط قائم بر منحنی تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ را در نقطه‌ای به طول $x = 2$ بیابید. (شهریور 93)

$$f(2) = 4 \Rightarrow f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow \text{مماس} = f'(2) = -3 \quad \rightarrow \quad \text{قائم} \quad m = \frac{1}{3} \quad y - 4 = \frac{1}{3}(x - 2)$$

4- نقطه‌ای از نمودار تابع $y = x^2 + 3x$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی تابع در این نقطه موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد (شهریور 92)

$$\left. \begin{array}{l} y = x \Rightarrow m_1 = 1 \\ y' = 2x + 3 \Rightarrow m_2 = 2a + 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 3 = 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow A(-1, -2)$$

5- معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{x}{x-2}$ را در نقطه‌ی $A = (3, 3)$ به دست آورید (خرداد 92)

$$y' = \frac{(x-2) - x}{(x-2)^2} \Rightarrow m = f'(3) = \frac{-2}{1} = -2 \quad y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = -2(x - 3) \Rightarrow y = -2x + 9$$

6- معادله خط قائم بر منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ را در نقطه‌ای به طول 1 بنویسید (شهریور 94)

$$y' = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} \quad m = -\frac{1}{8} \Rightarrow m' = 8, \quad x=1 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow y - \frac{1}{2} = 8(x-1)$$

7- حدود m را چنان تعیین کنید که تابع $f(x) = x^3 + mx^2 + x$ همواره صعودی باشد (تالیفی)

$$f(x) = x^3 + mx^2 + x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2mx + 1 \xrightarrow{f'(x) > 0}$$

$$3x^2 + 2mx + 1 > 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow 4m^2 - 12 < 0 \end{cases} \Rightarrow m^2 < 3 \Rightarrow -\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$$

8- در چه بازه‌ای تابع $f(x) = 3x^3 - 18x$ اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی است (تالیفی)

مشتق تابع را محاسبه و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x) = 9x^2 - 18$	+	$\bigcirc$	$\bigcirc$	+

$$f(x) = 3x^3 - 18x \Rightarrow f'(x) = 9x^2 - 18 \\ \Rightarrow 9x^2 - 18 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

بنابراین تابع f در بازه‌های $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, +\infty)$ اکیداً صعودی و در بازه $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ اکیداً نزولی است.

9- معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع $y = \sin x$ را در نقطه‌ای به طول π واقع بر منحنی تابع بنویسید (تالیفی)

$$x_0 = \pi \Rightarrow y_0 = \sin(\pi) = 0 \Rightarrow A(\pi, 0)$$

ابتدا مختصات نقطه را به طور کامل بدست می‌آوریم.

$$m = f'(\pi) = \cos \pi = -1 \quad \text{مماس } y' = \cos x \Rightarrow$$

حال از تابع مشتق می‌گیریم:

$$y - 0 = -1(x - \pi) \Rightarrow y = x - \pi$$

$$m = \frac{-1}{-1} = 1 \quad \text{عمود}$$

10- معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ را در نقطه‌ای به طول $x=2$ بیابید. (شهریور 93)

$$f(2)=4 \Rightarrow A(2,4) \quad f'(x) = \frac{(x-1)-(x+2)}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f'(2) = -3 \Rightarrow m_{\text{مماس}} = -3 \Rightarrow m_{\text{قائم}} = \frac{1}{3}$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 4 = \frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$$

11- معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $y = \sin x + 4$ را در نقطه‌ی $\frac{\pi}{3}$ بنویسید. (خرداد 91 خارج از کشور)

$$y' = \cos x \Rightarrow m = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y = \sin \frac{\pi}{3} + 4 = \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \Rightarrow A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} + 4\right) \Rightarrow y - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 4$$

خود آزمایی

1- با استفاده از تعریف، معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x + 3$ را در نقطه‌ی $x = 1$ به دست آورید.

2- مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق لازم نیست)

الف) $y = \frac{\sin^2 2x}{x+1}$

ب) $y = (\tan^{-1} x + x^2)^5$

3- آهنگ تغییرات مساحت یک دایره را نسبت به محیط آن به دست آورید.

4- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = x^2 + x$ را در $x = 3$ به دست آورید.

5- مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق لازم نیست)

الف) $y = \frac{1 + \sin x}{\cos x}$

ب) $y = \sqrt[4]{x^3 + 2x}$

ج) $y = (x^2 + \sqrt{x})^3 + (4\sin^{-1} x)$

6- معادله خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نقطه‌ای به طول $x = \frac{1}{2}$ واقع بر منحنی را به دست آورید.

7- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه $a > 0$ به دست آورید.

8- مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق لازم نیست)

الف) $f(x) = (x^3 - x^2 - 1)^5$

ب) $g(x) = \frac{x^4 - \sin x}{1 + \cos x}$

ج) $h(x) = (x - \sqrt{x} + 5)(\tan^{-1} x)$

9- نقاطی از نمودار تابع $f(x) = x^3 - 2x - 6$ را معین کنید که مماس بر منحنی در این نقاط موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد.