



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

به نام خدا

حسابان

سال سوم رشته ریاضی

تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

- ❖ فصل اول: محاسبات جبری و معادلات و نامعادلات ۲
- ❖ فصل دوم: تابع ۷۴
- ❖ فصل سوم: مثلثات ۱۶۲
- ❖ فصل چهارم: حد و پیوستگی ۲۰۱
- ❖ فصل پنجم: مشتق ۲۶۱

فصل اول: محاسبات جبری – معادلات – نامعادلات

تو فصل اول چی می خونی؟

۱. مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی
 ۲. تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری
 ۳. بسط دو جمله ای غیاث الدین جمشید کاشانی
 ۴. بزرگترین مقسوم علیه و کوچکترین مضرب مشترک چند جمله ای ها
 ۵. معادلات
 ۶. ماکزیمم و مینیمم توابع درجه دوم
 ۷. معادلات شامل عبارات گویا
 ۸. معادلات شامل عبارات گنگ
 ۹. حل معادلات به روش هندسی
 ۱۰. قدر مطلق و ویژگیهای آن
 ۱۱. معادلات قدر مطلق
 ۱۲. نامعادلات – نامعادلات قدر مطلق
 ۱۳. حل نامعادلات از طریق نموداری
- این فصل تو امتحان دی ماه ۱۰ نمره داره. تو امتحان خرداد ماه ۴ نمره و خب تو شهریور هم ۴ نمره.

حسابان – تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

درس نامه (۱) دنباله حسابی و هندسی

❖ تعریف دنباله حسابی

به دنباله ای گفته می شه که هر جمله اون با افزودن مقداری ثابت به جمله قبلی به دست بیاد. به این مقدار ثابت قدر نسبت می گیم و با حرف d نشون میدیم. اگه a_n به جمله دلخواه از یه دنباله حسابی باشه در این صورت داری

$$\star d = a_n - a_{n-1}$$

• مثال (۱) در دنباله های زیر داریم:

$$\triangleright 5, 3, 1, -1, \dots \quad d = -2$$

$$\triangleright -4, -1, 2, 5, \dots \quad d = 3$$

❖ جمله عمومی

فرض کن a جمله اول و d قدر نسبت و a_n جمله عمومی یک دنباله حسابی باشه در این صورت داری:

$$\star a_n = a + (n - 1) \times d$$

• مثال (۲) جمله هفدهم دنباله زیر را بیابید.

$$\circ a: -1, 2, 4, 7, \dots$$

$$\triangleright a_n = a + (n - 1) \times d \Rightarrow a_{17} = -1 + (16) \times 3 = 47$$

• مثال (۳) جمله عمومی دنباله زیر را بیابید.

$$\circ a: 4, 7, 11, \dots$$

$$\triangleright a_n = a + (n - 1) \times d \Rightarrow a_n = 4 + (n - 1) \times 3 \Rightarrow a_n = 3n + 1$$

❖ تعیین قدر نسبت با داشتن دو جمله دلخواه

$$\star d = \frac{a_m - a_n}{m - n}$$

• مثال (۴) در یک دنباله حسابی جمله هجدهم برابر ۱۷ و جمله بیست و هفتم برابر ۳۵ می باشد مطلوب است حاصل: الف) قدر نسبت دنباله ب) جمله عمومی دنباله

$$\triangleright d = \frac{a_{27} - a_{18}}{27 - 18} = \frac{18}{9} = 2$$

$$\triangleright a_{18} = a + (18 - 1) \times 2 \Rightarrow 17 = a + 34 \Rightarrow a = -17$$

$$\triangleright a_n = a + (n - 1) \times d \Rightarrow a_n = 2n - 19$$

❖ واسطه حسابی

به عدد b واسطه حسابی دو عدد a, c می گیم هرگاه $2b = a + c$. در این حالت a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی میشن.

👉 اگر فاصله بین شماره ی جملات a, b, c نیز برابر باشد، بازهم رابطه $2b = a + c$ برقرار است.

• مثال (۵) بین دو عدد $-5, 11$ یک واسطه حسابی درج کنید.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

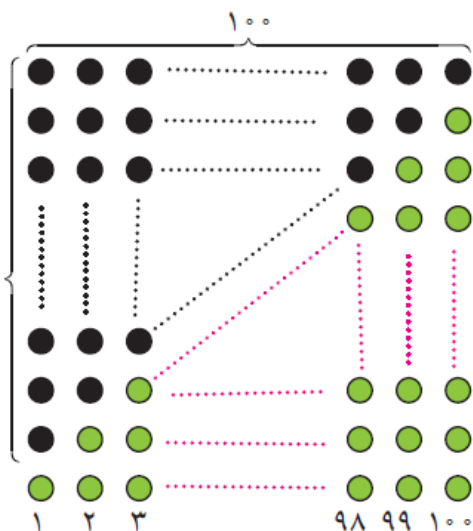
$$\triangleright 2x = -5 + 11 \Rightarrow x = 3$$

فکر کن بخواهی بیش از یک واسطه حسابی بین دو عدد a, b درج کنی خب میتونی از فرمول زیر برای تعیین قدر نسبت می تونی استفاده کنی که m تعداد اعدادیه که می خواهی درج کنی.

$$\star d = \frac{b-a}{m+1}$$

• مثال ۶) اگر جملات بیستم و دوازدهم یک دنباله حسابی قرینه هم باشند، جمله شانزدهم را بیابید.

$$\triangleright 2a_{16} = a_{20} + a_{12} \Rightarrow a_{16} = 0$$



❖ مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی

کارل فریدیش گاوس یکی از سه ریاضیدان بزرگ تاریخ،

(به گفته خیلی ها بزرگترین) وقتی اول دبستان بود نبوغ خودش

رو نشون داد. معلم کلاسشون گفت بشینید و اعداد ۱ تا ۱۰۰

رو با هم جمع کنید. فکر کن! گاوس خیلی زود به جواب رسید.

فکر میکنی آخه چطوری؟ به شکل مقابل توجه کن ببین میتونی آیا؟

تمرین



با روشی که در قسمت قبل دیدی درست تساوی زیر را نشون بده

$$\circ 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

❖ مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی

❶ اگر در دنباله مورد نظر جمله اول و آخر رو بهت دادن :

$$\star S_n = \frac{n(a_n + a)}{2}$$

❷ اگر در دنباله مورد نظر به جای جمله آخر قدر نسبت بهت دادن :

$$\star S_n = \frac{n(2a + (n-1) \times d)}{2}$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

تمرین

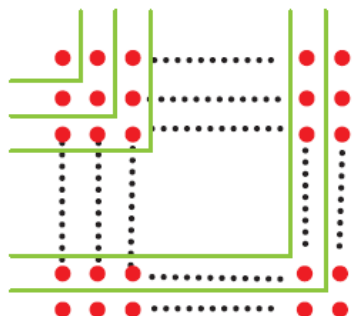


۱. رابطه بالا را ثابت کن.

۲. تساوی مقابل را ثابت کن.

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

الف) با کمک رابطه فوق



ب) با استفاده از این شکل

• مثال ۷) در یک دنباله حسابی جمله اول برابر 5 و جمله ششم برابر 20 می باشد مجموع شش جمله اول را بیابید.

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(a+a_n)}{2} \Rightarrow S_6 = \frac{6(5+20)}{2} = \frac{6 \times 25}{2} = 75$$

• مثال ۸) در دنباله حسابی زیر مجموع 20 جمله اول را بیابید.

$$3, 7, 11, 15, \dots$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(2a+(n-1)d)}{2} \Rightarrow S_{20} = \frac{20(2 \times 3 + (20-1) \times 4)}{2} = 820$$

تمرین



۱. مجموع بیست جمله اول دنباله زیر را بیابید. (دی ماه ۹۱)

$$-5, -3, -1, \dots$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۲. در دنباله حسابی زیر مجموع بیست جمله اول را بیابید. (شهریور ۹۲)

○ $-5, 0, 5, \dots$

۳. در دنباله حسابی $5, 8, 11, \dots$ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از 500 بیشتر شود؟

۴. حداقل چه تعداد از جملات دنباله $3, 9, 15, \dots$ را با هم جمع کنیم تا حاصل از 300 بیشتر شود؟ (دی ماه ۹۳)

۵. در دنباله حسابی $2, 6, 10, \dots$ حداقل چند جمله را باید با هم جمع کنیم تا حاصل از 200 بیشتر شود؟ (شهریور ۹۰)

❖ تعریف دنباله هندسی:

به دنباله ای گفته می شه که هر جمله اون با ضرب کردن مقداری ثابت به نام قدرنسبت (q) در جمله قبلی به دست میاد. اگر a_n یک جمله دلخواه از یک دنباله هندسی باشه در این صورت داری:

$$\star q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

• مثال (۱)

➤ $6, 18, 54, \dots \Rightarrow q = 3$

➤ $-2, 3, \frac{-9}{2}, \dots \Rightarrow q = \frac{-3}{2}$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

❖ جمله عمومی

فرض کن a جمله اول و q قدر نسبت و a_n جمله عمومی یک دنباله هندسی باشد در این صورت داریم:

$$\star a_n = a \times q^{n-1}$$

• (مثال ۲) جمله پانزدهم دنباله زیر را بیابید.

$$\triangleright 4, 12, 36, 108, \dots$$

$$\triangleright a_n = a \times q^{n-1} \Rightarrow a_{15} = 4 \times 3^{14}$$

❖ تعیین قدر نسبت با داشتن دو جمله دلخواه

$$\star q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}$$

• (مثال ۳) در یک دنباله هندسی جمله سوم برابر ۹ و جمله هفتم برابر ۷۲۹ است. قدر نسبت را بیابید.

$$\triangleright q^{7-3} = \frac{729}{9} = 81 = (\pm 3)^4 \Rightarrow q = \pm 3$$

❖ واسطه هندسی

عدد b را واسطه هندسی دو عدد a, c می‌گیم هرگاه: $b^2 = a \times c$ در این حالت a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی می‌شن.

(مثال ۴) بین اعداد ۴ و ۹ یک واسطه هندسی درج کنید.

$$\triangleright x^2 = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow x = \pm 6$$

☞ اگر فاصله بین شماره جملات a, b, c با هم برابر باشد باز هم رابطه $b^2 = a \times c$ برقرار است.

(مثال ۵) در یک دنباله هندسی جملات دهم و بیستم معکوس هستند. جمله پانزدهم را بیابید.

$$\triangleright a_{15}^2 = a_{10} \times a_{20} \Rightarrow a_{15} = 1 \Rightarrow a_{15} = \pm 1$$

☞ اگر بخواهی بیش از یک واسطه هندسی بین دو عدد a, b درج کنی در این صورت از فرمول زیر برای تعیین قدر نسبت استفاده کن
(m تعداد واسطه هندسی):

$$\star q^{m+1} = \frac{b}{a}$$

❖ مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی

۱. اگر a جمله اول و q قدر نسبت و n تعداد جمله و S_n مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی باشد داری:

$$\star S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

۲. اگر جمله آخر دنباله هندسی را l بنامی داری:

$$\star S_n = \frac{a-lq}{1-q}$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

• مثال ۶) در دنباله هندسی زیر مجموع ۹ جمله اول را بیابید.

○ $-2, 4, -8, \dots$

➤ $S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_n = \frac{-2(1-(-2)^9)}{1-(-2)} = \frac{-2(513)}{3} = -242$

➡ در یه دنباله هندسی با جمله اول a و قدر نسبت $|q| < 1$ مجموع تمام جملات از رابطه زیر بدست میاد.

★ $S = \frac{a}{1-q}$

• مثال ۷) حد مجموع جملات دنباله مقابل را بیابید.

• $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

➤ $q = \frac{1}{2} \Rightarrow S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

تمرین



۱. در یک دنباله هندسی جمله دوم برابر ۵ و جمله پنجم برابر ۴۰ است مجموع یازده جمله اول را بیابید.

۲. برای محافظت از تابش های مضر مواد رادیو اکتیو لایه هایی محافظتی ساخته شده است که شدت تابش ها پس از عبور از آن ها نصف می شود. چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش بیابد

۳. توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود پس از زمین خوردن به اندازه یک چهارم ارتفاع قبلی خود بالا می رود. فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده ایم تا به ارتفاع ۵ متری برسد. می خواهیم بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن این توپ چقدر مسافت طی می کند؟ (شبهه به خرداد ۹۰)

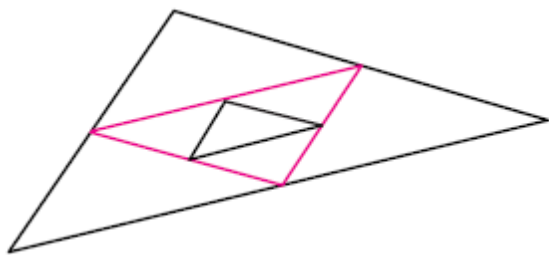
۴. علی می خواهد پول های خود را پس انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می دهد و قرار می گذارد هر روز $\frac{0}{9}$ پول واریزی در روز قبل را در صندوق قرار دهد. پس از ۵۰ روز او چقدر پول در صندوق دارد؟ نشان دهید پول صندوق او هیچ گاه از ۱۰۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد.

۵. می گویند یک روز حاکم شهری خواست به مخترع شطرنج جایزه ای بدهد و از او خواست خودش جایزه ای برای خودش تعیین کند. شطرنج ۶۴ خانه دارد و مخترع شطرنج گفت در خانه اول یک دانه گندم بگذارید و در خانه دوم ۲ گندم بگذارید و در خانه سوم ۴ گندم بگذارید و به همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم بگذارید و نهایتاً کل گندم ها را به من بدهید. اگر هر دانه گندم یک گرم باشد، چند گرم گندم جایزه مخترع شطرنج خواهد شد؟

۶. در دنباله هندسی نا متناهی روبرو، مجموع تمام جملات را بیابید.، $\frac{1}{27}$ ، $\frac{1}{9}$ ، $\frac{1}{3}$ (خرداد ۹۱)

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۷. یک مثلث با مساحت S و محیط p را در نظر بگیرید. وسط های اضلاع را به هم وصل کرده و مثلث کوچکتر جدیدی بسازید. این عمل را روی مثلث جدید تر انجام دهید. این عمل را به طور متوالی انجام دهید. مجموع محیط های مثلث های بدست آمده با احتساب مثلث اولیه چقدر است؟ مجموع مساحت ها چقدر است؟ (خرداد ۹۴)



❖ سوالات چهار گزینه ای

(۱) جملات دنباله $2/39, 2/399, 2/3999, \dots$ به یک عدد گویا و ثابت بسیار نزدیک می شود. جمله دهم دنباله تفاضل آنها از این عدد ثابت کدام است؟ (سراسری ۹۴)

1. 10^{-11}
2. 10^{-10}
3. 10^{-9}
4. 2×10^{-10}

(۲) کدام گزینه جمله عمومی دنباله ای را نشان می دهد که جملات آن به اندازه ی ثابتی کاهش می یابد؟

1. $a_n = n - n^2$
2. $b_n = \frac{1}{n} + 1$
3. $c_n = \frac{n}{2} - 3$
4. $d_n = 4 - 2n$

(۳) در یک دنباله حسابی بین جملات رابطه ی $2a_1 + 3a_2 - 5a_3 = 8$ برقرار است. حاصل $5a_1 - 3a_2 - 2a_3$ کدام است

1. -8
2. $\frac{-8}{7}$
3. $\frac{8}{7}$
4. 8

(۴) در یک دنباله حسابی مجموع چهار جمله اول برابر ۱۵ و مجموع ۵ جمله بعدی برابر ۳۰ است. جمله یازدهم این دنباله کدام است

1. $7/5$
2. 8
3. $8/5$
4. 9

(۵) تفاضل جمله دهم از جمله دوازدهم یک دنباله حسابی ۵ و مجموع دو جمله دهم و دوازدهم آن برابر ۲۵ است. جمله بیست و یکم این دنباله کدام است؟

1. ۳۵
2. ۳۶
3. ۳۷/۵
4. ۳۸/۵

(۶) دنباله حسابی $100, 96, 92, \dots, -20$ چند جمله دارد؟

1. ۲۹
2. ۳۰
3. ۳۱
4. ۳۲

(۷) در یک دنباله حسابی با جملات متمایز $a_4 + a_8 + \dots + a_{100} = 0$ در این دنباله حاصل $\frac{a_3 + a_7 + \dots + a_{99}}{a_5 + a_9 + \dots + a_{101}}$ کدام است؟

1. صفر
2. -100
3. ۱
4. -1

(۸) اگر $x, 1 - x, 2 + x, 1 + 2x$ یک دنباله حسابی باشد، با x برابر کردن جملات کدام مطلب در مورد دنباله جدید درست است

۱. ممکن است حسابی نباشد.
۲. حسابی با قدر نسبت ۲- است.
۳. حسابی با قدر نسبت ۳- است.
۴. حسابی با قدر نسبت ۶- است.

(۹) جملات پنجم و یازدهم و هفدهم یک دنباله حسابی به ترتیب مساوی $3 - a, a^2 + 5, a + 1, 2a^2 + a$ هستند. جمله چهاردهم این دنباله کدام است؟

1. ۶
2. ۲۲
3. ۵۶
4. ۶۰

۱۰) بین دو عدد $x, 100 - x$ شش عدد اضافه کردیم که با آنها دنباله حسابی می سازد، حاصل جمع کوچکترین و بزرگترین این اعداد کدام است؟

1. 100
2. -100
3. صفر
4. بستگی دارد. x به مقدار

۱۱) بیست جمله اول دنباله حسابی با جمله اول ۳ و قدر نسبت ۲ با بیست جمله اول دنباله حسابی با جمله اول ۲ و قدر نسبت ۳ چند جمله مساوی دارند؟

1. ۶
2. ۷
3. ۸
4. ۹

۱۲) در یک دنباله حسابی جمله دهم برابر صفر است. اگر داشته باشیم $a_2a_9 + a_3a_8 + a_4a_7 + a_5a_6 = 15$ آنگاه جمله یازدهم آن کدام می تواند باشد؟

- 1) $\frac{1}{2}$
- 2) $\frac{3}{2}$
- 3) $\frac{5}{2}$
- 4) $\frac{7}{2}$

★ مجموع جملات دنباله حسابی

• $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$	1. مجموع n جمله اول با داشتن جمله اول و آخر
• $S_n = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$	2. مجموع n جمله اول با داشتن جمله اول و قدر نسبت
• $S_n = na_k$	3. اگر a_k جمله وسط در n جمله اول باشد
• $S_n = An^2 + Bn$	4. صورت کلی مجموع n جمله اول

☞ به چند مجموع مهم توجه کنید.

1. $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

3. $2 + 4 + \dots + 2n = n(n + 1)$

❖ مجموع جملات شروع از جمله m ام و ختم به جمله k ام:

❖ $S_k - S_{m-1}$

(۱۳) اعداد $1, x, y, \frac{5}{2}, \dots$ چهار جمله اول یک دنباله ی عددی اند. مجموع پانزده جمله اول این دنباله کدام است ؟

1. ۵۷
2. $\frac{62}{5}$
3. $\frac{67}{5}$
4. ۶۸

(۱۴) در دنباله حسابی $\dots, -21, x, -27$ مجموع جملات منفی کدام است ؟

1. -۱۳۵
2. -۱۵۰
3. -۷۵
4. -۲۷۰

(۱۵) در یک دنباله حسابی جمله هفتم نصف جمله سوم است. مجموع چند جمله اول از این دنباله برابر صفر است ؟

1. ۱۸
2. ۱۹
3. ۲۰
4. ۲۱

(۱۶) در یک دنباله ی عددی با جمله ی اول a اگر یک واحد به قدر نسبت اضافه شود، آنگاه به مجموع ۲۰ جمله اول چقدر افزوده می شود

1. ۱۶۰
2. ۱۷۰
3. ۱۸۰
4. ۱۹۰

17) در بیست جمله اول از دنباله ی عددی مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می باشد، جمله اول کدام است ؟

1. صفر
2. ۱
3. ۲
4. ۳

18) مجموع n جمله اول یک دنباله عددی از رابطه ی $S_n = n^2 + 2n$ به دست می آید. مجموع جملات هفتم و هشتم و نهم چقدر است

1. ۷۲
2. ۵۱
3. ۳۶
4. ۷۶

19) مجموع n جمله اول یک دنباله ی عددی از رابطه ی $S_n = \frac{n(n-2)}{3}$ به دست می آید . جمله پانزدهم این دنباله کدام است ؟

1. ۱۴
2. ۹
3. ۲۶
4. ۱۲

20) مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی $S_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم کدام است ؟ (خارج ۹۰ ریاضی)

1. ۹
2. $\frac{29}{9}$
3. $\frac{49}{3}$
4. ۱۸

21) در یک تصاعد عددی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد جمله دهم چقدر است ؟ (سراسری ۹۰ ریاضی)

1. ۳۲
2. ۳۴
3. ۳۶
4. ۳۸

۲۲) اعداد طبیعی فرد را به گونه ای دسته بندی می کنیم که تعداد جنلات هر دسته با شماره آن دسته برابر باشد. جمله آخر در دسته بیستم کدام است؟ (سراسری خارج ریاضی ۹۱)

1. ۴۱۵
2. ۴۱۹
3. ۴۲۱
4. ۴۲۳

★ دنباله هندسی

دنباله ای است که هر جمله آن با ضرب کردن مقداری ثابت در جمله قبلی به دست می آید.

1. قدر نسبت	• q
2. جمله اول	• a
3. جمله عمومی	• $a_n = a \times q^{n-1}$
4. رابطه تعیین قدر نسبت با داشتن دو جمله دلخواه	• $q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$
5. رابطه بین سه جمله متوالی a, b, c	• $b^2 = a \times c$
6. درج n واسطه هندسی بین دو عدد a, b	• $q^{n+1} = \frac{b}{a}$
7. قانون اندیس ها $(m + n = p + q)$	• $a_m \times a_n = a_p \times a_q$

I. اگر تمام جملات یک دنباله هندسی با قدر نسبت q را در یک عدد غیر صفر مانند k ضرب کنیم، دنباله حاصل یک دنباله هندسی با همان قدر نسبت است.

II. اگر تمام جملات یک دنباله هندسی با قدر نسبت q را به توان یک عدد مانند k برسانیم دنباله ی حاصل یک دنباله ی هندسی با قدر نسبت q^k است.

III. اگر جملات متوالی یک دنباله هندسی با قدر نسبت q را با هم جمع یا از هم کم کنیم. دنباله ی جدید حاصل نیز یک دنباله هندسی با همان قدر نسبت است.

IV. اگر جملات یک دنباله هندسی با قدر نسبت q را با فاصله k تا k انتخاب کنیم، جملات جدید تشکیل یک دنباله هندسی با قدر نسبت q^k است.

۲۳) جمله عمومی یک دنباله ی هندسی به صورت $a_n = \frac{3(-1)^{n+1}}{4^{2n-1}}$ است. جمله اول این دنباله چند برابر قدر نسبت آن است؟

1. $\frac{1}{12}$
2. $\frac{-1}{12}$
3. $\frac{3}{4}$
4. -12

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۲۴) در یک دنباله هندسی $a_2 a_4 = 2a_5$ جمله اول کدام است؟

1. $\sqrt{2}$
2. ۲
3. ۴
4. $2\sqrt{2}$

(۲۵) در یک دنباله هندسی با جملات مثبت $a_8 - a_6 = 12, a_{16} - a_{14} = 3072$ جمله سوم این کدام است؟

1. $\frac{1}{8}$
2. $\frac{1}{4}$
3. $\frac{1}{2}$
4. ۱

(۲۶) در یک دنباله هندسی حاصل ضرب جمله های اول تا نهم مساوی ۵۱۲ است. جمله پنجم این دنباله کدام است؟

1. ۲
2. ۳
3. ۴
4. ۸

(۲۷) اگر جملات چهارم و ششم و دوازدهم یک دنباله ی حسابی به ترتیب سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند، قدر نسبت

دنباله ی هندسی کدام است؟

1. $\frac{4}{3}$
2. $\frac{3}{2}$
3. ۲
4. ۳

(۲۸) در یک دنباله عددی جملات اول و پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی صعودی اند، قدر نسبت

این دنباله کدام است؟

1. $\frac{6}{5}$
2. $\frac{5}{4}$
3. ۲
4. $\frac{3}{2}$

(۲۹) اعداد $2^a, \sqrt[4]{2}, 2^b$ جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. واسطه هندسی بین a, b کدام است؟

1. $\frac{2}{5}$
2. ۲
3. $\frac{1}{5}$
4. $\sqrt{2}$

(۳۰) اعداد $3^a, 3\sqrt{3}, 9, b$ جملات متوالی یک دنباله هندسی هستند. واسطه هندسی بین دو عدد $a\sqrt{3}, b$ کدام است؟

1. $3\sqrt{3}$
2. ۳
3. $\sqrt{3}$
4. ۹

(۳۱) در یک دنباله هندسی $\frac{a_1 a_2 a_3 + a_5 a_6 a_7}{1 + q^{12}} = 8$ است. جمله دوم این دنباله کدام است؟

1. ۲
2. ۳
3. ۱
4. $\frac{1}{2}$

(۳۲) می خواهیم بین دو جواب معادله $2x^2 - 9x + 3 = 0$ شش عدد چنان قرار دهیم که با این دو عدد تشکیل دنباله ی

هندسی بدهند. حاصل ضرب کوچک ترین و بزرگ ترین این اعداد چیست؟

1. $\frac{9}{2}$
2. $\frac{8}{3}$
3. $\frac{3}{2}$
4. $\frac{5}{4}$

(۳۳) بین دو عدد ۴ و ۳۲۴ سه عدد چنان درج می کنیم که پنج عدد تشکیل دنباله هندسی دهند. مجموع این ۵ عدد مثبت کدام است

(خارج ۹۱)

1. ۴۸۲
2. ۴۸۴
3. ۴۸۶
4. ۴۸۸

$$\diamond S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

☞ اگر $|q| < 1$ آنگاه حد مجموع جملات از رابطه $S = \frac{a}{1-q}$ به دست می آید.

$$\diamond \frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$$

(۳۴) دنباله هندسی $2, x, \frac{1}{2}, \dots$ غیر نزولی است. مجموع شش جمله تول آن کدام است؟

1. $\frac{41}{32}$
2. $\frac{21}{16}$
3. $\frac{11}{8}$
4. $\frac{23}{16}$

(۳۵) در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله ی آن ۱۵۳ است. جمله اول چند برابر جمله پنجم

است؟ (سراسری ۸۹)

1. $\frac{81}{16}$
2. ۸
3. ۹
4. ۱۶

(۳۶) در یک دنباله هندسی صعودی به صورت $4, a, 9, b, \dots$ مجموع شش جمله ی اول کدام است؟ (سراسری خارج کشور ۸۹)

1. $81\frac{3}{8}$
2. $81\frac{7}{8}$
3. $82\frac{3}{8}$
4. $83\frac{1}{8}$

(۳۷) در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن ۳ می باشد. مجموع شش جمله اول

آن کدام است؟ (سراسری ۸۸)

1. $۱۰/۸$
2. $۱۱/۲$
3. $۱۲/۶$
4. $۱۳/۴$

(۳۸) بین دو عدد $2\sqrt{2}$ و $16\sqrt{2}$ شش عدد چنان درج شده اند که هشت عدد حاصل دنباله هندسی تشکیل داده اند. مجموع این هشت عدد کدام است؟ (سراسری خارج کشور ۸۸)

1. $30(2 + \sqrt{2})$
2. $48\sqrt{2}$
3. $30(\sqrt{2} + 1)$
4. $36(\sqrt{2} + 1)$

(۳۹) در یک دنباله هندسی نامحدود با جملات مثبت، جمله اول $\frac{1}{3}$ مجموع جملات بعدی است. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{1}{2}$
3. $\frac{2}{3}$
4. $\frac{3}{4}$

(۴۰) موجی بر روی نیم دایره های بالای یک محور حرکت می کند. با قطر اولیه ۱ واحد هر بار که به محور برخورد کند ۲۰ درصد از طول قطر آن کاسته می شود. اندازه محیط این نیم دایره های متوالی دنباله ی اعداد حقیقی است مجموع این دنباله



کدام است؟

1. 2π
2. 5π
3. $\frac{3}{2}\pi$
4. $\frac{5}{2}\pi$

(۴۱) توپی را از زمین به هوا پرتاب می کنیم تا به ارتفاع ۶ متری برسد، بعد از هر بار به زمین خوردن به اندازه ی ۲۰ درصد ارتفاع

قبلی بالا می رود. پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن توپ چند متر مسافت طی می کند؟

1. ۱۲
2. ۱۵
3. ۱۸
4. ۲۴

۴۲) وسط های اضلاع مثلثی به مساحت ۳۰ را به هم وصل می کنیم تا مثلث کوچک تری در وسط آن ایجاد می شود. سپس برای

مثلث جدید نیز این کار را تکرار می کنیم و این روند را ادامه می دهیم. حد مجموع مساحت مثلث های به دست آمده چقدر است؟ (با

احتساب مثلث اولیه)

1. ۲۰
2. ۳۰
3. ۴۰
4. ۵۰

۴۳) جمله عمومی یک دنباله نامحدود به صورت $a_n = \frac{4^n - 3^{n+1}}{5^n}$ است. حد مجموع جملات این دنباله برابر است با:

1. $\frac{5}{2}$
2. $\frac{-5}{2}$
3. $\frac{-1}{2}$
4. $\frac{1}{2}$

۴۴) حاصل $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} - \frac{1}{729} + \dots$ کدام است؟

1. $\frac{12}{27}$
2. $\frac{12}{26}$
3. $\frac{11}{26}$
4. $\frac{11}{27}$

۴۵) در یک دنباله هندسی جمله اول $\frac{1}{3}$ حد مجموع جملات است. جمله چهارم چند برابر جمله اول است؟

- 1) $\frac{1}{27}$
- 2) $\frac{1}{8}$
- 3) $\frac{8}{27}$
- 4) $\frac{16}{81}$

۴۶) تعداد جملات یک دنباله هندسی عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد قدر نسبت آن کدام است؟ (سراسری ۹۴)

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{1}{2}$
3. ۲
4. ۳

درس نامه ۲) تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری

تساوی های بالا بین مقسوم و مقسوم علیه و خارج قسمت و باقیمانده در هر تقسیم برقراره و به طور کلی داریم:

*** خارج قسمت + باقی مانده $\times$ مقسوم علیه = مقسوم**

❖ رابطه تقسیم در حالت کلی

اگر $P(x)$ یک چندجمله ای از درجه n به نام مقسوم و $Q(x)$ یک چندجمله ای از درجه m به نام مقسوم علیه باشند آنگاه چند جمله ای های یکتایی مانند $T(x)$ از درجه $n - m$ به نام خارج قسمت و $R(x)$ از درجه حد اکثر $m - 1$ به نام باقی مانده یافت می شن به طوریکه:

تمرین



*** $P(x) = T(x)Q(x) + R(x)$**

چند جمله ای $P(x) = 4x^4 + 2x^3 + 1$ را بر چند جمله ای $x^2 - 1$ تقسیم کرده و با تشکیل رابطه تقسیم، به کمک آن مقدار $P(1), P(-1)$ را بیابید.

❖ در حالتی که مقسوم علیه به صورت دو جمله ای درجه اول باشد، رابطه تقسیم به صورت زیر می شه.

*** $P(x) = (ax + b)Q(x) + R$**

۱. برای محاسبه باقی مانده تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر دو جمله ای $ax + b$ کافی ریشه معادله $ax + b = 0$ را یافته و $P(x)$ را به ازای آن حساب کنی.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

II. اگر در محاسبه باقی مانده داشته باشی: $R = 0$ در این صورت $P(x)$ بر $ax + b$ بخش پذیر بوده و

$ax + b$ یک عامل یا فاکتور برای $P(x)$ خواهد بود.

- مثال ۱) باقی مانده تقسیم چند جمله ای $P(x) = 2x^2 + 3x + 7$ را بر $x + 1$ بیابید
 $\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow R = P(-1) = 2(-1)^2 + 3(-1) + 7 = 6$
 - مثال ۲) نشان دهید چند جمله ای $P(x) = 2x^2 + 5x + 2$ بر $2x + 1$ بخش پذیر است.
 $\Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow R = P(-\frac{1}{2}) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = 0$
- 👉 با توجه به باقی مانده نتیجه می گیریم: چند جمله ای $P(x) = 2x^2 + 5x + 2$ بر $2x + 1$ بخش پذیر است.

تمرین



۱. مقدار m را چنان بیابید که چند جمله ای $P(x) = x^3 - mx^2 - x + 4$ بر $2x + 1$ بخش پذیر باشد

۲. مقدار k را چنان بیابید که چند جمله ای $p(x) = 2x^3 - kx^2 - x + 3$ بر $x + 1$ بخش پذیر باشد (خرداد ۹۱)

۳. مقدار m را چنان بیابید که چند جمله ای $p(x) = 2x^3 - 2x + 2m$ بر $x - 2$ بخش پذیر باشد. (شهریور ۹۱)

۴. نشان دهید $x - 1$ یک فاکتور برای $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ است سپس فاکتورهای دیگر را بیابید.

۵. مقدار a را چنان بیابید که ۲ ریشه معادله $x^3 - 2x^2 + ax + 2 = 0$ باشد. سپس ریشه های دیگر را بیابید. (دی ماه ۹۰)

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۶. اگر باقیمانده تقسیم چند جمله ای $p(x) = 2x^4 + mx + 2$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، باقی مانده تقسیم آن بر $x - 1$ را بیابید. (دی ماه ۹۲)

۷. در چند جمله ای $P(x) = x^3 + ax^2 + x + b$ ، a, b را طوری بیابید که باقی مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۴ بوده و بر $x + 2$ بخش پذیر باشد.

۸. اگر باقی مانده تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر $x - 1, x + 1$ به ترتیب ۳ و ۱ باشد باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - 1$ را بیابید.

۹. $P(x)$ یک چند جمله ای درجه ۲ است و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است. $P(x)$ را چنان بیابید که در شرایط زیر صدق کند. (خرداد ۹۲)

$$\checkmark \quad P(1) = 1, P(2) = 3$$

۱۰. مقدار m را چنان بیابید که چند جمله ای $p(x) = 2x^3 - mx^2 + 2x + 1$ بر $2x + 1$ بخش پذیر باشد. (خرداد ۹۳)

۱۱. نشان دهید $2 - x$ یک فاکتور برای $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ است سپس معادله $f(x) = 0$ را حل کنید

۱۲. $P(x)$ یک چند جمله ای درجه ۲ است و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است. $P(x)$ را چنان بیابید که در شرایط زیر صدق کند.

1. $p(-1) = 2, p(2) = -1$
2. $p(0) = 0, p(1) = 1$
3. $p(1) = 0, p(2) = 0$

❖ چند نکته مهم در بخش پذیری

فرض کنید $0 \neq a \in R, n \in N$:

۱. $x^n - a^n$ بر $x - a$ بخش پذیر است.
۲. $x^n + a^n$ بر $x + a$ بخش پذیر است هرگاه n فرد باشد.
۳. $x^n - a^n$ بر $x + a$ بخش پذیر است هرگاه n زوج باشد.
۴. $x^n + a^n$ بر $x - a$ بخش پذیر نیست.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۵. برای محاسبه باقیمانده تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر $ax^n + b$ کافی است در چند جمله ای $P(x)$ به جای x^n مقدار $\frac{-b}{a}$ را قرار دهیم

۶. برای محاسبه باقیمانده تقسیم چند جمله ای $P(x)$ بر $x^2 \pm ax + a^2$ کافی است باقی مانده تقسیم

چند جمله ای $P(x)$ بر $x^3 \mp a^3$ را بیا بیم.

۷. اگر $x, y \in R, n \in N$ باشد:

$$\star x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

۸. اگر $x, y \in R, n \in N$ باشد و n عددی فرد باشد:

$$\star x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

۹. اگر $x, y \in R, n \in N$ باشد و n عددی زوج باشد:

$$\star x^n - y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y - \dots - xy^{n-2} - y^{n-1})$$

• مثال) نشان دهید $11^{13} + 5^{13}$ بر 16 بخش پذیر است.

چون ۱۳ فرد است در نتیجه $11^{13} + 5^{13}$ بر $11 + 5 = 16$ بخش پذیر است.

تمرین



۱. نشان دهید $2^{1390} - 7^{1390}$ بر ۴۵ بخش پذیر است.

۲. اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\circ 1 - x^n = (1 + x)(1 - x + \dots + x^{n-1})$$

۳. به کمک اتحاد ها تساوی زیر را ساده کنید. (دی ماه ۹۱)

$$\circ A = \frac{(x^5 - 1)(x - 1)}{x^2 - 1}$$

1. $x^9 - x^3y^3$

2. $(a^6 + 1)^2 - (a^6 - 1)^2$

۴۷) در تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر $x^2 + 2x - 1$ خارج قسمت $x^3 + 1$ شده است. اگر $f(1) = 2, f(2) = 3$ باشد،

مقدار باقی مانده ی این تقسیم به ازای $x = -1$ چیست؟

1. ۵۴
2. ۶۸
3. ۱۱۴
4. ۱۲۸

۴۸) باقی مانده تقسیم عبارت $f(x) = (x+1)^3(x-1)^2 + x^4 - x^2 - 1$ بر $x^2 - 1$ کدام است؟

1. $x + 1$
2. 1
3. -1
4. $-x - 1$

۴۹) اگر نمودار تابع $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + m$ محور x ها را در نقطه ای به طول ۲ قطع کند، طول های دو نقطه دیگر

تلاقی با محور افقی کدام اند؟

1. $\frac{1}{2}و - 1$
2. $\frac{1}{2}و 1$
3. $\frac{3}{2}و - 1$
4. $\frac{-1}{2}و 3$

۵۰) کدام گزینه یک فاکتور $x^3 - 3x^2 - 3x + 11x - 6$ است؟

1. $x - 3$
2. $x - 2$
3. $x + 1$
4. $x + 3$

51) باقی مانده تقسیم عبارت $x^{11} + x^9 + x^7 + x^5 + x^3 + x + 1$ بر $x^2 - 1$ کدام است؟

1. $x + 1$
2. $5x + 1$
3. $11x + 1$
4. $6x + 1$

52) باقی مانده تقسیم $2x^5 - x^4 + x^3 - 1$ بر $x^2 - x$ کدام است؟

1. $1 - 2x$
2. $2x + 1$
3. $2x - 1$
4. -1

53) چند جمله ای به ازای هر عدد طبیعی n بر بخش پذیر است.

1. $x + a, x^n + a^n$
2. $x - a, x^n + a^n$
3. $x - a, x^n - a^n$
4. $x + a, x^n - a^n$

54) مقدار باقی مانده تقسیم $10x^{10} - 9x^9 + 8x^8 - x + 1$ بر $x^3 + x^2 + x + 1$ به ازای $x = -1$ کدام است؟

1. ۵۵
2. ۵۶
3. ۵۷
4. صفر

55) اگر باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $3x + 4$ برابر $\frac{x^2}{2} + 3$ باشد، باقی مانده تقسیم $2f(x) - 3$ بر $x + 2$ کدام است؟

1. صفر
2. ۲
3. -۳
4. ۳

56) اگر باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2 - 5x - 6$ برابر $2x - 5$ باشد، باقی مانده تقسیم $f(x + 2)$ بر $x - 4$ کدام است؟

1. ۵
2. ۶
3. ۷
4. ۸

57) باقی مانده تقسیم $x^8 + 1$ بر $(x - 1)^2$ کدام است؟

1. $-8x + 7$
2. $8x - 6$
3. $7x - 8$
4. $7x - 5$

58) مجموع ضرایب خارج قسمت تقسیم عبارت $x^{100} - 2x^{99} + 1$ بر $x - 1$ کدام است؟

- 1) ۹۸
- 2) -۹۸
- 3) ۹۹
- 4) -۹۹

59) به ازای مقداری از a چند جمله ای $f(x) = x^4 + ax^3 - 8x$ بر $x + 2$ بخش پذیر است. کوچکترین ریشه معادله $f(x) = 0$ کدام است؟ (سراسری ۹۴)

1. $1 - \sqrt{3}$
2. $1 - \sqrt{5}$
3. $-1 - \sqrt{3}$
4. $-1 - \sqrt{5}$

📖 درس نامه ۳) بسط دو جمله ای

یکی از مطالبی که توی سال اول خیلی دوست داشتی

اتحادها بود قبول داری؟ بگو خب. تو سال اول دبیرستان

با اتحادهای مربع دو جمله ای و مکعب دو جمله ای آشنا شدی. بگو خب که چی؟ در این قسمت قراره یک

دو جمله ای را به هر توان دلخواه برسونی این کار را میتونی با استفاده از بسط دو جمله ای غیاث الدین جمشید

کاشانی و مثلث خیام - پاسکال انجام بدی.

❖ برای تعیین $(a + b)^n$ که توان عددی است حسابی به صورت زیر عمل می کنیم:

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

$$\star (a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

👉 برای اختصار با استفاده از عملگر Σ می توانیم بنویسیم:

$$\star (a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

• مثال (۱) حاصل $(a+b)^4$ را بیابید.

$$\triangleright (a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 b^0 + \binom{4}{1}a^3 b^1 + \binom{4}{2}a^2 b^2 + \binom{4}{3}a^1 b^3 + \binom{4}{4}a^0 b^4$$

$$\triangleright = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

• مثال (۲) حاصل $(2x-3y)^4$ را بیابید.

$$\triangleright (2x-3y)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4(-3y)^0 + \binom{4}{1}(2x)^3(-3y)^1 + \binom{4}{2}(2x)^2(-3y)^2 + \binom{4}{3}(2x)^1(-3y)^3$$

$$\triangleright + \binom{4}{4}(2x)^0(-3y)^4 = 16x^4 - 96x^3 y + 216x^2 y^2 - 216xy^3 + 81y^4$$

❖ برای تعیین $(a+b)^n$ می توانیم به صورت دیگه هم عمل کنیم. اولین جمله برابر a^n میشه و به ترتیب از توان a یکی کم می شه و

به توان b یکی اضافه می شه. برای تعیین ضریب یک جمله باید توان a در جمله قبل را در ضریب جمله قبل ضرب و بر تعداد

جملات قبل از جمله مورد نظر تقسیم کرد.

• مثال (۳) حاصل $(a+b)^3$ را به روش بالا بیابید.

$$(a+b)^3 = a^3 + \frac{3 \times 1}{1} \times a^2 b^1 + \frac{2 \times 3}{2} a^1 b^3 + \frac{1 \times 3}{3} a^0 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

تمرین



۱. حاصل عبارتهای زیر را با کمک بسط دو جمله ای به دست آورید.

a. $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^6$

b. $(1-x)^7$

۲. حاصل عبارت $(x-2)^4$ را بیابید. (شهریور ۹۳)

1. $(2x + y)^5$

2. $(2x - \sqrt{x})^6$

3. $(3x + 2z)^4$

4. $(2a - 1)^6$

5. $(2x - 3y)^4$

۴. حاصل $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^5$ را بیابید. (شهریور ۹۰)

❖ چند نکته در مورد بسط دو جمله ای

(۱) تعداد جملات بسط دو جمله ای $(a + b)^n$ برابر $n + 1$ است.

(۲) بسط های زیر را در نظر بگیرید.

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = a + b$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

با استفاده از ضرایب بسط های بالا مثلث زیر که به مثلث خیام - پاسکال معروف است به دست می آید.

عبارت	ضرایب بسط
$(a + b)^0$	1
$(a + b)^1$	1 1
$(a + b)^2$	1 2 1
$(a + b)^3$	1 3 3 1
$(a + b)^4$	1 4 6 4 1
$(a + b)^5$	1 5 10 10 5 1
$(a + b)^6$	1 6 15 20 15 6 1

در این مثلث اعداد روی دو ساق مثلث برابر یک و سایر اعداد از جمع دو عدد بالایی به دست می آیند

(۳) ضرایب بسط دو جمله ای متقارن هستند.

(۴) برای تعیین مجموع ضرایب بسط دو جمله ای کافی است به جای حروف 1 قرار دهیم.

(۵) جمله i ام در بسط دو جمله ای از فرمول زیر به دست می آید.

$$* a_i = \binom{n}{i-1} a^{n-i+1} b^{i-1}$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

• مثال ۱) مجموع ضرایب $(2x - 3y)^5$ را بیابید.

$$\triangleright (2(1) - 3(1))^5 = (-1)^5 = -1$$

• مثال ۲) جمله مستقل از x در بسط $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$ را بیابید.

با توجه به نکته ۵ داریم

$$\triangleright a_i = \binom{n}{i-1} a^{n-i+1} b^{i-1}$$

$$\triangleright a_i = \binom{8}{i-1} (x)^{8-i+1} \left(\frac{1}{x}\right)^{i-1} = \binom{8}{i-1} (x)^{8-i+1} (x^{-1})^{i-1} = \binom{8}{i-1} (x)^{8-i+1} (x)^{-i+1}$$

$$\triangleright a_i = \binom{8}{i-1} (x)^{10-2i}$$

با توجه به صورت مساله باید

$$\bullet 10 - 2i = 0 \Rightarrow i = 5$$

$$\bullet a_5 = \binom{8}{4} = 70$$

تمرین



۱. عبارت $(2x - y)^6$ را در نظر بگیرید

الف) تعداد جملات این بسط را بیابید.

ب) مجموع ضرایب این بسط را بیابید.

ج) بسط این عبارت را بیابید.

۲. بسط عبارت $\left(x - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^7$ را بیابید.

۳. جمله سوم $\left(x + \frac{2}{x}\right)^5$ را بنویسید. (دی ماه ۹۳)

۴. مجموع ضرایب بسط $(3x - 1)^6$ برابر.....است. (خرداد ۹۴)

۵. جمله سوم از بسط $(2x - 1)^7$ برابر.....است. (شهریور ۹۲)

❖ سوالات چهار گزینه ای

۶۰) در بسط $\left(1 - \frac{x}{2}\right)^8$ ضریب جمله شامل x^3 کدام است ؟

۱. -۷
۲. -۶
۳. $\frac{7}{2}$
۴. -۳

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۶۱) در بسط دو جمله ای $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{11}$ ضریب جمله شامل $\frac{\sqrt{x}}{x}$ کدام است؟

1. -۴۶۲
2. ۴۶۲
3. -۳۵۶
4. ۳۵۶

۶۲) مجموع ضرایب عددی بسط $(x+2)^{2n}$ هشتاد و یک برابر مجموع ضرایب عددی بسط $(2x+1)^n$ است، n چقدر است

1. ۴
2. ۳
3. ۲
4. ۵

۶۳) مجموع ضرایب شش جمله وسط در بسط $(a+b)^9$ کدام است؟

1. ۱۰۰۴
2. ۸۲۰
3. ۵۰۲
4. ۴۹۲

۶۴) جمله مستقل از x در بسط $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4 (1 + \sqrt{x})^6$ کدام است؟

1. ۱۰۰
2. ۱۲۰
3. ۲۱۰
4. ۲۵۰

۶۵) بسط $(x+1)^{10} + (x-1)^{10} - 2$ چند جمله دارد؟

1. ۵
2. ۶
3. ۱۰
4. ۱

66) تعداد جملات گویا در بسط دو جمله ای $(\sqrt{5} + \sqrt[3]{7})^{31}$ کدام است؟

1. ۴
2. ۵
3. ۶
4. ۷

📖 درس نامه ۴) بزرگترین مقسوم علیه

مشترک و کوچکترین مضرب مشترک

❖ ب.م.م و ک.م.م دو عدد طبیعی

هر عدد طبیعی مخالف ۱ که فقط بر ۱ و خودش

بخش پذیر باشد عدد اول نامیده می شه. هر عدد مخالف ۱ که اول نباشد مرکب نامیده می شه. برای یافتن

ب.م.م و ک.م.م دو عدد طبیعی کافیست اعداد داده شده را تجزیه کرده از روابط زیر استفاده کنیم.

۱. ب.م.م دو عدد a, b حاصل ضرب عوامل مشترک با توان کمتر (a, b)

۲. ک.م.م دو عدد a, b حاصل ضرب تمامی عوامل با توان بیشتر $[a, b]$

• مثال ۱) ب.م.م و ک.م.م دو عدد ۲۴۰ و ۲۲۵ را بیابید.

240	2	225	3
120	2	75	3
60	2	25	5
30	2	5	5
15	3	1	
5	5		
1			

با توجه به تجزیه های بالا داریم

$$240 = 2^3 \times 3 \times 5, 225 = 3^2 \times 5^2$$

$$\Rightarrow [240, 225] = 2^3 \times 3^2 \times 5^2$$

$$\Rightarrow (240, 225) = 3 \times 5 = 15$$

👉 روش بالا برای هر تعداد عدد برقراره.

برای تعیین ب.م.م و ک.م.م دو چند جمله ای همیشه مانند ب.م.م و ک.م.م دو عدد عمل کرد.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

• مثال ۲) ب.م.م و ک.م.م $x^3 - 1, x^2 - 2x + 1$ را بیابید.

➤ $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + 2x + 1)$

➤ $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

➤ $(x^3 - 1, x^2 + 2x + 1) = x - 1$

➤ $[x^3 - 1, x^2 + 2x + 1] = (x - 1)^2 \times (x^2 + 2x + 1)$

تمرین



۱. ب.م.م و ک.م.م دو چند جمله ای $12x^2 - 12x - 9, 16x^2 + 16x + 4$ را بیابید.

۲. چند جمله ای های $p(x) = 2x^2 - 16, q(x) = 3x^2 - 12$ را در نظر بگیرید

A. بزرگترین چند جمله ای از نظر درجه را بیابید که هر دو چند جمله ای بر آن بخش پذیر باشد.

B. کوچکترین چند جمله ای از نظر درجه که بر هر دو چند جمله ای بخش پذیر باشد.

۳. می خواهیم سالنی به ابعاد ۳۶×۴۰ متر را با فرش های مربع شکل بپوشانیم. اندازه ضلع فرش ها چه عدد هایی می تواند باشد. ضلع فرش ها چقدر باشد تا کمترین تعداد فرش ها برای پوشاندن سالن مورد نیاز است بدون آنکه فرش ها روی هم بیفتند؟

❖ کاربرد ب.م.م و ک.م.م اعداد در حل مسائل

- مثال ۳) در یک اتاق سه ساعت وجود دارد که اولی هر ۱۸ دقیقه و دومی هر ۲۴ دقیقه و سومی هر ۳۰ دقیقه یک بار زنگ می زند بعد از اولین باری که هر سه با هم زنگ می زنند حداقل چند دقیقه باید بگذرد تا هر سه ساعت با هم زنگ بزنند؟
در واقع باید ک.م.م این سه عدد را پیدا کنی که با توجه به تجزیه های زیر و نکات گفته شده برابر ۳۶۰ همیشه

- $18 = 3^2 \times 2$
- $24 = 2^3 \times 3$
- $30 = 2 \times 3 \times 5$

تمرین در کلاس



۱. ۷۲ لیتر آبمیوه، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ در شیشه هایی با حجم یکسان بسته بندی شده اند. حداقل تعداد شیشه ها کدام است

۲. کشاورزی می خواهد ۱۴۴ پرتقال و ۲۵۲ سیب و ۷۲ انار را در جعبه هایی قرار دهد. اگر کشاورز بخواهد تعداد میوه های هر جعبه یکسان باشد در هر جعبه چند میوه قرار بگیرد تا به کمترین تعداد جعبه نیاز باشد؟ حداقل به چند جعبه نیاز است؟

۳. سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلف زده می شود. اولی هر ۱۸ دقیقه و دومی هر ۲۴ دقیقه و سومی هر ۳۲ دقیقه زده می شود. بعد از اولین بار که هر سه با هم زده می شوند، حداقل چند دقیقه طول می کشد تا دوباره با هم زمان زده شوند؟ (شهریور ۹۳)

۴. در دنباله های زیر چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

1. 1,5,9,...
2. 4,7,10,...

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۱۴۴ لیتر آب میوه، ۴۵ لیتر شیر و ۶۳ لیتر دوغ در شیشه ایی با حجم یکسان بسته بندی شده اند حداقل تعداد شیشه ها را حساب کنید؟ (خرداد ۹۱)

👉 برای جمع و تفریق عبارات گویا ک.م.م مخرج ها را یافته و با مخرج

مشترک گیری حاصل عبارت را می یابیم

• مثال ۴) حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\bullet \quad \frac{1}{x} + \frac{3}{x-1} + \frac{1}{x^2-x} = \frac{x-1+3x+1}{x^2-x} = \frac{4x}{x^2-x} = \frac{4}{x-1}$$

تمرین



حاصل هر یک از عبارات زیر را بیابید.

$$\textcircled{1} \quad \frac{x^2-5x+4}{x^2-4x} \div \frac{x^2+x-2}{x^3+2x^2}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{1}{a^2-1} + \frac{2a}{a^2+2a+1} - \frac{2}{a+1}$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

$$1. \frac{x^2-2x-3}{x^2-9} \div \frac{x^2-6x-7}{x^2-10x+21}$$

$$2. \frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{x+3} - \frac{8}{x^2+2x-3}$$

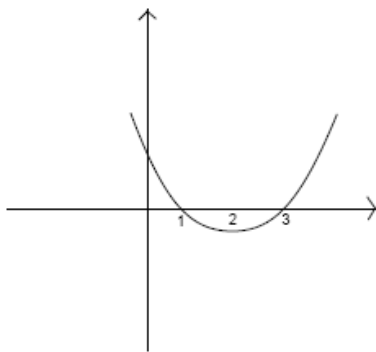
$$3. \frac{1}{a^2-1} + \frac{2a}{a^2+2a+1} - \frac{2}{a+1}$$

📖 درس نامه ۵) معادلات

در سال های قبل با حل معادلات درجه اول و دوم آشنا شدی

در این قسمت با خواص دیگه از معادلات درجه دوم آشنا

می شی. یک معادله درجه دوم در حالت کلی به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ نوشته میشه. اگه قرار در این صورت شکل این تابع سهمی نامیده می شود.



• مثال ۱)

شکل زیر نمودار تابع $f(x) = x^2 - 4x + 3$ است. محل برخورد

نمودار با محور x ها را صفرهای تابع می نامیم که همان

ریشه های معادله $x^2 - 4x + 3 = 0$ است.

برای حل معادله درجه دوم روش های مختلفی وجود دارد که در این قسمت روش کلی حل معادله درجه دوم را مورد بررسی قرار می دهیم.

در حالت کلی همانطور که دیدیم یک معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ است. ابتدا مقدار Δ را به صورت $\Delta = b^2 - 4ac$ می یابیم. با توجه به مقدار Δ یکی از سه حالت زیر پدید می آید:

$$① \Delta > 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$② \Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

③ اگر $\Delta < 0$ معادله ریشه ندارد.

• مثال ۲)

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

$$\bullet \quad 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4(2)(3) = 1$$

$$\blacktriangleright \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{3}{2} \end{cases}$$

معادلات زیر را حل کنید.

$$1. \quad -2x^2 + 6x + 3 = 0$$

$$2. \quad 5x^2 - x + 3 = 0$$

$$3. \quad 2x^3 + x^2 + 3x = 0$$

❖ نکاتی چند در مورد معادله درجه دوم و روش فوق

فرض کنیم α, β ریشه های معادله درجه دوم باشند در این صورت :

$$\star \quad \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$\star \quad \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

$$\star \quad |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

✓ اگر معادله دارای دو جواب قرینه باشد در این صورت $b = 0$ (چرا)

✓ اگر معادله دارای دو جواب معکوس هم باشد در این صورت $a = c$ و $|b| > |2a|$ (چرا)

✓ اگر معادله دارای دو جواب قرینه و معکوس باشد در این صورت: $a = -c$ (چرا)

✓ اگر مجموع و ضرب دو ریشه را به ترتیب P, S بنامیم در این صورت

$$\star \quad \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P, \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

• مثال ۳) اگر صفرهای تابع $f(x) = 3x^2 - (a^2 - 9)x + 2a$ قرینه هم باشند مقدار a را بیابید.

با توجه به مطالب قبل:

$$\triangleright -(a^2 - 9) = 0 \Rightarrow a = \pm 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \Rightarrow f(x) = 3x^2 + 6 \\ a = -3 \Rightarrow f(x) = 3x^2 - 6 \end{cases}$$

که فقط $a = -3$ قابل قبول است. (چرا)

• مثال ۴) یکی از جوابهای معادله $x^2 - kx + 8 = 0$ مربع دیگری است مقدار k و دو جواب معادله را بیابید.

$$\triangleright \alpha = \beta^2 \xrightarrow{\alpha \times \beta = 8} \beta^2 \times \beta = 8 \Rightarrow \beta^3 = 8 \Rightarrow \beta = 2$$

جواب معادله در خود معادله صدق می کند پس:

$$\triangleright \beta = 2 \Rightarrow 4 - 2k + 8 = 0 \Rightarrow k = 6$$

تمرین



۱. اگر α, β دو ریشه معادله $2x^2 - 3x + 1 = 0$ باشد حاصل عبارات زیر را بیابید.

① $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

② $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

۲. اگر α, β دو ریشه معادله $x^2 + mx + 8 = 0$ باشد و $2\alpha + \beta = 0$ مقدار m را بیابید.

۳. بدون حل معادله در وجود و علامت ریشه های معادله ی درجه دوم $5x^2 - 7x - 5 = 0$ بحث کنید.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۴. یکی از جواب های معادله $x^2 - (3k + 1)x + 2k^2 + k = 0$ چهار واحد بیش تر از جواب دیگر است. مقادیر k و جواب های معادله را بیابید.

۵. اگر α, β ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند ریشه های معادله درجه دوم

$$cx^2 + bx + a = 0 \text{ برابر } \dots\dots\dots \text{ و } \dots\dots\dots \text{ است (} c \neq 0 \text{) (خرداد ۹۱)}$$

۶. در معادله $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب ها ۲ واحد از جواب دیگر بزرگتر باشد مقدار m و جواب دیگر را بیابید. (دی ماه ۹۲)

❖ نوشتن معادله از روی جواب های آن

کافیه مجموع و حاصل ضرب دو ریشه را به ترتیب P, S بنامیم معادله به صورت زیر میشه

$$\star x^2 - Sx + P = 0$$

• (مثال ۵) معادله ای بنویسید که جواب های آن ۲، ۳- باشد

$$\triangleright S = -2 + 3 = 1, P = -2 \times 3 = -6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

تمرین



۱. معادله ی درجه دومی بنویسید که :

(a) ریشه های آن ۲، ۳- باشد.

(b) ریشه های آن $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}$ باشد.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۲. دو عدد حقیقی پیدا کنید که مجموع آن ها $\frac{7}{6}$ و حاصل ضرب آن ها $\frac{-1}{2}$ باشد

۳. محیط یک زمین کشاورزی ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر مربع است. اندازه ی طول و عرض آن را بیابید. (خرداد ۹۳)

۴. α و β ریشه های معادله $x^2 - 4x - 1 = 0$ هستند. معادله ای بنویسید که:

الف) جواب های آن دو واحد بیش تر از جواب های معادله فوق باشند.

ب) جواب های آن α^2, β^2 باشد.

۵. اگر α و β جواب های معادله درجه دوم $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشد معادله ای بنویسید که جواب های

آن $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشد.

❖ حل معادلات درجه چهارم به صورت $ax^4 + bx^2 + c = 0$ و شبه درجه دوم

برای حل معادلات درجه چهارم کافیست قرار بدیم $x^2 = z$ ، معادله درجه دومی به دست میاد که با حل اون جواب معادله ی اولیه به دست میاد. برای معادلات شبه درجه دوم هم با تغییر متغیر مناسب به یک معادله درجه دوم معمولی می رسیم.

تمرین



۱. معادلات زیر را حل کنید.

❶ $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

❷ $\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0$

❸ $2x^3 + x^2 + 3 = 0$

❹ $(4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۲. صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

1. $f(x) = x^3 - 4x$

2. $g(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)$

۳. بدون حل معادله، تعداد و علامت جواب های معادلات زیر را مشخص کنید.

❶ $2x^2 + 7x + 1 = 0$

۴. اگر α, β ریشه های معادله $4x^2 - 5x - 5 = 0$ باشد هعادله ای بمویسید که ریشه های آن $2\alpha, 2\beta$ باشد. (دی ماه ۹۳)

۵. معادله زیر را حل کنید

• $(4 - x^2)^2 - 2(4 - x^2) - 15 = 0$

۶. معادله زیر را حل کنید. (دی ماه ۹۱)

$$\bullet \left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 11\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 10 = 0$$

۷. معادله زیر را حل کنید. (شهریور ۹۲)

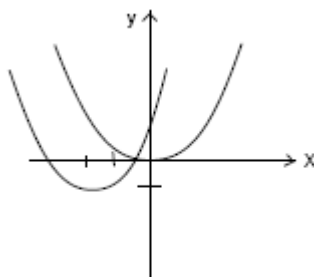
$$\bullet (x^2 - 1)^4 + (x^2 - 1)^2 - 2 = 0$$

درس نامه ۶) ماکزیمم و می نیمم توابع درجه دوم

در سال قبل با توابع درجه دوم تا حدودی آشنا شدی. فرم کلی این توابع به صورت $y = ax^2 + bx + c$ که $a \neq 0$ نمودار این توابع سهمی نامیده می شه. برای رسم نمودار این توابع از انتقال استفاده می کردی.

• مثال ۱)

نمودار تابع مقابل را رسم کنید.

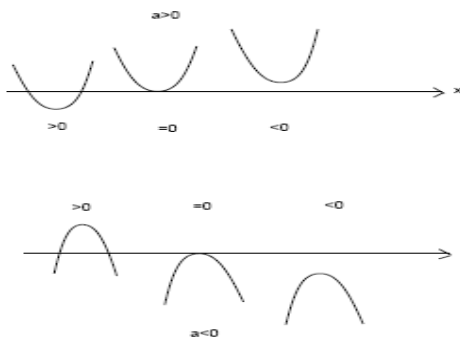


$$\bullet y = x^2 + 4x + 3$$

$$\triangleright y = (x + 2)^2 - 1$$

❖ ویژگی های سهمی :

۱) علامت Δ تعداد نقاط برخورد منحنی با محور x را نشان می دهد و علامت a جهت باز شدن دهانه سهمی را نشان می دهد



۲) محل برخورد نمودار با محور y برابر است. $f(0) = c$

۳) طول نقطه راس سهمی که نقطه max یا min را نشان می دهد از رابطه $x = \frac{-b}{2a}$ می آید.

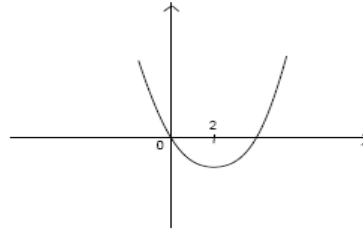
۴) خط $x = \frac{-b}{2a}$ را خط تقارن سهمی می گوئیم.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

• مثال ۲) نمودار $y = x^2 + mx + n - 1$ به صورت زیر است مقادیر m, n را بیابید.

طبق نمودار داریم $f(0) = 0$ پس طبق نکته ۲ داریم $n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1$ همچنین $x = 2$ خط تقارن سهمی است پس

$$\frac{-m}{2} = 2 \Rightarrow m = -4.$$



• مثال ۳) کمترین مقدار تابع $y = 2x^2 - (k+1)x + 4$ برابر با -4 است مقدار k را بیابید.

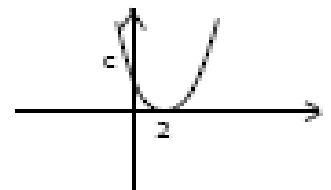
کمترین مقدار تابع همان عرض راس سهمی است. ابتدا طول راس را یافته سپس در تابع جایگذاری کرده و y را می یابیم.

$$\triangleright x = \frac{-b}{2a} = \frac{k+1}{4} \Rightarrow y = 2\left(\frac{k+1}{4}\right)^2 - (k+1)\left(\frac{k+1}{4}\right) + 4 \xrightarrow{y=-4} \begin{cases} k = 7 \\ k = -9 \end{cases}$$

تمرین

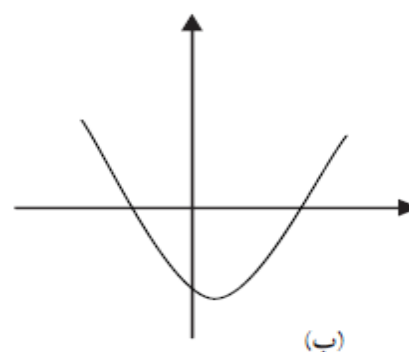
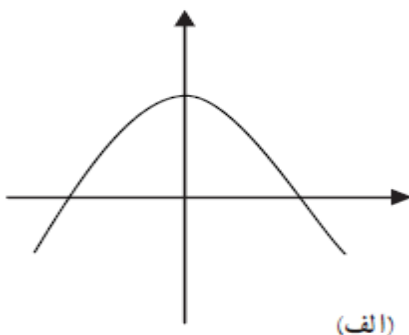


۱. نمودار تابع $y = 2x^2 - ax + b$ به صورت زیر است مقادیر a, b, c را بیابید.

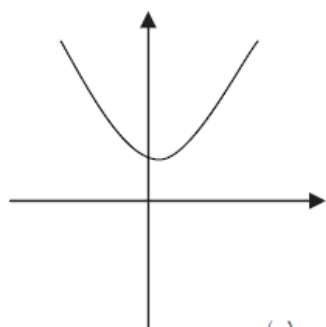


۲. در هر یک از شکل های زیر سهمی به معادله $p = ax^2 + bx + c$ داده شده است. در هر مورد علامت

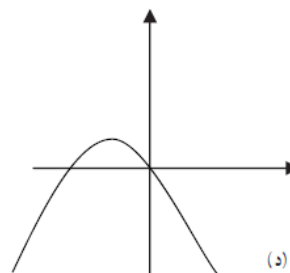
ضرایب a, b, c را مشخص کرده و تعداد جواب های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را بیابید



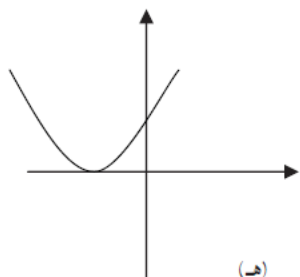
حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد



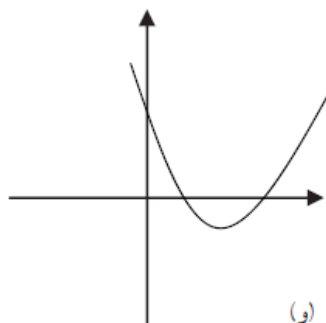
(ج)



(د)



(ه)



(و)

۳. نشان دهید نمودار تابع $y = -x^2 + 3x - 4$ همواره زیر محور x ها است.

۴. نشان دهید در بین مستطیل هایی که محیط شان ثابت است مربع دارای بیشترین مساحت است.

۵. ارتفاع توپی که کودکی پر تا ب می کند از رابطه $y = \frac{-5}{6}x^2 + 2x + 3/6$ به دست می آید. که ارتفاع توپ برابر y و فاصله افقی توپ از محل پرتاب برابر x است. الف) کودک توپ را از چه ارتفاعی پرتاب می کند؟ ب) بالاترین ارتفاع توپ چه قدر است؟

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۶. عدد ۱۰ را به دو قسمت طوری تقسیم کنید که حاصل ضرب آنها ماکزیمم شود.

۷. ماکزیمم یا مینیمم مقدار تابع های زیر را بیابید.

- $y = 4 + 8x - x^2$

- $y = 9x^2 + 6x + 3$

۸. در ضرب دو عدد مثبت که یکی از دیگری ۱۰ واحد بزرگتر است اشتباهی رخ داده است. در نتیجه رقم دهگان ۴ واحد کوچکتر می شود. برای آزمایش، حاصل ضرب را بر عدد کوچکتر تقسیم می کنند خارج قسمت ۳۹ و باقی مانده آن ۲۲ می شود، آن دو عدد را بیابید.

❖ معادلات کسری که تو مخرج اون ها متغیر

❖ (درس نامه ۷) معادلات شامل عبارات گویا

وجود داره معادلات شامل عبارات گویا نامیده می شن. برای حل این معادلات باید دو طرف تساوی را در

ک.م.م مخرج ها ضرب کنی تا معادله از حالت کسری خارج بشه. بگو خب. سپس معادله به دست آمده را حل می کنی. توجه کن که جواب به دست اومده نباید ریشه مخرج باشه. بگو خب چرا؟ در این صورت اون جواب غیر قابل قبول میشه.

❖ ممکنه که معادله مورد نظر از یک مساله به دست اومده باشه در این صورت جواب

به دست اومده باید در شرایط مساله صدق کنه.

- مثال ۱) آب استخری توسط سه شیر بزرگ تا مین می شود. شیر اول به تنهایی در ۳ ساعت شیر دوم در ۴ ساعت و هر سه شیر با هم در $\frac{4}{3}$ ساعت استخر را پر می کنند شیر سوم در چند ساعت استخر را پر می کند؟ شیر اول در هر ساعت $\frac{1}{3}$ استخر و شیر دوم در هر ساعت $\frac{1}{4}$ استخر و شیر سوم در هر ساعت $\frac{1}{x}$ استخر را پر می کنند پس

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{4}{3}} \Rightarrow \frac{4x+3x+12}{12x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 28x + 48 = 36x \Rightarrow x = 6$$

- مثال ۲) در نصب نوعی در و پنجره نصاب اول ۳۰ دقیقه زودتر از نصاب دیگر کارش را تمام می کند. اگر هر دو با هم کنار کنند ۱۰ دقیقه زودتر از وقتی که نفر اول به تنهایی کار کند کار را تمام می کنند. هر نصاب به تنهایی در چند دقیقه کار را انجام می دهد؟
اگر نصاب اول در x دقیقه کارش را انجام دهد در این صورت نصاب دوم در $x+30$ و هر دو در $x-10$ دقیقه کار خود را انجام می دهند پس:

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x+30} = \frac{1}{x-10} \Rightarrow \frac{2x+30}{x(x+30)} = \frac{1}{x-10} \Rightarrow 2x^2 + 10x - 300 = x^2 + 30x$$

$$\Rightarrow x^2 - 20x - 300 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 30 \checkmark \\ x = -10 \times \end{cases}$$

تمرین



۱. معادلات زیر را حل کنید.

$$\bullet \frac{3}{m+2} + \frac{2}{m} = \frac{4m-4}{m^2-4}$$

$$\bullet 2 + \frac{5}{3k-1} = \frac{-2}{(3k-1)^2}$$

۲. عددی طبیعی را بیابید که مجموع آن با سه برابر معکوسش برابر ۴ برابر خود آن عدد شود.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۳. آقای عماد چند اسباب بازی یکسان برای هدیه به مهد کودک خرید که در مجموع قیمت آنها ۱۲۰۰۰ تومان شد. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی ۱۰۰ تومان ب او تخفیف می داد او با همان پول ۴ اسباب بازی بیشتر می توانست بخرد. قیمت هر اسباب بازی را قبل از تخفیف به دست آورید.

۴. مقدار k را طوری بیابید که جواب معادله $\frac{x-3}{2+k} + \frac{x-2}{6+k} = \frac{x}{4+k}$ برابر ۵ باشد.

۵. معادله $\frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x+2}$ را حل کنید.

۶. دو بنا در حال انجام کاری هستند اگر بنای جوان تر در ۶ روز کار را تمام کند و هر دو در ۴ روز. هر یک به تنهایی در چند روز کار را تمام می کنند؟

۷. معادلات زیر را حل کنید.

A. $\frac{6}{p} = 2 + \frac{p}{p+1}$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

B. $\frac{3y+5}{y^2+5y} + \frac{y+4}{y+5} = \frac{y+1}{y}$

C. $\frac{2}{x-3} - \frac{3}{x+3} = \frac{12}{x^2-9}$

D. $\frac{k}{2-k} + \frac{2}{k} = \frac{7}{6}$

❖ سوالات چهار گزینه ای

۶۷) معادله $\frac{x^2}{x^2+3x+2} + 2\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2}\right) = 3$ دارای چند ریشه حقیقی است ؟

1. صفر
2. ۱
3. ۲
4. ۳

📖 درس نامه ۸) معادلات شامل عبارات گنگ

❖ معادلاتی هستند که تو اونها متغیر در زیر رادیکال قرار داره. خب اگه گفتی چه کار باید بکنی ؟ آفرین. برای حل این معادلات ابتدا باید با توان رسوندن معادله از حالت رادیکالی خارج بشه سپس معادله به دست اومده را حل کنی. (شاید مجبور بشی اینکار بیش از یک بار لازم باشه)

☀️ جواب به دست آمده باید در معادله اولیه صدق کند

- مثال ۱) معادله زیر را حل کنید.

★ $\sqrt{x+1} + \sqrt{3x+4} = \sqrt{5x+9}$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

$$\triangleright x + 1 + 3x + 4 + 2\sqrt{3x^2 + 7x + 4} = 5x + 9 \Rightarrow 2\sqrt{3x^2 + 7x + 4} = x + 4 \xrightarrow{\text{به توان 2}} 12x^2 + 28x + 16 = x^2 + 8x + 16$$

$$\triangleright 11x^2 + 20x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -20 \end{cases} \text{ غیر قابل قبول}$$

تمرین



۱. معادله های زیر را حل کنید.

A. $\sqrt{1 - x^2} = x$

B. $\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = 1 - x$

C. $\sqrt{15 + \sqrt{2x + 80}} = 5$

D. $\sqrt{5q - 1} + 3 = 0$

E. $\sqrt{3-3p} = 3 + \sqrt{3p+2}$

۲. عددی پیدا کنید که حاصل جمع آن با جذرش برابر ۶ شود؟ (دی ماه ۹۰)

۳. معادله $2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4}$ را حل کنید. (شهریور ۹۱)

۴. نقطه ای روی خط $y = 2x + 1$ بیابید که فاصله ی آن از نقاط $A(3,0), B(-1,0)$ به یک اندازه باشد.

۵. معادله زیر را حل کنید.

A. $2\sqrt{3-2x} + x = 3$

B. $\frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{3}{\sqrt{1-3x}}$

C. $2 + \sqrt{1+x} = \sqrt{x}$

۶. جای خالی را پر کنید. (خرداد ۹۳)

جواب معادله $\sqrt{2-x^2} = x$ برابر می باشد.

۷. جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید (خرداد ۹۲)

مجموعه جواب معادله $x + \sqrt{x} = 6$ برابر است با.....

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۸. بدون حل معادله ی $\sqrt{1-x} + \sqrt{2-x} + 3 = 0$ توضیح دهید چرا مجموعه ی جواب تهی است؟

۹. در هر یک از فرمول های زیر متغیر خواسته شده را بر حسب سایر متغیر ها بیابید.

- $V = \sqrt{\frac{2k}{m}}, k = ?$
- $F = \frac{1}{2\pi}\sqrt{LC}, L = ?$

📖 درس نامه ۹) حل معادله به روش هندسی

تا به حال با حل معادلات به روشهای جبری آشنا شدی.

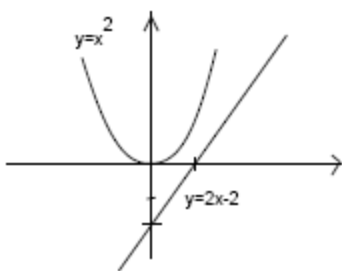
قبول داری؟ آگه نه برگرد و درس های قبلی رو مرور کن.

در این قسمت باید با روش دیگری به نام هندسی آشنا میشی که در بسیاری از معادلات می تونه مورد استفاده قرار بگیره در واقع وقتی روش جبری در حل یک معادله ناتوان باشه روش هندسی می تونه در بعضی مسائل حداقل در زمینه وجود جواب و تعداد جواب پاسخ گو باشه. خوب یاد بگیر.

❖ اگر $f(x), g(x)$ دو تابع باشند طول نقطه برخورد آنها همان ریشه های معادله $f(x) = g(x)$ است

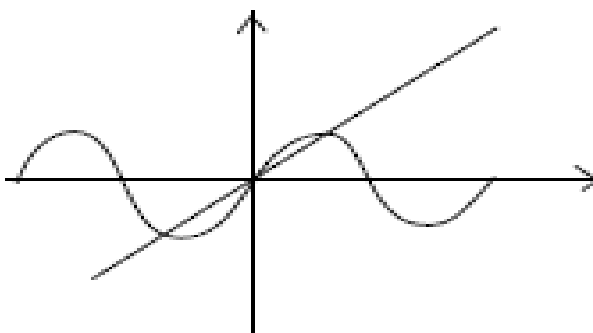
- مثال ۱) با روش هندسی نشان دهید معادله $x^2 - 2x + 2 = 0$ جواب ندارد.

معادله را به صورت $x^2 = 2x - 2$ می نویسیم سپس توابع $f(x) = x^2, g(x) = 2x - 2$ را رسم می کنیم.



مشاهده می شود این توابع همدیگر را قطع نمی کنند پس معادله داده شده جواب ندارد.

- مثال ۲) با روش هندسی تعداد جواب های معادله $x - 3\sin x = 0$ را بیابید.



معادله را به صورت $\frac{x}{3} = \sin x$ نوشته

توابع $y = \frac{x}{3}, y = \sin x$ را رسم

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

می کنیم با توجه به نمودار زیر معادله مورد نظر ۳ جواب دارد.

تمرین



۱. با روش هندسی تعداد جواب های معادله $x - 2 \sin x = 0$ را مشخص کنید.

۲. با روش هندسی به طور تقریبی هر یک از معادلات زیر را حل کرده و در صورت امکان جواب های دقیق را به روش جبری بیابید.

A. $\sqrt{x-1} = x-3$

B. $2^x = x^2$

۳. با روش هندسی وجبری نشان دهید معادله $x = \sqrt{x} - 1$ جواب ندارد.

۴. با روش هندسی به طور تقریبی هر یک از معادلات زیر را حل کرده و در صورت امکان جواب های دقیق را به روش جبری بیابید.

A. $\sqrt{x} + 2x = x^2 + 2$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

B. $\frac{2x-1}{x} = 5 - x$

C. $\sqrt{x-1} = x - 3$

۵. معادله $x + \frac{x}{|x|} = 3$ را به روش هندسی حل کنید. (خرداد ۹۳)

۶. معادله $\sqrt{1-x} - 1 = x^2 - 2x$ را با روش هندسی حل کنید. (خرداد ۹۱)

۷. معادله $\sqrt{x+1} = x - 1$ را به روش هندسی حل کرده و جواب ها را مشخص کنید. (شهریور ۹۲)

۸. معادله $\sqrt{x+1} = x^2 + 2x + 1$ را به روش هندسی و جبری حل کنید. (دی ماه ۹۲)

۹. به روش نقطه یابی نمودار تابع $y = x^2$ را رسم. سپس با استفاده از انتقال نمودار تابع $y = (x + 1)^2$ را رسم کنید و جواب های معادله $(x + 1)^2 = -3x + 5$ را با روش هندسی به طور تقریبی به دست آورید.

درس نامه ۱۰ قدر مطلق و ویژگیهای آن

در سال های قبل با قدر مطلق آشنا شدی (دقیقا بخوای همیشه سال اول) همونطور که می دونی قدر مطلق عدد a را با $|a|$ نشون میدی که برابر همیشه با فاصله a تا مبدا روی محور افقی. به طور خلاصه برات بگم قدر مطلق عدد x به صورت مقابل تعریف می شه.

$$\bullet \quad |x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

• مثال ۱) عبارات زیر را با استفاده از قدر مطلق بنویسید.

الف) فاصله دو عدد a, b برابر ۲ است. $|a - b| = 2$

ب) فاصله x از عدد ۳ نصف فاصله x از عدد -4 است. $|x - 3| = \frac{1}{2}|x + 4|$

• مثال ۲) حاصل عبارات زیر را به ساده ترین صورت بنویسید

$$\circ \quad |1 - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - 1$$

$$\circ \quad \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$$

❖ ویژگیهای قدر مطلق

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

1) $\sqrt{x^2} = x $	2) $ x ^2 = x^2$
3) $ a b = ab $	4) $ -a = a $
5) $\left \frac{a}{b}\right = \frac{ a }{ b }$	6) $x^2 = a^2 \Leftrightarrow x = a $
7) $ x \leq a \stackrel{a \geq 0}{\Leftrightarrow} -a \leq x \leq a$	
8) $ x \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$	

❖ نامساوی مقابل به نامساوی مثلثی معروف است

★ $|a + b| \leq |a| + |b|$

• مثال ۳) با استفاده از نامساوی مثلث رابطه $|a| - |b| \leq |a - b|$ را ثابت کنید.

کافی است در نامساوی مثلث به جای $a - b, a$ را قرار دهیم.

○ $|a + b| \leq |a| + |b| \Leftrightarrow |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \Leftrightarrow |a| \leq |a - b| + |b| \Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$

تمرین



۱. حاصل عبارت $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$ را به ساده ترین صورت بنویسید.

۲. عبارت فاصله بین دو عدد a, x کمتر از $1 + 0$ است را با استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

۳. به کمک تعیین علامت عبارات های داخل قدر مطلق، ضابطه ی توابع زیر را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید

A. $y = |x + 1| - 2$

B. $y = |x - 1| + |x + 2|$

C. $y = x|x|$

۴. با توجه به اینکه $\sqrt{a^2} = |a|$ نشان دهید $|ab| = |a||b|$

۵. با فرض $b \neq 0$ و استفاده از قسمت قبل ثابت کنید $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

۶. ثابت کنید $|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$

۷. برای هر عدد حقیقی a ثابت کنید $|a| \leq a \leq |a|$ و $|a|^2 = a^2$ و $|-a| = |a|$

۸. نامساوی مثلث را ثابت کنید.

۹. اگر $|a| > c$, $c > 0$ نشان دهید $a > c$ یا $a < -c$

۱۰. جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. (خرداد ۹۱)

اگر $x \leq 1$ باشد، ضابطه تابع $y = |x - 3| + |x - 1|$ بدون استفاده از قدر مطلق برابر است.....

۱۱. به کمک تعیین علامت عبارت داخل مطلق ضابطه ی $f(x) = x|x - 2|$ را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید. (دی ماه ۹۰)

برای حل این گونه معادلات دو راه داری :

(۱) هندسی : قبلا دیدی .

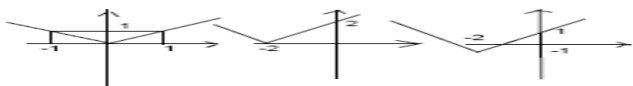
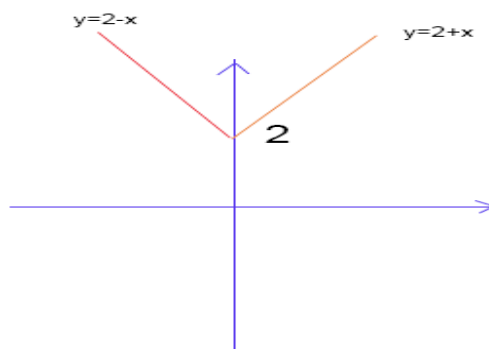
(۲) جبری : یا با استفاده از خواص قدر مطلق و همچنین تعیین علامت معادله را حل کن

❖ رسم نمودار شامل قدر مطلق

کافی است از روش انتقال یا تعیین علامت استفاده کنیم

• مثال (۱) تابع $f(x) = |x| + 2$ را به روش تعیین علامت رسم کنید

$$\triangleright f(x) = |x| + 2 = \begin{cases} 2 + x & x \geq 0 \\ 2 - x & x < 0 \end{cases}$$



• مثال (۲) تابع $y = |x + 2| - 1$ را به روش

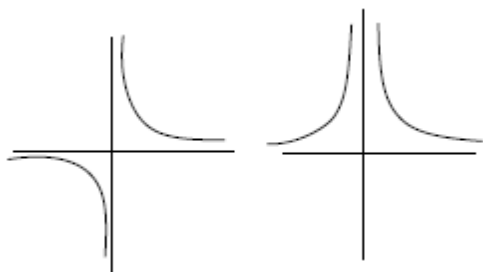
انتقال رسم کنید

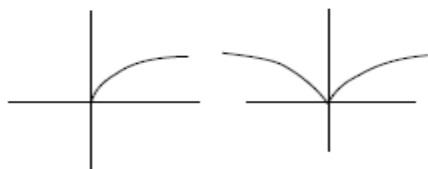
❖ رسم نمودار توابع $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$

A. برای رسم نمودار توابع $y = |f(x)|$ نمودار تابع $y = f(x)$ را رسم می کنیم سپس جاها یی که نمودار f زیر محور x است را نسبت به محور x قرینه می کنیم .

B. برای رسم نمودار توابع $y = f(|x|)$ نمودار $f(x)$ را برای $x \geq 0$ رسم می کنیم و سپس قرینه آن را نسبت به محور y رسم می کنیم

• مثال (۳) نمودار تابع $y = \left| \frac{1}{x} \right|$ را رسم کنید.





• مثال ۴) نمودار تابع $y = \sqrt{|x|}$ را رسم می کنیم.

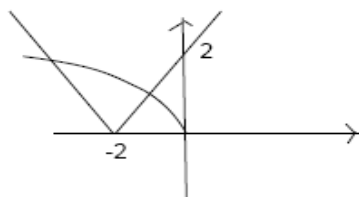
• مثال ۵) معادلات زیر را حل کنید.

C. $|2 - |x|| = 5 \Rightarrow 2 - |x| = \pm 5 \Rightarrow \begin{cases} 2 - |x| = 5 \Rightarrow |x| = -3 \text{ غیر قابل قبول} \\ 2 - |x| = -5 \Rightarrow |x| = 7 \Rightarrow x = \pm 7 \end{cases}$

D. $|x - 2| + x = 3 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \Rightarrow x - 2 + x = 3 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} \\ x < 2 \Rightarrow -x + 2 + x = 3 \Rightarrow 2 = 3 \end{cases}$

• مثال ۶) تعداد جواب های معادله زیر را از روش هندسی بیابید.

• $\sqrt{-x} - |x + 2| = 0$



با توجه به شکل معادله دارای دو جواب منفی است.

تمرین



۱. نمودار رابطه زیر را رسم کنید سپس به ازای $y = 3$ معادله به دست آمده را با روش هندسی و جبری حل کنید

A. $y = x + \frac{x}{|x|}$

B. $y = |2x - 4|$

C. $y = |x| + |1 - x|$

۲. معادله $|x| = \sqrt{2-x}$ را به دو روش جبری و هندسی حل کنید.

۳. معادله $x|x| + 1 = x^2$ را به دو روش هندسی و جبری حل کنید.

۴. هر یک از معادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب را مشخص کنید.

A. $|y^2 - 2| = 7$

B. $|2t - 1| - 3 = 0$

c. $|2x - 3| = 3 - 2x$

۵. تابع $y = |1 - x| - 3$ را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید سپس آن را رسم کنید و به کمک آن برد تابع را مشخص کنید. (شهریور ۹۰)

۶. ابتدا تابع $y = |x - 1| + |2 - x|$ را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید سپس نمودار آن را رسم کنید. (خرداد ۹۴)

۷. ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - 3|$ را در بازه $[2, 4]$ رسم کنید و سپس با کمک آن نمودار تابع $f(-x)$ را رسم کنید. (دی ماه ۹۱)

۸. معادله $x + \frac{x}{|x|} = 3$ را به روش هندسی حل کنید. (خرداد ۹۳)

۹. معادله زیر را به روش هندسی حل کنید.

➤ $|x - |x|| = 1 - |x|$

۱۰. معادله $||x| - 2| = 3$ را حل کنید. (شهریور ۹۳)

۱۱. جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (دی ماه ۹۳)

جواب های معادله $|x + 1| = 4$ برابر است باو.....

درس نامه ۱۲) نامعادلات - نامعادلات شامل قدر مطلق - حل جبری و هندسی

- ❖ برای حل این نامعادلات نظیر معادلات دو روش هندسی و جبری وجود دارد. توی روش جبری با استفاده از نکات داده شده نامعادله را به نامعادله ساده تری تبدیل کن و حلش کن. توی روش هندسی نامعادله را به دو تابع تبدیل کرده و هر کدام را رسم کن و با توجه به جهت نامعادله جواب را پیدا کن.
- مثال ۱) نامعادله های زیر را حل کنید

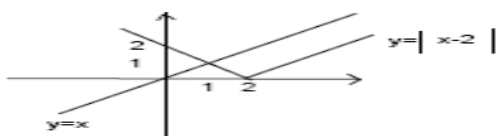
A. $|2 - x| \geq -1$

جواب این نامعادله تمام اعداد حقیقی است

B. $|x - 2| < 3 \Rightarrow -3 < x - 2 < 3 \Rightarrow -1 < x < 5$

- مثال ۲) نامعادله مقابل را به روش هندسی حل کنید.

➤ $|x - 2| \geq x$



با توجه به نمودار بالا جواب برابر است با:

➤ $x \leq 1$

تمرین



۱. نامعادلات زیر را حل کنید.

1. $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

2. $(1 + x^2)(1 - x^2) \leq 0$

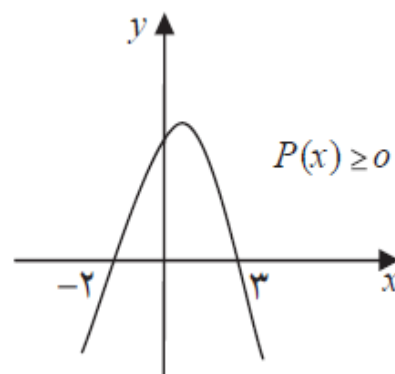
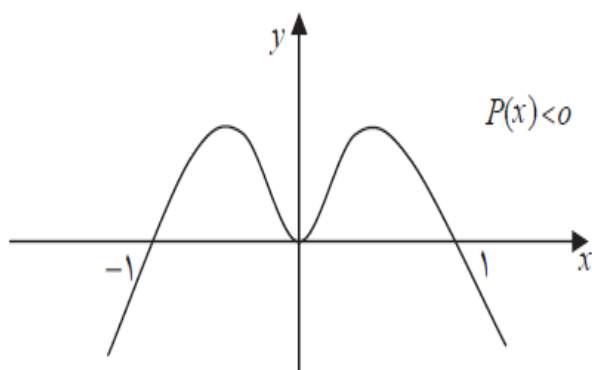
3. $1 + \frac{1}{x} < x$

4. $(1 - x)(x + 2) > 2x^2 - 1$

5. $|x - 2| \leq x$

6. $|2 - 3x| > 5$

۲. در هر یک از نمودارهای زیر مجموعه جواب نامعادله داده شده را بیابید.



حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۳. نامعادله مقابل را به روش هندسی حل کنید.

- $x^2 \leq 2^x$

- $\frac{1}{x} < \sqrt{x}$

۴. مجموعه جواب نامعادله $|2x - 1| \leq 7$ بازه ی است. (دی ماه ۹۳)

۵. نامعادله $|2x - 1| < 1$ را حل کنید. (دی ماه ۹۲)

۶. نامعادله مقابل را به روش هندسی حل کنید.

- $\sqrt{x-1} < |x-1|$

۷. نامعادله $|x| + |x-1| \leq 3$ را به روش هندسی حل کنید. (خرداد ۹۲)

۸. نامعادله $\sqrt{x-1} \leq |x-1|$ را با روش هندسی حل کنید. (خرداد ۹۱)

۹. نامعادله $\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$ را به روش هندسی حل کرده و مجموعه جواب را بیابید. (شهریور ۹۰)

۱۰. نامعادله $x^2 \leq |x|$ را به روش هندسی حل کنید. (شهریور ۹۱)

۱۱. نامعادلات زیر را به روش هندسی و جبری حل کنید.

C. $|x| + |x-1| \leq 5$

D. $|x^2 - 1| \leq |x + 1|$

E. $x + 1 < |x|$

❖ سوالات چهار گزینه ای

۶۸) معادله $\sin x = \frac{x}{4}$ چند ریشه دارد؟

1. ۱
2. ۲
3. ۴
4. ۳

۶۹) تعداد و علامت ریشه های معادله $x^5 - 3x + 1 = 0$ کدام است؟

۱. سه ریشه مثبت
۲. سه ریشه منفی
۳. یک ریشه مثبت و دو ریشه منفی
۴. یک ریشه منفی و دو ریشه مثبت

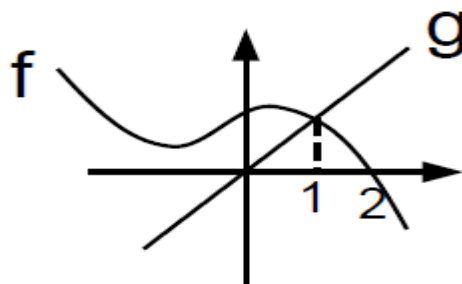
۷۰) معادله $(x - \sqrt{x})^2 - \frac{11}{10}(x - \sqrt{x}) + \frac{1}{10} = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

1. ۴
2. ۲
3. ۱
4. ۳

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۷۱) جواب نامعادله $\frac{2}{f(x)} \geq \frac{2}{g(x)}$ برای x های مثبت با توجه به شکل مقابل کدام است؟

1. $x \leq 1$
2. $0 \leq x \leq 1$
3. $x \geq 2$
4. $1 \leq x < 2$



فصل دوم - تابع

خب رسیدی به مهمترین فصل کتاب. خوب این فصلو یاد بگیر

ببین تو این فصل چی می خواهی بخونی :

۱. یادآوری و تکمیل
۲. رسم نمودار توابع
۳. اعمال جبری روی توابع
۴. ترکیب توابع
۵. توابع زوج و فرد
۶. توابع صعودی و نزولی
۷. توابع یک به یک و توابع وارون
۸. توابع چند جمله ای و توابع متناوب
۹. توابع پله ای و تابع جز صحیح

از این فصل تو دی ماه ۱۰ نمره و توی خرداد و شهریور ۴ نمره میاد .

📖 درس نامه (۱) تابع - یاد آوری و تکمیل

❖ تابع: یک تابع از مجموعه ای مانند A به مجموعه ای مانند B به رابطه هست بین این دو مجموعه به طوریکه به هر عضو مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را نسبت بدهد. در این تعریف مجموعه اول دامنه و مجموعه دوم هم دامنه نامیده می شه. اگر این تابع را با f نمایش دهیم می توانیم بنویسیم:

$$* f: A \rightarrow B$$

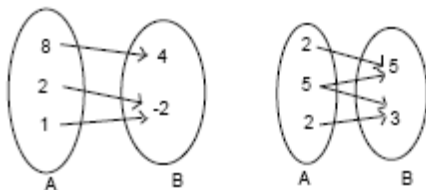
❖ روش های مختلف نمایش تابع:

✓ نمودار ون:

در این روش هر عضو مجموعه A با یک فلش به عضو متناظر آن در مجموعه B متصل می شه.

در این نمایش توجه داشته باش که از هر عضو A دقیقاً یک فلش خارج می شه ولی ممکنه به هر عضو B یک فلش یا بیشتر وارد شود و یا اصلاً وارد نشه.

در این نمایش اعضای که از اونا فلش خارج می شه دامنه و اعضای که به اونا فلش وارد بشه برد هستن.



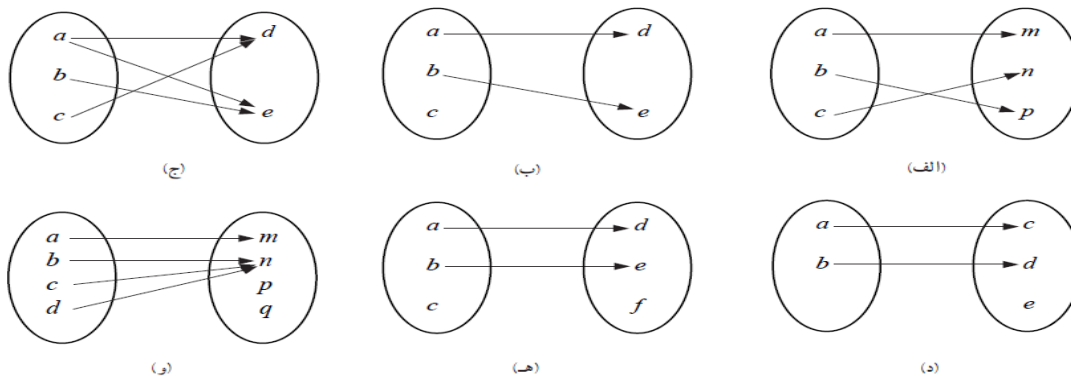
• مثال (۱)

نمودار (۱) تابع را نشان میدهد ولی (۲) تابع نیست

تمرین



کدام یک تابع است ؟



حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

✓ زوج مرتب:

مجموعه ای از زوج مرتب ها تابع را نشون میده هرگاه هیچ دو زوج مرتبی مولفه های اول مساوی نداشته نباشن در این نمایش مولفه های اول می شن دامنه واسم مولفه های دوم میشه برد.

• مثال (۲)

f تابع را نشان می دهد ولی g تابع نیست.

➤ $f = \{(3,5), (2,6), (7,1), (6,5)\}$

➤ $g = \{(3,2), (1,4), (3,8)\}$

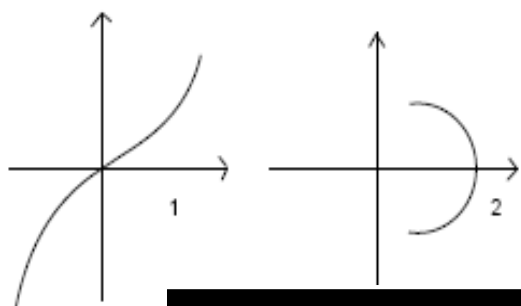
• مثال (۳) مقادیر a, b را به گونه ای بیابید که مجموعه زیر یک تابع را نشان دهد.

• $f = \{(2,3), (4,9), (4, a+3), (6,8), (a+4, -1), (10, b)\}$

با توجه به مفهوم تابع داریم: $a+3=9 \Rightarrow a=6$ با جایگذاری a داریم: $b=-1$

✓ نمایش هندسی:

در نمایش زوج مرتبی هر زوج مرتب یک نقطه را روی دستگاه مختصات نشون می ده و خب مجموعه این نقاط یک نمودار را نشان می ده. برای اساس نموداری، تابع را نشون می ده که هر خط عمودی اون را حداکثر توی یک نقطه قطع کنن. نمودار (۱) تابع را نشون می ده ولی (۲) تابع نیست.



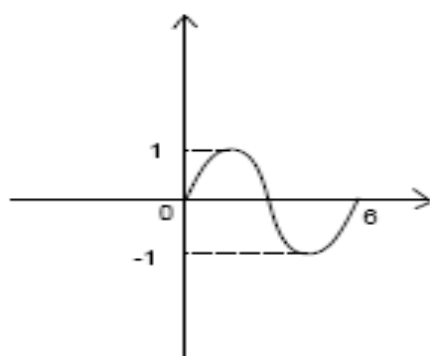
برای تعیین دامنه و برد کافیه تصویر تابع

را به ترتیب روی محور x و y پیدا کنی.

تمرین



دامنه و برد تابع زیر را بیابید.



حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

✓ نمایش جبری:

هنگامی که دستور یا قانون تابع در قالب یک عبارت جبری قابل بیان بشه به اون نمایش جبری می گیم.

در نمایش جبری سه ویژگی باید مشخص باشه: (۱) دامنه (۲) هم دامنه (۳) دستور یا قانون تابع

در این حالت نمایش تابع را به صورت زیر داری که در اون A دامنه تابع و B هم دامنه تابع میشه.

- $f: A \rightarrow B$
- $y = f(x)$

• مثال (۴)

هر یک از موارد زیر نمایش یک تابع است.

- $f: R \rightarrow R$
- $y = x^2$

👉 :اگه توی یه سوال دامنه رو نداشتیم چی؟

گاهی دامنه تابع بیان نمی شه. در این حالت دامنه را بزرگترین مجموعه ممکن می گیری.

- مثال (۵) دامنه تابع $f(x) = \frac{2x+5}{x-3}$ برابر $D = R - \{3\}$ و دامنه تابع $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ برابر $[-2, 2]$ است.

تمرین



۱. اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{p, q\}$ باشد چند تابع از A به B می توان نوشت؟

۲. اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد چند تابع از A به B وجود دارد؟

۳. تابعی مثال بزنید که دامنه آن $(-2, \infty)$ باشد.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۴. اختلاف دو عدد برابر ۱۲ است. حاصل ضرب دو عدد را به عنوان تابعی از عدد کوچکتر بیان کنید.



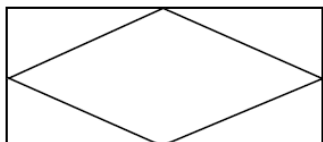
۵. با ۱۵۰ متر نرده یک زمین مستطیل شکل را محصور کرده و

از وسط با نرده مانند شکل مقابل آن را به دو قسمت مساوی

تقسیم کرده ایم. مساحت ناحیه محصور شده را به عنوان

تابعی از عرض مستطیل بیابید.

۶. دو تابع مانند f, g مثال بزنید که دامنه هر دو برابر $[2, 5]$ و برد هر دو $[0, 4]$ باشد ولی یکی یک به یک باشد و دیگری نباشد.



۷. در مستطیلی به عرض W و محیط 40 متر یک لوزی محاط شده است

هر راس لوزی دقیقاً بر وسط یکی از اضلاع منطبق است.

مساحت لوزی را به عنوان از عرض مستطیل بیان کنید.

- $\begin{cases} f: [1,2] \rightarrow R \\ f(x) = 3x - 1 \end{cases}$

- $\begin{cases} g: [-5,5] \rightarrow R \\ g(x) = |x| \end{cases}$

۹. اگر $f(x) = x^2, g(x) = |x|$ درست یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را بررسی کنید.

a) $f(2x) = 2f(x)$

b) $g(2x) = 2g(x)$

c) $f(x+2) = f(x) + 2$

d) $g(x+2) = g(x) + 2$

۱۰. مساحت مثلث قائم الزاویه ای ۴ سانتی متر مربع است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از یک ضلع آن بیان کنید. (خرداد ۹۰)

❖ سوالات چهار گزینه ای

۷۲) در صورتی که رابطه ی $\{(a, 1), (5, m), (3, 4), (3, a - 1), (2, m + 1)\}$ یک تابع باشد، m کدام است؟

1. $m = 1$
2. هر عددی می تواند باشد. m
3. $m = -1$
4. $m = 0$

۷۳) به ازای چند عدد صحیح m ، رابطه ی $\{(m^2, m + 3), (2, 5), (m + 2, m + 5), (6, 1)\}$ تابع نیست؟

1. ۵
2. ۳
3. ۴
4. ۲

۷۴) کدام تابع زیر یک تابع خطی است؟

1. $y = \frac{1}{x}$
2. $y = \frac{4x^3 + 4x + x^2 + 1}{x^2 + 1}$
3. $y = \frac{2x^2 - 1}{x - 1}$
4. $y = \sqrt{x}$

۷۵) طول (x) یک مستطیل سه واحد بیشتر از عرض (y) آن است. اگر محیط مستطیل را با P نمایش دهیم، کدام رابطه ی زیر محیط را بر حسب عرض بیان می کند؟

1. $P(y) = 2y + 3$
2. $P(y) = 2y - 3$
3. $P(y) = 4y + 6$
4. $P(y) = 4y - 6$

۷۶) یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر

باشد، حجم تانکر بر حسب r کدام است؟

1. $\pi r^2 \left(30 + \frac{4}{3}\pi\right)$

2. $\pi r^3 \left(30 + \frac{4\pi}{3}\right)$

3. $\pi r^2 \left(30 + \frac{4}{3}r\right)$

4. $\frac{4\pi r^2}{3}(30 + r)$

77) خطی از نقطه ی $A = (3, 2)$ عبور می کند و شیب آن منفی است و محور x ها و y ها را به ترتیب در نقاط $B = (a, 0)$

و $C = (0, p)$ قطع می کند و با محورهای مختصات مثلث قائم الزاویه ای می سازد. مساحت مثلث بر حسب p کدام است؟

1. $\frac{3p^2}{p-2}$

2. $\frac{3p^2}{2p-4}$

3. $\frac{3p^2}{2p+4}$

4. $\frac{3p^2}{p-2}$

78) در صورتی که $f = \{(1, -1), (-1, 5), (3, 1)\}$ مقدار عددی $f(f(3)) + f(f(1))$ کدام است؟

1. -1

2. 5

3. 4

4. صفر

79) اگر $f(x) = \begin{cases} ax + 2 & , x \leq 1 \\ b[-x] + a & , x \geq 1 \end{cases}$ نمایش یک تابع باشد، مقدار b کدام است؟

1. 2

2. -2

3. 1

4. -1

80) اگر در تابع $y = 3x - 1$ داشته باشیم $m + f(1 + f(2)) = f(3 - f(1))$ مقدار $f(m)$ کدام است؟

1. 45

2. 46

3. -45

4. -46

81) اگر $f(x) = 3x$ و $g(x) = 2x + 1$ چند تا از روابط زیر در مورد f و g صحیح است؟

- $g(a - b) + g(a + b) = f(a) + a + 2$
- $g(ab) = g(a)g(b)$
- $g(kx) = kg(x)$
- $f(kx) = k f(x)$
- $f(ab) = f(a)f(b)$
- $f(a + b) = f(a) + f(b)$

1. ۳
2. ۴
3. ۵
4. ۶

82) اگر $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$ و $f(2) = 1$ و $f(1) = 0$ ، مقدار $f(-2)$ کدام است؟

1. ۳۵
2. ۳۲
3. ۳۱
4. ۳۳

83) اگر $f\left(\frac{1}{x}\right) - 2f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ ، حاصل $f(2)$ چه قدر است؟

1. $-\frac{45}{4}$
2. $\frac{15}{4}$
3. $-\frac{15}{4}$
4. $\frac{45}{4}$

84) اگر $f(x - 3) = x^2 - 4x + 5$ باشد، آن گاه $f(1 - x)$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

1. $x^2 + 1$
2. $x^2 + 3$
3. $x^2 + 4x + 5$
4. $x^2 - 4x + 5$

85) اگر $f(x^2 - x) = (2x - 1)^2$ آن گاه $f(5)$ برابر است با :

1. ۱۹
2. ۲۰
3. ۲۱

4. ۲۲

86) اگر $f(x^2 + 2x) = |x + 1|$ ، آن گاه $f(8) + f(15) + f(35)$ برابر است با:

1. ۱۱

2. ۱۲

3. ۱۳

4. ۱۴

87) اگر دامنه تابع $f = \{(2,1), (3,-1), (x,2), (1,1)\}$ دارای دو عضو باشد، x کدام است؟1. $x \in \{3,2\}$ 2. $x = 2$ 3. $x = 3$

4. غیر ممکن

88) دامنه تابع $f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+2}$ کدام است؟1. $\mathbb{R}$ 2. $\mathbb{R} - \{1\}$ 3. $\mathbb{R} - \{2\}$ 4. $\mathbb{R} - \{1,2\}$ 89) تابع $g(x) = \sqrt{(1-x)(x-3)}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف می شود؟1. $[1,3]$ 2. $(-\infty, 1]$ 3. $[3, +\infty)$ 4. $\mathbb{R}$ 90) دامنه تابع $y = \sqrt{-\frac{x}{3} - 2} + \sqrt{\frac{x}{3} + 2}$ شامل چند عدد صحیح است؟

1. ۳

2. ۲

3. ۱

4. ۴

91) دامنه ی تابع با ضابطه ی $y = \sqrt{||x - 1| - 3| - 2}$ شامل چند عدد صحیح نمی باشد؟

1. ۳
2. ۶
3. ۲
4. بی شمار

92) دامنه تابع با ضابطه $y = \sqrt{3 - \sqrt{1 - 4x}}$ شامل چند عدد صحیح است ؟

1. ۳
2. ۲
3. ۴
4. ۵

93) دامنه تابع با ضابطه ی $y = \frac{\sqrt{x(x^2-1)}}{\sqrt{|x|+x}}$ کدام است ؟

1. $(1, +\infty)$
2. $(-\infty, 1)$
3. $(-\infty, 1]$
4. $[1, +\infty)$

94) دامنه تابع $y = \sqrt{\frac{x-2}{x-4}} + \sqrt{\frac{3-x}{x}}$ شامل چند عدد صحیح است ؟

1. ۳
2. ۲
3. ۱
4. بی شمار

95) اگر با شرط $x < 6$ دامنه تابع $f(x) = \sqrt{x^3 - 6x^2 - 2x + 12}$ به صورت $[a, b]$ باشد، حد اکثر مقدار $(b - a)$ کدام است

1. ۲
2. $\sqrt{2}$
3. ۴
4. $2\sqrt{2}$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

96) دامنه تابع $f(x) = \sqrt[4]{2 \sin x - 1}$ در یک سیکل مثلثاتی کدام است ؟

1. $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$
2. $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$
3. $\left[\frac{\pi}{6}, 2\pi\right]$
4. $\left[\frac{\pi}{3}, 2\pi\right]$

97) دامنه تابع $y = \sqrt{x - \sqrt{2 - x}}$ شامل چند عدد صحیح است ؟

- 1) ۱
- 2) ۲
- 3) ۳
- 4) ۴

98) دامنه تابع $\log(\log \sin^2 x)$ کدام است ؟

- 1) $\emptyset$
- 2) $\mathbb{R}$
- 3) $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
- 4) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{2}\right\}$

99) اگر $f(x) = x^3 - 3x$ باشد دامنه تابع $\sqrt{x - f(x)}$ کدام است ؟

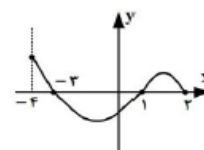
- 1) $(-\infty, -2] \cup [0, 2]$
- 2) $[-2, 0] \cup [2, \infty]$
- 3) $(-\infty, -2]$
- 4) $[0, 2]$

100) اگر $f(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ باشد دامنه تابع $y = \sqrt{xf(x)}$ کدام بازه است ؟ (سراسری ۹۳)

1. $[-1, 1]$
2. $(-\infty, 0)$
3. $(-\infty, \infty)$
4. $(0, \infty)$

101) شکل روبرو نمودار تابع $y = f(x)$ است . دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ کدام است ؟ (سراسری ۹۲)

1. $[0, 2]$
2. $[-3, 2]$
3. $[-4, -3] \cup [1, 2]$
4. $[-3, 0] \cup [1, 2]$



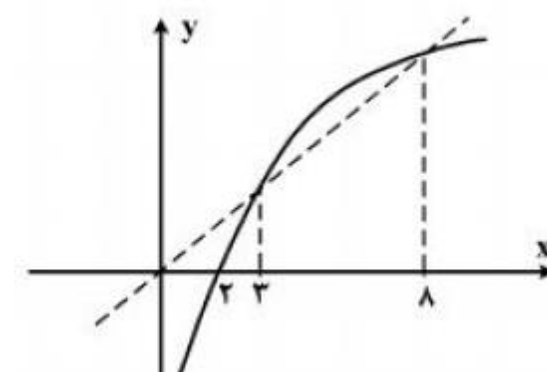
حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۱۰۲) تابع $f(x) = \log_3(ax + b)$ فقط برای مقادیر $(-\frac{1}{2}, \infty)$ با معنی است. اگر $f(4) = 2$ آنگاه $f(\frac{-4}{9})$ کدام است (سراسری ۹۴)

1. -۲
2. -۱
3. $\frac{1}{2}$
4. ۱

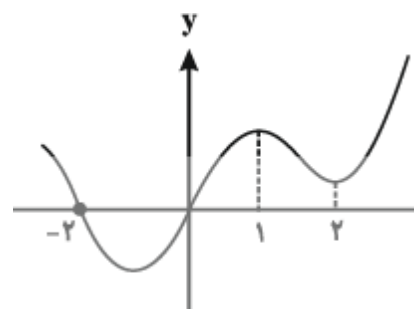
۱۰۳) شکل مقابل نمودار تابع $y = f(x)$ و نیمساز ربع اول و سوم است. دامنه تابع $y = \sqrt{x - f^{-1}(x)}$ کدام است؟

1. $(0, 2]$
2. $[2, 3]$
3. $[2, 8]$
4. $[3, 8]$



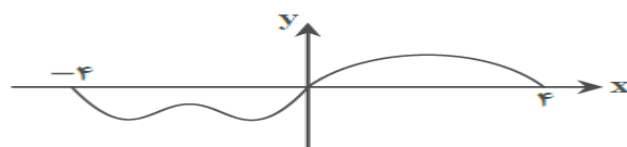
۱۰۴) اگر تابع به صورت مقابل باشد دامنه تابع $y = x\sqrt{\frac{1}{-f(x)}}$ کدام است؟

- A. $(-\infty, 0)$
- B. $(0, \infty)$
- C. $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$
- D. $(-2, 0)$



۱۰۵) نمودار تابع $y = f(2x)$ به شکل زیر است. دامنه تابع $y = 3f(\sqrt{x}) + 1$ کدام است؟

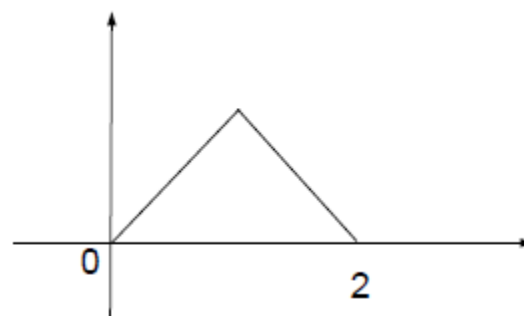
- A. $[4, 16]$
- B. $[0, 64]$
- C. $[0, 4]$
- D. $[4, 64]$



حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۱۰۶) اگر نمودار f به شکل زیر باشد دامنه ی تابع g با ضابطه ی $g(x) = \frac{f(1-x)}{f(x)}$ کدام است؟

1. $(-1,1) - \{0\}$
2. $[0,1]$
3. $[-1,1] - \{0\}$
4. $(0,1]$



📖 درس نامه ۲) تساوی دو تابع

❖ تساوی دو تابع:

دو تابع f, g را مساوی گوئیم هر گاه:

- ★ $\forall x \in D_f(D_g)$
- $f(x) = g(x)$
- $D_f = D_g$

تمرین در کلاس



۱. کدام مورد دو تابع مساوی را نشان می دهد.

✓ $f(x) = x - 1$, $g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$

✓ $f(x) = x^2$, $g(x) = x|x|$

✓ $f(x) = \sqrt{x^2}$, $g(x) = |x|$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۲. اگر دو تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-1} & x \neq 1 \\ 4\alpha+1 & x = 1 \end{cases}$ و $g(x) = x+2$ با هم مساوی باشند مقدار α را بیابید.

۳. در کدام سطر دو تابع مساوی نشان داده شده است؟

الف)	$f = \{(1,2), (5,9)\}$	$g = \{(1,5), (2,9)\}$
ب)	$f: IR \longrightarrow IR$ $f(x) = x$	$g: IR \longrightarrow IR$ $g(x) = x^2$
ج)	$f: [1,2] \longrightarrow [1,4]$ $f(x) = x^2$	$g: IR \longrightarrow IR$ $g(x) = x^2$
د)	$f = \{(a,b), (c,d), (e,f)\}$	$g = \{(e,f), (a,b), (c,d)\}$
هـ)	$f(x) = x+1$	$g(x) = \frac{2x+2}{2}$
و)	$f(x) = \tan x$	$g(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$
ز)	$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$	$g(x) = x+2$

۴. اگر $f(x) = 2x - 1$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{4x^2-1}{2x+1} & x \neq \frac{1}{2} \\ 1-k & x = \frac{1}{2} \end{cases}$ مقدار k را طوری بیابید که به ازای هر x متعلق به دامنه داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

۵. کدام مورد دو تابع مساوی را نشان می دهد؟

I. $f(x) = \sqrt{x^2}, g(x) = |x|$

II. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ 5 & x = 3 \end{cases}, g(x) = x + 3$

III. $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{x-2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$

IV. $f(x) = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}, g(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$

۶. آیا دو تابع زیر باهم مساویند. (خرداد ۹۲)

• $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5} & x \neq 5 \\ 6 & x = 5 \end{cases}, g(x) = x + 5$

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^y - x} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1} \end{cases}$$

۷. آیا دو تابع زیر با هم مساوی هستند؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید. (خرداد ۹۴)

❖ سوالات چهار گزینه ای

۱۰۷) دو تابع f و g مفروض اند، در کدام گزینه دو تابع مساوی اند؟

1. $f(x) = 2 \log x$, $g(x) = \log x^2$
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{|x|}$, $g(x) = 1$
3. $f(x) = (\sqrt{x})^2$, $g(x) = x$
4. $f(x) = \frac{x}{|x|}$, $g(x) = \frac{|x|}{x}$

۱۰۸) در کدام گزینه توابع f, g با یکدیگر مساوی هستند؟

1. $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1} \\ g(x) = \sqrt{x^2 - x} \end{cases}$
2. $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x - x^2} \\ g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{1-x} \end{cases}$
3. $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{|x|} \\ 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}} \\ g(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}} \end{cases}$

📖 درس نامه ۳) توابع چند ضابطه ای

گاهی دامنه تابع به چند دسته تقسیم می شه و

اعضای هر دسته به یک ضابطه مربوط می شن

تابع زیر یک تابع ۲ ضابطه ای در حالت کلیه.

$$\star f(x) = \begin{cases} m(x) & x \in D_{m(x)} \\ n(x) & x \in D_{n(x)} \end{cases}$$

در این صورت داری :

$$\star D_f = D_m \cup D_n$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

📌 راجع به اشتراک دامنه ها می توانیم حرفی بزنیم؟ آیا؟

👉 دامنه های هر ضابطه در حالت کلی اشتراکی با بقیه ندارند، مگر اینکه به ازای اشتراکشان مقدار به دست آمده با هم برابر باشند.

• مثال (۱) تابع قدر مطلق دو ضابطه ای و تابع علامت سه ضابطه ای است.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ و } \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

• مثال (۲) می خواهیم تابع مقابل را به صورت چند ضابطه ای بنویسیم:

$$h(x) = |x - 1| + |x + 1|$$

➤ $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

➤ $x < -1 \Rightarrow h(x) = -(x - 1) - (x + 1) = -2x$

➤ $-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow h(x) = -(x - 1) + (x + 1) = 2$

➤ $x \geq 1 \Rightarrow h(x) = (x - 1) + (x + 1) = 2x$

$$h(x) = \begin{cases} -2x & x < -1 \\ 2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

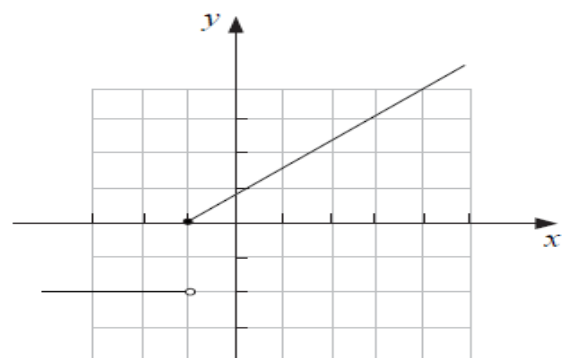
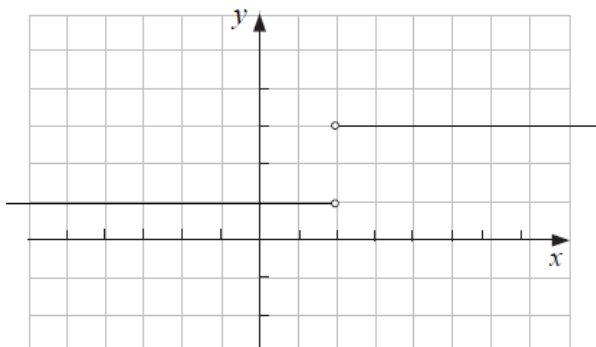
تمرین



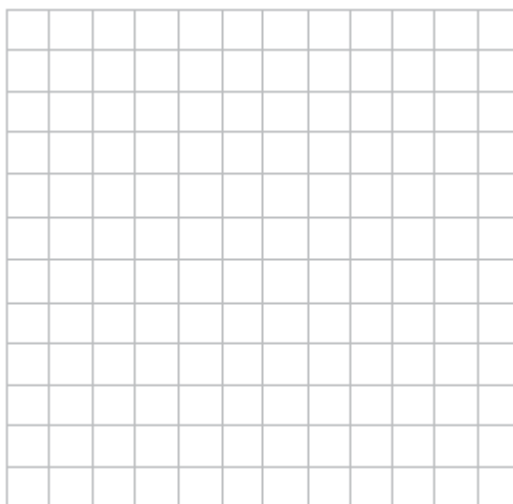
۱. تابع مقابل را به صورت چند ضابطه ای بنویسید.

$$f(x) = \sqrt{|x - 2|}$$

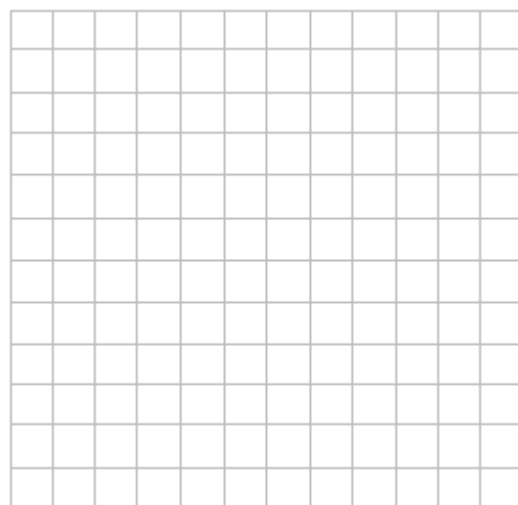
۲. دامنه و برد تابع چند ضابطه ای زیر را بیابید و ضابطه ی آن را بنویسید.



۳. نمودار توابع چند ضابطه ای زیر را رسم کنید و دامنه و برد هر یک را بیابید.

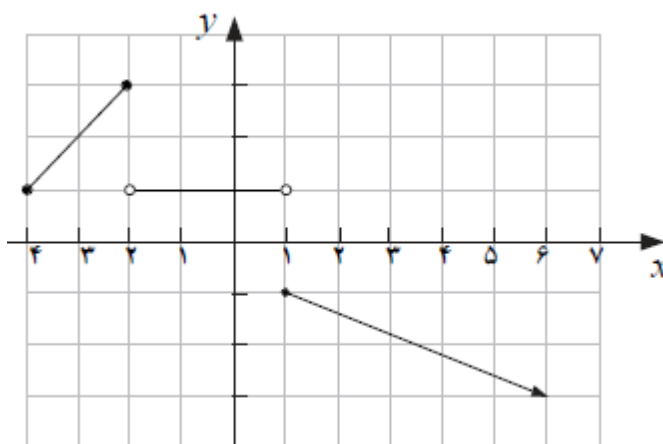
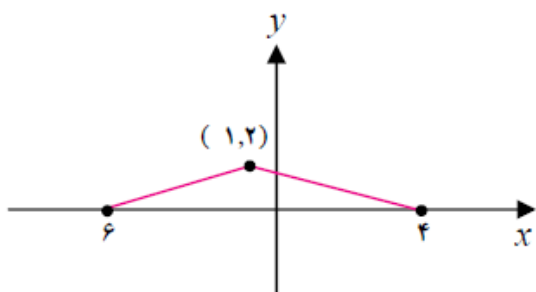


$$g(x) = \begin{cases} 2 + x^2 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \end{cases}$$



$$h(x) = \begin{cases} -2x - 3 & x < 1 \\ x - 4 & 1 \leq x \leq 2 \\ x + 2 & 2 < x \end{cases}$$

۴. ضابطه تابع زیر را بنویسید و دامنه و برد آنها را بیابید.



۵. تابعی چند ضابطه ای مانند f بنویسید که در تمام شرایط زیر صدق کند سپس نمودار تابع را رسم کنید.

• الف) $D = [-3, 5], R = [-2, 7]$

• ب) $f(0) = 3$

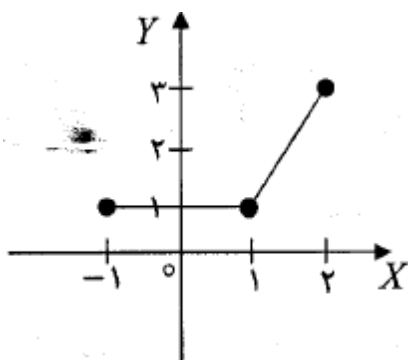
• ج) f یک به یک نباشد.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۶. نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ -x + 3 & 2 < x \end{cases}$$

۷. ضابطه ی تابع زیر را بنویسید. (دی ماه ۹۳)



۸. تابع f با مشخصات زیر داده شده است. تابع را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

- الف) $f(2) = 3, f(-5) = -2$
- ب) دامنه تابع برابر همه اعداد حقیقی است.
- ج) تابع در بازه $[0, 2]$ ثابت است.
- د) تابع به هر عدد بزرگتر از ۲ مربع آن را نسبت می دهد.
- ه) روی اعداد منفی تابع خطی است و نمودار تابع محور افقی را در نقطه ۳- قطع می کند.

۹. نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید. (دی ماه ۹۰)

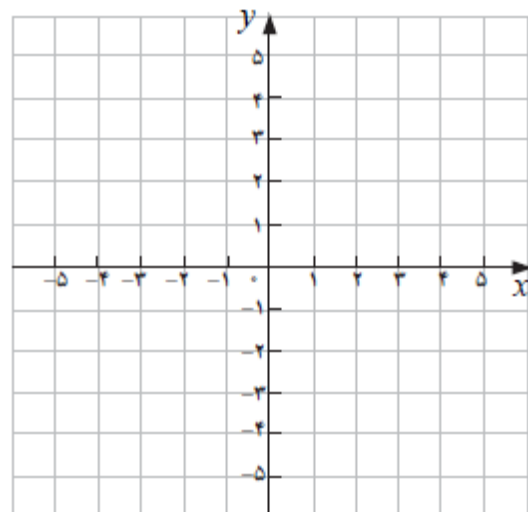
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \leq 0 \\ -2 & 0 < x < 1 \\ 2x + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۱۰. اگر تابع f به صورت زیر باشد حاصل مقادیر زیر را بیابید و تابع را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -5x - 8 & x < -2 \\ \frac{1}{2}x + 5 & -2 \leq x \leq 4 \\ 10 - 2x & 4 < x \end{cases}$$

- I. $f(6)$
- II. $f(4)$
- III. $f(-4)$
- IV. $f(0)$



📖 درس نامه ۴) معادلات و توابع

❖ به سوال: به نظر شما هر معادله ای

که توش x, y باشه ضابطه یه تابع را نشون میده؟

👉 ممکنه تابع نشه.

👉 من: می تونی مثالی بزنی؟ آیا؟

👉 مثل: $y^2 = x$ که توی اون اگه به x عدد 1 رو نسبت بدیم برای y دو عدد 1 و -1 به دست میاد.

پس: اگر معادله ای دارا ی دو متغیر مانند x, y باشد یک رابطه را نشاون می ده. اما همه این روابط تابع نیستن در واقع معادله ای تابع است که اگر y را بر حسب x بیابیم، مقدار یکتایی برای y به دست بیاد.

تمرین



کدام معادله y را به صورت تابعی از x نشان میده.

A. $x^2 + y^2 = 25$

B. $y = |x| + 1$

C. $x = |y| + 1$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

D. $y = \begin{cases} x + 3 \\ x - 1 \end{cases}$

۱۱. کدام معادله y را به صورت تابعی از x نشان میدهد.

A. $x = 1$

B. $|y| = |x|$

C. $y^2 = x^2$

۱۲. آیا در معادله $x^2 - y^2 = 1$ ، می توان y را به عنوان تابعی بر حسب x بیان کرد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید. (شهریور ۹۳)

❖ سوالات چهار گزینه ای

۱۰۹) کدام رابطه ی زیر یک تابع است ؟

1. $|y| = x$
2. $y^2 = x^2$
3. $y^2 = x^2 + 1$
4. $y = |x| - x$

۱۱۰) در کدام رابطه ، y تابعی از x است ؟

1. $x^2 - x - xy = 0$
2. $x + \sqrt{y+1} = y$
3. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2 = 0$
4. $|x| + |y| = 1$

۱۱۱) در کدام گزینه x تابع y نیست ؟

1. $xy = 2$
2. $(x-1)^2 + y^2 = 0$
3. $x^2 + 4xy + 4y^2 = 1$
4. $x = 1 - \sin y$

۱۱۲) در کدام گزینه y تابع x است ؟

1. $x + \sqrt{y+2} = y$
2. $x = y^2 - 4y + 1$
3. $x = |2y+1| + y$
4. $x = y^2 + y + |y|$

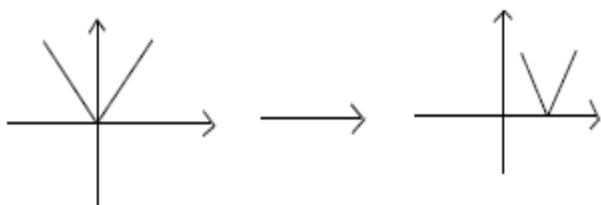
۱۱۳) در کدام گزینه ، f تابعی بر حسب x است ؟

1. $x^2 + f^2(x) = 1$
2. $1 + f(x^2) = x$
3. $f(|x|) = x$
4. $x^2 f\left(\left|\frac{1}{x}\right|\right) = x + 1$

📖 درس نامه ۵) رسم نمودار توابع

❖ سال گذشته با انتقال نمودار ها آشنا شدی. خوب آگه یادت نیست که معمولا نیست در این جا مطالب سال گذشته مرور میشه.

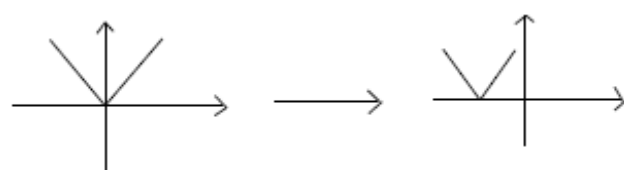
اگر تابع $y = f(x)$ را داشته باشیم نحوه تغییرات روی $f(x)$ را به شکل زیر خواهیم داشت:



$$A. \quad y = f(x - k)$$

در این حالت نمودار تابع به اندازه k واحد به

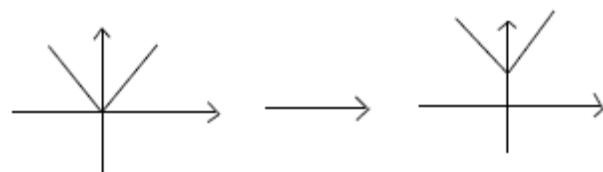
سمت راست می رود



$$B. \quad y = f(x + k)$$

در این حالت نمودار تابع به اندازه k واحد به

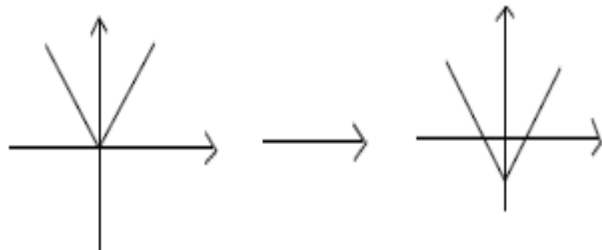
سمت چپ می رود



$$C. \quad y = f(x) + k$$

در این حالت نمودار تابع به اندازه k واحد به

سمت بالا می رود



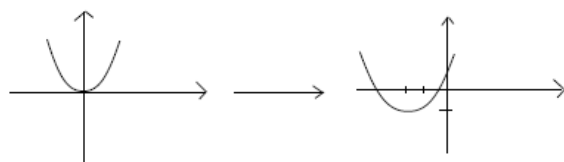
$$D. \quad y = f(x) - k$$

در این حالت نمودار تابع به اندازه k واحد به

سمت پایین می رود

تذکر: ممکنه در یک تابع ترکیبی از حالت های بالا را داشته باشیم

- مثال ۱) نمودار تابع $f(x) = (x + 2)^2 - 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را بیابید



با توجه به شکل داریم: $D_f = R$ و $R_f = [-1, +\infty)$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

تمرین



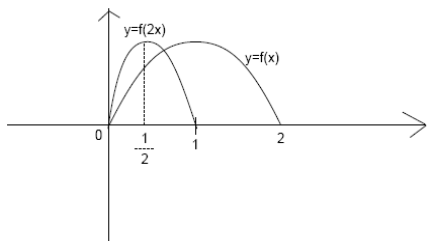
نمودار توابع زیر را به روش انتقال رسم کرده و دامنه و برد آن را بیابید.

A. $y = 2 + \sqrt{x-1}$

B. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

$y = f(ax) \triangleright$

در این حالت کافی است طول نقاط تابع $y = f(x)$ را در $\frac{1}{a}$ ضرب کنیم ولی عرض نقاط تغییری نمی کند.



• مثال ۲) به شکل زیر توجه کنید.

✓ اگر $a > 1 \leftarrow$ انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{a}$

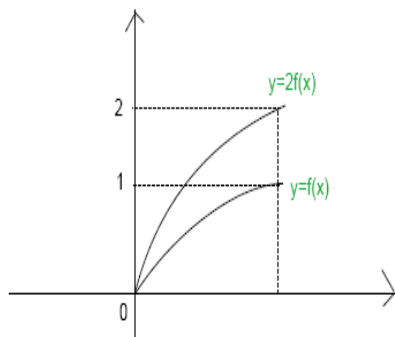
✓ اگر $0 < a < 1 \leftarrow$ انبساط افقی با ضریب $\frac{1}{a}$

✓ اگر $a < 0 \leftarrow$ انعکاس نسبت به محور y و سپس انقباض یا انبساط

✓ اگر $a = -1$ انعکاس نسبت به محور y

$y = af(x) \triangleright$

کافی است که عرض نقاط را در a ضرب کنیم ولی طول نقاط تغییری نمی کند.



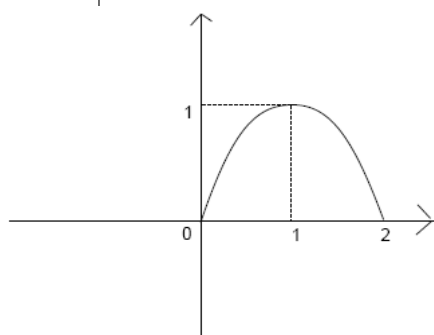
• مثال) به شکل زیر توجه کنید.

✓ اگر $a > 1 \leftarrow$ انبساط عمودی

✓ اگر $0 < a < 1 \leftarrow$ انقباض عمودی

✓ اگر $a < 0 \leftarrow$ انعکاس نسبت به محور x و سپس انقباض یا انبساط

✓ اگر $a = -1$ انعکاس نسبت به محور x

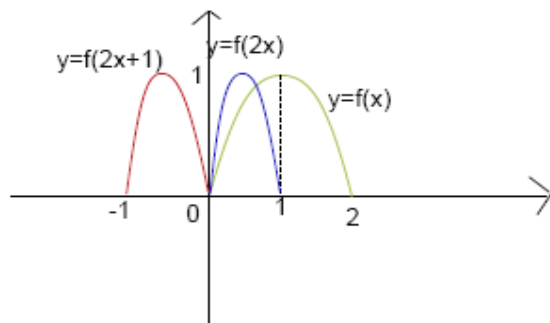


حسابان - تهیه و تنظیم: لط

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

- مثال ۳) با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ نمودار
- تابع $y = f(2x + 1)$ را رسم کنید.



این تابع در واقع ترکیبی از حالت های گفته شده است. بگو خب.

توی چند مرحله برات رسمو انجام دادم تا خوب بگیری.

پس ابتدا $y = f(2x)$ و سپس $y = f(2x + 1)$

رسم می کنم.

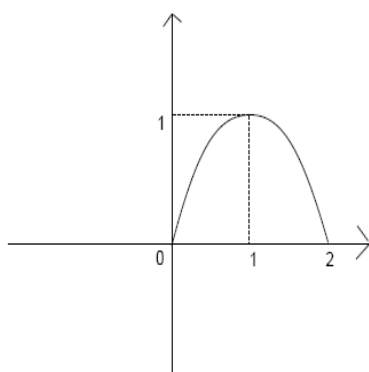
تمرین



۱. به کمک نمودار $y = |x|$ نمودار تابع $y = -3|x - 1| + 2$ را رسم کنید.

۲. نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر است توابع خواسته شده را رسم کرده و دامنه و برد هر یک را بیابید.

- I. $f(x) + 2$
- II. $2f(x)$
- III. $f(x - 1)$
- IV. $f\left(\frac{x}{3}\right)$
- V. $f(-2x)$



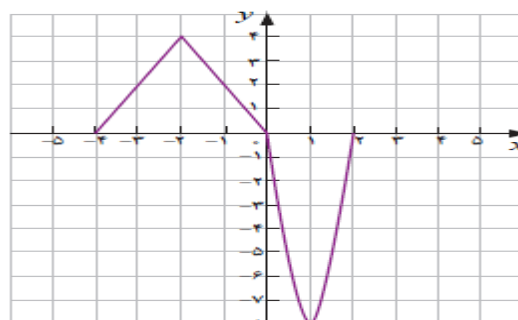
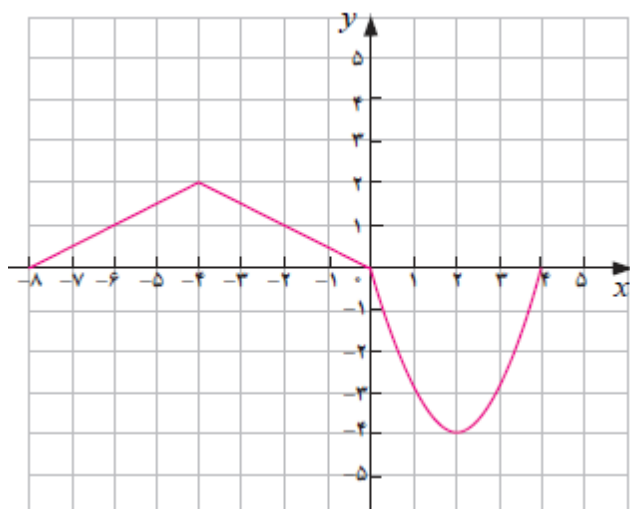
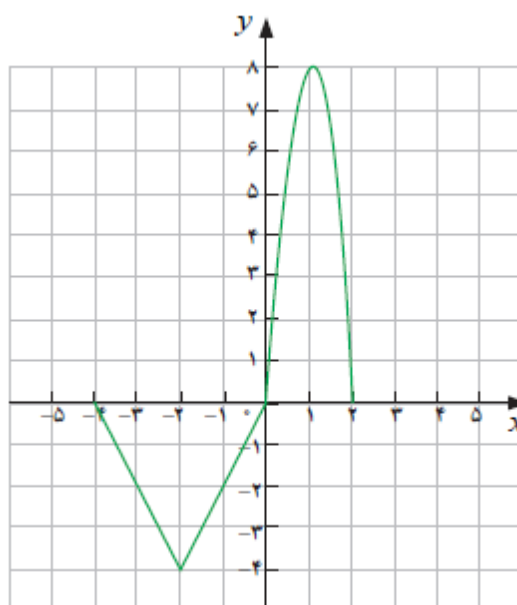
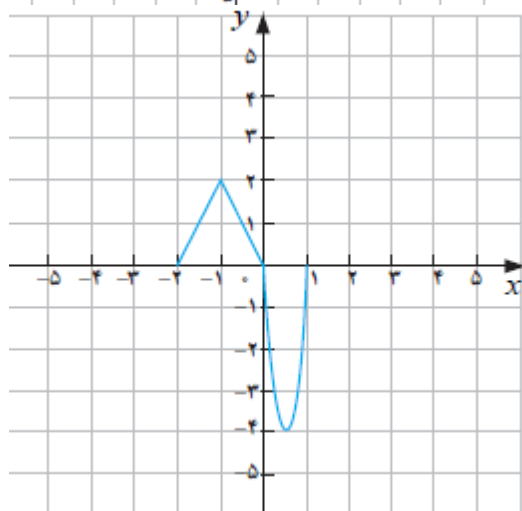
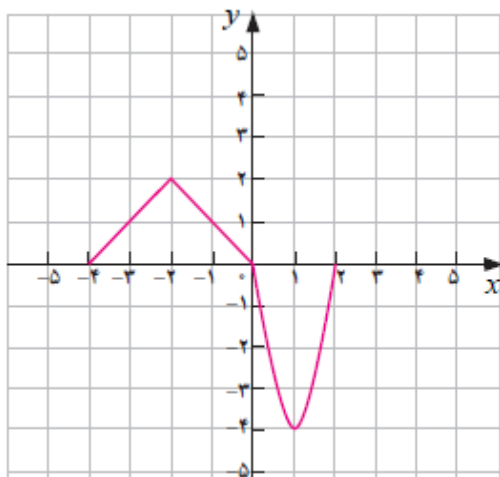
حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

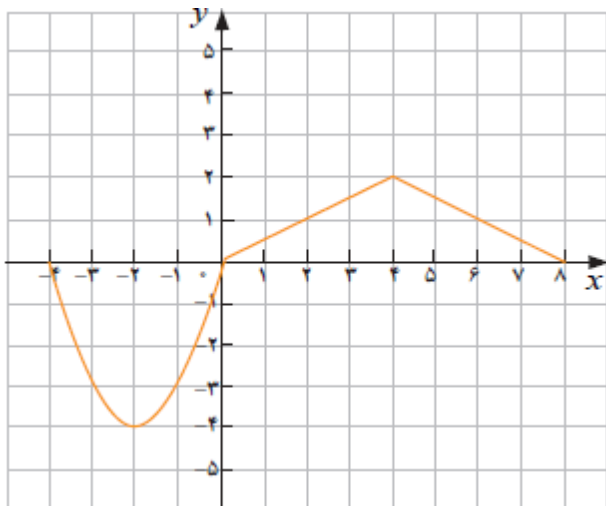
۳. نمودار تابع $g(x)$ داده شده است. به کمک این نمودار،

نمودار توابع $2g(x)$, $g(2x)$, $g\left(\frac{x}{2}\right)$, $g\left(\frac{-x}{2}\right)$, $-2g(x)$

رسم شده است. معین کنید هر یک از این نمودارها مربوط

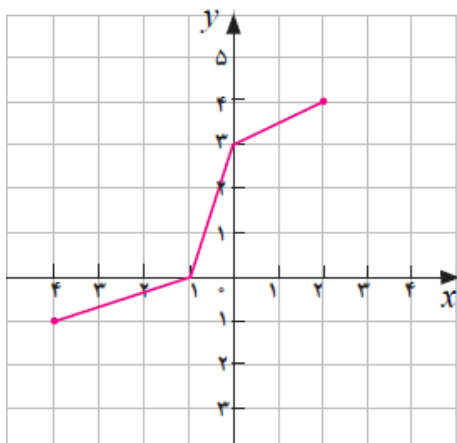
به کدام یک است؟





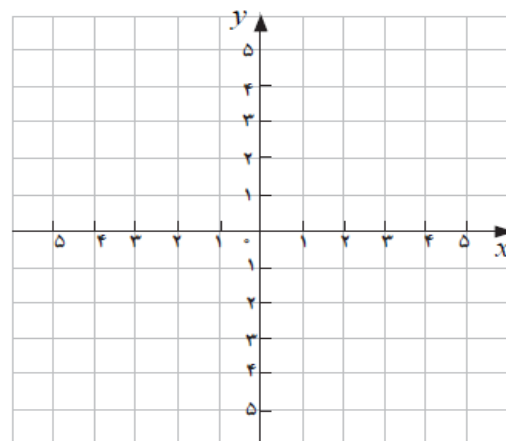
۴. نقطه $(-8, 6)$ روی نمودار $y = f(x)$ قرار دارد. در این توابع زیر این نقطه با چه نقطه ای متناظر می شود؟

- I. $g(x) = f(-x)$
- II. $g(x) = f(x) - 3$

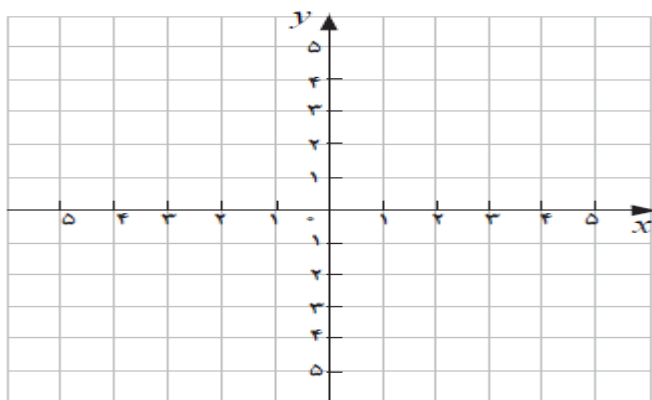


۵. نمودار تابع $y = f(x)$ داده شده است.

با کمک آن نمودار توابع زیر را رسم کنید.

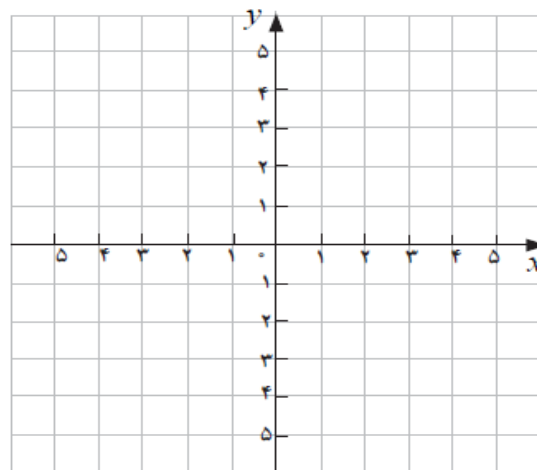


$$y = -f(x-1)$$

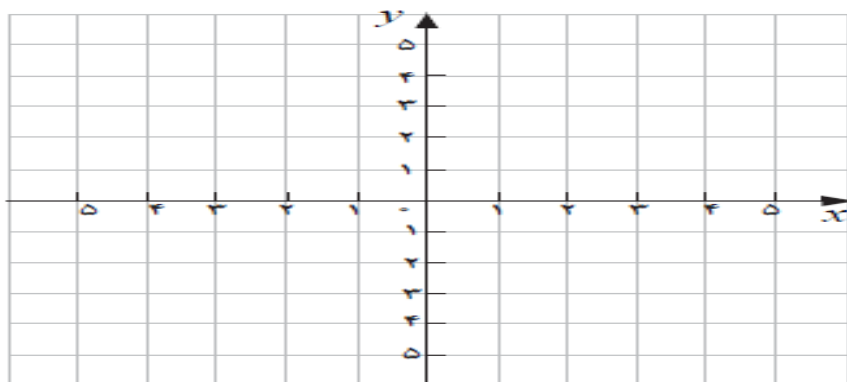


$$y = f\left(\frac{1}{5}x\right)$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد



$$y = f(2x)$$



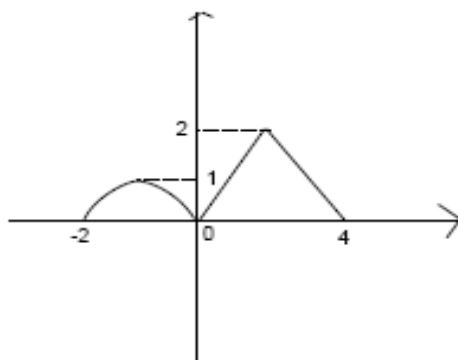
$$y = f\left(-\frac{1}{2}x\right)$$

۶. نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y منعکس می کنیم دو واحد به سمت راست سپس پنج واحد به سمت پایین میبریم. ضابطه نمودار جدید را به دست آورید.

۷. به کمک نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ نمودار تابع $y = 1 + \sqrt{2x}$ را رسم کنید.

۸. نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر داده شده است نمودار توابع داده شده را بیایید سپس دامنه و برد هر یک را بیایید

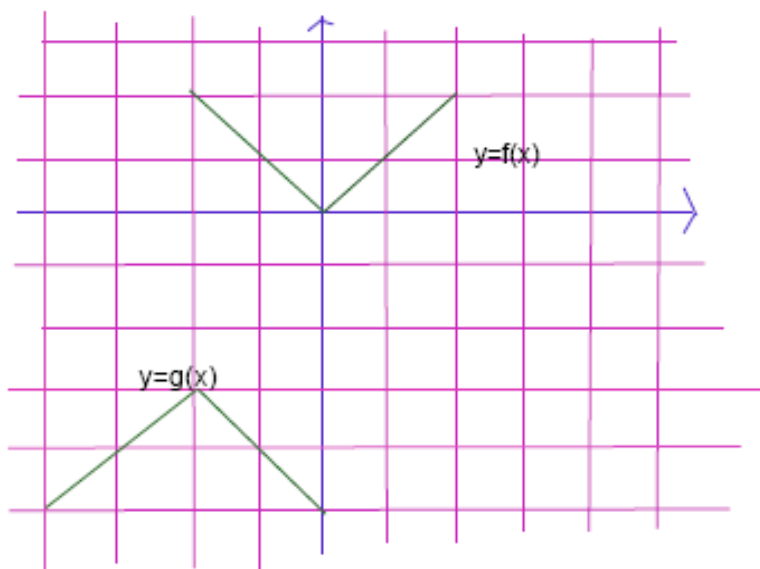
- $y = -f(2x)$
- $y = 2f(-x) + 1$



۹. در شکل زیر با توجه به نمودار

تابع $y = f(x) = |x|$ ضابطه

تابع $g(x)$ را بیایید.



۱۰. توضیح دهید در هر حالت چگونه می توان از f به g را

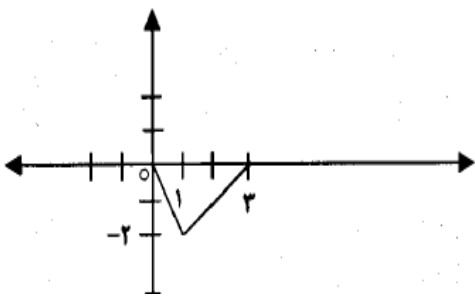
a) $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{-1}{2}\sqrt{x-1} + 3$

b) $f(x) = x^2, g(x) = -2(x-2)^2 - 3$

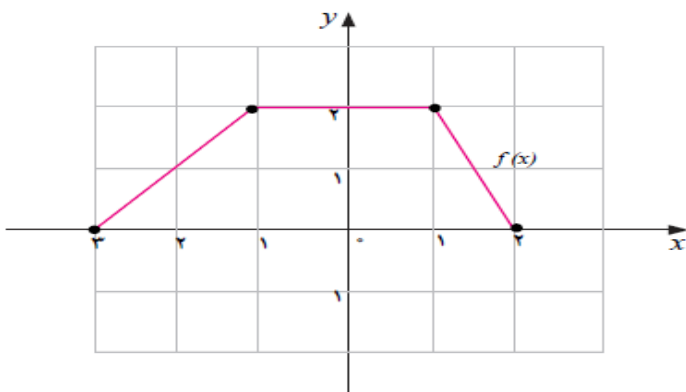
c. $f(x) = |x|, g(x) = -2\left|x - \frac{1}{3}\right| + 1$

۱۱. نمودار دو تابع $\sqrt{x}$ و $\sqrt{-x}$ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ دامنه این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ برد این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟

۱۲. شکل روبرو نمودار تابع $y = f(x)$ است. با استفاده از انتقال، ابتدا نمودار تابع $y = f(x - 3)$ را رسم کرده و سپس نمودار تابع $y = -2f(x - 3)$ را رسم کنید. (خرداد ۹۱)



۱۳. ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم کرده سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x) = -2f(x) - 1$ را رسم کنید. (خرداد ۹۲)

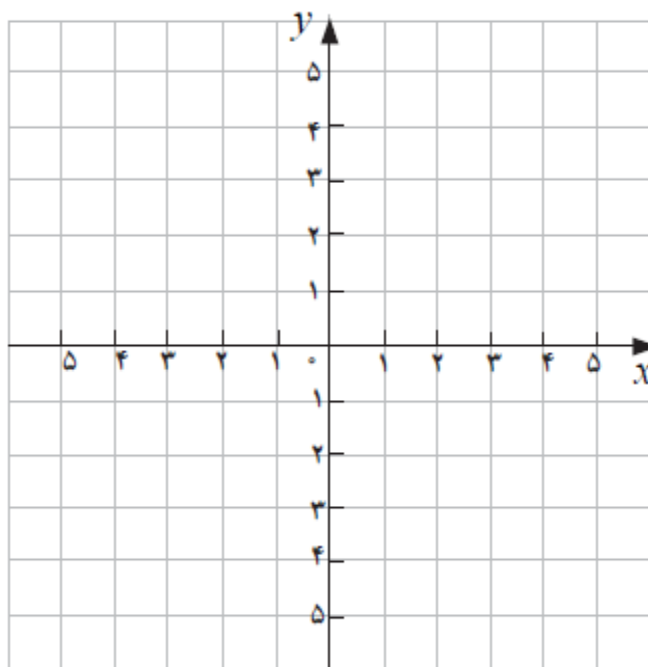
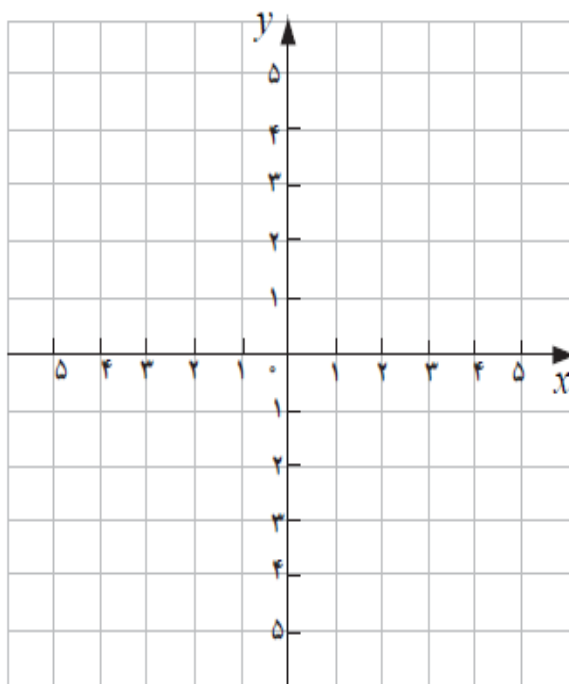
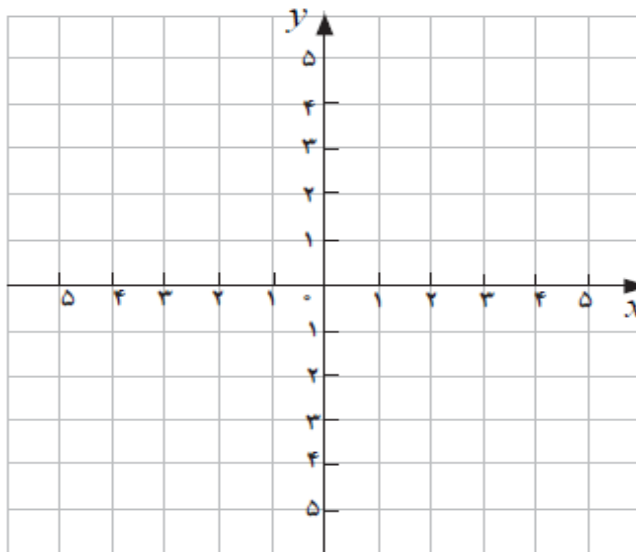


۱۴. نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل زیر

داده شده است. به کمک این نمودار،

نمودار تابع داده شده را رسم کنید.

- A. $g(x) = \frac{1}{2}f(x)$
 B. $g(x) = f(-x)$
 C. $g(x) = f(3x)$
 D. $g(x) = f(-\frac{1}{2}x)$
 E. $g(x) = -2f(x)$
 F. $g(x) = f(x+2)$



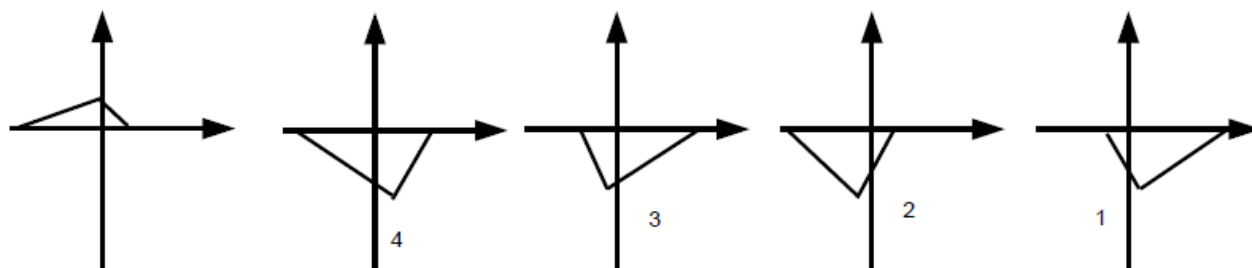
۱۱۴) اگر دامنه تابع f برابر $D_f = [-2, 6]$ باشد، دامنه $y = 3f(2x + 1)$ شامل چند عدد صحیح است؟

1. ۴
2. ۱۷
3. ۹
4. ۲۵

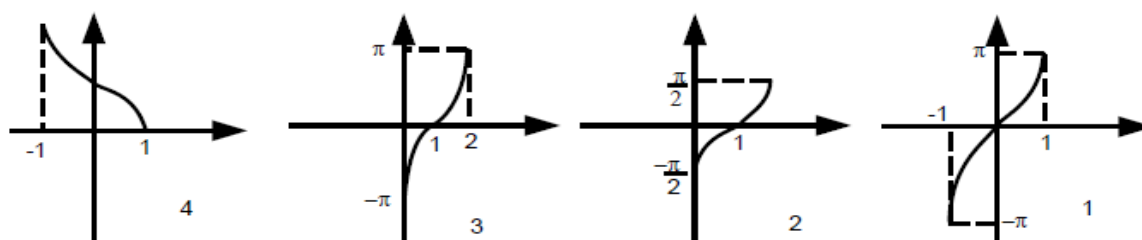
۱۱۵) اگر برد تابع f برابر $R_f = [-\sqrt{3}, 2]$ باشد، برد تابع $y = \sqrt{2}f(x - 1) + 1$ شامل چند عدد صحیح است؟

1. ۵
2. ۲
3. ۳
4. ۴

۱۱۶) اگر نمودار تابع $y = f(x)$ به شکل مقابل باشد، نمودار $y = -2f(1 - 2x)$ شبیه کدام است؟



۱۱۷) نمودار تابع $y = 2\sin^{-1}(x - 1)$ کدام است؟



۱۱۸) اگر $f(x) = \max\{2x, |x + 1|\}$ انگاه مینیمم تابع $f(x)$ کدام است؟ (سراسری ۹۲)

1. $\frac{1}{3}$
2. $\frac{2}{3}$
3. ۴
4. ۲

۱۱۹) اگر $f(x) = \max\{x^2, |x - 3|\}$ باشد کمترین مقدار تابع $f(x)$ کدام است؟ (خارج ۹۲)

1. $\frac{1}{4}$
2. $\frac{1}{3}$
3. $\frac{4}{9}$
4. $\frac{1}{2}$

درس نامه ۶) اعمال جبری روی توابع

در صورتی که f, g دو تابع بوده و r یک عدد حقیقی باشد در این صورت اعمال روی این توابع به صورت زیر خواهد بود.

ردیف	عمل	تعریف	دامنه تابع حاصل
1	جمع دو تابع	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$	$D_f \cap D_g$
2	تفاضل دو تابع	$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$	$D_f \cap D_g$
3	ضرب دو تابع	$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$	$D_f \cap D_g$
4	ضرب عدد در تابع	$(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$	D_f
5	توان یک تابع	$f^2(x) = f(x) \times f(x)$	D_f
6	ریشه دوم تابع	$\sqrt{f}(x) = \sqrt{f(x)}$	$D_f - \{x \mid f(x) < 0\}$
7	تقسیم دو تابع	$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

• مثال ۱) دامنه تابع مقابل را بیابید.

- $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x-2} + 5x^2 - 3$
- $f_1(x) = \sqrt{x-1} \Rightarrow D_{f_1} = [1, +\infty)$
- $f_2(x) = \frac{1}{x-2} \Rightarrow D_{f_2} = x \neq 2$
- $f_3(x) = 5x^2 - 3 \Rightarrow D_{f_3} = R$

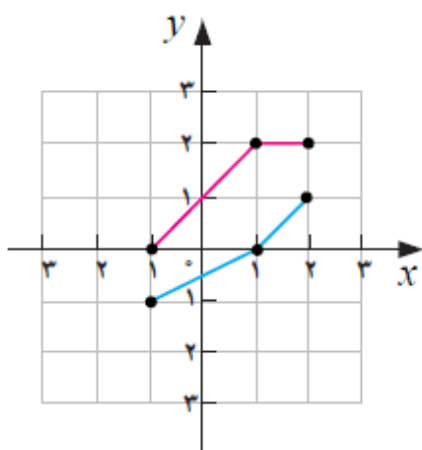
• بنابر مطالب گفته شده داریم: $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \cap D_{f_3} = [1, 2) \cup (2, +\infty)$

تمرین



۱. اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2}$, $g(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2+1}$ باشند مطلوب است تعیین D_{f+g}

۲. اگر $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x + 1$ دامنه های توابع $f, g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ را بیابید و ضابطه این توابع را مشخص کنید



۳. نمودار توابع f, g در شکل مقابل رسم شده است.

الف) $(f+g)(1)$, $(f+g)(2)$ را حساب کنید.

ب) با استفاده از نمودارهای f, g ، نمودار تابع $f+g$ را در

همین شکل رسم کنید.

ج) معادله ای برای $f, g, f+g$ بیابید.

د) نمودار تابع $f+g$ را به کمک معادله رسم کنید و با قسمت ب مقایسه کنید.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۴. اگر $f(x) = x^2 + 3x$, $g(x) = x^2 + 2x - 3$ باشند حاصل $(2f - 3g)(2)$ را بیابید.

۵. فرض کنید $f = \{(-4, 13), (-1, 7), (0, 5), (\frac{5}{2}, 0), (3, -5)\}$

و $g = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0), (5, 2), (9, 6)\}$ توابع زیر را حساب کنید.

a) $f + g$

b) $f - g$

c) fg

d) $\frac{f}{g}$

۶. دو تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = \sqrt{x+2}$ داده شده اند. دامنه و ضابطه توابع داده شده را بیابید.

a) $f - g$

b) ff

c) $\frac{g}{f}$

۷. فرض کنید $g: N \rightarrow N$ تابعی با ضابطه $g(n) = 2n$ باشد اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و تابع $f: A \rightarrow N$ به

صورت $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ تعریف شود تابع $2f + g$ را محاسبه کنید.

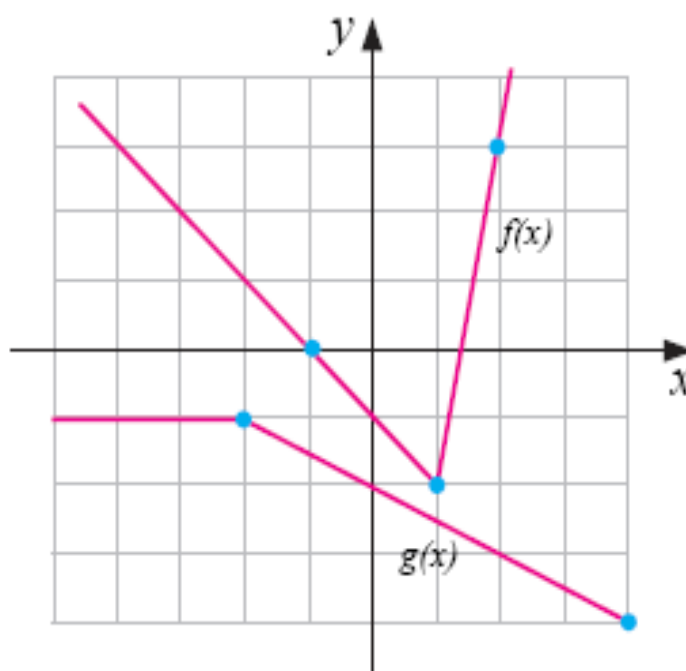
۸. با استفاده از نمودار زیر عبارات داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

a) $(f + g)(-2)$

b) $\left(\frac{f}{g}\right)(0)$

c) $\left(\frac{f}{g}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$

d) $(fg)\left(\frac{1}{3}\right)$



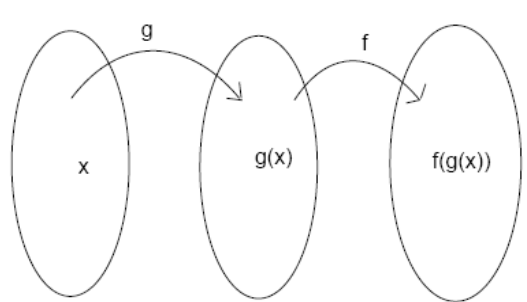
۹. اگر $f(x) = \frac{5x}{3x-7}$, $g(x) = \frac{x^5-1}{5x-15}$ و دامنه آن را بیابید.

۱۰. دو تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, $g(x) = \sqrt{x+4}$ را در نظر بگیرید. (خرداد ۹۳)

الف) مقدار $(f+g)(0)$ را بیابید.

ب) دامنه $\frac{f}{g}$ را بیابید.

درس نامه ۷) ترکیب توابع



$$\star f \circ g(x) = f(g(x))$$

❖ ترکیب دو تابع

ترکیب دو تابع f, g به صورت زیر تعریف می شه:

بر اساس نمودار بالا دامنه تابع $f \circ g(x)$ برابر است با:

$$\star \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

• مثال ۱) اگر $f = \{(1, -1), (2, 5), (4, 0)\}$, $g = \{(1, 1), (2, 4), (0, 6)\}$ باشند دامنه و ضابطه تابع $f \circ g$ را بیابید.

$$\triangleright D_{f \circ g} = \{1, 2\}, f \circ g = \{(1, -1), (2, 0)\}$$

• مثال ۲) اگر $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2 - 4x$ باشد توابع $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$ را بیابید.

$$\triangleright f \circ g(x) = f(g(x)) = 2(x^2 - 4x) - 1 = 2x^2 - 8x - 1$$

$$\triangleright g \circ f(x) = (2x - 1)^2 - 4(2x - 1) = 4x^2 - 4x + 1 - 4x^2 + 4 = -4x + 5$$

تمرین



۱. اگر $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = \sqrt{x}$ باشند حاصل $f \circ g(4)$, $f \circ f(x)$ را بیابید.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۲. جدول زیر را در نظر گرفته و مقادیر خواسته شده را بیابید.

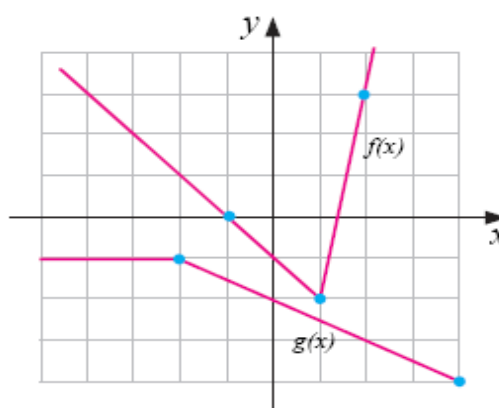
x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$f(x)$	۳	۱	۴	۲	۲	۵
$g(x)$	۶	۳	۲	۱	۲	۳

- I. $f(g(1))$
- II. $(f \circ g)(6)$
- III. $g(g(1))$
- IV. $g \circ f(3)$
- V. $f(f(1))$
- VI. $g(f(1))$

۳. اگر $f = \{(4,5), (6,5), (8,12), (10,12)\}$ و $g = \{(4,6), (2,4), (6,8), (8,10)\}$ توابع $f \circ g, g \circ f$ را بیابید

۴. با استفاده از نمودار زیر عبارات داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

- $(f \circ g)\left(-\frac{1}{2}\right)$
- $(f \circ f)(7)$



حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۵. اگر $f(x) = 2x - 1$, $fog(x) = 6x + 9$ باشد تابع $g(x)$ را بیابید.

۶. اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ تابع $g(x)$ را به گونه ای بیابید که

- $(fog)(x) = x^2 - 4x + 5$

۷. اگر $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$, $g(x) = 2x + 1$ تابعی مانند f بیابید به قسمی که $fog = h$

۸. توابع g و f با ضابطه ی $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ مفروضند. بدون تشکیل ضابطه دامنه

تعریف $(f+g)of$ را به دست آورید.

۹. کدام یک از گزاره های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

A. $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 4} \Rightarrow (fog)(x) = -x^2$, $(fog)(5) = -25$

B. $f(7) = 5$, $g(4) = 7 \Rightarrow (fog)(4) = 35$

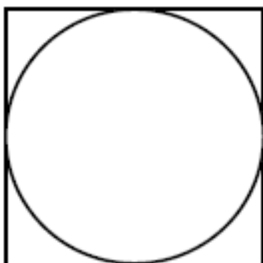
C. $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = 2x - 1 \Rightarrow (f \circ g)(5) = g(2)$

D. $f \circ g = g \circ f$

۱۰. فرض کنید $g: N \rightarrow N$ تابعی با ضابطه $g(n) = 2n$ باشد اگر $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و تابع $f: A \rightarrow N$ به صورت $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$ تعریف شود تابع $g \circ f$ را محاسبه کنید.

۱۱. اگر $f \circ g(x) = \frac{2}{x}$ و $g(x) = -3x + 1$ باشند ضابطه $f(2x)$ را بیابید.

۱۲. یک فونداسیون بتنی مربع شکل به عنوان پایه ای برای یک مخزن گازوییل استوانه ای استفاده می شود.



الف) شعاع مخزن r را به عنوان تابعی از ضلع مربع X بنویسید.

ب) مساحت پایه دایره ای شکل A را به عنوان تابعی از شعاع بنویسید.

ج) $(A \circ r)(x)$ را بیابید و تعبیر کنید.

۱۳. اگر $f(x) = x + a$ و $g(x) = ax^2 + bx + c$ باشد مقادیر a, b, c را طوری بیابید

$$fog(x) = x^2 - 3x + 4 \text{ که}$$

۱۴. اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ تابع $g(x)$ را به گونه ای بیابید که :

- $(fog)(x) = x^2 - 4x + 5$

۱۵. دو تابع $f = \{(1,3), (-2,5), (0,7), (3,-4)\}$, $g = \{(1,4), (3,1), (0,0), (5,-2)\}$ را در نظر بگیرید. (شهریور ۹۳)

الف) تابع $f \times g$ را به شکل زوج مرتب بنویسید .

ب) مقدار $fog(0)$ را بیابید.

۱۶. اگر $f(x) = \frac{1}{x} - 1$, $g(x) = \frac{1}{x+2}$ باشند، دامنه تابع gof را تعیین کنید. (دی ماه ۹۳)

۱۷. اگر $f = \{(0,2), (1,-1), (3,-\frac{1}{4}), (-2,3), (-1,0)\}$

$g = \{(2,\sqrt{2}), (-1,2), (\frac{1}{4},3), (1,\frac{3}{2})\}$ باشند (خرداد ۹۴)

الف) تابع $2f - g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) تابع gof را به دست آورید.

ج) مقدار $(1)(\frac{f}{g})$ را محاسبه کنید.

۱۸. اگر $f = \{(0,1), (1,2), (3,4)\}$, $g = \{(-2,1), (0,0), (1,5), (3,.3)\}$ دو تابع باشند (دی ماه ۹۰)

الف) $(f+g)(1)$ را به دست آورید.

ب) تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

ج) دامنه تابع fog را به دست آورید.

۱۹. اگر $f(x) = \frac{3}{x-2}$, $g(x) = \frac{4}{x}$ باشد، آن گاه حاصل عبارت های زیر را به دست آورید. (شهریور ۹۱)

- $(\frac{2f}{g})(4)$

- D_{fog}

۲۰. اگر $f = \{(4,5), (6,3), (7,1)\}$, $g = \{(3,4), (6,0), (4,6)\}$ دو تابع باشند (دی ماه ۹۱)

الف) توابع fog و $\frac{f}{g}$ را به صورت زوج های مرتب بنویسید.

ب) مقدار $(4)(2f+g)$ را بیابید.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۲۱. اگر $f = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$, $g = \{(1,2), (3,5)\}$ دو تابع باشند (شهریور ۹۲)

الف) تابع $f + g$ را به صورت زوج های مرتب بنویسید. ب) مقدار $(g \circ f)(3)$ را بیابید.

۲۲. دو تابع $f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{x + 2}$ را در نظر بگیرید (دی ماه ۹۲)

الف) دامنه تابع $g \circ f$ را از راه تعریف بیابید.

ب) ضابطه $g \circ f$ را بیابید.

ج) مقدار $\left(\frac{f}{g}\right)(2)$ را بیابید.

۲۳. اگر $f(x) = \sqrt{x - 3}$, $g = \{(0,4), (3,2), (5,6)\}$ دو تابع باشند (خرداد ۹۱)

الف) تابع $f \circ g$ را به صورت زوج های مرتب بنویسید. ب) دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

۲۴. اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ باشد تابع $g(x)$ را به گونه ای مشخص کنید که

$$f \circ g(x) = x^2 - 4x + 5 \quad (\text{خرداد ۹۳})$$

۲۵. اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = \sqrt{x-2}$ دو تابع باشند (خرداد ۹۲)

الف) مقدار $(4)(f-g)$ را به دست آورید. ب) دامنه تابع $f \circ g(x)$ را بیابید.

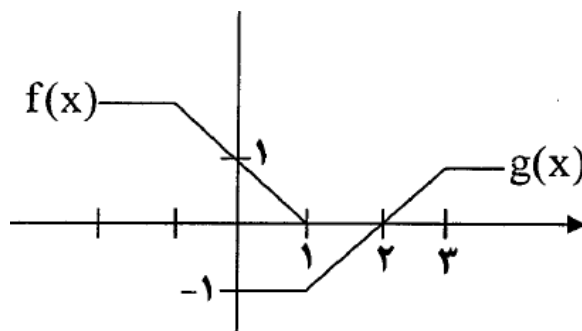
۲۶. اگر $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = \frac{1}{x-3}$ باشد، آنگاه حاصل عبارت های زیر را بیابید. (خرداد ۹۰)

- I. $(3f + 2g)(4)$
- II. $D_{f \circ g}$

۲۷. اگر $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$, $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ توابع $f \circ g$, $g \circ f$ و دامنه آنها را بیابید.

۲۸. با استفاده از نمودار زیر حاصل عبارت های زیر را بیابید. (شهریور ۹۰)

- $\begin{cases} (f+g)(1) \\ (f \circ g)(2) \end{cases}$



❖ چهار گزینه ای

۱۲۰) اگر $f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ x-1 & x \leq 0 \end{cases}$ ، $g(x) = \begin{cases} x & x \geq -2 \\ x-1 & x < -2 \end{cases}$ حاصل $(f+2g)(x)$ به ازای $x = f(0)$ چقدر است؟

1. ۲
2. -۴
3. -۶
4. ۳

۱۲۱) اگر توابع f, g به صورت $f = \{(4,2), (1,2)\}$ و $g = \{(1,0), (4,1), (2,1)\}$ باشند، تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

1. $\{(4,2) \text{ و } (1,0)\}$
2. $\{(4,1) \text{ و } (2,1)\}$
3. $\{(1,2)\}$
4. $\{(4,2)\}$

۱۲۲) دو تابع f, g به صورت مجموعه زوج های مرتب بیان شده است. در حالت کلی کدام رابطه ممکن است تابع نباشد؟

1. $f \cup g$
2. $f \cap g$
3. $f - g$
4. $f \circ g$

۱۲۳) اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+3}}$ و $g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x+3}}$ ، دامنه ی تابع با ضابطه ی $\frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟

1. $(-3, +\infty) - \{1\}$
2. $\mathbb{R} - \{1\}$
3. $(-3, +\infty)$
4. $(-3, +\infty) - \{0\}$

۱۲۴) اگر $f(x) = x^2 + 3x$ و $g(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ مجموعه طول نقاط از منحنی تابع $g \circ f$ که در بالای محور افقی قرار گیرد،

برابر کدام بازه است؟

1. $(-4, 1)$
2. $(-3, 2)$
3. $(-2, 1)$
4. $(4, -1)$

۱۲۵) توابع $f = \{(2,1), (3,2), (4,5), (1,7)\}$ و $g = \{(1,2), (3,1), (a,3), (b,1)\}$ مفروض اند. اگر $(4,2) \in f \circ g$ و

$(4,1) \in g \circ f$ باشند، دوتایی (a,b) کدام است؟ (سراسری ۹۰)

1. $(3,4)$
2. $(4,3)$
3. $(4,5)$
4. $(5,4)$

۱۲۶) اگر $g(x) = 2x - 1$ و $(f \circ g)(x) = \frac{x}{x-3}$ مقدار $f(3)$ کدام است؟ (سراسری ۹۱)

1. -4
2. -2
3. 2
4. 4

۱۲۷) اگر $g(x) = -\sqrt{x(4-x)}$ و دامنه تابع f برابر $[-\sqrt{3}, +\infty)$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ شامل چند عدد صحیح است؟

1. 4
2. 6
3. بی شمار
4. صفر

۱۲۸) اگر $f(x) = x^2 - 1$ نمودار تابع $y = f \circ f(x)$ با محور x کدام وضعیت را دارد؟

۱. یک نقطه تلاقی - دو نقطه تماس
۲. دو نقطه تلاقی - یک نقطه تماس
۳. سه نقطه تلاقی - فاقد نقطه تماس
۴. فاقد نقطه تلاقی - دو نقطه تماس

۱۲۹) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = \frac{4-x}{2+x}$ برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

1. $(-1, 2]$
2. $[-1, 1]$
3. $[0, +\infty)$
4. $[2, +\infty)$

(۱۳۰) اگر $f(x) = x^2 + 2x + 3$ و $(f \circ g)(x) = x^2 - 4x + 6$ ، آن گاه $g(x)$ کدام می تواند باشد؟

1. $x - 1$
2. $x - 3$
3. $x - 5$
4. $x - 4$

(۱۳۱) اگر $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}x$ ، $f(x) = \frac{x}{2-x}$ ضابطه ی تابع g برابر است با :

1. $\frac{x}{x+1}$
2. $\frac{x-1}{x-1}$
3. $\frac{x}{x-1}$
4. $\frac{x+1}{x}$

(۱۳۲) اگر $(g \circ f)(x) = 1 + \tan^2 x$ ، $f(x) = \cos x$ آن گاه مقدار $(g \circ g)(\sqrt{3} - 2)$ کدام است ؟

1. $73 - 40\sqrt{3}$
2. $5 - 4\sqrt{3}$
3. $69 - 30\sqrt{3}$
4. $25 + 48\sqrt{3}$

(۱۳۳) اگر $f(x) = x^2 - 5x$ و $g(x) = \sqrt{6-x}$ باشد دامنه تابع $g \circ f$ کدام است ؟

- 1) $[-6, 1]$
- 2) $[2, 3]$
- 3) $[-1, 5]$
- 4) $[-1, 6]$

(۱۳۴) اگر f تابع نزولی خطی باشد به طوریکه $f \circ f(x) = 4x + 3$ مقدار $f\left(-\frac{5}{2}\right)$ کدام است ؟

- 1) ۱
- 2) $\frac{1}{5}$
- 3) ۲
- 4) ۳

(۱۳۵) اگر $f(x) = (\sqrt{2})^x$ و $g(x) = \log_4 x$ آنگاه تابع $g \circ f$ بر روی R چگونه است ؟

(۱) صعودی و نزولی

(۲) نزولی

(۳) صعودی

(۴) برای $x \leq 0$ تعریف نشده

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۱۳۶) اگر $f(x) = x^2 + 4x + 5$, $f \circ g(x) = x^2 - 8x + 17$ باشد آنگاه $g(7)$ کدام می تواند باشد ؟

- 1) 1
- 2) -1
- 3) 5
- 4) صفر

۱۳۷) با شرط $f(x) = x^3 - 3x$, $x \leq 1$ در تابع با ضابطه $g(x) = x^3 + x$ بیشترین مقدار $g \circ f$ کدام است ؟

- 1) ۹
- 2) ۱۰
- 3) ۱۲
- 4) ۳۰

۱۳۸) اگر $g(x) = 2x - 3$, $f(g(x)) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشد تابع $f(x)$ کدام است ؟ (ریاضی ۹۳)

1. $x^2 - 4x + 3$
2. $x^2 - 4x + 5$
3. $x^2 - 2x + 5$
4. $x^2 - 2x + 3$

۱۳۹) اگر $f(x) = 2x + 3$, $g(f(x)) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند ضابطه $f \circ g$ در کدام است ؟ (سراسری ۹۲)

1. $2x^2 - 7x + 3$
2. $2x^2 - 3x + 7$
3. $4x^2 - 2x + 13$
4. $4x^2 - 4x + 11$

درس نامه ۸) توابع زوج و فرد

❖ توابع زوج و فرد

• تابع f را زوج می گیم هرگاه:

✓ دامنه تابع متقارن باشد

* $(\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f)$

✓ به ازای هر x عضو دامنه داشته باشیم

* $f(-x) = f(x)$

• تابع f را فرد می گیم هرگاه:

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

$$* (\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f)$$

✓ به ازای هر x عضو دامنه داشته باشیم

$$* f(-x) = -f(x)$$

❖ بررسی توابع زوج و فرد از روی نمودار:

به نظر شما از روی نمودار چه طور همیشه تابع زوج یا فرد را تشخیص داد؟

📌 تابعی زوج که محور y ها محور تقارن اون باشد.

📌 تابعی فرد که مبدا مختصات مرکز تقارن اون باشد.

❖ نوشتن یک تابع به صورت جمع دو تابع زوج و فرد

$$* f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{زوج}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{فرد}}$$

• مثال ۱) تابع $f(x) = x^2 + \cos x$ یک تابع زوج است

زیرا: دامنه تابع متقارن است (بگو چرا؟) همچنین داریم:

$$\triangleright f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x)$$

• مثال ۲) تابع $f(x) = \log \frac{x+1}{-x+1}$ تابعی فرد است

زیرا: $D_f = (-1, 1)$ (این دیگه چرا؟) پس متقارن است. همچنین داریم:

$$\triangleright f(-x) = \log \frac{(-x)+1}{-(-x)+1} = \log \frac{-x+1}{x+1} = \log \left(\frac{x+1}{-x+1} \right)^{-1} = -\log \frac{x+1}{-x+1} = -f(x)$$

• مثال ۳) تابع $f(x) = x^2 - x + 1$ را به صورت مجموع دو تابع زوج و فرد بنویسید.

$$\triangleright f(x) = \frac{(x^2-x+1)+(x^2+x+1)}{2} + \frac{(x^2-x+1)-(x^2+x+1)}{2} = \underbrace{(x^2+1)}_{\text{زوج}} + \underbrace{(-x)}_{\text{فرد}}$$

۴) درستی یا نادرستی هر یک از عبارات های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) مجموع دو تابع زوج و فرد همیشه تابعی فرد است.

📌 نادرست. فرض کنید f تابعی زوج و g تابعی فرد باشد خواهیم داشت:

$$* (f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x) = (f-g)(x) \text{ فرد نه زوج}$$

ب) مجموع دو تابع زوج همیشه تابعی زوج است.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

درست. فرض کنید f تابعی زوج و g تابعی زوج باشد خواهیم داشت:

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x) \text{ زوج}$$

ج) مجموع دو تابع فرد همیشه تابعی فرد است.

درست. فرض کنید f تابعی فرد و g تابعی فرد باشد خواهیم داشت:

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f + g)(x) \text{ فرد}$$

د) حاصل ضرب دو تابع زوج همیشه تابعی زوج است.

درست. فرض کنید f تابعی زوج و g تابعی زوج باشد خواهیم داشت:

$$(f \times g)(-x) = f(-x) \times g(-x) = f(x) \times g(x) = (f \times g)(x) \text{ زوج}$$

ه) حاصل ضرب دو تابع فرد همیشه تابعی فرد است.

نادرست. فرض کنید f تابعی فرد و g تابعی فرد باشد خواهیم داشت:

$$(f \times g)(-x) = f(-x) \times g(-x) = -f(x) \times (-g(x)) = (f \times g)(x) \text{ زوج}$$

و) حاصل ضرب دو تابع زوج و فرد همیشه تابعی زوج است.

نادرست. فرض کنید f تابعی زوج و g تابعی فرد باشد خواهیم داشت:

$$(f \times g)(-x) = f(-x) \times g(-x) = f(x) \times (-g(x)) = -(f \times g)(x) \text{ فرد}$$

ز) به نظر شما تابعی پیدا میشه که هم زوج باشه و هم فرد؟

ف: یک تابع این خاصیت را داره که تابع $f(x) = 0$ میشه.

تمرین در کلاس



۱. زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

a) $f(x) = |x|$

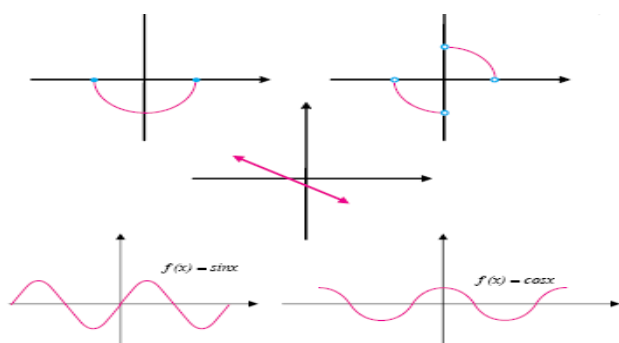
b) $f(x) = \frac{x^2-3}{x^3-1}$

c) $f(x) = 2x + \sin x$

d) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

e) $f(x) = x\sqrt{5-x^2}$

f) $f(x) = x^2 + 2x^8$



۲. بررسی کنید کدام تابع

زوج، کدام فرد و کدام یک

نه زوج و نه فرد است.

۳. در هر یک از حالت های زیر نقطه ای از نمودار یک تابع داده شده است.

نقطه دیگری از نمودار تابع را بیابید در صورتی که: (۱) تابع زوج باشد. (۲) تابع فرد باشد.

- $(-7, 2)$
- (a, b)
- $(\frac{-2}{7}, 7)$
- $(5, 3)$

۴. مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 4a^2})$ یک تابع فرد باشد.

۵. در هر حالت بررسی کنید تابع حاصل زوج است یا فرد؟

الف) ترکیب دو تابع زوج ب) ترکیب دو تابع فرد ج) ترکیب یک تابع فرد و یک تابع زوج

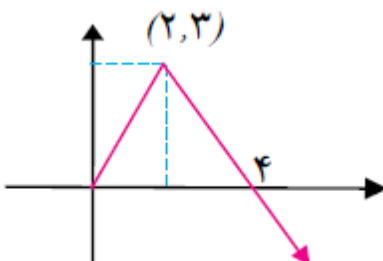
۶. تابع با ضابطه $f(x) = (a-2)x^3 + 5x^2 + bx(x+2) + c$ مفروض است:

الف) تحت چه شرایطی این تابع زوج است؟ ب) تحت چه شرایطی این تابع فرد است؟

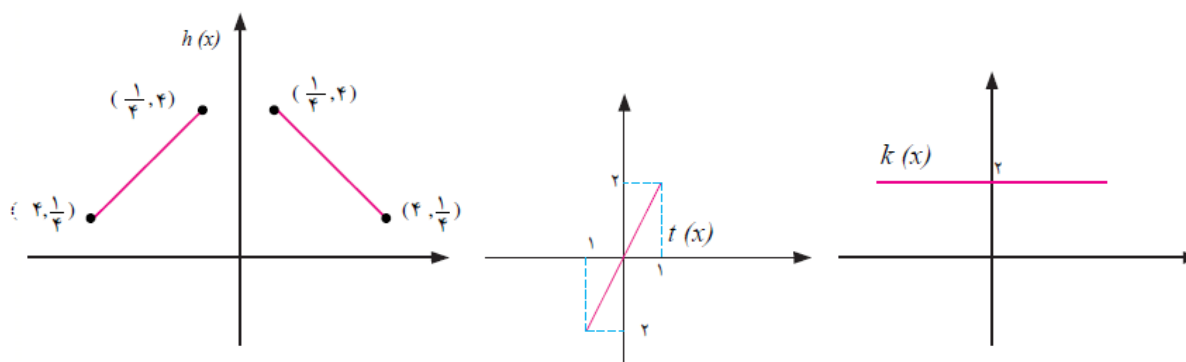
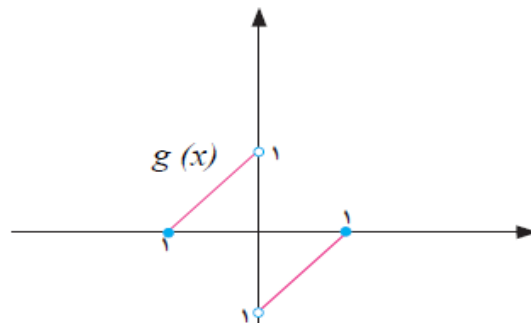
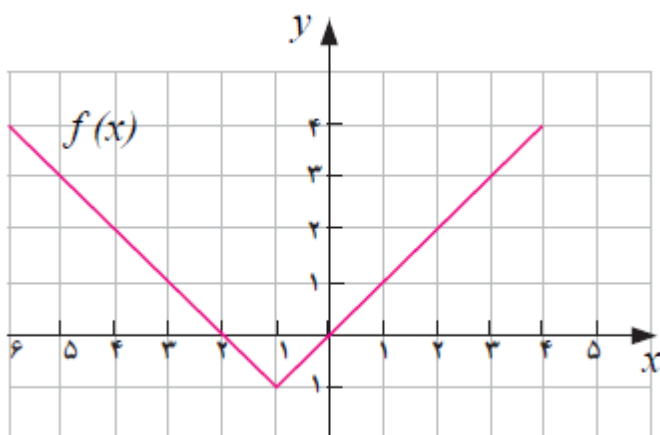
۷. نمودار یک تابع در شکل زیر داده شده است.

الف) نمودار را به گونه ای تکمیل کنید که نمودار جدید یک تابع زوج را نشان دهد.

ب) نمودار را به گونه ای تکمیل کنید که نمودار جدید یک تابع فرد را نشان دهد.



۸. زوج یا فرد بودن توابع زیر را معین کنید.



۹. نمودار توابع داده شده را رسم کنید و از روی آن زوج یا فرد بودن تابع را بررسی کنید.

I. $y = ||x| - 1|$

II. $y = \begin{cases} x + 1 & x > 0 \\ x - 1 & x < 0 \end{cases}$

۱۰. زوج یا فرد بودن توابع f, g را که در زیر آمده است تعیین کنید.

- $f = \{(-2,5), (-1,4), (0,3), (1,4), (2,5)\}$
- $g = \{(-2,1), (-1,2), (0,0), (1,-2), (2,-1)\}$

۱۱. تابعی دارای شرایط زیر است:

✓ از نقاط $(0,2), (4,0)$ عبور کند

✓ $f(3) = 2$

✓ در فاصله $[0,3]$ باشد

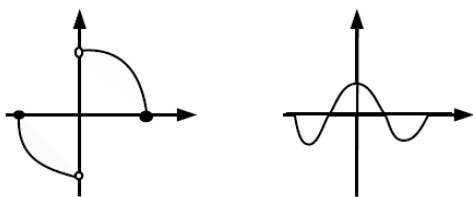
✓ تابع در $(3 + \infty)$ خطی باشد.

✓ تابع زوج باشد.

تابع را رسم کنید. دامنه و برد آن را بیابید..ضابطه تابع را بیابید.

۱۲. تابع $f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 2\sqrt{1+x^2} - 5$ را به صورت مجموع دو تابع زوج و فرد بنویسید.

۱۳. زوج یا فرد بودن توابعی که نمودار آنها در زیر آمده است را مشخص کنید. (خرداد ۹۳)



۱۴. زوج یا فرد بودن تابع زیر را بیابید. (دی ماه ۹۳)

• $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{2x^8 + x^2}$

۱۵. گزینه مناسب را انتخاب کنید. (خرداد ۹۴)

تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ است.

الف) زوج ب) فرد

۱۶. زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}$ را مشخص کنید. (شهریور ۹۰)

❖ سوالات چهار گزینه ای

۱۴۰. به ازای کدام مقادیر a ، ضابطه $y = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{ax}, & x < 0 \end{cases}$ یک تابع فرد است؟ (سراسری ۹۰)

۱. -4
۲. 4
۳. ± 4
۴. هیچ مقدار a

۱۴۱. کدام تابع زوج است؟

۱. $\begin{cases} y = x^4 - x + 1 & x > 0 \\ y = x^4 + x + 1 & x < 0 \end{cases}$
۲. $y = \frac{2x^3 + x}{2x + 1}$
۳. $y = \begin{cases} x^2 + x + 2 & x > 0 \\ x^2 - x - 2 & x < 0 \end{cases}$
۴. $y = |x - 1| - |x + 1| + |x|$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۱۴۲) اگر تابع با ضابطه $f(x) = |x + a| - |x + 2| + b|x + 5|$ تابعی فقط فرد باشد، $a + b$ کدام است؟

1. ۲
2. ۵
3. -۵
4. -۲

۱۴۳) اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & x \geq 4 \\ 2|x + 3| + a|x + b| & -4 < x < 4 \\ cx^2 + dx + e & x \leq -4 \end{cases}$ تابعی زوج باشد، $a + b + c + d + e$ کدام است

1. ۷
2. ۵
3. ۱
4. ۳

۱۴۴) اگر تابع $f(x) = \log(4x + \sqrt{k^2x^2 + 1})$ ، تابع فرد باشد، مقدار k کدام است؟

1. فقط ۲
2. فقط -۴
3. ± 4
4. صفر

۱۴۵) اگر تابع با ضابطه $y = x^4 + 3x^3 + A(x + 1)^3 + Bx$ زوج باشد، $A + B$ چقدر است؟

1. -۶
2. -۳
3. صفر
4. ۶

۱۴۶) اگر $f = \{(2, 3), (0, a), (-2, b)\}$ تابعی فرد باشد، مقدار $2a + 3b$ کدام است؟

1. -۶
2. -۹
3. -۳
4. صفر

147) اگر f و g دو تابع فرد باشند، کدام تابع زوج است؟

1. $f + g$
2. $f \cdot g$
3. $f \circ g$
4. $f - g$

148) تابع $f(x) = 2x^3 - 10x^2 + 2\sqrt{1+x^2} - 5$ را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشته ایم، مقدار

تابع فرد به ازای $x = 3$ کدام است؟

1. ۹
2. ۳۸
3. ۴۹
4. ۵۴

149) کدام تابع را نمی توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت؟

1. $y = \frac{x^2+1}{x^2-1} + x$
2. $y = 5x^3 - x^2 - \frac{1}{x}$
3. $y = \frac{x}{x-1} - 1$
4. $y = \begin{cases} x^2 - x & x > 2 \\ x^2 + 1 & x < -2 \end{cases}$

150) کدام تابع زیر فرد است؟

1. $y = (|x-2| + |x+2|)\sin^2 x$
2. $y = \frac{\operatorname{sgn} x}{\tan x - x}$
3. $y = \cos x + \sin^2 x + x^4$
4. $y = (3^x - 3^{-x})\tan^4 x$

151) اگر f زوج و g فرد باشند، تابع $h(x) = \frac{(f \circ g)(x)}{x^4}$ چه نوع تابعی است؟

1. زوج
2. فرد
3. نه زوج نه فرد
4. هم زوج هم فرد

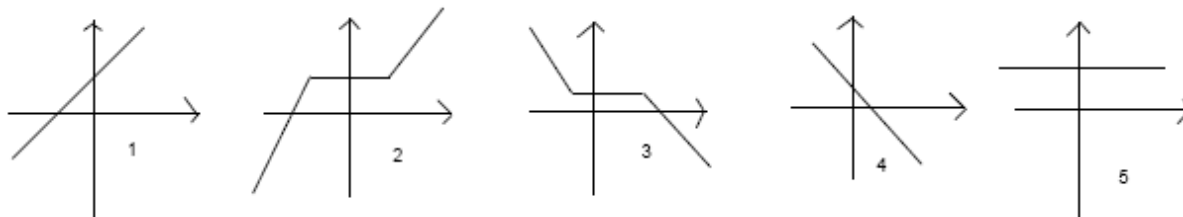
152) به ازای کدام مقدار تابع $f(x) = a + \log(x + \sqrt{x^2 + 10})$ یک تابع فرد است؟

- 1) $\frac{1}{2}$
- 2) $\frac{-1}{2}$

3) 2

4) صفر

درس نامه ۹) توابع صعودی و نزولی



همونطور که می دونی اگه روی نمودار یک تابع از چپ به راست حرکت کنیم مقادیر x افزایش پیدا میکنه حالا می خواهیم ببینیم با افزایش x برای مقادیر y چه اتفاقی می افته. به نمودار های فوق دقت کنید و تغییرات هر تابع را بگید .

(۱) در این نمودار با افزایش x می بینیم که y نیز افزایش پیدا میکنه. آفرین به این تابع می گیم صعودی اکید

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(۲) در این نمودار با افزایش x می بینیم که y کم نمی شه (افزایش می یابد یا ثابت می ماند). آفرین به این تابع می گیم صعودی .

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

(۳) در این نمودار با افزایش x می بینیم که y زیاد نمی شه (کاهش می یابد یا ثابت می ماند). آفرین به این تابع می گیم نزولی .

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

(۴) در این نمودار با افزایش x می بینیم که y کاهش پیدا می کنه. آفرین به این تابع می گیم نزولی اکید

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

(۵) این تابع ثابت است. در این حالت برای هر x_1 و x_2 خواهیم داشت: $f(x_1) = f(x_2)$

• مثال (۱) صعودی یا نزولی بودن تابع $f(x) = [x - 1]$ را با استفاده از تعریف بررسی کنید

➤ $x_1 < x_2 \Rightarrow [x_1] \leq [x_2] \Rightarrow [x_1] - 1 \leq [x_2] - 1 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

براساس مطالب گفته شده تابع فوق صعودی است

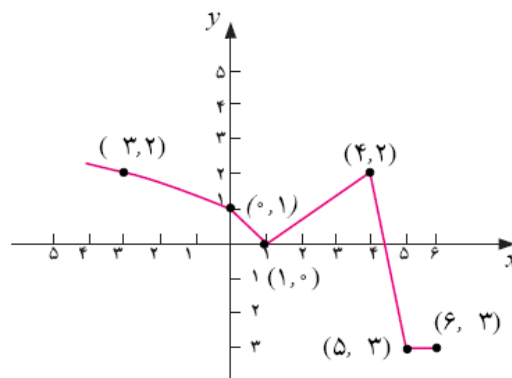
حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

تمرین



۱. با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ به سوالات زیر پاسخ دهید.

- I. دامنه و برد تابع را بیابید.
- II. بازه هایی که در آنها $f(x) > 0$ یا $f(x) < 0$ را بیابید.
- III. بازه هایی که در آنها تابع صعودی یا نزولی است را بیابید.
- IV. معادله ای برای این تابع بنویسید.



۲. تعیین کنید توابع زیر در چه بازه هایی صعودی یا نزولی هستند.

- $f(x) = \sqrt{x-2}$
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = -|x-2| + 5$
- $f(x) = \begin{cases} -3x-18 & x < -5 \\ 1 & -5 \leq x < 1 \\ x+2 & x \geq 1 \end{cases}$

۳. نمودار توابع زیر را رسم کرده و سپس تعیین کنید که این توابع در چه فاصله صعودی یا نزولی یا ثابت است.

- $f(x) = |x + 2| - 3$

- $g(x) = \sqrt{1 - x}$

- $h(x) = x^2 - 6x + 10$

- $m(x) = \begin{cases} x^2 & x < -2 \\ 4 & -2 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$

۴. تابعی رسم کنید که تمام شرایط زیر را داشته باشد.

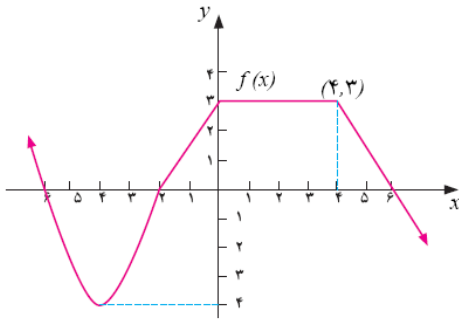
الف) $f(2) = 3$ ب) روی اعداد نامنفی ثابت باشد ج) روی بازه $[-1, 0]$ نزولی اکید باشد د) روی بازه

$[1 - 3]$ صعودی اکید باشد ه) روی اعداد نا بیشتر

از ۳- نزولی اکید بوده و بخشی از یک سهمی باشد.

۵. در تابع زیر بازه هایی که تابع در آنها صعودی، نزولی یا ثابت

است را معلوم کنید.



۶. تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < -2 \\ 1 & -2 \leq x < 1 \\ -2x & x \geq 1 \end{cases}$ را رسم کنید و

بازه هایی که در آن ها تابع صعودی، نزولی یا ثابت است

را مشخص کنید. (خرداد ۹۰)

۷. گزینه مناسب را انتخاب کنید. (خرداد ۹۴)

تابع $y = x^2 - 1$ در بازه $(-\infty, 0)$ است.

الف) نزولی ب) صعودی

📖 درس نامه ۱۰) توابع یک به یک و تابع وارون

❖ توابع یک به یک

تابع f را یک به یک می گیم هرگاه

$$\star x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

به زبان دیگه هیچ دو x ای نباید y های برابر داشته باشن مگر اینکه x ها با هم برابر باشن

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

دانلود از سایت ریاضی سرا

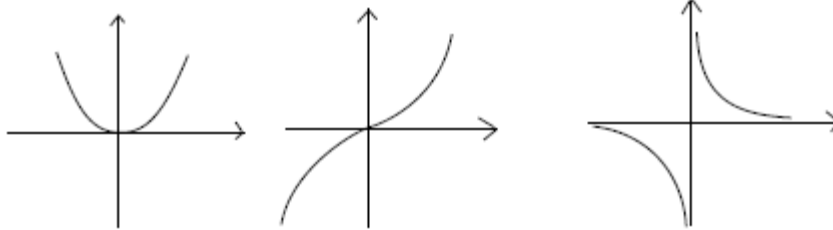
www.riazisara.ir

$$\star f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

خب حالا کی می تونه یه محک برای بررسی یک به یک بودن تابع بگه ؟

📌 هر خط موازی محور x ها نمودار تابع یک به یک را حداکثر در یک نقطه قطع می کنه.

• مثال ۱) در بین توابع زیر توابع یک به یک را معین کنید.



با توجه به مطلب گفته شده نمودار سمت چپ یک به یک نیست.

• مثال ۲) اگر $f = \{(a+2, 2), (1, 2), (1, 1-b), (2, 1)\}$ یک تابع یک به یک را نشان دهد مقادیر a, b را بیابید.

$$\text{شرط تابع بودن: } 1 - b = 2 \Rightarrow b = -1$$

$$\text{شرط یک به یک بودن: } a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$$

• مثال ۳) با استفاده از تعریف ثابت کنید که تابع $f(x) = 2 + (x-1)^3$ یک به یک است.

$$\triangleright f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2 + (x_1 - 1)^3 = 2 + (x_2 - 1)^3 \Rightarrow (x_1 - 1)^3 = (x_2 - 1)^3$$

$$\triangleright \Rightarrow x_1 - 1 = x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

پس تابع داده شده یک به یک است

📌 همیشه یه رابطه بین صعودی یا نزولی بودن تابع و یک به یک بودن اون پیدا کرد؟ آیا ؟

👉 نکته مهم : تابعی که در دامنه خود صعودی یا نزولی اکید باشد تابعی یک به یک است.

اثبات: فرض کنیم که f صعودی اکید باشد:

$$\triangleright x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

حالا با توجه به خاصیت عکس نقیض داریم:

$$\triangleright f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

یعنی این تابع یک به یک است

تذکر : اثبات در حالت نزولی اکید شبیه به حالت فوق است.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

تمرین



۱. با رسم نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 - 3 & x < 2 \\ x - 2 & x \geq 2 \end{cases}$ یک به یک بودن تابع $f(x)$ را بررسی کنید.

۲. با استفاده از تعریف یک به یک بودن تابع $y = \frac{2x-3}{x-2}$ را بررسی کنید.

۳. نشان دهید که تابع $f(x) = |x - 2| + 3$ یک به یک نیست. با محدود کردن دامنه f یک تابع یک به یک بسازید و وارون آن را به دست آورید.

۴. دو تابع مانند f, g رسم کنید به طوریکه دامنه هر دوی آنها اعداد نامنفی و برد هر دو آنها $[1, 4]$ باشد ولی یک به یک باشد و دیگری نباشد.

۵. برای تابع زیر بزرگترین مجموعه به عنوان دامنه که تابع داده شده در آن یک به یک است را بیابید.

- $g(x) = x^2 - 2x$

۶. کدام یک از توابع زیر یک به یک است. در مورد الف و ب موضوع را با رسم نمودار توابع نیز بررسی کنید.

a) $f(x) = 1 - x^2$

b) $g(x) = \sqrt{2x - 3}$

c) $h(x) = \frac{x+6}{3x-4}$

d) $f(x) = x^2 - 2x \quad x \geq 0$

e) $f(x) = \frac{x^2-4}{2x^2} \quad x > 0$

۷. با محدود کردن دامنه هر یک از توابع زیر روی یک بازه تابعی یک به یک بسازید.

a) $y = |x - 2|$

b) $y = (x + 3)^2$

c) $y = \sin x$

d) $y = \cos x$

۸. آیا تابع $f(x) = x^2 - 2x$ یک تابع یک به یک است. برای پاسخ خود دلیل ارایه کنید. (خرداد ۹۳)

❖ تابع وارون

- ✓ اگر تو یه تابع نقش مولفه های اول و دوم تغییر کنه، رابطه حاصل را وارون تابع می گیم.
- ✓ اگر وارون تابع، خود تابع جدیدی باشه، به اون تابع وارون می گیم و به تابع اولیه تابع وارونپذیر می گیم.

📌 **رابطه ای بین وارون پذیر بودن و یک به یک بودن وجود داره؟ آیا؟**

- ✓ بله. تابع اولیه هنگامی وارون پذیر میشه که خود یک به یک باشه.

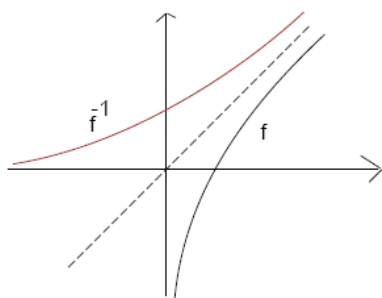
سال گذشته با مفهوم تابع وارون با استفاده از زوج مرتب و نمودار آشنا شدی (کجا !!!!) ابتدا اون مطالب را یاد آوری و تکمیل می کنیم.

✓ زوج مرتب

تابع وارون یک تابع مانند f را با f^{-1} نمایش می دهیم و آن عبارت است از :

$$* f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

✓ نمودار



نمودار تابع f^{-1} قرینه نمودار تابع f

نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است.

• مثال (۱)

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

❖ محاسبه ضابطه تابع وارون

✓ برای محاسبه ضابطه تابع وارون کافی است x را بر حسب y یافته سپس جای x, y را عوض کنیم.

✓ اگر دو تابع f, g وارون هم باشند، در این صورت :

$$\star f(g(x)) = f(f(x)) = x$$

• مثال ۲) ابتدا ثابت کنید تابع $f(x) = x^2 + 2x \quad x \geq -1$ یک به یک است سپس ضابطه وارون آن را بیابید.

$$x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$$

$$\triangleright f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 + 1)^2 - 1 = (x_2 + 1)^2 - 1 \Rightarrow$$

$$\triangleright (x_1 + 1)^2 = (x_2 + 1)^2 \Rightarrow x_1 + 1 = x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

برای تعیین تابع وارون:

$$\triangleright y = (x + 1)^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = (x + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{y + 1} = x + 1 \Rightarrow \sqrt{y + 1} - 1 = x$$

حالا داریم:

$$\triangleright f^{-1}(x) = \sqrt{x + 1} - 1$$

❖ دامنه و برد تابع وارون

اگر f^{-1} وارون تابع f باشد در این صورت داریم:

$$\star D_f = R_{f^{-1}}, D_{f^{-1}} = R_f$$

❖ چند نکته در مورد توابع وارون:

۱) نمودار دو تابع f, f^{-1} ممکن است یکدیگر را قطع نکنند یا فقط روی $y = x$ قطع کنند یا علاوه بر این خط در خارج این خط نیز یکدیگر را قطع کنند.

۲) اگر تابع f صعودی باشد حتما دو تابع فوق همدیگر را روی خط $y = x$ قطع می کنند.

۳) اگر تابع f در فاصله ای صعودی اکید باشد f^{-1} نیز چنین است. (همچنین در مورد نزولی اکید)

۴) توابع زوج به غیر از توابعی به صورت $\{(0, a)\}$ چون یک به یک نیستند پس وارون پذیر نیستند.

۵) اگر تابع فردی وارون پذیر باشد وارونش نیز وارون پذیر است.

۶) اگر دو تابع وارون هم باشند ترکیب آنها تابع همانی خواهد بود.

۷) اگر f, g دو تابع وارون پذیر باشند در این صورت $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

تمرین



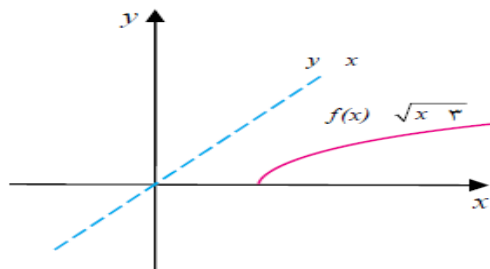
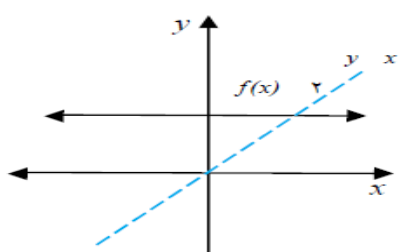
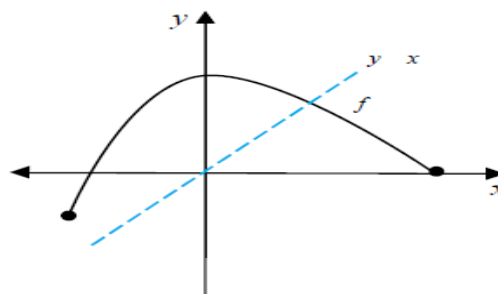
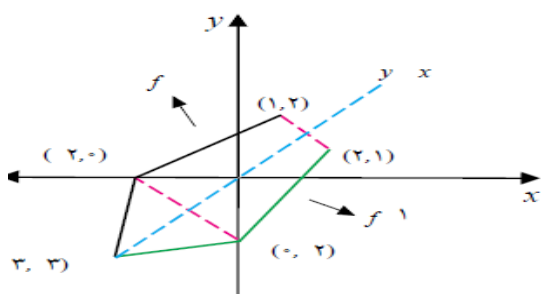
۱. نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند.

✓ f وارون پذیر نباشد.

✓ برای هر عدد حقیقی x ، $x < f(x)$

۲. تابع $f(x) = ax + b$ داده شده اند. مقادیر a, b را که به ازای آنها $f^{-1}(x) = f(x)$ باشد را بیابید.

۳. ابتدا تعیین کنید کدام تابع یک به یک است سپس وارون آنها را مطابق نمونه رسم کنید.



حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۴. نشان دهید تابع $f(x) = |x - 2| + 3$ یک به یک نیست. با محدود کردن دامنه تابع یک تابع یک به یک بسازید و وارون آن را بیابید.

۵. اگر $f = \{(1,2), (2,3), (-1,1)\}$ و $g = \{(0,3), (2,-2), (-2,2)\}$ باشد حاصل عبارات زیر را بیابید. الف) $(f^{-1} \circ g)(0)$ ب) $g^{-1} \circ f^{-1}$

۶. الف) اگر نمودار f در ربع اول باشد نمودار f^{-1} در چه ربعی قرار دارد؟

ب) اگر نمودار f در ربع سوم باشد نمودار $(-f^{-1})$ در چه ربعی قرار دارد؟

۷. نشان دهید توابع زیر یک به یک هستند و دامنه و برد و ضابطه تابع وارون آنها را به دست آورید.

a) $f(x) = \sqrt{x-2}$

b) $g(x) = \frac{x-5}{2x+3}$

۸. در مورد وارون پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq -1 \\ x^2 & -1 < x < 1 \\ x + 1 & 1 \leq x \end{cases}$ تحقیق کنید.

۹. تحقیق کنید که توابع $f(x) = \frac{1}{x} + 2$, $g(x) = \frac{1}{x-2}$ وارون یکدیگرند. برای کدام مقادیر x داریم

$$f(g(x)) = x \text{ و } g(f(x)) = x$$

۱۰. اگر $f(x) = 3 - \sqrt{4-x}$ باشد دامنه و برد تابع f^{-1} را بیابید.

۱۱. در هر حالت نشان دهید دو تابع داده شده وارون یکدیگرند.

a) $f(x) = x^3 - 5$, $g(x) = \sqrt[3]{x+5}$

b) $f(x) = \sqrt{x-2}, g(x) = x^2 + 3, x \geq 0$

۱۲. ثابت کنید وارون تابع $f(x) = \frac{3x-2}{5x-3}$ با خود تابع برابر است.

۱۳. وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیر است به دست آورید.

a) $f(x) = (x+5)^2 \quad x \geq 5$

b) $f(x) = -|x-1| + 1 \quad x \geq 1$

c) $f(x) = (x-3)^2$

d) $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

۱۴. اگر $f(x) = x + 3$, $g(x) = 3x - 7$ با محاسبه نشان دهید $g^{-1} \circ f^{-1} = (f \circ g)^{-1}$.

۱۵. اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند ارتفاع آن بعد از t ثانیه از رابطه $h(t) = 100 - \frac{49}{100}t^2$ به دست می آید. الف) دامنه و برد تابع بالا را بیابید. ب) چرا این تابع یک به یک است و معنای فیزیکی آن چیست؟ ج) تابع وارون آن را بیابید. د) معنای فیزیکی تابتبدیل می کند؟ ع) وارون چیست و چه مقدار هایی را به چه مقدار هایی تبدیل می کند؟

۱۶. وارون تابع $y = \frac{2x+1}{x-3}$ برابر است با..... (خرداد ۹۲)

۱۷. ضابطه وارون تابع $f(x) = \sqrt{2x+3}$ را بیابید. (دی ماه ۹۳)

۱۸. به کمک رسم نمودار نشان دهید تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x-1 & x < 0 \end{cases}$ وارون پذیر نیست. (خرداد ۹۴)

۱۹. اگر $f(x) = 4x - 3$, $g(x) = x + 2$ باشد تابع $(g \circ f)^{-1}$ را بیابید. (شهریور ۹۰)

۲۰. وارون پذیر بودن تابع $f(x) = \sqrt{x+3} - 5$ را بررسی کرده و در صورت وارون پذیر بودن، وارون آن بیابید. (شهریور ۹۲)

۲۱. جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. (دی ماه ۹۲)

وارون تابع $y = x^3$ است.

۲۲. ثابت کنید تابع $f(x) = (x-2)^2$ و $x \geq 2$ وارون پذیر است. سپس ضابطه وارون آن را بنویسید. (خرداد ۹۱)

❖ سوالات چهار گزینه ای

۱۵۳) اگر رابطه ی $R = \{(m+a, 7), (1, m^2-5), (1, 4), (m, 1), (3, 2), (-1, 7)\}$ تابع یک به یک باشد، مقدار a کدام است

۱. ۱
۲. -۳
۳. ۲
۴. -۲

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

1. $y = x^4 + 3x - 1$
2. $y = |5x + 2|$
3. $y = x^3 - 4x$
4. $y = x^5 + 2x$

۱۵۵) در چه تعداد از رابطه های روبرو y تابعی یک به یک بر حسب x است؟

• $x^4 + y^3 = 1, x^3 - y = 2, \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, x = \frac{x}{y}$

1. صفر
2. ۱
3. ۲
4. ۳

۱۵۶) وارون کدام یک از رابطه های زیر ، تابعی ثابت است ؟

1. $y = 2(x + 1)$
2. $(y - 3)^2 = 0$
3. $y = \sin^2 x + \cos^2 x$
4. $x = \sin^2 y + \cos^2 y$

۱۵۷) تابع مقابل را در نظر بگیرید ضابطه ی وارون آن کدام می تواند باشد ؟

1. $y = 3x + 1$
2. $y = \frac{1}{3x+1}$
3. $y = \frac{x-1}{3}$
4. $y = \frac{3}{x-1}$

x	1	2	3	4	5
y	4	7	10	13	16

۱۵۸) اگر $f = \{(1,2), (2,5), (0,3), (4,-1)\}, g = \{(2,3), (-1,4), (4,1), (3,0)\}$ تابع $g \circ f^{-1}$ کدام است ؟

1. $\{(1,3) \text{ و } (0,0)\}$
2. $\{(2,4), (3,5)\}$
3. $\{(2,0), (-1,4)\}$
4. $\{(5,3), (-1,1)\}$

(۱۵۹) توابع زیر از اعداد حقیقی به اعداد حقیقی تعریف شده است. کدام یک از آنها معکوس پذیر هستند؟ (سراسری خارج کشور ۸۹)

1. $y = x^4 - 2x^2$
2. $y = [x]$
3. $y = x^3 - 3x^2$
4. $y = x^3 + x + 1$

(160) کدام گزینه تابع معکوس پذیر است؟

1. $y = 3|x| + x + 1$
2. $y = 3|x| - x + 1$
3. $y = |x| - x + 1$
4. $y = |x| - 3x + 1$

(161) معادله ی تابع معکوس تابع $y = (x - 2)^3 + 1$ کدام است؟

1. $y = 2 - \sqrt[3]{x-1}$
2. $y = 2 + \sqrt[3]{x-1}$
3. $y = -2 + \sqrt[3]{x-1}$
4. $y = -2 - \sqrt[3]{x-1}$

(162) اگر $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$ و $g(x) = f\left(\frac{x}{x+2}\right)$ باشد، ضابطه ی تابع معکوس g کدام است؟

1. $y = \frac{2(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
2. $y = \frac{2(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$
3. $y = \frac{2\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$
4. $y = \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

(163) اگر f تابعی یک به یک و f^{-1} وارون آن باشد، وارون تابع با ضابطه ی $g(x) = \frac{2f(x)+1}{1-2f(x)}$ کدام است؟

1. $g^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{2x+1}{1-2x}\right)$
2. $g^{-1}(x) = f^{-1}\left(\frac{x-1}{2+2x}\right)$
3. $g^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(x)+1}{2f^{-1}(x)-2}$
4. $g^{-1}(x) = \frac{f^{-1}(x)-1}{2f^{-1}(x)+2}$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

164) اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ باشد، ضابطه ی تابع $f^{-1}(\sin x)$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

1. $\tan x$

2. $\cot x$

3. $\frac{|\cos x|}{\sin x}$

4. $\frac{\sin x}{|\cos x|}$

165) با توجه به ماشین $x \rightarrow \boxed{f} \rightarrow \boxed{g} \rightarrow x$ گر $f(x) = 2x - 1$ آن گاه $g(0)$ کدام است؟

1. ۱

2. صفر

3. $\frac{1}{2}$

4. ۲

166) اگر $g(x) = f(3x - 4)$ و $f^{-1}(x) = x + \sqrt{x}$ ، آن گاه حاصل $g^{-1}(16)$ کدام است؟ (سراسری ۸۹)

1. ۵

2. ۶

3. ۷

4. ۸

167) اگر $g(x) = f(x) + \sqrt{f(x)}$ و $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{2x}$ آن گاه حاصل $g^{-1}(6)$ کدام است؟ (سراسری خارج کشور ۸۹)

1. ۱

2. ۲

3. ۳

4. ۴

168) ضابطه ی تابع معکوس $y = \begin{cases} x^2 - 1 & 0 \leq x < 3 \\ \frac{x}{3} + 7 & 3 \leq x \end{cases}$ کدام است؟

1. $y = \begin{cases} \sqrt{x+1} & 0 \leq x < 8 \\ 3x - 7 & 8 \leq x \end{cases}$

2. $y = \begin{cases} \sqrt{x+1} & -1 \leq x < 8 \\ 3x - 21 & 8 \leq x \end{cases}$

3. $y = \begin{cases} \sqrt{x+1} & 0 \leq x < 3 \\ 3x - 21 & 3 \leq x \end{cases}$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

4. تابع معکوس پذیر نیست.

169) در تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ ، مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟ (سراسری ۸۸)

1. -۸
2. -۵
3. -۲
4. تعریف نشده

170) معکوس تابع $y = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 4}{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}$ محور عمودی را با چه عرضی قطع می کند؟ (آزاد ۹۱)

1. $-1 + \sqrt[3]{3}$
2. $-1 - \sqrt[3]{3}$
3. $1 - \sqrt[3]{3}$
4. $1 + \sqrt[3]{3}$

171) معکوس تابع با ضابطه $y = \frac{2x+1}{x-1} - 1$ ، خود تابع را در چند نقطه قطع می کند؟

1. صفر
2. بی شمار
3. ۱
4. ۲

172) منحنی معکوس تابع با ضابطه $y = -(x+2)^3 - 2$ را در چند نقطه قطع می کند؟

۱. یک نقطه
۲. پنج نقطه
۳. قطع نمی کند
۴. سه نقطه

۱۷۳) دو تابع با ضابطه های $f(x) = 2x - 5$, $g = \{(1, 5), (3, 4), (1, 6), (4, 7), (8, 1)\}$ مفروض اند. اگر

$$f^{-1} \circ g(a) = 6 \text{ باشد } a \text{ کدام است؟ (سراسری ۹۳)}$$

1. ۱
2. ۲
3. ۳
4. ۴

(۱۷۴) تابع $f(x) = x^2 + 2x + 1$ با دامنه $(-1, \infty)$ داده شده است. نمودارهای دو تابع f, f^{-1} در چند نقطه متقاطع هستند (سراسری ۹۲)

1. ۱
2. ۲
3. ۳
4. غیر متقاطع

(175) تابع با ضابطه $f(x) = 2x - |4 - 2x|$ در بازه وارون پذیر است. ضابطه f^{-1} در آن بازه کدام است؟ (خارج ۹۲)

1. $\frac{x}{4} + 1 \quad x \geq 4$
2. $\frac{x}{4} - 1 \quad x \leq 4$
3. $\frac{x}{4} - 1 \quad x \geq 4$
4. $\frac{x}{4} + 1 \quad x \leq 4$

(176) نمودار تابع $y = |2x - 6| - |x + 4| + x$ در یک بازه اکیدا نزولی است. ضابطه تابع معکوس آن کدام است؟ (سراسری ۹۴)

1. $-x + 6 \quad ; \quad x < -4$
2. $-x + 5 \quad ; \quad x > 2$
3. $-\frac{1}{2}x + 1 \quad ; \quad -4 < x < 3$
4. $-\frac{1}{2}x + 1 \quad ; \quad -4 < x < 10$

📖 درس نامه (۱) توابع چند جمله ای و توابع متناوب

❖ توابع چند جمله ای

یک تابع چند جمله ای در حالت کلی به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ نشان داده میشه که در اون ضرایب اعدادی حقیقی و n یک عدد حسابی و $a_n \neq 0$ است. این تابع را از درجه n می گیم. در سال گذشته با بعضی از حالت های این تابع آشنا شدید (می دونم که میگی من! آشنا!) در این جا آنها را یاد آوری کرده و حالت دیگری را نیز اضافه می کنیم.

(a) $n = 0$ که تابع $y = b$ به دست می آید که به آن تابع ثابت می گوییم.

(b) $n = 1$: در این حالت فرم تابع به شکل $y = ax + b$ در میاد که به آن تابع درجه اول یا خطی می گیم.

(c) $n = 2$: در این حالت فرم تابع به شکل $y = ax^2 + bx + c$ در می آید که به آن تابع درجه ۲ یا سهمی می گوییم

در این جا تابع $y = x^3$ را مورد بررسی قرار می دهیم

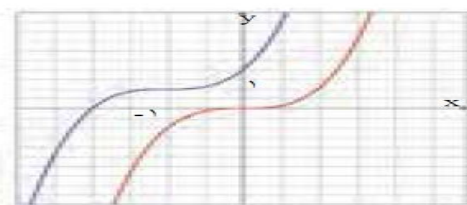
✓ دامنه این تابع برابر R و برد آن نیز برابر R است. این تابع فرد است. این تابع صعودی است

تمرین

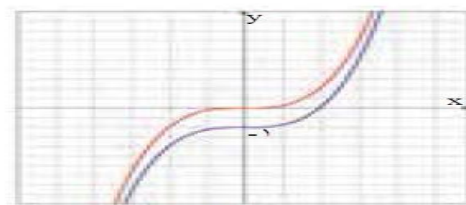


در هر یک از شکل های زیر نمودار تابع $y = x^3$ و نمودار یک تابع دیگر که بوسیله آن رسم شده است

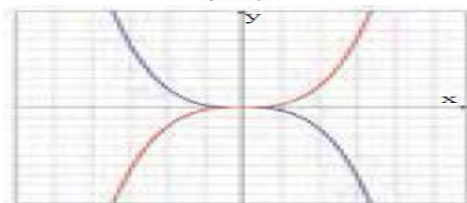
در یک دستگاه رسم شده است. ضابطه تابع جدید را بنویسید.



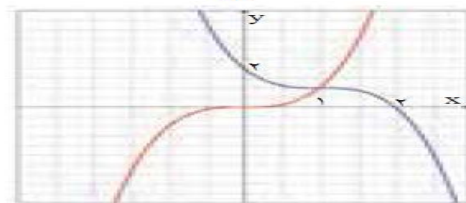
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

تابع f را متناوب می‌گیم هر گاه عددی حقیقی مانند T موجود باشد به طوریکه :

$$\star \forall x \in D_f: x + T \in D_f, f(x + T) = f(x)$$

کوچکترین عدد T را در صورت وجود دوره تناوب اصلی تابع f می‌گیم.

چند نکته: ➡

(a) تابع $f(x) = k$ متناوب است ولی دوره تناوب اصلی ندارد.

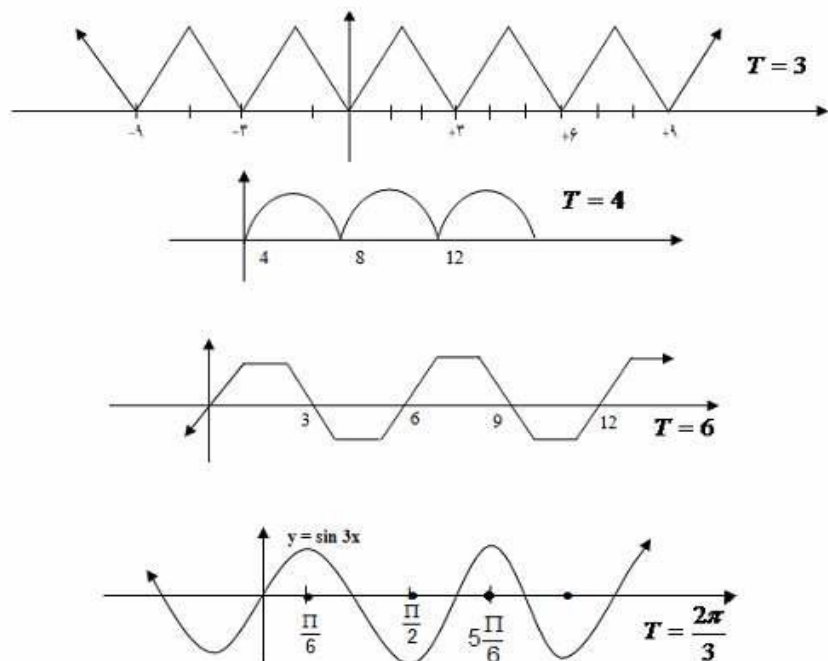
(b) تابع $f(x) = nx - [nx]$ متناوب است و دوره تناوب آن $\frac{1}{|n|}$ است.

(c) تابع $f(x) = x - n\left[\frac{x}{n}\right]$ متناوب است و دوره تناوب آن $|n|$ است.

(d) تابع $f(x) = (-1)^{[nx]}$ متناوب است و دوره تناوب آن $\frac{2}{|n|}$ است.

✓ در جدول زیر دوره تناوب چند تابع مثلثاتی را می‌بینید.

دوره تناوب	شرط	تابع
$\frac{2\pi}{ a }$	n فرد باشد	$\sin^n ax, \cos^n ax$
$\frac{\pi}{ a }$	n زوج باشد	$\sin^n ax, \cos^n ax$
$\frac{\pi}{ a }$	-----	$\tan^n ax, \cot^n ax$
$\frac{\pi}{ a }$	-----	$ \sin ax , \cos ax $
$\frac{\pi}{ a }$	-----	$ \tan ax , \cot ax $



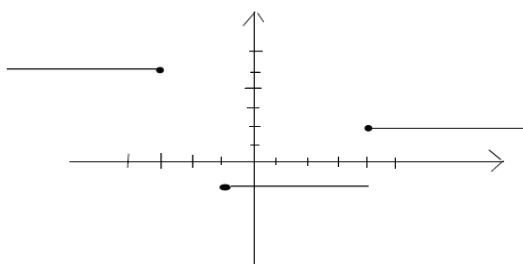
❖ توابع پله ای و جزء صحیح

❖ اگر در تابعی دامنه به تعدادی بازه تقسیم

بشه به طوریکه مقدار تابع در هر بازه ثابت باشه به اون تابع پله ای می گیم.

مانند تابع

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x \leq -3 \\ -1 & -1 \leq x \leq 4 \\ 2 & 4 \leq x \end{cases}$$



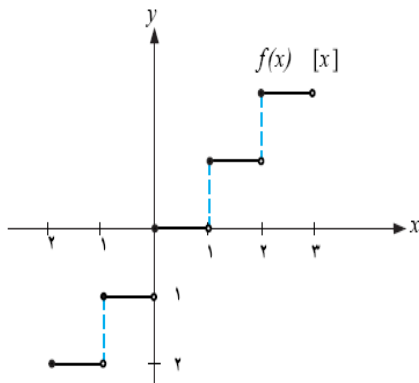
❖ جزء صحیح

برای هر عدد حقیقی x جزء صحیح اون بزرگترین عددیه که از x بیشتر نباشه. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می دیم. به بیان دیگه:

برای هر عدد حقیقی x ، عدد یکتای صحیح مانند p یافت می شود که $p \leq x < p + 1$. به عدد p جزء صحیح x می گیم.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

➤ $[4/5] = 4, [-2/7] = -3, [/8] = 0, [-/9] = -1$



❖ تابعی که به هر عدد حقیقی جزء صحیح آن را نسبت می ده

تابع جزء صحیح نامیده میشه و با $f(x) = [x]$ نشون میدیم

برای رسم توابع شامل نماد جزء صحیح می شه به یکی از دو

صورت زیر عمل کرد .

(a) دامنه را به بازه هایی مانند $[a, b)$ طوری تقسیم کن

که مقدار تابع در هر بازه عدد صحیح مشخصی شود

(b) ابتدا نمودار تابع $f(x)$ را رسم و سپس جزء صحیح عرض نقاط نمودار را تعیین کن .

تمرین



۱. تابع پله ای را رسم کنید .

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x \leq -3 \\ -1 & -1 \leq x < 4 \\ 2 & 4 \leq x \end{cases}$$

۲. نمودار تابع $y = \left[\frac{1}{3}x\right]$ را در فاصله $[-6, 6]$ رسم کنید .

۳. نمودار توابع زیر را در $[-2, 2)$ رسم کنید.

c) $y = [-x]$

d) $y = [2x]$

۴. وارون پذیری تابع $y = [x]$ را بررسی کنید.

۵. نشان دهید تابع $y = x - [x]$ متناوب است و با بدست آوردن دوره تناوب، نمودار آن را رسم کنید.

۶. نمودار هر یک از توابع زیر را به کمک نمودار $[x]$ رسم کنید.

e) $y = [x] - \frac{1}{2}$

f) $y = 2[x] + 1$

۷. نمودار تابع $y = [2x]$ را در بازه $[0,1)$ رسم کنید. (شهریور ۹۳)

۸. نمودار تابع $y = [x] + 2$ را در بازه $[-1,2)$ رسم کنید. (شهریور ۹۱)

۹. مقدار تابع $f(x) = [x + 1]$ به ازای $x = \sqrt{2}$ است. (دی ماه ۹۲)

۱۰. یک شرکت پستی برای ارسال بسته های پستی تا کمتر از یک کیلو گرم ۲ هزار تومان و برای ارسال بسته های از ۱ تا کمتر از ۲ کیلوگرم ۴ هزار تومان و از ۲ تا کمتر از ۳ کیلوگرم ۶ هزار و برای بسته های بیشتر نیز به همین ترتیب دریافت می کند. اگر $f(x)$ هزینه ارسال یک بسته پستی x کیلوگرمی می باشد. نمودار تابع را رسم و معادله ای برای آن بیابید.

۱۷۷) مقدار عددی تابع $f(x) = [x] + [x^2]$ به ازای $x = 1 + 3\sqrt{2}$ کدام است ؟

1. ۳۰
2. ۳۱
3. ۳۲
4. ۳۳

۱۷۸) حاصل $B = [(2 - \sqrt{5})^{13}] + [(\sqrt{7} - \sqrt{6})^{13}]$ کدام است ؟

1. -۱
2. -۲
3. ۱
4. صفر

۱۷۹) از رابطه ی $25n^2 < 25n^2 + 8n < 25n^2 + 10n + 1$ حاصل $[\sqrt{25n^2 + 1}]$ کدام است ؟

1. $5n - 1$
2. $\frac{5n}{2}$
3. $5n$
4. $5n + 1$

۱۸۰) اگر $f(x) = [x]$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$ آن گاه $(f \circ g)\sqrt{2}$ کدام است ؟

1. -۴
2. -۳
3. -۲
4. -۱

۱۸۱) برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $[\sqrt{4n^2 - 3n + 1}] - 2[\sqrt{n^2 - 2n}]$ کدام است ؟

1. ۲
2. ۱
3. ۳
4. ۴

182) حاصل عبارت جزء صحیح $\lceil \log_{\sqrt[3]{2}} \sqrt{5} \rceil$ کدام است؟

1. ۲
2. ۱
3. ۵
4. ۳

183) دامنه تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{([x] - \sqrt{2})(3 - [x])}$ کدام است؟

1. $[\sqrt{2}, 3]$
2. $(1, 3)$
3. $[2, 4)$
4. $[1, 3]$

184) مجموعه جواب $[x + 3] + 3[x] = 15$ کدام است؟

1. $[3, 4)$
2. $[2, 3)$
3. $[4, 5)$
4. $\emptyset$

185) جواب معادله $\left\lceil \frac{2x-1}{x} \right\rceil = 3$ کدام است؟ (آزاد ۹۱)

1. $-1 \leq x < -\frac{1}{2}$
2. $-1 \leq x < 0$
3. $-2 \leq x < -1$
4. $1 \leq x < 2$

186) معادله $\frac{2}{[x] + [-x]} = x^2 + x - 2$ چند جواب دارد؟

1. صفر
2. ۱
3. ۳
4. ۴

187) دو تابع با ضابطه $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض اند. اگر $g(f(x)) = -2$ آن گاه مجموعه

مقادیر x کدام است؟ (سراسری ۸۹)

1. $R - Z$
2. Z
3. R

4. $\emptyset$

188) در تابع با ضابطه $y = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1}$ مقدار $f(x) = [x] + [-x] + \sqrt{\sin \pi x - 1}$ کدام است؟ (سراسری ۸۹ خارج کشور)

1. -۱

2. ۱

3. صفر

4. تعریف نشده

189) اگر $f(x) = -x + [x]$ و $g(x) = 2^x$ ، آنگاه برد تابع $g \circ f$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

1. $(\frac{1}{2}, 1]$ 2. $[\frac{1}{2}, 1)$ 3. $(1, 2]$ 4. $[1, 2)$

190) برد تابع $y = \sqrt{x - 4 \left[\frac{x}{4} \right]}$ کدام است؟

1. $[0, 2]$ 2. $[0, 4]$ 3. $[0, 2)$ 4. $[1, 2)$

191) جواب معادله $y = 3[x]^2 + 1$ کدام است؟

1. $(0, 1)$ 2. $(1, 2)$ 3. $[1, 2)$ 4. $(1, 2]$

192) معادله $[x] + [x^2] = \frac{x}{2}$ چند ریشه دارد؟

1. صفر

2. ۱

3. ۲

4. ۳

193) اگر $[2x] = [4x + 2y] = 5$ باشد، حاصل $[3x + y]$ کدام است؟

1. ۵

2. $\frac{5}{2}$

3. ۱۰

4. $\frac{5}{4}$

(194) کدام تابع یک به یک است؟

1. $y = x - \left[\frac{x}{3}\right]$

2. $y = x + \left[\frac{-x}{3}\right]$

3. $y = x - \left[\frac{-x}{3}\right]$

4. $y = x - \sqrt{x}$

(195) مجموع ریشه های معادله $[x] = 3x$ کدام است؟

1. صفر

2. $\frac{1}{3}$

3. $-\frac{1}{2}$

4. $-\frac{1}{3}$

(196) توابع $y = \sin(\frac{\pi}{2}x)$ و $y = x - [x]$ در فاصله ی $[0, 2]$ در چند نقطه متقاطع اند؟

1. صفر

2. ۱

3. ۲

4. ۳

(197) مجموعه جواب معادله ی $[x] = [x^2]$ کدام است؟

1. $[0, 1)$

2. $[0, \sqrt{2})$

3. $[0, 1]$

4. $[0, \sqrt{2}]$

(198) طول نقطه تلاقی نمودار های دو تابع $y = |x|$, $y = \frac{4}{5}x - \left[\frac{4}{5}x\right]$ کدام است؟

1) $\frac{-5}{9}$

2) $\frac{-4}{9}$

3) $\frac{4}{9}$

4) $\frac{5}{9}$

فصل سوم – مثلثات

خب رسیدی به فصلی که خیلی دوستش داری .

تو این فصل چی می خونی ؟

۱. توابع مثلثاتی

۲. تانژانت و کتانژانت

۳. اتحاد های مثلثاتی

۴. معادلات مثلثاتی

۵. وارون توابع مثلثاتی

این فصل برای ترم دومه و چهار نمره تو خرداد و شهریور داره .

درس نامه (۱) مثلثات - یاد آوری

❖ اندازه ی نسبت های مثلثاتی بعضی از زوایای مهم

	0	30	45	60	90	180	270	360
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
cot	تعریف نشده	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

روابط بنیادی

- ★ $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
- ★ $\cos \theta \times \tan \theta = \sin \theta$
- ★ $\sin \theta \times \cot \theta = \cos \theta$
- ★ $\tan \theta \times \cot \theta = 1$
- ★ $1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$
- ★ $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

(۱) زوایای قرینه:

★ $\sin(-\theta) = -\sin \theta, \cos(-\theta) = \cos \theta, \tan(-\theta) = -\tan \theta, \cot(-\theta) = -\cot \theta$

(۲) زوایای مکمل:

★ $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta, \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta, \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta, \cot(\pi - \theta) = -\cot \theta$

(۳) زوایای با اختلاف π :

★ $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta, \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta, \tan(\pi + \theta) = \tan \theta, \cot(\pi + \theta) = -\cot \theta$

(۴) زوایای با مجموع 2π :

★ $\sin(2\pi - \theta) = -\sin \theta, \cos(2\pi - \theta) = \cos \theta, \tan(2\pi - \theta) = -\tan \theta, \cot(2\pi - \theta) = -\cot \theta$

(۵) زوایای متمم:

★ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta, \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta, \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta$

(۶) زوایای با اختلاف $\frac{\pi}{2}$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

$$\star \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta, \tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta, \cot\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\tan\theta$$

درس نامه ۲) توابع مثلثاتی

❖ توابع مثلثاتی - نمودار و ویژگیها

✓ دایره مثلثاتی

دایره ای هست به شعاع واحد دارای مبدا و جهتی

خلاف جهت حرکت عقربه های ساعت .

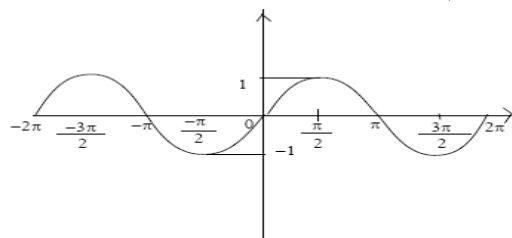
❖ تابع سینوس و تابع کسینوس

اگر کمان α را به طور دلخواه انتخاب کنیم با عمود کردن

نقطه های انتهایی کمان بر محور های x, y نسبت های زیر حاصل می شود:

$$\star \Delta_{OBM} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{BM}{OM} = \frac{BM}{1} \Rightarrow BM = OC = \sin \alpha \\ \cos \alpha = \frac{OB}{OM} = \frac{OB}{1} \Rightarrow OB = \cos \alpha \end{cases}$$

براین اساس محور افقی را محور کسینوس ها و محور عمودی را محور سینوس ها می نامیم.



✓ تابع $y = \sin x$

(۱) این تابع متناوب با دوره تناوب 2π است

(۲) این تابع چون متناوب است پس یک به یک نیست .

(۳) این تابع فرد است زیرا نمودار آن نسبت به مبدا مختصات متقارن است

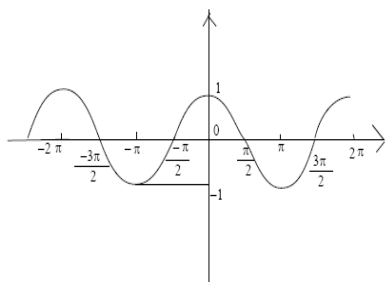
(۴) این تابع در بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ اکیدا صعودی است در نتیجه در این بازه یک به یک است

✓ تابع $y = \cos x$

(۱) این تابع متناوب با دوره تناوب 2π است

(۲) این تابع چون متناوب است پس یک به یک نیست .

(۳) این تابع زوج است زیرا نمودار آن نسبت به محور y متقارن است.



حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۴) این تابع در بازه $[0, \pi]$ اکیدا نزولی است در نتیجه در این بازه یک به یک است.

✓ تابع $y = \tan x$

در نقطه $(1,0)$ بر دایره مثلثاتی خطی مماس می‌کنیم اگر زاویه α را در

نظر بگیریم و خط ON را امتداد دهیم تا خط مماس را قطع کند

$$\frac{HN}{AM} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow AM = \frac{HN}{OH} \Rightarrow AM = \tan \alpha \text{ داریم}$$

محور AT در دایره فوق محور تانژانت است. همچنین

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ با توجه به تساوی های بالا داریم}$$

(۱) این تابع متناوب با دوره تناوب π است

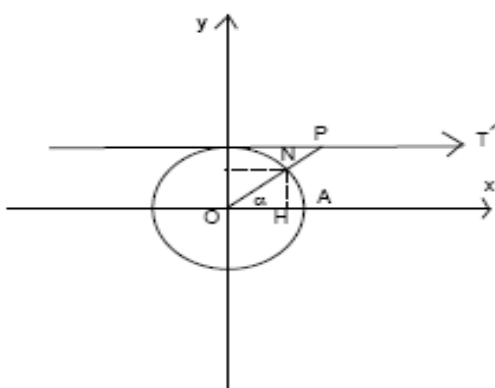
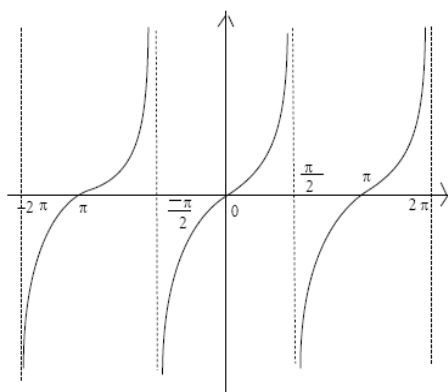
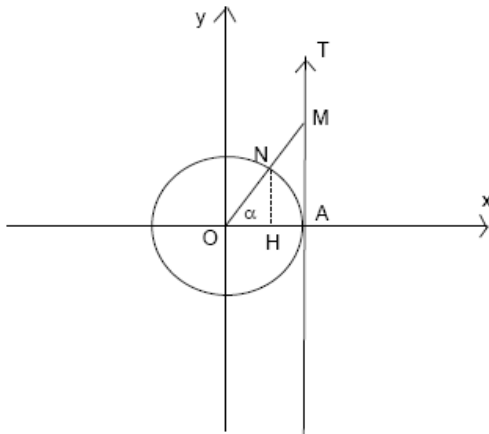
(۲) این تابع چون متناوب است پس یک به یک نیست.

(۳) این تابع فرد است زیرا نمودار آن نسبت به مبدا

مختصات متقارن است

(۴) این تابع در بازه $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ اکیدا صعودی است

در نتیجه در این بازه یک به یک است



✓ تابع $y = \cot x$

در این قسمت می‌خواهیم روی دایره مثلثاتی محوری را بیابیم

که کتانژانت زاویه را به ما بدهد. برای این منظور در نقطه $(0,1)$

روی دایره مثلثاتی خطی مماس بردایره رسم می‌کنیم. سپس

خط ON را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه P قطع کند سپس با

استفاده از قضیه تالس خواهیم داشت (چرا):

$$\star \frac{MN}{BP} = \frac{OM}{ON} \Rightarrow BP = \frac{MN}{OM} \Rightarrow BP = \cot \alpha$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۱) تابع کتانژانت یک تابع متناوب با دوره تناوب π است.

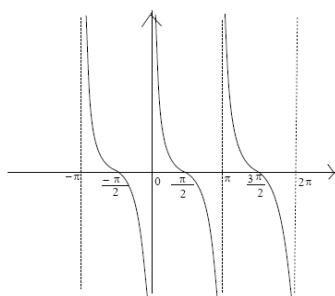
(۲) نمودار این تابع نسبت به مبدا مختصات متقارن است

در نتیجه تابعی فرد است.

(۳) چون این تابع متناوب است پس یک به یک نیست

(۴) این تابع در بازه $(0, \pi)$ اکیدا نزولی است در نتیجه در این

بازه یک به یک است.



تمرین



۱. نشان دهید دامنه تابع کتانژانت همه اعداد غیر از اعداد به صورت $k\pi$ است که در آن k عددی صحیح است.

۲. نشان دهید π یک دوره تناوب تابع کتانژانت است.

۳. از طریق محور کتانژانت ها توضیح دهید که وقتی مقدار های x از یک زاویه مثبت نزدیک صفر شروع شوند و به طور مداوم افزایش یابند تا به π نزدیک شوند مقدار $\cot x$ چگونه تغییر می کند.

۴. وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع کتانژانت در بازه $(0, \pi)$ چگونه است؟

۵. درستی تساوی $\cot x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ را به دست آورید و از طریق آن چگونگی ارتباط نمودارهای دو

تابع $\tan x, \cot x$ را توضیح دهید.

📖 درس نامه ۳/ اتحادهای مثلثاتی

❖ اتحادهای مثلثاتی

← نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو کمان

1. $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
2. $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
3. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$
4. $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$
5. $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$
6. $\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$
7. $\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot\alpha\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$

← نسبت های مثلثاتی دو برابر یک کمان

1. $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
2. $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

$$3. \cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \sin^2 \alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$4. \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha}, \cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

$$5. \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1+\tan^2 \alpha}$$

$$6. \cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2 \alpha}{1+\tan^2 \alpha}$$

← چند رابطه مهم دیگر:

$$1. \sin 3\alpha = -4\sin^3 \alpha + 3\sin \alpha$$

$$2. \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$$

$$3. \sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$4. \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$5. \cos 4\alpha = 1 - 8\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

← فرمول های تبدیل جمع به ضرب

$$I. \sin a + \sin b = 2 \sin \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$II. \cos a + \cos b = 2 \cos \left(\frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$III. \sin a - \sin b = 2 \sin \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos \left(\frac{a+b}{2} \right)$$

$$IV. \cos a - \cos b = -2 \sin \left(\frac{a+b}{2} \right) \sin \left(\frac{a-b}{2} \right)$$

$$V. \tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$$

$$VI. \cot x \pm \cot y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y}$$

❖ فرمول های تبدیل ضرب به جمع

$$I. \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$II. \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$III. \sin a \sin b = \frac{-1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

• مثال ۱) نسبت های مثلثاتی زاویه 15° را بیابید. (شهریور ۹۳)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin^2 15^\circ &= \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow \sin^2 15^\circ = \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \\ \Rightarrow \cos^2 15^\circ &= \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} \Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2} \\ \Rightarrow \tan 15^\circ &= \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3} \\ \Rightarrow \cot 15^\circ &= 2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

• مثال ۲) نسبت های مثلثاتی زاویه 75° را بیابید. (شهریور ۹۲)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin 75^\circ &= \sin(30 + 45) = \sin 30 \cos 45 + \cos 30 \sin 45 = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \\ \Rightarrow \cos 75^\circ &= \cos(30 + 45) = \cos 30 \cos 45 - \sin 30 \sin 45 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \Rightarrow \tan 75^\circ &= \tan(30 + 45) = \frac{\tan 30 + \tan 45}{1 - \tan 30 \tan 45} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} \end{aligned}$$

با ضرب صورت و مخرج در مزدوج مخرج

$$\Rightarrow \tan 75^\circ = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow \cot 75^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

تمرین



۱. با توجه به درستی نتسای $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ برای زاویه های حاده درستی این تسای را برای زاویه منفرد β ثابت کنید.

۲. نشان دهید برای هر زاویه α داریم:

$$\bullet \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

۳. نشان دهید برای هر زاویه α داریم:

$$\bullet \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

۴. نسبت های مثلثاتی زوایای زیر را بیابید.

(دی ماه ۹۳)

$$\bullet 105^\circ$$

(خرداد ۹۱)

$$\bullet 22/5^\circ$$

$$\bullet 67/5^\circ$$

۵. فرمول سینوس مجموع دو زاویه برای هر دو زاویه دلخواهی برقرار است. فرمول را برای تفاضل دو زاویه ثابت کنید

۶. ثابت کنید برای هر دو زاویه α, β داریم:

$$\bullet \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

۷. ثابت کنید برای هر زاویه α داریم:

$$\bullet \sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

(شهریور ۹۱)

$$\bullet \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

- $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$
- $\sin a \sin b = \frac{-1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$

a) $\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

b) $\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

c) $\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

d) $\cos a - \cos b = -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

۱۰. اگر α زاویه ای در ربع اول و β زاویه ای در ربع سوم باشد که $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{-5}{13}$ ، مقادیر زیر را بیابید.

- a) $\sin(\alpha + \beta)$
- b) $\cos(\alpha - \beta)$
- c) $\tan(\alpha + \beta)$

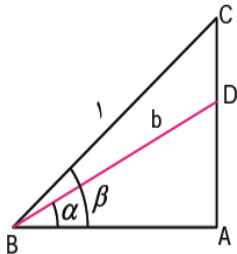
۱۱. اگر α زاویه حاده و β منفرجه باشد و $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ مقدار $\cos(\alpha - \beta)$ را بیابید. (خرداد ۹۴)

۱۲. اگر α و β زاویه هایی در ربع سوم باشند که $\sin \alpha = \frac{-4}{5}$, $\cos \beta = \frac{-5}{13}$ مقدار $\sin(\alpha + \beta)$ را بیابید. (شهریور ۹۰)

۱۳. اگر $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ باشد که $\sin \alpha = \frac{-12}{13}$ مقدار $\tan \frac{\alpha}{2}$ را حساب کنید.

۱۴. با توجه به آنکه $\cos(\alpha + \beta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right)$ نتیجه بگیرید برای هر دو زاویه α, β داریم:

- $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$



۱۵. در شکل زیر راس A قائمه است و ضلع BC واحد است.

طول پاره خط BD را عددی مانند b فرض کنید. با محاسبه

طول پاره خط های دیگری که در شکل دیده می شود و محاسبه

مساحت مثلث ها و استفاده از تساوی زیر:

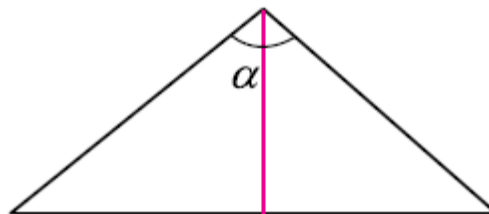
- ★ $S_{BDC} = S_{ABC} - S_{ADB}$

ثابت کنید

- ★ $\sin(\alpha - \beta) = \sin\beta \cos\alpha - \cos\beta \sin\alpha$

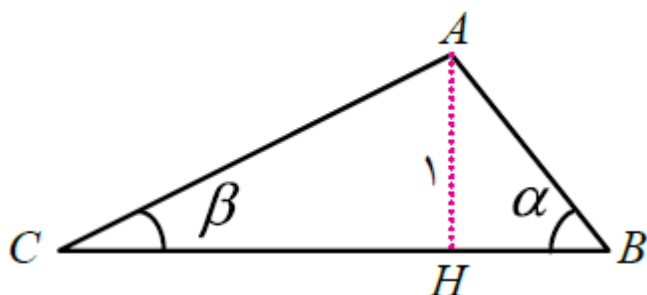
۱۶. با استفاده از مثلث متساوی الساقین زیر که طول ساق های آن واحد است و زاویه راس آن α است، با محاسبه مساحت آن از دو طریق نتیجه بگیرید:

- ★ $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$



حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۱۷. در مثلث زیر طول ارتفاع برابر ۱ است. با محاسبه طول پاره خط های AB, AC, CH, BH بر حسب نسبت های مثلثاتی α, β و محاسبه مثلث ABC از دو طریق یا با استفاده از رابطه سینوس ها در مثلث ABC فرمول محاسبه $\sin(\alpha + \beta)$ را به دست آورید.



۱۸. عبارت $\sin(x + h) - \sin x$ را به حاصل ضرب تبدیل کنید. (خرداد ۹۳)

۱۹. درستی اتحاد زیر را ثابت کنید. (خرداد ۹۲)

$$\text{➤ } \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

۲۰. فرمول $\sin 2\alpha$ را از $\sin(\alpha + \beta)$ بدست آورید. (دی ماه ۹۱)

- $1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2$

- $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

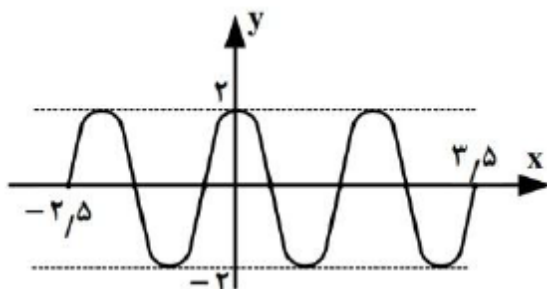
- $\cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

- $\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$

- $\cos 4x = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$

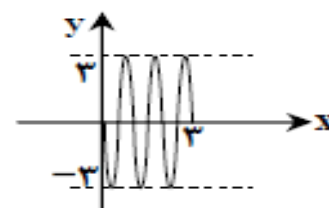
❖ سوالات چهار گزینه ای

۱۹۹) شکل روبرو قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin \pi \left(\frac{1}{2} + bx \right)$ است. a, b کدام است؟ (سراسری ۹۲)



۱. ۲
۲. ۲/۵
۳. ۳
۴. ۳/۵

۲۰۰) شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y = a \sin(b\pi x)$ است. a, b کدام است؟ (خارج ۹۲)



- ۱
- ۲
- ۳
- ۴

۲۰۱) اگر $\sin x \cos x = -\frac{1}{4}$ ، آنگاه حاصل $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$
- (۲) $\pm \frac{1}{2}$
- (۳) $\frac{1}{2}$
- (۴) ± 1

۲۰۲) اگر $5(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{10}$ ، آنگاه مقدار $\tan x$ کدام می تواند باشد؟

- (۱) -۳
- (۲) $\frac{3}{2}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) ۳

۲۰۳) اگر $\tan(a + 20^\circ) = \frac{3}{4}$ ، آن گاه حاصل $\cot(25^\circ - a)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{4}$
- (۲) ۷
- (۳) $\frac{1}{7}$
- (۴) $\frac{4}{3}$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۲۰۴) اگر $\cos 4x = a$ ، آنگاه حاصل $\sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin(\pi + x) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ چقدر است؟

$$\frac{a-1}{8} \quad (۱)$$

$$\frac{1-a}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{1-a}{8} \quad (۳)$$

$$\frac{a-1}{4} \quad (۴)$$

۲۰۵) اگر $\frac{2 \cos x}{\sin x + 3 \cos x} = 2$ ، آنگاه مقدار $\cot 2x$ کدام است؟

$$\frac{4}{3} \quad (۱)$$

$$\frac{-3}{4} \quad (۲)$$

$$\frac{3}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{-4}{3} \quad (۴)$$

۲۰۶) اگر $\tan x + \cot x = \sqrt{3}$ ، آنگاه حاصل $\sin 2x$ کدام است؟

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \quad (۱)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۲)$$

$$\sqrt{3} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (۴)$$

۲۰۷) خلاصه شده ی عبارت $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi + \alpha) - \sin(\pi - \alpha) \cos(-\alpha)$ کدام است؟

$$۱. -\sin 2x$$

$$۲. \sin 2x$$

$$۳. \cos 2x$$

$$۴. 0$$

۲۰۸) اگر $\cos 2\beta = \frac{3}{5}$ و β زاویه حاده باشد مقدار $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right)$ کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}-2}{2\sqrt{5}} (۱) \quad \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{5}} (۲) \quad \frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{5}} (۳) \quad \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{5}} (۴) \quad \triangleright$$

۲۰۹) اگر $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$ باشد، حاصل $\sin^4 x + \cos^4 x$ چقدر است؟

- ۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{8}$

۲۱۰) اگر $\sin 2x = \frac{1}{4}$ باشد، حاصل $(\sin x + \cos x)^2$ کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{9}{8}$ ۴) $\frac{17}{16}$

۲۱۱) اگر $\tan \frac{2\pi}{3} \sin \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = 1$ باشد، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

- ۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

۲۱۲) حاصل عبارت $(\tan 35 + \tan 20) \sin 20$ کدام است؟

- ۱) $\cot 20$ ۲) $\tan 20$ ۳) $\sin 40$ ۴) $\cos 20$

اگر $\tan 20 = 0/36$ حاصل $\frac{\sin 160 - \cos 200}{\cos 110 + \sin 70}$ کدام است؟

➤ (۱) $\frac{9}{4}$ (۲) $\frac{15}{8}$ (۳) $\frac{17}{8}$ (۴) $\frac{31}{16}$

اگر $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}$ باشد مقدار $\cos 2x$ کدام است؟ (سراسری ۹۳ تجربی)

➤ (۱) $\frac{-2}{9}$ (۲) $\frac{-1}{9}$ (۳) $\frac{1}{9}$ (۴) $\frac{2}{9}$

درس نامه ۴) معادلات مثلثاتی

❖ معادلات مثلثاتی

معادلاتی که در آنها مجهول یک زاویه باشد و معادله شامل اطلاعاتی از نسبتهای مثلثاتی آن زاویه باشد.

در واقع برای یافتن جواب یک معادله مثلثاتی ابتدا باید طوری معادله را ساده کنی (در صورت نیاز تجزیه یا استفاده از روش Δ) که در یک طرف یک نسبت مثلثاتی و در طرف دیگر عدد داشته باشی سپس با توجه به فرمول های گفته شده جواب را پیدا کنی به طور خلاصه جدول زیر را داری

ردیف	صورت مساله	شرط داشتن جواب	یافتن زاویه	جواب
1	$\sin \varphi(x) = a$	$-1 \leq a \leq 1$	$\sin \varphi(x) = \sin \alpha$	$\varphi(x) = 2k\pi + \alpha$ $\varphi(x) = 2k\pi + \pi - \alpha$
2	$\cos \varphi(x) = b$	$-1 \leq b \leq 1$	$\cos \varphi(x) = \cos \alpha$	$\varphi(x) = 2k\pi + \alpha$ $\varphi(x) = 2k\pi - \alpha$
3	$\tan \varphi(x) = c$	-----	$\tan \varphi(x) = \tan \alpha$	$\varphi(x) = k\pi + \alpha$
4	$\cot \varphi(x) = d$	-----	$\cot \varphi(x) = \cot \alpha$	$\varphi(x) = k\pi + \alpha$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

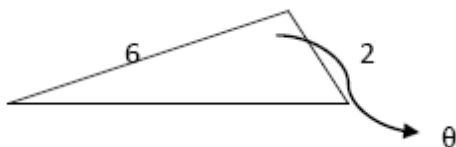
• مثال ۱) معادله های زیر را حل کنید. (شهریور ۹۱)

• $2\sin x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = (2k+1)\pi - \alpha \end{cases}$

• $\cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \end{cases}$

• $3\tan x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6}$

• مثال ۲) آیا میتوان مثلثی رسم کرد که طول دو ضلع آن ۲ و ۶ و مساحت آن ۳ باشد؟ مساله چند جواب دارد؟



فرض کنید بتوان چنین مثلثی را تشکیل داد (مانند شکل)

بنا بر فرمول مساحت داریم:

➤ $S = \frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin \theta \Rightarrow 3 = 6\sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases}$

باقرار دادن جواب به جای k خواهیم داشت: $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

تمرین

معادلات زیر را حل کنید و جواب هایی که در بازه $[-\pi, \pi]$ هستند را تعیین کنید.

I. $2\sin^2 t + 2\sin t - 1 = 0$

II. $\sin 2\theta + \sqrt{2}\cos \theta = 0$

III. $\sin x - \cos x = 1$

IV. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$

(شهریور ۹۰)

V. $\tan x \tan 2x = 1$

(خرداد ۹۴)

VI. $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$

۵. معادلات زیر را حل کنید.

a) $\tan x = \tan 5x$

b) $\frac{\sqrt{3}}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = 4$

c) $\tan x - \cot x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(دی ماه ۹۲)

d) $\sin 2x = \sin 5x$

e) $\cos x = \cos 2x$

f) $\cos(2\cos - 9) = 5$

۶. معادله $2\sin^2 x + 9\cos x + 3 = 0$ را حل کنید. (خرداد ۹۳)

۷. کلیه جواب های معادله مثلثاتی $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$ را تعیین کنید. (خرداد ۹۲)

۸. کلیه جواب های معادله $2\cos^2 x - \cos x = 0$ را تعیین کنید. (خرداد ۹۱)

۹. معادله $\tan x \tan 2x = 1$ را حل کنید. (شهریور ۹۰)

۱۰. معادله $\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$ ی مثلثاتی را حل کنید. (شهریور ۹۰ - خارج از کشور)

۱۱. معادله $\sin 2x - \sqrt{3}\cos x = 0$ را حل کنید. (شهریور ۹۳)

۱۲. معادله $2\sin^2 x - \sin x = 0$ را حل کرده و جواب هایی که در بازه $[0, 2\pi]$ هستند را بیابید. (دی ماه ۹۳)

۱۳. کلیه جواب های معادله ی $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$ را بیابید. (دی ماه ۹۱)

۱۴. معادله $\sin x + \cos x = 1$ را حل کنید. (دی ماه ۹۰)

۱۵. در مثلثی طول اضلاع ۱ و ۳ و $\sqrt{7}$ است اندازه زاویه رو به رو به ضلع $\sqrt{7}$ را بیابید.

۱۶. مثلثی رسم کرده ایم که طول اضلاع آن $1 + \sqrt{3}$, 2 , $\sqrt{2}$ است. زاویه های این مثلث را به دست آورید.

❖ سوالات چهار گزینه ای

(۲۱۵) کدام معادله مثلثاتی ریشه ندارد؟

$$\sin^2 x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{6} \quad (۴) \quad 3 \sin^2 x = 4 \quad (۳) \quad \sin^2 x = \sqrt{5} - 2 \quad (۲) \quad \sqrt{3} \sin^2 x = \sqrt{2} \quad (۱) \quad \triangleright$$

✍

(۲۱۶) معادله $3 \sin^2 x - \sin x - 7 = 0$ چند ریشه در بازه $[0, 2\pi]$ دارد؟

$$\triangleright (۱) \text{ صفر} \quad (۲) \quad (۳) \quad (۴) \quad (۴)$$

(۲۱۷) جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\sin(\pi + x) \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \sin(\pi - x) + 1 = 0$ کدام است؟ (سراسری تجربی - ۹۰)

$$\triangleright (۱) \quad 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (۲) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{6} \quad (۳) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (۴) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

✍

(۲۱۸) جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\cos 5x \cos 3x - \sin 3x \sin x}{\cos 2x} = 1$ به کدام صورت است؟ (سراسری ریاضی - ۹۰)

$$\triangleright (۱) \quad \frac{k\pi}{3} \quad (۲) \quad \frac{2k\pi}{5} \quad (۳) \quad \frac{k\pi}{2} \quad (۴) \quad \frac{2k\pi}{3}$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۲۱۹) جواب کلی معادله مثلثاتی $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{3}$ به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی - ۸۹)

$$\text{➤ (۱) } k\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{(۲) } \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \quad \text{(۳) } \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \quad \text{(۴) } k\pi + \frac{\pi}{3}$$

(۲۲۰) معادله $(3 \sin x - 2)(3 \cos x - \sqrt{5}) = 0$ در فاصله $0 \leq x \leq \pi$ چند ریشه متمایز دارد؟

$$\text{➤ (۱) دو ریشه} \quad \text{(۲) سه ریشه} \quad \text{(۳) چهار ریشه} \quad \text{(۴) ریشه ندارد}$$

✍

(۲۲۱) جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟ (سراسری ریاضی - ۸۷)

$$\text{(۱) } k\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{(۲) } k\pi - \frac{\pi}{4} \quad \text{(۳) } 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad \text{(۴) } 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

(۲۲۲) جواب کلی معادله $2 \sin(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 \cot x \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟

$$\text{➤ (۱) } 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad \text{(۲) } 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \quad \text{(۳) } 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \text{(۴) } 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

(۲۲۳) جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \sin^2 x = 3 \cos x$ به کدام صورت است؟

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ (۴)} \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ (۳)} \quad k\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ (۲)} \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \text{ (۱)} \quad \triangleright$$

(۲۲۴) جواب کلی معادله مثلثاتی $\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + x\right)$ کدام است؟

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (۴)} \quad 2k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ (۳)} \quad 2k\pi - \frac{\pi}{4} \text{ (۲)} \quad k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ (۱)} \quad \triangleright$$

(۲۲۵) جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 0$ به کدام صورت است؟

$$k\pi - \frac{\pi}{4} \text{ (۴)} \quad k\pi + \frac{\pi}{4} \text{ (۳)} \quad k\pi \pm \frac{\pi}{4} \text{ (۲)} \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \text{ (۱)} \quad \triangleright$$



(۲۲۶) مجموع ریشه های معادله $\tan 2x + \cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ در بازه $[0, \pi]$ کدام است؟

$$\frac{3\pi}{2} \text{ (۴)} \quad \frac{5\pi}{6} \text{ (۳)} \quad \frac{7\pi}{4} \text{ (۲)} \quad \frac{5\pi}{4} \text{ (۱)} \quad \triangleright$$



حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۲۲۷) جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

$$2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad (۴) \quad 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad (۳) \quad \frac{2k\pi}{3} \quad (۲) \quad \frac{k\pi}{3} \quad (۱) \quad \triangleright$$



(۲۲۸) جواب کلی معادله مثلثاتی $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 \frac{5\pi}{4}$ به کدام صورت است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

$$k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۴) \quad k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۳) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad (۲) \quad 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \quad (۱) \quad \triangleright$$



(۲۲۹) جواب کلی معادله ی مثلثاتی $2\sqrt{2}\sin x \cos x = \sin x + \cos x$ کدام است؟ (سراسری ۹۲ ریاضی)

$$2k\pi \pm \frac{\pi}{4} \quad (۴) \quad \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \quad (۳) \quad \frac{2k\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \quad (۲) \quad k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۱) \quad \triangleright$$



(۲۳۰) جواب کلی معادله مثلثاتی $\frac{\sin 3x}{\sin x} = 2\cos^2 x$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۳)

$$k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (۴) \quad k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (۳) \quad \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad (۲) \quad \frac{k\pi}{2} \quad (۱) \quad \triangleright$$

(۲۳۱) جواب کلی معادله ی مثلثاتی $\frac{\sin x + \sin 2x}{\cos x + \cos 2x} = \cot x$ کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

۱. $\frac{k\pi}{5}$
۲. $\frac{2k\pi}{5}$
۳. $\frac{3k\pi}{5}$
۴. $\frac{(2k+1)\pi}{5}$

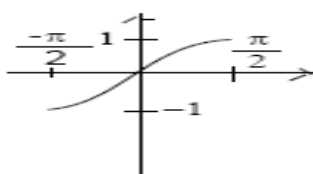
📖 درس نامه ۵) وارون توابع مثلثاتی

❖ همانطور که در مباحث قبل دیدیم توابع مثلثاتی

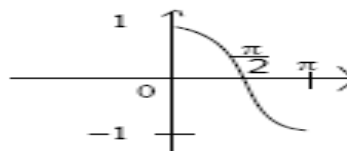
یک به یک نیستند. بگو خب که چی؟

بنابراین معکوس پذیر نیستند اما با محدود کردن دامنه تابع های مثلثاتی اونها تبدیل به توابع یک به یک شده در نتیجه معکوس پذیر میشن. گرفتی چی گفتم؟

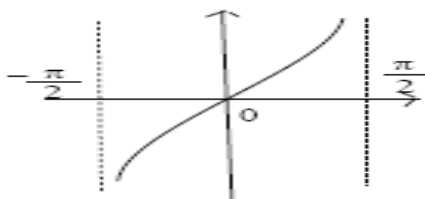
به نمودار های زیر توجه کن. در این نمودار ها دامنه توابع مثلثاتی محدود شده اند و در نتیجه این توابع یک به یک و معکوس پذیر هستن.



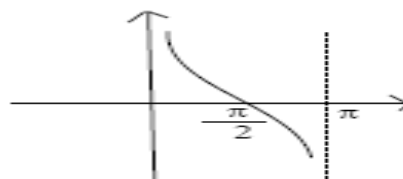
$$y = \sin x, D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$y = \cos x, D = [0, \pi]$$

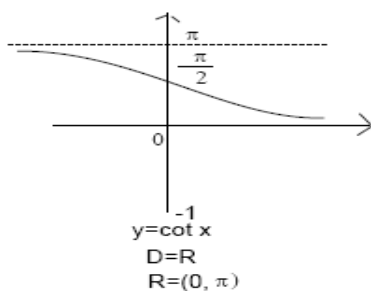
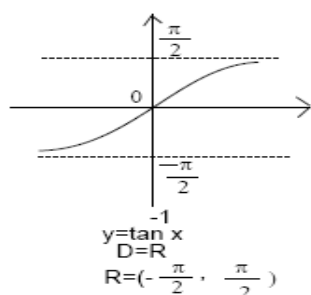
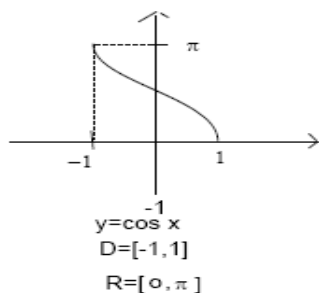
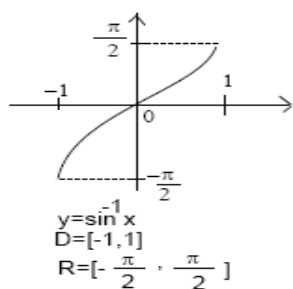


$$y = \tan x, D = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$



$$y = \cot x, D = (0, \pi)$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد



با توجه به آنچه در مبحث توابع

خوندی دو تابع معکوس نسبت

به نیم ساز ربع اول وسوم قرینه

هم هستن به این ترتیب می تونی

معکوس توابع مثلثاتی را به صورت

مقابل داشته باشی

میشه دامنه وبرد توابع معکوس مثلثاتی را در جدول زیر خلاصه کرد

تابع	دامنه	برد
$y = \sin^{-1} \theta(x)$	$-1 \leq \theta(x) \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \cos^{-1} \theta(x)$	$-1 \leq \theta(x) \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \tan^{-1} \theta(x)$	R	$-\frac{\pi}{2} < y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \cot^{-1} \theta(x)$	R	$0 < y < \pi$

چند فرمول مهم

$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$	$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1}x$
$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$	$\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1}x$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

• $\sin(\cos^{-1}x) = \sqrt{1-x^2}$	• $\sin(\cot^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
• $\cos(\sin^{-1}x) = \sqrt{1-x^2}$	• $\sin(\tan^{-1}x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
• $\tan(\cot^{-1}x) = \frac{1}{x}$	• $\cos(\cot^{-1}x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
• $\cos(\tan^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	• $\cot(\tan^{-1}x) = \frac{1}{x}$

• مثال (۱) حاصل عبارات زیر را بیابید.

- a) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$
b) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$
c) $\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$
d) $\tan^{-1}\left(\cos\frac{3\pi}{2}\right) = \tan^{-1}(0) = 0$

• مثال (۲) حاصل عبارات زیر را بیابید.

- a) $\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) + \cot^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$
➤ $\tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = \frac{2}{3}, \cot^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \beta \Rightarrow \tan\beta = 3$
➤ $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = \frac{\frac{2}{3} + 3}{1 - \frac{2}{3} \times 3} = \frac{\frac{11}{3}}{1 - 2} = \frac{-11}{3}$
b) $\cot^{-1}\left(\cos\left(\tan^{-1}(-\sqrt{3})\right)\right)$
➤ $\tan^{-1}(-\sqrt{3}) = -\tan^{-1}\sqrt{3}$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

$$\triangleright \cos(-\tan^{-1}\sqrt{3}) = \cos(\tan^{-1}\sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{3}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cot^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$$

➤



۱. راجع به وارون پذیری. و نیز تابع وارون $y = \frac{1-\tan x}{1+\tan x}$ بحث کنید.

۲. در مثلثی که طول دو ضلع آن به طور ثابت ۳ و ۵ است. زاویه بین این دو ضلع تابعی از طول ضلع سوم است. این تابع را به دست آورید دامنه و برد این تابع چیست؟

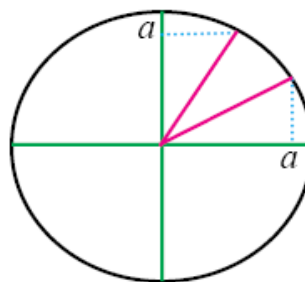
۳. برای هر x نشان دهید:

$$a) \sin(\tan^{-1}x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$b) \cos(\tan^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

۴. برای هر $0 < a < 1$ از طریق شکل زیر استدلال کنید که

$$\bullet \sin^{-1}a + \cos^{-1}a = \frac{\pi}{2}$$



۵. در مورد فرد یا زوج بودن توابع $\sin^{-1}, \cos^{-1}, \tan^{-1}, \cot^{-1}$ چه می توان گفت ؟

۶. با استفاده از دایره مثلثاتی نشان دهید که برای هر $-1 \leq x \leq 1$ داریم :

a) $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}x$

b) $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x$

c) $\sin(\cos^{-1}x) = \cos(\sin^{-1}x) = \sqrt{1-x^2}$

۷. برای هر x مثبت نشان دهید $\tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{1}{x}$ زاویه ای در بازه $(0, \pi)$ است و با محاسبه سینوس یا کسینوس این زاویه نتیجه بگیرید .

$$\bullet \tan^{-1}x + \tan^{-1}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$$

1. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

2. $\cos^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{8}\right)$

3. $\sin^{-1}\left(\tan \frac{\pi}{4}\right)$

4. $\cos^{-1}\left(\cos \frac{5\pi}{4}\right)$

5. $\sin^{-1}(1)$

6. $\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \sin^{-2}\left(\frac{4}{5}\right)$

7. $\sin^{-1}\left(\sin \frac{5\pi}{4}\right)$

8. $\sin^{-1}\left(\cos \frac{\pi}{12}\right)$

9. $\cos^{-1}(-1)$

10. $\cos^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{8}\right)$

11. $\sin^{-1} \frac{3}{5} + \cos^{-1} \frac{3}{5}$

12. $\tan\left(\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$

13. $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{-4}{5}\right)\right)$

14. $\cos[\tan^{-1}(-2) + \cot^{-1}(-2)]$

15. $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$

16. $\tan^{-1}(\sqrt{3}) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

17. $\tan^{-1}\left(\tan \frac{5\pi}{4}\right)$

18. $\sin^{-1}\left(\tan \frac{3\pi}{4}\right)$

۱۹. مقدار $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ را حساب کنید. (خرداد ۹۳)

۲۰. مقدار $\sin(\cos^{-1}(\frac{3}{5}))$ را حساب کنید. (خرداد ۹۲)

۲۱. مقدار $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ را بیابید. (دی ماه ۹۳)

۲۲. مقدار $\tan^{-1}(\tan\frac{4\pi}{3})$ را حساب کنید. (خرداد ۹۴)

۲۳. مقدار $\cos(\tan^{-1}(-\sqrt{3}))$ را بیابید. (شهریور ۹۰)

۲۴. مقدار $\tan^{-1}(\sin(\frac{\pi}{2}))$ را بیابید. (دی ماه ۹۰)

۲۵. مقدار $\sin^{-1}(\sin\frac{4\pi}{3})$ را بیابید. (شهریور ۹۱) (دی ماه ۹۲)

۲۶. مقدار $\sin^{-1}(\cos\frac{\pi}{3})$ را بیابید. (دی ماه ۹۱)

۲۷. مقدار $\sin^{-1}(\tan\frac{\pi}{4})$ را بیابید. (شهریور ۹۲)

۲۸. مقدار $\cos(\tan^{-1}\frac{3}{4})$ را حساب کنید. (خرداد ۹۱)

۲۹. مقدار $\cos^{-1}(\sin \frac{\pi}{8})$ را حساب کنید. (خرداد ۹۰)

۳۰. مقدار $\cos(\tan^{-1}(-\sqrt{3}))$ را حساب کنید. (شهریور ۹۰)

۲۳۲) حاصل $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{5}}{3})$ کدام است ؟

- 1) $2\sin^{-1}\frac{1}{3}$
- 2) $\sin^{-1}(\frac{2\sqrt{5}}{5})$
- 3) $2\tan^{-1}(\frac{\sqrt{5}}{2})$
- 4) $\tan^{-1}(\frac{2\sqrt{5}}{5})$

❖ چهار گزینه ای

۲۳۳) مقدار $\sin(\cos^{-1}(-\frac{3}{5}))$ چقدر است ؟

- 1) $-\frac{4}{5}$
- 2) $\frac{4}{5}$
- 3) $-\frac{7}{10}$
- 4) $\frac{7}{10}$

۲۳۴) جواب معادله $\tan^{-1}x + \tan^{-1}(3x) = \frac{\pi}{2}$ برابر است با :

- 1) $\frac{-\sqrt{3}}{3}$
- 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 3) $\sqrt{3}$
- 4) $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۲۳۵) حاصل $\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{15}\right)$ برابر است با :

- 1) $2\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$
- 2) صفر
- 3) $\frac{\pi}{2}$
- 4) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

(۲۳۶) حاصل عبارت $\tan^{-1}\sqrt{x^2+x} + \sin^{-1}(x^2+x+1)$ کدام است؟ (سراسری ۹۲)

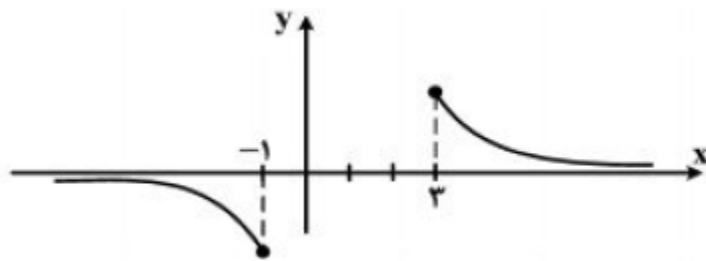
1. $\frac{\pi}{4}$
2. $\frac{\pi}{2}$
3. $\frac{3\pi}{4}$
4. π

(۲۳۷) ساده شده عبارت $\tan\left(\frac{3\pi}{4} - \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ کدام است ؟

- 1) ۲
- 2) ۳
- 3) ۴
- 4) ۵

(۲۳۸) شکل روبرو نمودار تابع $y = \sin^{-1}(u(x))$ است. ضابطه $u(x)$ کدام است؟ (سراسری ۹۴)

1. $\frac{2}{x-1}$
2. $\frac{2}{1-x}$
3. $\frac{1}{x-2}$
4. $\frac{1}{2-x}$



۲۳۹) حاصل عبارت $169 \sin \left(2 \cos^{-1} \left(-\frac{5}{13} \right) \right)$ کدام است؟ (سراسری ۹۴)

1. -۱۲۰
2. ۶۰
3. -۶۰
4. ۱۲۰

240) حاصل $\cos \left(3 \sin^{-1} \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)$ کدام است؟ (سراسری ۹۳)

1. $\frac{-23}{27}$
2. $\frac{-19}{27}$
3. $\frac{-5}{9}$
4. $\frac{-4}{9}$

۲۴۱) حاصل $\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ کدام می باشد؟ (خارج ۹۲)

1. $\frac{\pi}{8}$
2. $\frac{\pi}{4}$
3. $\frac{3\pi}{8}$
4. $\frac{\pi}{2}$

فصل چهارم - حد و پیوستگی

تو این فصل چی می خونیم ؟

۱. حد توابع
۲. حد چپ و حد راست
۳. همسایگی های یک نقطه
۴. قضایای حد توابع
۵. محاسبه حد در توابع کسری
۶. پیوستگی توابع

این فصل ترم اول که هیچ . تو ترم دوم و شهریور هم ۴ نمره داره .

درس نامه (۱) حد تابع

❖ حد تابع در یک نقطه

برای یک تابع مانند f اگر مقدارهای x (در دامنه تابع) به عددی مانند a نزدیک بشه و مشاهده بشه که مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک میشه، آن گاه میگوییم تابع f در نقطه a حد داره و حد اون برابر L است.

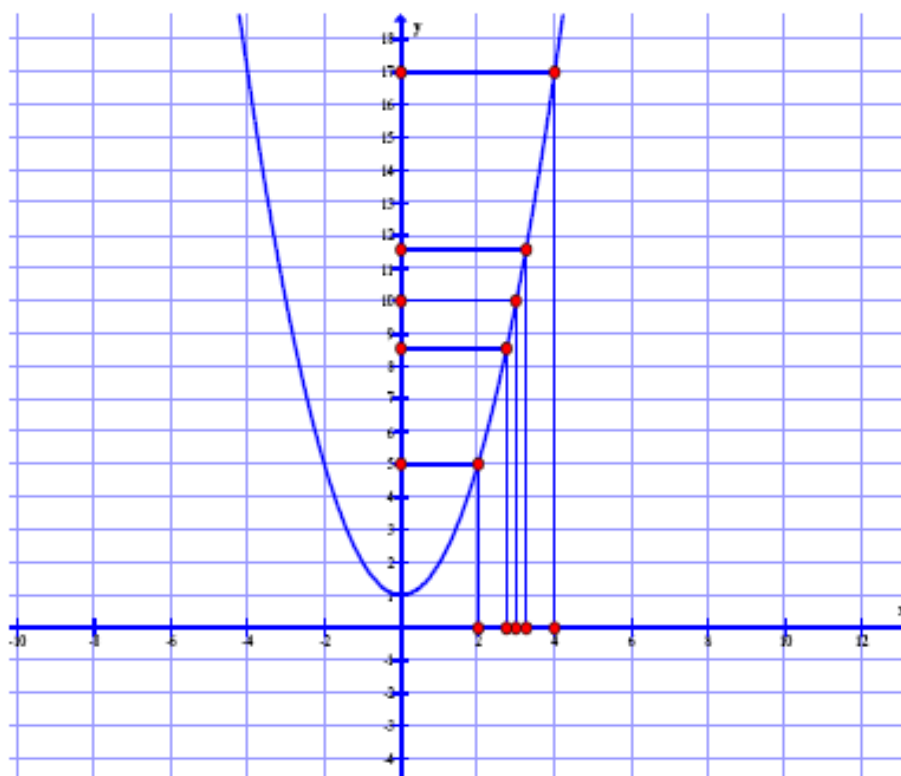
- مثال ۱) در تابع $f(x) = x^2 + 1$ اگر $x \rightarrow 3$ آنگاه مقادیر تابع به 10 نزدیک می شود و داریم $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10$ این مطلب را با استفاده از جدول و نمودار تابع بررسی می کنیم.

✓ جدول

x	۲	۲/۵	۲/۷۵	۲/۹	۲/۹۹	۳	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲۵	۳/۵	۴
$f(x)$	۵	۷/۲۵	۸/۵۶۲۵	۹/۴۱	۹/۹۴۰۱	۱۰	۱۰/۰۶۰۱	۱۰/۶۱	۱۱/۵۶۲۵	۱۳/۲۵	۱۷

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10$$

✓ نمودار



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 10$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

تمرین



۱. برای تابع $f(x) = x + 1$ جدول زیر را کامل کنید و سپس حدس بزنید که وقتی مقدار متغیر به صفر نزدیک می شود مقدار تابع به چه عددی نزدیک می شود.

x	$1/9$ $1/99$ $1/999$ $\rightarrow$ 1 $\leftarrow$ $1/1$ $1/1$ $1/1$ $1/1$
$f(x)$	$\rightarrow$? $\leftarrow$

۲. جدول زیر را کامل کنید و سپس حدس بزنید که وقتی مقدار متغیر به صفر نزدیک می شود مقدار تابع به چه عددی نزدیک می شود.

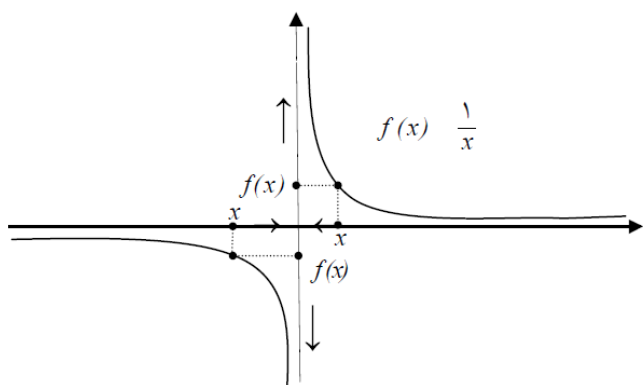
x	$-1/8$ $-1/16$ $-1/32$ $\rightarrow$ 0 $\leftarrow$ $1/8$ $1/16$ $1/32$
$\sin x$	$1/99999$ $1/9999$ $1/9983$
$\frac{\sin x}{x}$	$\rightarrow$? $\leftarrow$

۳. برای تابع $\frac{1}{x}$ جدول زیر را تکمیل کنید و حد این تابع را در صفر بررسی کنید.

جواب خود را با شکل زیر مطابقت بدهید.

x	$-1/8$ $-1/16$ $-1/32$ $\rightarrow$ 0 $\leftarrow$ $1/8$ $1/16$ $1/32$
$\frac{1}{x}$	$\rightarrow$? $\leftarrow$

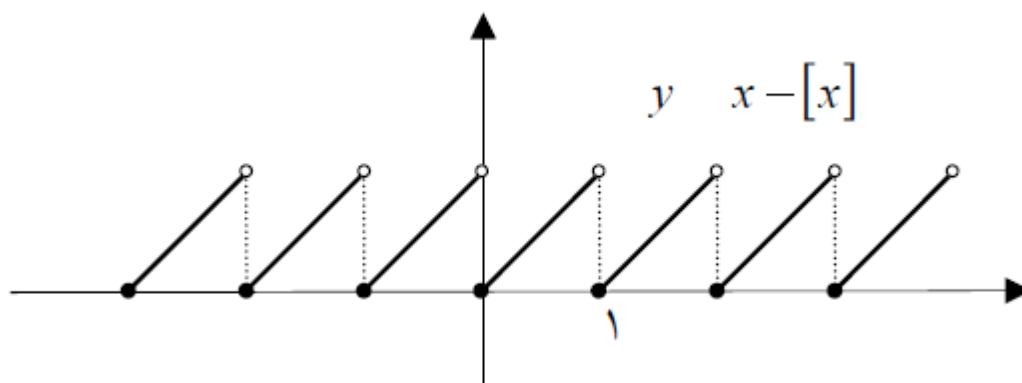
حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد



۴. جدول زیر را برای تابع $f(x) = x - [x]$ تکمیل کنید.

جواب خود را با شکل زیر مطابقت دهید.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→	۱	←	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$f(x)$				→	?	←			



۵. با تکمیل جدول زیر مقدار حد تابع $f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بیابید. (دی ماه ۹۳)

x	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→	۱	←	۱/۰۰۱	۱/۰۱
$f(x)$			→	?	←		

۶. با رسم جدول مقدار های توابع زیر را در اطراف نقطه داده شده، بررسی کنید که آیا حد این توابع در آن نقطه موجود است؟

A. $y = \frac{x^2 - x}{x}, a = 0$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

B. $y = \begin{cases} x^2 + 1 & x < -1 \\ x^3 + 3 & -1 < x \end{cases}, a = -1$

C. $y = x[x], a = 2$

D. $y = \frac{1 - \cos x}{x^2}, a = 0$

E. $y = \sqrt{1 - x^2}, a = 0$

$$F. \quad y = \frac{\sqrt{|x(x-1)|}}{x^2-1}, \quad a = 1$$

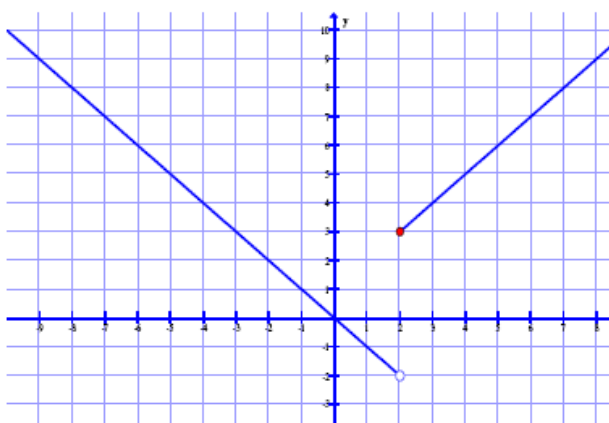
بعضی از توابع هستند که با نزدیک شدن مقدار x به یک عدد مانند a ، مقادیر آنها به هیچ عددی نزدیک نمی شه مگه همیشه؟ این گونه توابع در آن نقطه حد ندارند.

✓ چند نمونه از توابعی که در نقطه $x = a$ دارای حد نیستن:

۱. توابعی که رفتار آنها در اطراف $x = a$ با هم تفاوت داشته باشه

• مثال ۲)

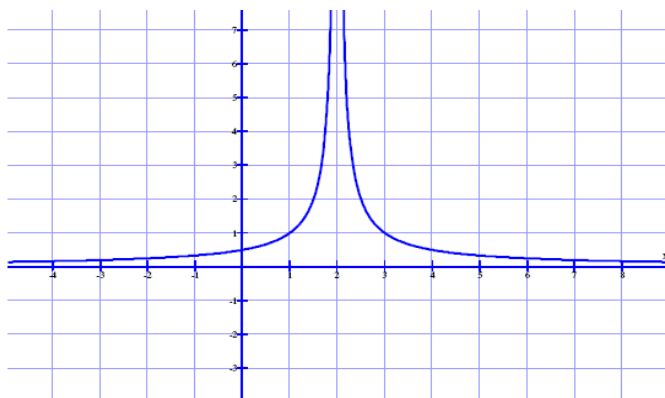
$$\triangleright f(x) = \begin{cases} x+1 & x \geq 2 \\ -x & x < 2 \end{cases}$$



۲. توابعی که در اطراف $x = a$ رفتار بی کران دارند.

• مثال ۳)

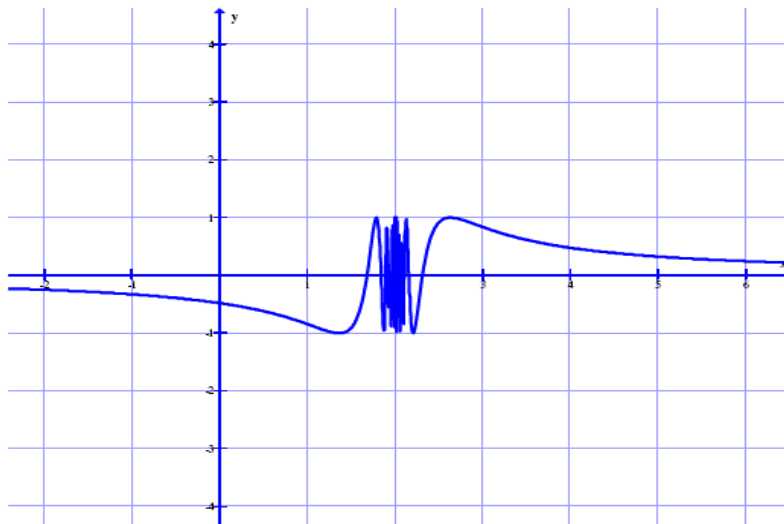
$$\triangleright f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & x \geq 2 \\ \frac{-1}{x+2} & x < 2 \end{cases}$$



۳. توابعی که در اطراف $x = a$ رفتار نوسانی دارند.

• مثال ۴)

$$\triangleright f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x-2} & x \geq 2 \\ -\sin \frac{1}{2-x} & x < 2 \end{cases}$$



تذکر:

توابعی وجود دارند که رفتار آنها با موارد ذکر شده متفاوت است ولی باز هم در $x = a$ حد ندارند که به آنها خواهیم پرداخت.

❖ حدهای یک طرفه

✓ حد راست:

در یک تابع مانند f ، اگر متغیر x با مقدارهای بزرگتر از عددی مانند a به a نزدیک بشن و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک بشن، گوییم تابع f در نقطه a حد راست دارد و مقدار این حد L_1 همیشه.

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L_1$$

✓ حد چپ:

در یک تابع مانند f ، اگر متغیر x با مقدارهای کوچکتر از عددی مانند a به a نزدیک بشن و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک بشن، گوییم تابع f در نقطه a حد چپ دارد و مقدار این حد L_2 همیشه.

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L_2$$

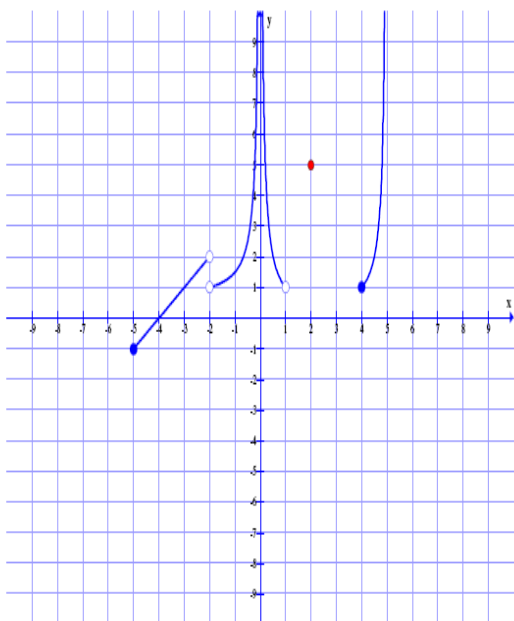
حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

❖ شرایط وجود حد در یک نقطه

✓ تابع f در دو حالت در نقطه a حد دارد

(۱) تابع f در دو طرف نقطه a تعریف شده باشد در این صورت تابع در این نقطه حد دارد هر گاه حدود چپ و راست تابع در این نقطه با هم برابر باشند.

(۲) تابع فقط در یک طرف نقطه a تعریف شده باشد در این صورت شرط وجود حد آن است که تابع در این نقطه حد راست (چپ) داشته باشد. بنا بر قرار داد در این حالت منظور از حد تابع همان حد راست (چپ) تابع می‌باشد.



✓ شرایط بحث در مورد حد تابع در یک نقطه :

با توجه به مطالب فوق نتیجه می‌گیریم که داشتن شرایط بحث

در مورد حد تابع به معنی وجود حد نیست. به مطالبی که در

سطور بعدی می‌آید به دقت توجه نمایید. بگو باشد.

نمودار تابع f را به صورت مقابل داریم:✎ نادرست: $\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x)$ موجود نیست.درست: $\lim_{x \rightarrow -5^-} f(x)$ بی معنا است.✎ نادرست: $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$ موجود نیست. درست: $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$ موجود و برابر $\lim_{x \rightarrow -5^+} f(x)$ است.✎ نادرست: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ بی معناست. درست: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ موجود نیست.✎ نادرست: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود دارد. درست: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود ندارد.✎ نادرست: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ وجود ندارد. درست: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ شرایط بحث را ندارد.✎ نادرست: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ وجود ندارد. درست: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ موجود و برابر $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ است.✎ نادرست: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود ندارد. درست: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ شرایط بحث را ندارد. (بی معناست)✎ نادرست: $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ وجود ندارد. درست: $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ شرایط بحث را ندارد.✎ نادرست: $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ موجود نیست. درست: $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ موجود و برابر $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ است.✎ نادرست: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ موجود نیست. نادرست: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ بی معناست. درست: $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ با معناست و

موجود نیست.

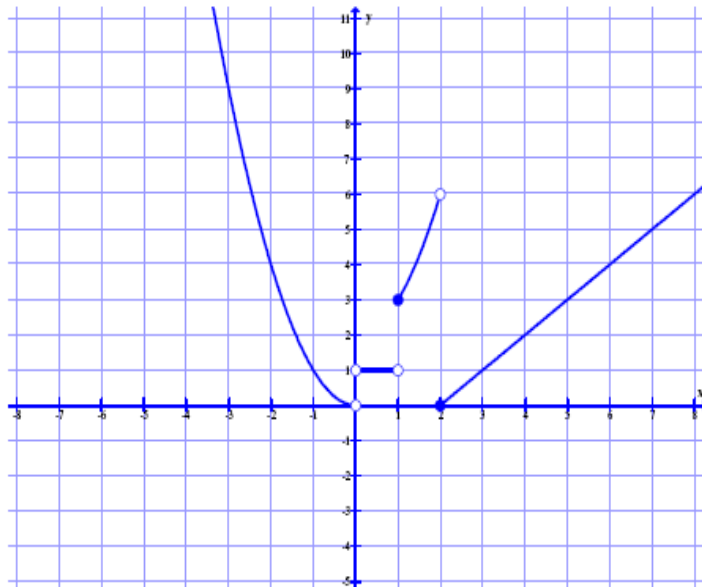
حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

تمرین



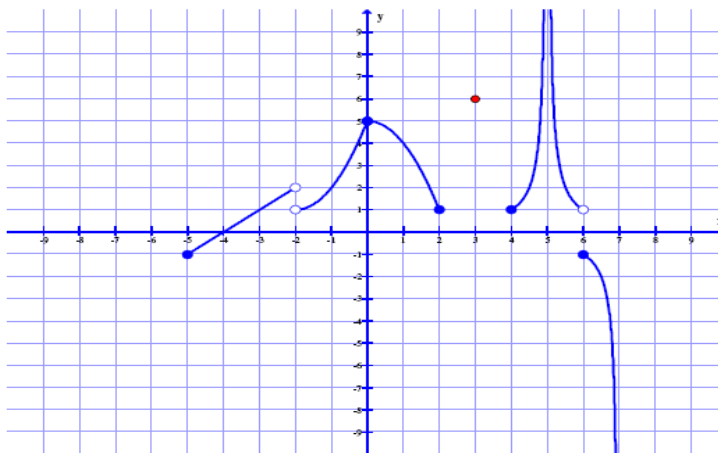
۱. با توجه به نمودار داده مقادیر خواسته شده را بیابید.

- A. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- B. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- C. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- D. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$



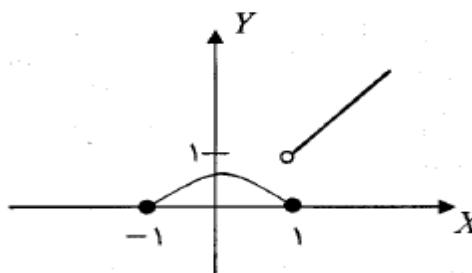
۲. با توجه به شکل زیر موارد خواسته شده را بیابید.

- A. $\lim_{x \rightarrow -5} f(x)$
- B. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
- C. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- D. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$
- E. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$
- F. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$
- G. $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$
- H. $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$



۳. با توجه به نمودار تابع $y = f(x)$ مقادیر خواسته شده را بیابید. (شهریور ۹۳)

- A. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$
- B. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- C. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
- D. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$



حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۴. با رسم نمودار توابع زیر در اطراف نقطه داده شده وجود حد راست و حد چپ و مقدار حد را در آن نقاط بررسی کنید.

$$\text{A. } y = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 2 \\ 6 & x = 2 \\ -x^2 + 9 & 2 < x \end{cases}, a = 2$$

$$\text{B. } y = x - [x], a = 2$$

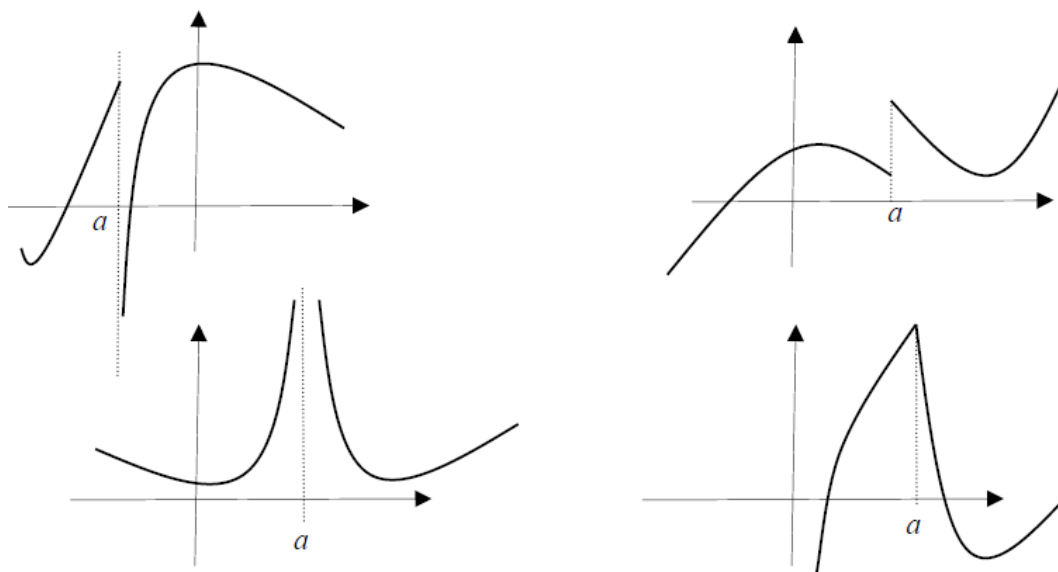
$$\text{C. } y = [x], a = 1/2$$

$$\text{D. } y = \frac{x}{|x|}, a = 0$$

$$\text{E. } y = 1 - \sqrt{1-x}, a = -3$$

۵. در زیر نمودار چند تابع داده شده است. در هر کدام از نمودار های داده شده در نقطه مشخص شده وجود

حد های چپ و راست و وجود حد تابع را بررسی کنید.



۶. با رسم نمودار تابع $y = \sqrt{x-2} + 1$ مقدار حد را در اطراف نقطه ی $a = 2$ بررسی کنید (دی ماه ۹۲)

۷. با رسم جدول و نمودار توابع زیر وجود حد های چپ و راست و حد تابع را در نقطه داده شده بررسی کنید و مقدار این حد ها را بیابید.

A. $y = \sqrt{1+x}$ $a = 3$

B. $y = \frac{x}{|x|}$ $a = 0$

$$c. y = \begin{cases} x^2 - 1 & x < 2 \\ x + 1 & 2 < x \end{cases}$$

۸. با رسم نمودار تابع زیر در اطراف نقطه داده شده وجود حد و راست و حد چپ را در نقطه $x_0 = 1$ بررسی کنید. (شهریور ۹۱)

$$A. f(x) = \begin{cases} x - 2 & x < 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

۹. با رسم نمودار تابع $y = \sqrt{1-x} - 1$ مقدار حد را در اطراف نقطه $a = 1$ بررسی کنید (دی ماه ۹۰)

۱۰. حد تابع $y = \sqrt{2-x}$ را در $x = 2$ بررسی کنید. (دی ماه ۹۱)

۱۱. آیا تابع $f(x) = x - [x]$ در $x = 1$ حد دارد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید. (خرداد ۹۳)

۱۲. حد تابع $y = \frac{1}{[x]-3}$ را در صورت $x = 3$ در صورت وجود بیابید. (خرداد ۹۲)

❖ سوالات چهار گزینه ای

۲۴۲) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 x}{x^3 \sin \frac{1}{2x}}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۲

(۳) ۴

(۴) ∞

۲۴۳) مجموعه حدود چپ و راست $y = (x^2 + 1)[x^2 - 2]$ در $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

(۱) ۶

(۲) ۳

(۳) -۳

(۴) -۶

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۲۴۴) در تابع برکت $y = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ وقتی $x \rightarrow \frac{-1}{10}$ حد چپ کدام است؟

(۱) ۱۱

(۲) -۹

(۳) -۱۰

(۴) -۱۱

۲۴۵) اگر $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ ، مقدار a کدام است؟

(۱) -۴

(۲) -۳

(۳) -۲

(۴) -۱

۲۴۶) در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x > 0 \\ -\sqrt{1+x} & x \leq 0 \end{cases}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$ کدام است؟ (سراسری ۸۹)

(۱) -۱

(۲) ۱

(۳) صفر

(۴) موجود نیست

۲۴۷) در تابع با ضابطه $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right)$ کدام است؟ (سراسری خارج کشور ۸۹)

(۱) -۱

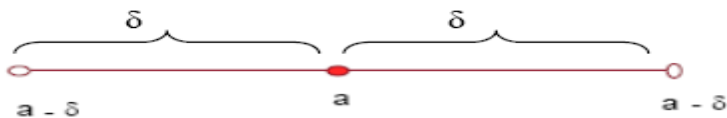
(۲) صفر

(۳) $-\infty$

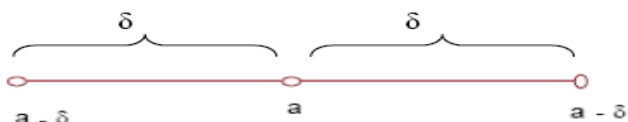
(۴) موجود نیست.

درس نامه ۲) همسایگی

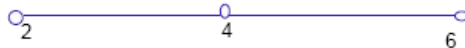
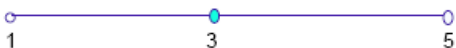
❖ فرض کنید δ عددی حقیقی و مثبت باشد در این صورت به بازه هایی به شکل $(a - \delta, a + \delta)$ یک همسایگی a می گوئیم.



❖ اگر نقطه a را از این همسایگی حذف کنیم مجموعه $(a - \delta, a + \delta) - \{a\}$ به دو همسایگی محدود a می شه.



• به عنوان مثال بازه $(1, 5)$ یک همسایگی نقطه ۳ و $\{4\} - (2, 6)$ یک همسایگی محذوف نقطه ۴ می باشد.



چند نکته:

✓ در این جزوه همسایگی نقطه a بازه بازیه که a در وسط همسایگی قرار گرفته. (همسایگی متقارن) برای اساس هر بازه ی بازی همسایگی نقطه منحصر بفردیه.

✓ اگر (m, n) یک همسایگی متقارن برای a باشد در این صورت داریم:

* شعاع همسایگی $= \frac{n-m}{2}$

* مرکز همسایگی $= \frac{n+m}{2}$

• مثال ۱) مقدار a را چنان بیابید که بازه $(2a + 1, \frac{a}{2})$ یک همسایگی نقطه ۱- باشد. با توجه به مطالب بالا

➤ $\frac{2a+1+\frac{a}{2}}{2} = -1 \Rightarrow a = -\frac{6}{5}$

❖ صورت های نمایش همسایگی و همسایگی محذوف یک نقطه

۱) همسایگی نقطه a :

* $(a - \delta, a + \delta) \Leftrightarrow \{x: |x - a| < \delta\}$

۲) همسایگی محذوف نقطه a :

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

$$\star (a - \delta, a + \delta) - \{a\} \Leftrightarrow \{x: 0 < |x - a| < \delta\}$$

$$\star (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \Leftrightarrow \left\{x: \frac{1}{|x-a|} > \frac{1}{\delta}\right\}$$

• مثال ۲) مجموعه جواب $|2x + 3| < 1$ یک همسایگی از چه نقطه ای است؟

$$\triangleright \left|x + \frac{3}{2}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow \left|x - \left(-\frac{3}{2}\right)\right| < \frac{1}{2}$$

با توجه به مطالب گفته شده یک همسایگی از نقطه $\left(-\frac{3}{2}\right)$ است.

❖ همسایگی چپ و همسایگی راست یک نقطه

اگر δ یک عدد حقیقی مثبت باشد در این صورت :

الف) بازه هایی به صورت $(a - \delta, a)$ را یک همسایگی چپ نقطه a می نامیم.

ب) بازه هایی به صورت $(a, a + \delta)$ را یک همسایگی راست نقطه a می نامیم.

❖ مفهوم میل کردن یک متغیر به یک نقطه با توجه به همسایگی

☞ اگر x بتواند از سمت چپ به a نزدیک شود (اعداد کوچکتر از a) در این صورت می نویسیم: $x \rightarrow a^-$

در این صورت تابع f باید شامل بازه ای به صورت $(a - \delta, a)$ باشد.

☞ اگر x بتواند از سمت راست به a نزدیک شود (اعداد بزرگتر از a) در این صورت می نویسیم: $x \rightarrow a^+$

در این صورت تابع f باید شامل بازه ای به صورت $(a, a + \delta)$ باشد.

☞ شرط آنکه بتوان از حد دو طرفه یک تابع در یک نقطه صحبت کرد این است که تابع در یک همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد. متوجه شدی آیا ؟

• مثال ۳) تعیین کنید که در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ متغیر x از کدام طرف می تواند به صفر نزدیک شود؟

چون $D = [0, +\infty)$ پس فقط $x \rightarrow 0^+$

• مثال ۴) تعیین کنید که در تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ متغیر x از کدام طرف می تواند به یک نزدیک شود؟

چون $D = (-\infty, 1]$ پس فقط $x \rightarrow 1^-$

• مثال ۵) تعیین کنید که در تابع $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$ متغیر x از کدام طرف می تواند به دو نزدیک شود؟

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

تمرین



۱. در هر یک از حالت های زیر نمودار تابعی را رسم کنید که شرایط گفته شده را داشته باشد .
 A. تابع در همسایگی ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد .

- B. تابع در همسایگی محذوف یک تعریف شده باشد ولی در خود یک تعریف نشده باشد و در این نقطه حد داشته باشد .

- C. تابع در یک همسایگی صفر تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در صفر باشد .

- D. تابع در یک همسایگی ۱- تعریف نشده باشد و در این نقطه حد داشته باشد و حد تابع برابر مقدار تابع در ۱- باشد .

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

E. تابع در یک همسایگی راست ϵ تعریف شده باشد ولی در هیچ همسایگی چپ ϵ تعریف نشده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

F. تابع در یک همسایگی ϵ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

G. تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ و راست متفاوت داشته باشد.

H. تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ داشته باشد و حد چپ نداشته باشد.

I. تابع در یک همسایگی ϵ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد و حد تابع برابر مقدار تابع در ϵ باشد.

J. تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ و راست متفاوت داشته باشد.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۲. نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۲- تعریف شده باشد در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در نقطه ۲- باشد. (خرداد ۹۴)

۳. نمودار تابعی را رسم کنید که در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده باشد ولی در هیچ همسایگی چپ ۲ تعریف نشده باشد و در این نقطه حد داشته باشد. (خرداد ۹۱)

۴. نمودار تابعی را رسم کنید که تابع در یک همسایگی ۳ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد، ولی حد آن غیر از مقدار تابع در ۳ باشد (خرداد ۹۰)

۵. نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۲- تعریف شده باشد در این نقطه حد داشته باشد و حد آن برابر مقدار تابع در نقطه ۲- باشد. (شهریور ۹۲)

📖 درس نامه ۳) قضایای حد

۱) تابع ثابت $f(x) = k$ همیشه دارای حد است

$$\star \lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

(۲) تابع همانی $f(x) = x$ همیشه دارای حد است

$$\star \lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$$

(۳) فرض کنیم توابع f, g روی دامنه یکسانی تعریف شده و در $x = a$ دارای حد باشند همچنین داشته باشیم:

$$\star \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = K$$

(الف) حد مجموع برابر مجموع حد هاست .

$$\star \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L + K$$

(ب) حد تفاضل برابر تفاضل حد هاست

$$\star \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L - K$$

تمرین



فرمول بالا را ثابت کنید .

(ج) حد حاصل ضرب برابر حاصل ضرب حد هاست .

$$\star \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \times \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \times K$$

(د) حد خارج قسمت برابر است با خارج قسمت حد ها (مخرج باید مخالف صفر باشد)

$$\star \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{K}$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

ه) حد حاصل ضرب یک مقدار ثابت در یک تابع برابر است با حاصل ضرب مقدار ثابت در حد تابع.

$$\star \lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \times \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

و) حد معکوس یک تابع برابر معکوس حد تابع است (حد تابع نباید صفر باشد)

$$\star \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

۴) اگر n یک عدد طبیعی باشد آن گاه

$$\star \lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^n$$

۵) هر گاه $n \in \mathbb{N}$:

$$\star \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

۶) اگر $P(x)$ یک چند جمله ای باشد در این صورت

$$\star \lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$$

۷) هر گاه n یک عدد طبیعی باشد در این صورت

$$\star \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

۸) اگر $f(x) = b^x$ باشد در این صورت

$$\star \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b^a$$

۹) در این قسمت x بر حسب رادیان است:

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow a} \cot x = \cot a$$

• مثال ۱) با استفاده از قضایا حد های زیر را بیابید.

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow 2} (2x^3 + 4x - 18) = 2(2)^3 + 4(2) - 18 = 6$$

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + x)^3 \times (x^3 + x + 4)^5 = (2 - 1)^3 \times (-1 - 1 + 4)^5 = 1 \times 32 = 32$$

تمرین



۱. حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$$1. \quad y = \cos^2 x + x^2 \quad x = \pi$$

$$2. \quad y = 2^{x+1} - 3^{2x} \quad x = 2$$

$$3. \quad y = \frac{x \sin x}{(1+x) \cos x} \quad x = \pi$$

$$\checkmark \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$$

$$\checkmark \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin \frac{x}{2}}$$

۲. تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3a & x < 1 \\ x - a & 1 < x < 4 \\ 5x^2 + bx - 4 & x > 4 \end{cases}$ مفروض است عدد های a, b را چنان بیابید که تابع f در $x = 4$ دارای حد باشد و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$

۳. تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2} & x > 2 \\ 2x^2 + 1 & -1 \leq x \leq 2 \\ 1 - 2x & x < -1 \end{cases}$ در چه نقاطی حد ندارد؟

۴. دو تابع مثال بزنید که در یک نقطه حد نداشته باشند ولی مجموع آنها در این نقطه دارای حد باشد.

۵. دو تابع مثال بزنید که در یک نقطه حد نداشته باشند ولی حاصل تقسیم آنها در این نقطه دارای حد باشد.

۶. دو تابع مثال بزنید که در یک نقطه حد داشته باشند ولی ترکیب آنها در این نقطه فاقد حد باشد.

۷. یک تابع مثال بزنید که در یک نقطه حد نداشته باشد ولی قدر مطلق آن در این نقطه دارای حد باشد.

۸. اگر $f(x), g(x)$ دو تابع باشند که در اطراف نقطه a تعریف شده اند و f در a حد دارد ولی g در a حد ندارد نشان دهید $f + g$ در a حد ندارد.

۹. دو تابع f, g مثال بزنید که در اطراف صفر تعریف شده اند و f در a حد داشته باشد ولی g در a حد نداشته باشد با این حال fg در a حد داشته باشد.

📖 درس نامه ۴) محاسبه حد در توابع کسری

❖ همیشه همیشه با جایگذاری مستقیم حاصل یک حد را یافت بگو آخه چرا؟ زیرا ممکنه به حالت هایی به نام ابهام برخورد کنی.

حالت های ابهام چندی وجود دارن که در اینجا به حالت $\frac{0}{0}$ می پردازیم.

👉 در محاسبه حدی مانند $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ در این صورت حاصل حد به

صورت $\frac{0}{0}$ در می آید که به آن حالت ابهام میگویم. برای تعیین جواب این حد به مجموعه کارهایی که انجام می دهیم رفع ابهام میگویم.

❖ برای رفع ابهام این نوع حد باید عامل $x - a$ را در صورت و مخارج ظاهر کرده سپس حذف کنیم این کار با فاکتور گیری یا تجزیه یا ... انجام می شه در ادامه با مثال هایی این مطلب را ادامه می دهیم.

• مثال ۱) حاصل حد های زیر را بیابید

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2+2x-8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{6}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3-x-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2+2x+1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2+2x+1)}{(x+1)} = \frac{5}{2}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-2x+1}{x^4-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+x-1)}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{4}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3+3x^2-7}{x^3-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x^2+7x+7)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(4x^2+7x+7)}{(x^2+x+1)} = \frac{18}{3} = 6$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)}{(\sqrt{x^2+5}+3)} = \frac{4}{6}$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

تمرین



حاصل حد های زیر را بیابید.

1. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 7x + 12}{x^3 + 4x^2 + 4x + 3}$

2. $y = \frac{\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}} \quad x = 4$

3. $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$

4. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{-3x-24}{2+\sqrt[3]{x}}$

5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{3-\sqrt{x+6}}$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{2x^2-x-1}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - [x+2]}{2x-4}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

حاصل حد های زیر را بیابید

$$A. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$$

B. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{4x-3}}{\sqrt{x+3}-2}$

C. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 13x + 10}{x^2 - 6x + 5}$

D. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^2 - 1}$

E. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^2 - 1}$

F. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - 1}{x - 1}$

G. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - 2}{x^2 - 4}$

H. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$

(شهریور ۹۱)

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

I. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$

(دی ماه ۹۱)

J. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x+3}{x^2-1}$

(شهریور ۹۳)

K. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+3x-5}{x^2-1}$

(خرداد ۹۳)

L. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{2x-2}$

(خرداد ۹۱)

M. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^2-16}$

(خرداد ۹۱)

N. $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x - [x])$

0. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{3x^2 - 12}$

(دی ماه ۹۳)

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - 1}{2x^2 + 2x}$

(شهریور ۹۰)

2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 - 1}$

(شهریور ۹۰)

3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{2x} - 2}$

(دی ماه ۹۰)

4. $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{[x] - 3}$

(دی ماه ۹۰)

5. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x + 2}{x^2 - 1}$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6}$

(دی ماه ۹۲)

7. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}$

(شهریور ۹۳)

8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^2 - 1}$

❖ سوالات چهار گزینه ای

۲۴۸) حاصل $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{|x^2 - 7x + 10|}{\frac{25}{x} - \sqrt{5x}}$ کدام است؟

(۱) -۱

(۲) -۲

(۳) -۳

(۴) -۴

۲۴۹) حد کسر $\frac{(x-1)^4 + 2(x^2-1)}{(x^2-1)^4 + 3(x-1)}$ وقتی $x \rightarrow 1$ کدام است؟ (آزاد ۹۰)

(۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{1}{16}$

(۴) ۱

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۲۴۹) حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{2-\sqrt{5-x}}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۸۸)

(۱) -۴

(۲) -۲

(۳) ۲

(۴) ۴

(۲۵۰) حد کسر $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+3}-3}{x+x^2-2}$ وقتی $x \rightarrow 1$ کدام است؟ (آزاد ۸۹)

(۱) $\frac{1}{4}$

(۲) ۴

(۳) $\frac{9}{4}$ (۴) $\frac{4}{9}$

(۲۵۱) حد عبارت $\frac{|x^2-x-2|}{2x-\sqrt{x^2+12}}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

(۱) -۳

(۲) -۲

(۳) ۲

(۴) ۳

(۲۵۲) اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$ آن گاه حاصل $a+b$ کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۸

(۳) $4+2\sqrt{3}$ (۴) $2+2\sqrt{2}$

۲۵۳) اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^4 + bx + c}{x^3 - 3x + 2} = 2$ باشد، آنگاه مقدار $2a - b - 3c$ کدام است؟

- (۱) ۱۵
(۲) -۳
(۳) ۳
(۴) -۱۱

۲۵۴) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+4x} - \sqrt[4]{1+2x}}{x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{6}$
(۲) $\frac{1}{2}$
(۳) $\frac{6}{7}$
(۴) $\frac{1}{3}$

۲۵۵) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|[x] + 3x}{2x[x^2] - 6x}$ کدام است؟

۱. $\frac{2}{3}$
۲. $\frac{1}{3}$
۳. $-\frac{1}{3}$
۴. $-\frac{2}{3}$

۲۵۶) کدام گزینه نادرست است؟

۱. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{[x]} = 0$
۲. وجود ندارد $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{[x]}$
۳. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]-1}{[x-1]} = 1$
۴. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = 0$

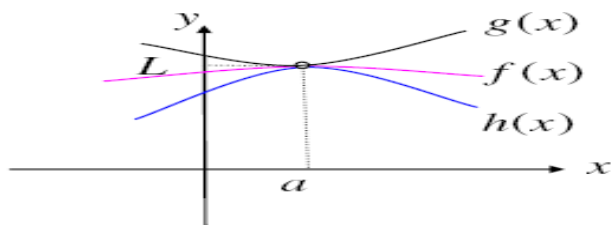
۲۵۷) حد عبارت $\frac{[x^2]-[x]}{x^2-1}$ وقتی $x \rightarrow 1$ کدام است؟

۱. 1
۲. صفر
۳. -1
۴. وجود ندارد.

۲۵۸) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} ([2x] + [-2x]) \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1+x^2}}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

۱. -3
۲. 3
۳. صفر
۴. وجود ندارد

❖ قضیه فشردگی



هر گاه در یک همسایگی از نقطه a داشته باشیم:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x), \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

• مثال ۱) فرض کنید $3 - x^2 \leq f(x) \leq 3 + x^2$ در این صورت $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ را بیابید.

با توجه به قضیه فشردگی داریم:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (3 - x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (3 + x^2) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$$

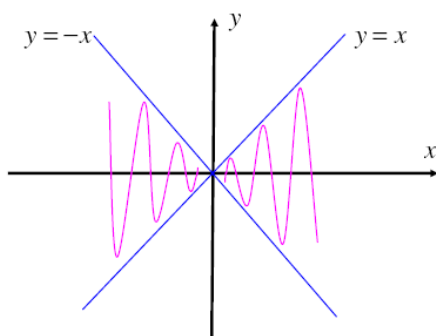
• مثال ۲) ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

می دانیم که $-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$ (چرا می دانیم؟)

اگر $x > 0$ در این صورت $x \sin \frac{1}{x} \leq x$ و اگر $x < 0$ در این صورت $-x \leq x \sin \frac{1}{x} \leq x$

در هر دو صورت با توجه به قضیه فوق داریم: $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

تابع $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ دارای نموداری به صورت زیر است



حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

• مثال ۳) ثابت کنید. $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{a}{x} \right] = a$

می دانیم که $\frac{a}{x} - 1 < \left[\frac{a}{x} \right] \leq \frac{a}{x}$ اگر $x > 0$ در این صورت با ضرب نامساوی در x داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{a}{x} \right] = a \quad \text{با توجه به قضیه فشردگی داریم:}$$

در حالتی که $x < 0$ به طور مشابه اثبات انجام می شود.

قضیه: اگر x بر حسب رادیان زاویه ای دلخواه در ناحیه اول یا چهارم باشد داریم:

$$\text{➤ } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

چند نتیجه مهم از قضیه فوق و قضیه فشردگی:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

• مثال ۴) حد های داده شده را محاسبه کنید.

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} \times 2 = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 2$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\tan \frac{3}{5}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{5}x}{\tan \frac{3}{5}x} \times \frac{2}{\frac{3}{5}} = \frac{10}{3} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{5}x}{\tan \frac{3}{5}x} = \frac{10}{3}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 2x \times \sin 3x}{x \sin^2 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan^2 2x}{x^2} \times \frac{\sin 3x}{x}}{\frac{\sin^2 5x}{x^2}} \times = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 2x}{x} \right)^2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{x} \right)^2} = \frac{4 \times 3}{25} = \frac{12}{25}$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

تمرین



۱. اگر به ازای هر x داشته باشیم: $|3f(x) - 1| \leq (x - 2)^2$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را بیابید.

۲. ثابت کنید. $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \cos \frac{1}{x-1} = 0$

۳. حاصل حد های زیر را بیابید.

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+\tan x} - \sqrt{2-\tan x}}{3x}$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2}$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x \times \sin 3x}{4x^2}$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}$

E. 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$

حاصل حد های زیر را بیابید.

A. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \times \tan 3x}{5x^2}$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2}$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$

$$E. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$F. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 x}{x^2}$$

$$G. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$$

$$H. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$$

$$I. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$$

$$J. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin \frac{x}{2}}$$

$$K. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{1 - \cos 2x}$$

شهریور ۹۱

$$L. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{3x^2}$$

دی ماه ۹۱

$$M. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \sqrt{x+1}$$

شهریور ۹۳

$$N. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

شهریور ۹۳

$$O. \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \tan \left(\frac{\pi}{8} x \right)$$

خرداد ۹۳

$$P. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \sin^2 3x}{2x^2}$$

خرداد ۹۰

$$Q. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$$

$$R. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{1 - \cos x}$$

دی ماه ۹۲

$$S. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3\cos 2x}{x^2}$$

(خرداد ۹۱)

$$T. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}$$

۱. ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ معادل آن است که $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - l) = 0$

۲. با توجه به ایده شهودی حد تابع توضیح دهید که چرا دو شرط $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ با یکدیگر معادلند.

۳. آیا تابع $\sin \frac{1}{x}$ در اطراف صفر تعریف شده است؟ آیا این تابع در صفر حد دارد؟ درستی نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$\diamond \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

با توجه به این نامساوی در مورد حد تابع $x \sin \frac{1}{x}$ در صفر اظهار نظر کنید و دلیل درستی نظر خود را توضیح دهید.

❖ چهار گزینه ای

(۲۵۹) حد کسر $\frac{1+\cos x}{1+\cos^3 x}$ وقتی $x \rightarrow \pi$ کدام است؟

۱. ۱

۲. -۱

۳. $\frac{1}{3}$

۴. $-\frac{1}{3}$

(۲۶۰) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|\sin x|}{x}$ کدام است؟

(۱) -۱

(۲) صفر

(۳) ۱

(۴) موجود نیست

(۲۶۱) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x \sin x}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۰)

(۱) $\frac{1}{4}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) ۲

(۲۶۲) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

(۱) $-\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{2}$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۳) 1

(۴) $\frac{3}{2}$

(۲۶۳) حد کسر $\frac{1+2\sin^2 x - \cos x}{1+2\sin^2 x - \cos 2x}$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ چقدر است؟ (آزاد ریاضی ۹۰)

(۱) $\frac{5}{4}$

(۲) ۱

(۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $\frac{5}{8}$

(۲۶۴) حد کسر $\frac{\cos 2x + [-\sin^2 x]}{\sin^2 x + [\sin^2 x]}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{2}$

(۲) -۲

(۳) ۲

(۴) ∞

(۲۶۵) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x}$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۱)

(۱) -۱

(۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$

(۴) ۱

(۲۶۶) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1 - \tan \pi x}{2x - \sqrt{x}}$ کدام است؟ (سراسری ۹۱ ریاضی)

(۱) -2π (۲) $-\pi$ (۳) π (۴) 2π

(۲۶۷) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ کدام است؟ (سراسری خارج کشور ریاضی ۸۷)

(۱) -۱

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

- (۲) ۱
(۳) $-\infty$
(۴) ∞

۲۶۸) حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{x^2 - \sqrt{x}}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۷)

- (۱) $\frac{\pi}{3}$
(۲) $-\frac{\pi}{3}$
(۳) $\frac{2\pi}{3}$
(۴) $\frac{3\pi}{2}$

۲۶۹) در بازه ی $\{1\} - (0, 2)$ همواره $\frac{\sin \pi x}{1-x} \leq f(x) \leq 4 \tan^{-1}(x^2 - 2x + 2)$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

(سراسری ریاضی خارج کشور ۹۱)

- (۱) صفر
(۲) π
(۳) $\frac{\pi}{2}$
(۴) نامشخص

۲۷۰) حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 - \cos \pi x}{x - 4\sqrt{x} + 4}$ کدام است؟ (ریاضی خارج ۸۷)

- (۱) صفر
(۲) 4π
(۳) $4\pi^2$
(۴) $8\pi^2$

۲۷۱) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 3x}}{1 - \cos x}$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۸)

- (۱) ۴
(۲) ۲
(۳) ۳
(۴) ۱

(۲۷۲) حد کسر $\frac{\cos 2x - \cos x \cos 3x}{\sqrt{1-x^2}-1}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

- (۱) ۶
- (۲) ۱۴
- (۳) -۶
- (۴) -۱۴

(۲۷۳) حد تابع با ضابطه $y = \frac{\tan 2x \cos x}{\cos 8x - 1}$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$
- (۲) $-\frac{1}{8}$
- (۳) $-\frac{1}{16}$
- (۴) $\frac{1}{16}$

(۲۷۴) حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} \frac{1 - \tan \pi x}{2x - \sqrt{x}}$ کدام است؟ (ریاضی ۹۱)

- ۱. -2π
- ۲. $-\pi$
- ۳. π
- ۴. 2π

(۲۷۵) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{2x}$ کدام است؟

- ۱. صفر
- ۲. $\frac{1}{2}$
- ۳. ۱
- ۴. $\frac{1}{4}$

(۲۷۶) حد تابع $f(x) = \frac{\sin^4 x}{4 - 4\cos(1 - \cos x)}$ در نقطه صفر کدام است؟

- ۱. ۳
- ۲. ۴
- ۳. ۶
- ۴. ۸

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۲۷۷) حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cos^{-1} x}{\sqrt{x-x^2}}$ کدام است ؟

- (۱) $\sqrt{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- (۳) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$
- (۴) $-\sqrt{2}$

۲۷۸) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^{-1}(1-x)}{\sqrt{x}}$ کدام است ؟

- ۱. ۲
- ۲. $\sqrt{2}$
- ۳. $\frac{1}{2}$
- ۴. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲۷۹) حاصل $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{\sqrt{\pi - \sqrt{\cos^{-1} x}}}{\sqrt{x+1}}$ کدام است ؟

- ۱. $\frac{1}{\pi}$
- ۲. $\frac{1}{\sqrt{2}\pi}$
- ۳. $\frac{1}{2\pi}$
- ۴. $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$

📖 درس نامه ۵) پیوستگی

فرض کنیم تابع f در نقطه a و در یک همسایگی چپ

یا راست و یا همسایگی a تعریف شده باشد. گوییم

تابع f در نقطه a پیوسته است هرگاه f در a حد داشته

باشد و مقدار حد آن با مقدار $f(a)$ برابر باشد :

$$\star \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

☛ بر این اساس شرط آن که بتوان در مورد در مورد پیوستگی یا ناپیوستگی یک تابع در نقطه ای صحبت کرد این است که تابع در آن نقطه تعریف شده باشد.

✓ با توجه به تعریف فوق می توان شرایط ناپیوستگی را به صورت زیر داشته باشیم:

(۱) تابع در نقطه مورد نظر حد نداشته باشد .

(۲) تابع در نقطه مورد نظر حد داشته باشد ولی مقدار حد با مقدار تابع در آن نقطه برابر نباشد .

تمرین



۱. با رسم نمودار توابع زیر بررسی کنید کدام تابع ناپیوسته است و در چه نقاطی ناپیوسته است ؟

- $f(x) = |x - 1| + 2$

- $f(x) = \begin{cases} x(x-1) & x \leq 1 \\ -x+2 & x > 1 \end{cases}$

- $y = x + [x]$

- $y = x + |x|$

۲. نمودار تابعی را رسم کنید که :

A. در $x = 0$ حد داشته باشد ولی در این نقطه پیوسته نباشد.

B. در دو نقطه صفر و یک ناپیوسته باشند و در این نقاط حد نداشته باشند .

۳. پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ را در نقطه $x = 4$ بررسی کنید. (خرداد ۹۰)

۴. مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = 1$ پیوسته باشد (خرداد ۹۱)

$$f(x) = \begin{cases} a - |x - 1| & x \geq 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x < 1 \end{cases}$$

❖ تابع پیوسته

تابع f را پیوسته گوئیم هر گاه در تمام نقاط دامنه اش پیوسته باشد.

• مثال ۱) پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} -2x + 3 & x \geq 2 \\ x^2 + 3 & x < 2 \end{cases}$ را در $x = 2$ بررسی کنید .

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -2(-2) + 3 = 7, \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = (-2)^2 + 3 = 7$$

همچنین $f(-2) = 7$ پس تابع در این نقطه پیوسته است.

❖ چند نکته در مورد پیوستگی توابع

۱) توابع چند جمله ای پیوسته هستند.

۲) توابع $f(x) = \sqrt[k]{x}, g(x) = b^x$ پیوسته هستند.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۳) توابع $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$ همگی پیوسته هستند.

(۴) اگر $f(x)$ تابعی با مقادیر نامنفی باشد و در نقطه ای مانند a حد داشته باشد داریم

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

(۵) اگر $g(x)$ تابعی پیوسته باشد و تابع f در نقطه a حدی برابر l داشته باشد و $g(f(x))$ قابل انجام باشد آنگاه تابع $g(f(x))$ در a حد دارد و حدش برابر است با $g(l)$ به عبارت دیگر:

$$\lim_{x \rightarrow a} (g(f(x))) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right)$$

• مثال ۱) در تابع زیر مقدار a را طوری بیابید که تابع پیوسته باشد.

$$\text{➤ } f(x) = \begin{cases} 3ax^2 + x + 1 & x \geq 2 \\ 4x + 2a & x < 2 \end{cases}$$

چون هر یک از ضابطه ها خود چند جمله ای هستند پس پیوسته هستند کافی هست پیوستگی در نقطه مرزی بررسی شود.

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3ax^2 + x + 1) = 12a + 3$$

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4x + 2a) = 8 + 2a$$

همچنین داریم:

$$\text{➤ } f(2) = 12a + 3$$

چون تابع در $x < 2$ پیوسته است پس باید داشته باشیم $8 + 2a = 12a + 3$ که با حل این معادله داریم $a = \frac{1}{2}$

تمرین



۱. ثابت کنید به ازای هیچ مقداری برای a تابع زیر پیوسته نیست.

$$\bullet y = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

۲. اگر f, g توابع پیوسته ای با دامنه R باشند در مورد پیوستگی تابع gof چه می توان گفت؟

۳. در تابع زیر مقدار a را طوری بیابید که تابع پیوسته باشد.

$$y = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x \leq 1 \\ x - 2a & x > 1 \end{cases}$$

۴. اگر $f(x), g(x)$ توابع پیوسته ای با دامنه یکسان باشند، نشان دهید توابع $f(x)g(x), f(x) + g(x)$ نیز پیوسته اند. در مورد

پیوستگی $\frac{f(x)}{g(x)}$ چه می توان گفت؟

۵. ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ x + 1 & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید. سپس با بررسی حدود چپ و راست، پیوستگی تابع را در $a = 0$ بررسی کنید. (خرداد ۹۳)

۶. پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \geq -1 \\ \frac{1}{x} & x < -1 \end{cases}$ را در $x = -1$ بررسی کنید. (خرداد ۹۲)

۷. در تابع زیر مقدار a را طوری بیابید که تابع پیوسته باشد. (شهریور ۹۳)

$$\bullet \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-2x}{x-2} & x < 2 \\ ax+1 & x \geq 2 \end{cases}$$

۸. پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید. (دی ماه ۹۳)

$$\bullet \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

۹. مقدار a را طوری بیابید که تابع زیر در $x = 1$ پیوسته باشد. (خرداد ۹۴)

$$\bullet \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & 0 \leq x < 1 \\ [x] + a & x \geq 1 \end{cases}$$

۱۰. آیا تابع $y = \frac{x^2-4}{x-2}$ در 2 پیوسته است؟ چرا؟ (شهریور ۹۰)

۱۱. پیوستگی تابع زیر در $x = 2$ بررسی کنید. (دی ماه ۹۰)

$$\bullet \quad f(x) = \begin{cases} x^2(x-2) & x \leq 2 \\ 4-2x & x > 2 \end{cases}$$

۱۲. پیوستگی تابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید. (شهریور ۹۱)

۱۳. پیوستگی تابع زیر را در $x = 2$ بررسی کنید. (دی ماه ۹۱)

$$\bullet \quad f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x \geq 2 \\ x - 7 & x < 2 \end{cases}$$

۱۴. در تابع زیر مقدار a را طوری بیابید که تابع پیوسته باشد. (شهریور ۹۲)

$$\bullet \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 1 & x \leq 1 \\ x - 2a & x > 1 \end{cases}$$

۱۵. پیوستگی تابع زیر را در $x = 1$ بررسی کنید.

$$\bullet \quad f(x) = \begin{cases} 4 - 3x & x \leq 1 \\ 2x^2 + 1 & x > 1 \end{cases}$$

۱۶. مقادیر a, b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x - 1 & |x| > 1 \\ ax + b & |x| \leq 1 \end{cases}$ پیوسته باشد.

✓ پیوستگی راست

★ فرض کنید تابع f در نقطه a و یک همسایگی راست a تعریف شده باشد در این صورت تابع f در نقطه a پیوستگی راست دارد هر

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ گاه:}$$

✓ پیوستگی چپ

★ فرض کنید تابع f در نقطه a و یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد در این صورت تابع f در نقطه a پیوستگی چپ دارد هر

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a) \text{ گاه:}$$

☞ به چند نکته مهم توجه کنید:

(۱) اگر نقطه a در دامنه تابع f فاقد همسایگی چپ (راست) باشد اگر تابع در این نقطه پیوستگی راست (چپ) داشته باشد آنگاه در این نقطه پیوسته است.

(۲) اگر تابع f در همسایگی نقطه a و خود a تعریف شده باشد ولی فاقد پیوستگی راست (چپ) باشد در این صورت تابع در این نقطه پیوسته نیست.

• (مثال) پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} -x & x > 1 \\ -2 & x = 1 \\ 2x^2 - x - 3 & x < 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

$$\triangleright \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2, f(1) = -2$$

در این صورت تابع ناپیوسته از راست است.

تمرین



۱. مقدار a را طوری بیابید که تابع با ضابطه ی زیر در $x_0 = 0$ پیوستگی راست داشته باشد .

$$\bullet f(x) = \begin{cases} \frac{|2x|}{x} & x \neq 0 \\ a - 1 & x = 0 \end{cases}$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۲. نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۱ حد نداشته باشد. در نقطه ۲ حد داشته باشد ولی پیوسته نباشد. در نقطه ۳ پیوستگی راست داشته باشد و در نقطه ۴ پیوستگی چپ داشته باشد.

❖ سوالات چهار گزینه ای

۲۸۰) تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-1}{x-1} & x > 1 \\ ax - a + 3 & x \leq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x = 1$ پیوسته است؟
 ۱. فقط $\frac{1}{2}$
 ۲. فقط ۲
 ۳. هیچ مقدار
 ۴. هر مقدار

۲۸۱) به ازای کدام مجموعه مقادیر a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+a} & x \geq -1 \\ x^2 + ax & x < -1 \end{cases}$ در $x = -1$ پیوسته است؟ (خارج ۸۷)
 ۱. $\{1, \sqrt{2}\}$
 ۲. $\{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\}$
 ۳. $\emptyset$
 ۴. R

۲۸۲) به ازای کدام مقدار a تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ پیوسته است؟ (سراسری خارج کشور ۹۰)

- (۱) -۱
 (۲) صفر
 (۳) ۱
 (۴) هیچ مقدار

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۲۸۳) تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2-x-1}{x-1} & x > 1 \\ ax - a - 3 & x \leq 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در یک پیوسته است ؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) ۲

(۳) هیچ مقدار

(۴) هر مقدار

(۲۸۴) تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & |x| > 1 \\ 2x & |x| \leq 1 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول های ۱ و -۱ چگونه است ؟ (سراسری)

تجربی (۸۸)

(۱) در ۱- ناپیوسته و ۱- ناپیوسته

(۲) در ۱- ناپیوسته و در ۱ پیوسته

(۳) در ۱- پیوسته و در ۱ پیوسته

(۴) در ۱- پیوسته و در ۱ ناپیوسته

(۲۸۵) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2x+|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در $x = 0$ چگونه است ؟

(۱) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

(۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته

(۳) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته

(۴) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته

(۲۸۶) اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{\frac{1}{x^3} + \frac{a}{x^2} - 2 - \frac{1}{x}} & x < 0 \\ 2a - b + x - 8 & x = 0 \\ xcot \frac{x}{2} & x > 0 \end{cases}$ در نقطه ی $x = 0$ پیوسته باشد، مقدار $a + b$ کدام است ؟

۱. ۱۲

۲. ۱۰

۳. ۸

۴. ۶

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۲۸۷) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x^2-9}{x-3}\right)[x] & x < 3 \\ \frac{ax+1}{x-1} & x \geq 3 \end{cases}$ در نقطه ۳ پیوسته باشد a کدام است؟

۱. $\frac{22}{3}$
۲. $\frac{24}{3}$
۳. $\frac{2}{3}$
۴. $\frac{3}{2}$

(۲۸۸) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & x > 6 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر از یک پیوسته است؟ (تجربی ۹۴)

۱. $-\frac{1}{2}$
۲. $-\frac{1}{4}$
۳. $\frac{1}{4}$
۴. $\frac{1}{2}$

(۲۸۹) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{a(1+\sqrt[3]{1-x})}{x^2-2x} & x > 2 \\ x-a & x \leq 2 \end{cases}$ همواره پیوسته است؟ (ریاضی ۹۴)

۱. $1/2$
۲. $1/6$
۳. $2/4$
۴. $3/2$

(۲۹۰) تابع با ضابطه $y = \left[\frac{-x}{2}\right] + [3x]$ در $x=4$ از نظر پیوستگی چه وضعی دارد؟ (آزاد ریاضی ۸۹)

- ۱) از چپ ناپیوسته و از راست پیوسته
- ۲) از چپ پیوسته و از راست پیوسته
- ۳) از چپ ناپیوسته و از راست ناپیوسته
- ۴) از چپ پیوسته و از راست ناپیوسته

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۲۹۱) تابع برکت $y = [3\sin^2 x + 1]$ در $x = \pi$ از نظر پیوستگی چگونه است؟ (آزاد ریاضی ۸۹)

- (۱) از راست پیوسته از چپ ناپیوسته
- (۲) از راست و چپ پیوسته
- (۳) از راست ناپیوسته از چپ پیوسته
- (۴) از چپ و راست ناپیوسته

(۲۹۲) تابع با ضابطه $f(x) = [2\sin x]$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

- (۱) از چپ و راست ناپیوسته
- (۲) از چپ پیوسته و از راست ناپیوسته
- (۳) از چپ ناپیوسته و از راست پیوسته
- (۴) از چپ و راست پیوسته

(۲۹۳) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \left[x + \frac{1}{2}\right] + 2b & x < 0 \\ 3a + 1 & x = 0 \\ \frac{\sqrt{2}\sin 4x}{\sqrt{1-\cos 2x}} & x > 0 \end{cases}$ مفروض است. اگر این تابع در صفر پیوسته باشد مقدار $a - b$

کدام است

۱. ۱
۲. -۱
۳. ۲
۴. -۲

(۲۹۴) اگر تابع $f(x) = (x^2 + ax + b)[x]$ در نقاطی به طول های ۱ و ۲ پیوسته باشد مقدار ab کدام است؟

۱. ۳
۲. -۳
۳. ۶
۴. -۶

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۲۹۵) پیوستگی تابع با ضابطه $f(x) = (-1)^{[x^2]}$ در نقاط ۱ و ۲ چگونه است؟

۱. در ۱ پیوسته و در ۲ ناپیوسته
۲. در ۱ و ۲ پیوسته
۳. در ۱ و ۲ ناپیوسته
۴. در ۱ ناپیوسته و در ۲ پیوسته

(۲۹۶) در نقطه ای یک تابع پیوسته و تابع دیگر ناپیوسته است. با کدام عمل ممکن است تابع حاصل در آن نقطه پیوسته باشد؟

۱. تقسیم یکی بر دیگری
۲. تفاضل
۳. جمع
۴. ضرب

(۲۹۷) کدام گزینه همواره درست است؟

اگر دو تابع در یک نقطه پیوسته نباشد ممکن است جمع آنها در این نقطه پیوسته باشد.

اگر یک تابع در نقطه ای پیوسته و دیگری ناپیوسته باشد جمع آنها ممکن است پیوسته باشد.

اگر یک تابع در نقطه ای پیوسته و دیگری ناپیوسته باشد ضرب آنها ناپیوسته است.

اگر دو تابع در نقطه ای ناپیوسته باشد ضرب آنها نیز ناپیوسته است.

(۲۹۸) اگر $f \pm g$ هر دو در x_0 پیوسته باشد، آنگاه کدام بیان درست است؟ (سراسری ۹۱)

(۱) الزاما تابع $f \circ g$ هم در این نقطه پیوسته است.

(۲) $f \cdot g$ هم ممکن است در این نقطه پیوسته نباشد.

(۳) f یا g ممکن است در این نقطه پیوسته نباشد.

(۴) الزاما تابع $f \circ g$ هم در این نقطه پیوسته است.

(۲۹۹) اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{2} & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$ ، $g(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ ، $x = 0$ در x پیوسته است؟ (۸۶)

(۱) $f + g$

(۲) $f \circ f$

(۳) $g \circ f$

(۴) $f \circ g$

۳۰۰) اگر در $x = x_0$ تابع $f(x)$ پیوسته باشد آن گاه:

۱. تابع $[f(x)]$ قطعاً پیوسته ولی تابع $|f(x)|$ ممکن است ناپیوسته باشد.
 ۲. هر دو تابع پیوسته است.
 ۳. تابع $[f(x)]$ ممکن است ناپیوسته باشد ولی تابع $|f(x)|$ قطعاً پیوسته است.
 ۴. هر دو تابع ممکن است ناپیوسته است.
- ۳۰۱) توابع $f(x) = |\sin x|$ و $g(x) = \begin{cases} \pi - x^2 & x \leq 0 \\ x + \pi & x > 0 \end{cases}$ مفروض اند. کدام یک از احکام زیر صادق است؟

- ۱) $f(g(x))$ در صفر پیوسته است.
- ۲) $f(g(x))$ در صفر پیوستگی راست دارد.
- ۳) $f(g(x))$ در صفر نه از راست پیوسته است و نه از چپ.
- ۴) $f(g(x))$ در صفر از چپ پیوسته است.

۳۰۲) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b & |x| \geq 1 \\ x[x] & |x| < 1 \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است نمودار این تابع خط $x = 3$ را با کدام عرض

قطع می کند؟ (سراسری ۹۰)

۱. ۲-
۲. ۱-
۳. ۱
۴. ۲

۳۰۳) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x - 2} & x > 2 \\ 2x + b & x \leq 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار b همواره پیوسته است؟ (خارج ۸۹)

۱. ۴-
۲. ۲-
۳. ۲
۴. ۴

۳۰۴) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + x - 2|}{x - 1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر R پیوسته است؟ (تجربی ۹۰)

۱. هر مقدار
۲. ۳-
۳. ۳
۴. هیچ مقدار

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۳۰۵) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{2-\sqrt{3-x}}{x+1} & x < -1 \\ ax+1 & x \geq -1 \end{cases}$ بر روی مجموعه R پیوسته است؟ (خارج

۸۷ ریاضی)

- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{3}{4}$
- (۳) $\frac{5}{4}$
- (۴) $\frac{3}{2}$

۳۰۶) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه ی $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{1-x} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ روی R پیوسته است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۸۸)

- (۱) $-\pi$
- (۲) π
- (۳) ۱

(۴) هیچ مقدار

۳۰۷) تابع f اکیدا صعودی و گذرنده از مبدا و در هر بازه پیوسته است، کدام تابع زیر ممکن است پیوسته نباشد؟

- (۱) f^{-1}
- (۲) $\sqrt{xf}$
- (۳) $\frac{x}{f}$
- (۴) $\sqrt[3]{f}$

۳۰۸) تابع با ضابطه ی $f(x) = [x^2 - 2]$ روی بازه ی $(2, 2+k)$ پیوسته است. بیشترین مقدار k کدام است؟ (سراسری ۸۸)

- (۱) $\sqrt{2} - 1$
- (۲) $\sqrt{5} - 2$
- (۳) $\sqrt{3} - 1$
- (۴) $\sqrt{2}$

۳۰۹) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x}} & 0 < |x| < 1 \\ a & x = 0 \end{cases}$ در بازه $(-1, 1)$ پیوسته باشد مقدار a کدام است؟

- ۱. ۱
- ۲. -۱
- ۳. ۲
- ۴. -۲

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۳۱۰) به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 & x > 2 \\ ax - 1 & x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

(۱) هر مقدار

(۲) هیچ مقدار

(۳) -۲

(۴) ۲

۳۱۱) اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + b & x > 2 \\ x^2 + bx - 1 & x < 2 \end{cases}$ با شرط $f(2) = 5$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد، a کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۱)

(۱) -۱

(۲) ۱

(۳) ۲

(۴) ۳

۳۱۲) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a + \sin 3x & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ b \cos 2x & \frac{\pi}{2} < x \leq 2\pi \end{cases}$ با شرط $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ در بازه $[0, 2\pi]$ پیوسته است. $a - b$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

(۱) -۵

(۲) -۴

(۳) ۴

(۴) ۵

۳۱۳) اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + b & |x| > 1 \\ x[x] & |x| < 1 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x = 3$ را با کدام عرض قطع می کند؟ (سراسری ۹۰ ریاضی)

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) ۲

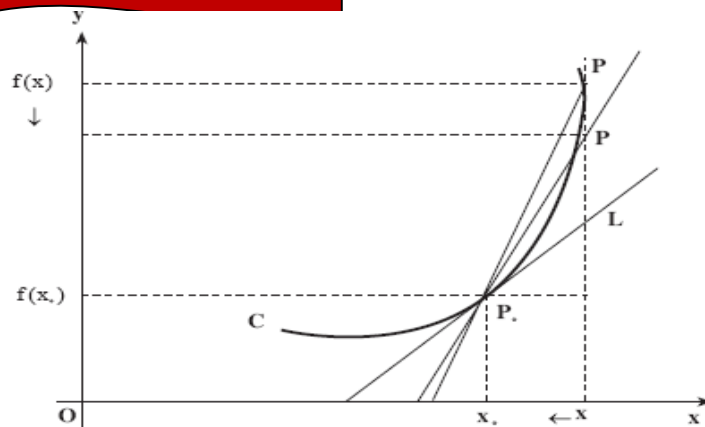
فصل پنجم - مشتق توابع

تو این فصل چی می خونی :

۱. خط مماس بر منحنی ها و مشتق تابع
۲. روش های محاسبه مشتق توابع
۳. آهنگ تغییرات
۴. مشتق توابع مثلثاتی
۵. مشتق تابع وارون و توابع مرکب

اما بارم این فصل : تو خرداد و شهریور ۵ نمره داره . خوب یاد بگیر چون سال بعد تو دیفرانسیل و بعدش تو کنکور مشتق و کاربرد ها ش خیلی مهم هستن .

درس نامه (۱) خط مماس بر منحنی ها و مشتق توابع



در شکل بالا خط P_0P خط قاطع است که شیب اون از رابطه زیر به دست میاد.

$$\star \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

اگر نقطه P را به P_0 نزدیک کنیم خط قاطع به خط مماس نزدیک می شه (به شکل بالا دقت کن) پس شیب خط مماس به صورت زیر همیشه .

$$\star \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

❖ شیب خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه ای به طول $x_0 = a$ برابر با نسبت تغییرات تابع به تغییرات متغیر است (که تغییرات متغیر به صفر میل می کند) که اون را مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطه ای به طول a نامیده و با $f'(a)$ نشون میدیم. برای این اساس خواهیم داشت: اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطه a تعریف شده باشد در این صورت حد زیر را در صورت وجود مشتق تابع f در a گفته و آن را با $f'(a)$ نمایش می دهیم.

$$\star f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\star f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

➡ در صورت عدم وجود حد در نقطه مورد نظر در این صورت تابع مشتق پذیر نیست.

- مثال (۱) مشتق تابع $y = 2x^3 + 1$ را در نقطه ای به طول $x = a$ بیابید. سپس معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه $x = 1$ بیابید.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^3 + 1 - (2a^3 + 1)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x^3 - 2a^3}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x^3 - a^3)}{x - a} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = 6a^2 \end{aligned}$$

حال اگر $x = 1$ باشد داریم: $m = f'(1) = 6$ و معادله خط مماس گذرا از نقطه $(1, 3)$:

$$\Rightarrow y - 3 = 6(x - 1) \Rightarrow y = 6x - 3$$

• مثال ۲) مشتق $y = x^2 - 2x$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه ای به طول $x = 0$ بیابید.

$$\Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x - 2) = -2$$

❖ تابعی که به ازای هر نقطه $a \in D_f$ که در آن تابع $y = f(x)$ مشتق پذیر باشد مشتق تابع را نسبت دهد تابع مشتق نامیده

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ شده و با نماد } f'(x) \text{ نمایش می دهیم.}$$

❖ تذکر: دامنه تابع مشتق برابر است با دامنه تابع اولیه به جز نقاطی که تابع در آنها مشتق پذیر نیست

مشتق تابع $y = \sqrt[3]{x+1}$ را با استفاده از تعریف بیابید.

$$\begin{aligned} \Rightarrow f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h+1} - \sqrt[3]{x+1}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+h+1} - \sqrt[3]{x+1}}{h} \times \frac{\sqrt[3]{(x+h+1)^2} + \sqrt[3]{x+h+1} \times \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}}{\sqrt[3]{(x+h+1)^2} + \sqrt[3]{x+h+1} \times \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h \left(\sqrt[3]{(x+h+1)^2} + \sqrt[3]{x+h+1} \times \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2} \right)} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+h+1)^2} + \sqrt[3]{x+h+1} \times \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} \times \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{(x+1)^2}} = \frac{1}{3 \sqrt[3]{(x+1)^2}} \end{aligned}$$

❖ پیوستگی تابع f در $x = a$ شرط لازم برای مشتق پذیری تابع در این نقطه است.

اثبات: فرض کنیم تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد باید ثابت کنیم پیوسته نیز هست به عبارت دیگر

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) &= \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) \times \frac{x-a}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \\ (x-a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \times \lim_{x \rightarrow a} (x-a) = f'(x) \times 0 = 0 \end{aligned}$$

❖ مشتق های یک طرفه

اگر تابع f در یک همسایگی مانند $[a, b)$ تعریف شده باشد مشتق راست تابع f در نقطه a به صورت زیر تعریف می شود.

$$* f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

اگر تابع f در یک همسایگی مانند $(c, a]$ تعریف شده باشد مشتق چپ تابع f در نقطه a به صورت زیر تعریف می شود.

$$* f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

❖ مشتق پذیری تابع f در نقطه a معادل این است که تابع در این نقطه پیوسته باشد و مشتق های راست و چپ موجود و با هم برابر باشند.

• مثال) مشتق پذیری تابع $f(x) = |1 - x^2|$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

$$\text{ابتدا تابع را به صورت } f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x < -1 \\ 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 1 & x > 1 \end{cases} \text{ نوشته و سپس مشتق پذیری را در نقاط داده شده بررسی می کنیم}$$

تابع در $x = 1$ پیوسته است (؟) حال مشتقات یک طرفه را بررسی می کنیم:

$$\blacktriangleright f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$$

$$\blacktriangleright f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1-x^2-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-(x+1)) = -2$$

پس تابع در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر نیست

تمرین



۱. فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق پذیر در نقطه a باشد. به ازای عدد دلخواهی مانند b تابع $g(x)$ را به صورت $g(x) = f(x) + b$ تعریف می کنیم. از طریق نموداری و وجود خط مماس بر نمودار f در نقطه به طول a نشان دهید تابع g نیز در a مشتق پذیر است و $g'(a) = f'(a)$. از طریق حد گیری و محاسبه نیز درستی این تساوی را به دست آورید.

۲. مشتق $y = x^3$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه ای دلخواه بیابید و با استفاده از آن معادله خط مماس بر منحنی نمودار تابع در نقطه $A(1,1)$ را بیابید. (مشابه دی ماه ۹۱)

۳. فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد و a عددی حقیقی باشد با محاسبه و حد گیری نشان دهید تابع $g(x) = f(ax)$ نیز مشتق پذیر است و $g'(x) = af'(ax)$.

۴. نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را رسم کنید. اگر خط $y = 2x$ را به موازات خود در صفحه بالا و پایین ببریم آیا جایی پیدا می شود که خط جا به جا شده بر نمودار این تابع مماس شود؟ در کدام نقاط این اتفاق می افتد؟

۵. از مبدا به نقاط مختلف نمودار تابع $y = x^2 + 1$ خط رسم می کنیم. آیا نقطه یا نقاطی یافت می شود که خط رسم شده بر نمودار این تابع مماس باشد. در کدام نقطه این اتفاق می افتد. درستی محاسبات خود را با رسم نمودار نشان دهید.

۶. فرض کنید $f(x)$ تابعی باشد و به ازای عدد دلخواهی مانند b تابع $g(x)$ را به صورت $g(x) = f(x - b)$ تعریف می کنیم.

الف) از طریق نموداری نشان دهید که اگر خط مماس بر نمودار تابع در نقطه a وجود داشته باشد آنگاه خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $a - b$ موجود است و این دو خط با هم موازیند.

ب) با محاسبه جبری نشان دهید که اگر g در نقطه a مشتق پذیر باشد آنگاه f در نقطه $a - b$ مشتق پذیر است و $g'(a) = f'(a - b)$

ج) با محاسبه جبری نشان دهید که اگر f در همه نقاط مشتق پذیر باشد آنگاه g در همه نقاط مشتق پذیر است و $g'(x) = f'(x - b)$

۷. اگر f تابعی باشد که در همسایگی نقطه a تعریف شده است و ناصفر باشد و در این نقطه مشتق پذیر و $f'(a) \neq 0$ با استفاده

$$\text{از تعریف نشان دهید که } \frac{1}{f} \text{ نیز در } a \text{ مشتق پذیر است و } \left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)} \quad (\text{خرداد ۹۰})$$

۸. مشتق پذیری تابع $f(x) = |x|$ را در همه نقاط بررسی کنید و تابع مشتق را به دست آورید.

۹. مشتق توابع زیر را در یک نقطه a از دامنه آن تعیین کنید.

A. $f(x) = c$

B. $f(x) = 3x + 5$

C. $x(t) = t^4$

D. $y(u) = \frac{u}{u+1}$

E. $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

۱۰. مشتق $y = \frac{1}{x}$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه ای دلخواه بیابید و با استفاده از آن معادله خط مماس بر منحنی نمودار تابع در نقطه $A(2, \frac{1}{2})$ را بیابید.

۱۱. مشتق تابع $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ را در نقطه ۱- حساب کنید و به کمک آن معادله خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطه $A(-1, 0)$ بنویسید. تابع مشتق g را یافته و دامنه آن را تعیین کنید.

۱۲. مشتق تابع $f(x) = 2 - x^2$ را با استفاده از تعریف مشتق بیابید.

۱۳. مشتق تابع $f(x) = \sqrt{2x+1}$ را با استفاده از تعریف مشتق در ۴ بیابید. (دی ماه ۹۲)

۱۴. نمودار توابع زیر را رسم کنید و حدس بزنید این توابع در چه نقاطی مشتق پذیر نیستند و در این نقاط مشتق چپ و راست را در صورت وجود محاسبه کنید.

A. $y = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & 0 < x \end{cases}$

B. $y = |1 - x^2|$

C. $y = 2|x + 1|$

D. $y = -|x| + |x - 1|$

۱۵. معادله ی خط مماس و خط عمود بر نمودار تابع زیر را در نقطه ی داده شده به دست آورید.

• $y = \frac{1}{1+x^2} \quad x = 1$

• $y = \sqrt{4 - x^2} \quad x = -1$

۱۶. تابعی بسازید که در ۲ پیوسته باشد و در این نقطه مشتقهای چپ و راست متفاوت داشته باشد.

۱۷. تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 4 & x < -2 \\ 3x + 5 & x \geq -2 \end{cases}$ داده شده است. مقادیر a, b را به گونه ای بیابید که تابع در $x = -2$ مشتق پذیر باشد.

۱۸. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق چپ و راست تابع زیر را در $x = 2$ ، در صورت وجود بیابید. (خرداد ۹۲)

- $f(x) = |x - 2|$

۱۹. آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق پذیر است؟ چرا؟ (خرداد ۹۱)

۲۰. با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x} + 1$ را در نقطه $x = 1$ بیابید. (شهریور ۹۳)

۲۱. با استفاده از تعریف مشتق، مشتق چپ و راست تابع زیر را در $x = 3$ ، در صورت وجود بیابید. (دی ماه ۹۳)

- $f(x) = |x - 3|$

۲۲. با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = x^2 + 1$ را در نقطه $x = a$ بیابید. (خرداد ۹۴)

۲۳. با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ را در نقطه $x = 2$ بیابید. (شهریور ۹۰)

۲۴. با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = \frac{2}{x}$ را در نقطه $x = 3$ بیابید. (شهریور ۹۱)

۲۵. با استفاده از تعریف، مشتق تابع $y = x^2$ را در 5 بیابید. (شهریور ۹۲)

درس نامه ۲) روش های محاسبه مشتق

قبول داری استفاده از تعریف در تعیین مشتق توابع در

اکثر موارد کاریه دشوار و طولانی. بگو خب. استفاده از

قوانین و فرمول های مشتق عمل مشتق گیری را راحت می کنه.

- * $y = f(x) = k \Rightarrow y' = 0$
- * $y = f(x) = kx \Rightarrow y' = k$
- * $y = f(x) = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$
- * $y = u \pm v \pm w \pm \dots \Rightarrow y' = u' \pm v' \pm w' \pm \dots$
- * $y = u \times v \Rightarrow y' = u' \times v + v' \times u$
- * $y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u' \times v - v' \times u}{v^2}$
- * $y = u^n \Rightarrow y' = n \times u' \times u^{n-1}$
- * $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
- * $y = \sqrt[n]{u^m} \Rightarrow y' = \frac{mu'}{n \sqrt[n]{u^{n-m}}}$

• مثال) مشتق توابع زیر را بیابید.

- $y = (x^3 - 2x + 1)^7 \Rightarrow y' = 7 \times (x^3 - 2x + 1)^6 \times (3x^2 - 2)$
- $y = (5x - 1) \times (7 - x^2) \Rightarrow y' = 5 \times (7 - x^2) + (-2x) \times (5x - 1)$
- $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x^2-x} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}} \times (x^2-x) - (2x-1) \times \sqrt{x+2}}{(x^2-x)^2}$
- $y = \frac{(2x-x^3)^5}{\sqrt{x-1}+1} \Rightarrow y' = \frac{5 \times (2x-x^3)^4 \times (2-x^2) \times (\sqrt{x-1}+1) - \frac{1}{2(\sqrt{x-1})} \times (2x-x^3)^5}{(\sqrt{x-1}+1)^2}$

تمرین



۱. مشتق توابع زیر را بیابید.

A. $y = \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

$$B. y = \sqrt{x-5}(3x^2 + 2x)$$

$$C. y = x^3\sqrt{x}$$

$$D. y = \sqrt[2]{x} \times (x^2 - 3x + 1)^5$$

$$E. y = (2x + 1)(4 - 3x)(x^2 + x + 5)$$

$$F. y = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$$

$$G. y = (x^3 - x^2 - 1)(x - \sqrt{x} + 5)$$

۲. فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد و c عددی حقیقی باشد. با محاسبه و حد گیری نشان دهید که

$$\text{تابع } cf \text{ نیز مشتق پذیر است و } (cf)'(a) = cf'(a) \quad (\text{دی ماه ۹۰})$$

۳. اگر دو تابع f, g در نقطه a مشتق پذیر باشد نشان دهید تفاضل آنها نیز مشتق پذیر است و داریم

- $(f - g)'(a) = f'(a) - g'(a)$

۴. برای سه تابع f, g, h که همه در یک نقطه مشتق پذیر هستند ثابت کنید جمع آنها نیز در آن نقطه مشتق پذیر است.

۵. نقاطی در صفحه بیابید که از آن نقطه دو خط مماس بر سهمی $y = x^2$ بتوان رسم کرد و این خط ها بر هم عمود باشند. این مساله چند جواب دارد؟ مجموعه جواب های این مساله را ترسیم کنید.

۶. اگر f تابعی باشد که در همسایگی نقطه a تعریف شده است و ناصفر باشد و f در a مشتق پذیر باشد و $f'(a) \neq 0$ ، با استفاده از تعریف نشان دهید که $\frac{1}{f}$ نیز در a مشتق پذیر است و

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}$$

۷. برای تابع $f(x) = x^{\frac{1}{k}}$ روی دامنه $(0, \infty)$ داریم $f(x)^k = x$. با فرض آن که می دانیم $f(x)$ تابعی مشتق پذیر است. با محاسبه مشتق طرفین ثابت کنید $f'(x) = \frac{1}{k} x^{\frac{1}{k}-1}$.

۸. اگر r یک عدد گویای مثبت باشد به کمک مساله قبل نشان دهید تابع $y(x) = x^r$ مشتق پذیر است و داریم

- $y'(x) = rx^{r-1}$

۹. نمودار تابع $y = x^2$ را رسم کنید. اگر خط دلخواهی را که موازی محور y نیست به موازات خود در صفحه بالا و پایین ببریم آیا جایی پیدا می شود که خط به جا شده بر نمودار این تابع مماس شود؟

$$1. y = x^4 - \frac{1}{x^4} - 2$$

$$2. y = \frac{2}{x^3 - 1}$$

$$3. y = \sqrt[5]{(x^2 + 1)^3}$$

$$4. y = 6\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[4]{x}$$

(خرداد ۹۱)

$$5. y = x^3 + \frac{1}{x}$$

(خرداد ۹۱)

$$6. y = 3(2x - 5)^4 + \sqrt[3]{x}$$

$$7. y = \frac{(3x^2-1)^3}{x+1}$$

(خرداد ۹۲)

$$8. y = x(x^5 + 1)$$

(خرداد ۹۳)

$$9. y = (x^2 + 1)^3$$

(شهریور ۹۳)

$$10. y = (3x^2 - \sqrt{x} + 5)^3$$

(شهریور ۹۰)

$$11. g(x) = \frac{\sqrt{x}}{(2x+1)^3}$$

(دی ماه ۹۰)

$$12. y = \frac{3x^2+1}{x^3+2}$$

$$13. y = \sqrt[3]{5x^2 - 1}$$

(دی ماه ۹۱)

$$14. y = \frac{x^2 + 5}{x - 1}$$

(شهریور ۹۲)

$$15. y = \frac{x^3}{3x - 1}$$

(دی ماه ۹۲)

$$16. g(x) = \frac{3x^3 + 5}{5x - 1}$$

(دی ماه ۹۰)

$$17. f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^3 + 2}$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۱۸. معادله خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{x}{x-2}$ را در نقطه $A(3,3)$ بیابید. (خرداد ۹۲)

۱۹. معادله خط قائم بر نمودار تابع $f(x) = 2x^3 - x$ را در نقطه ای به طول ۱ واقع بر منحنی به دست آورید (خرداد ۹۱)

۲۰. معادله ی خط قائم بر نمودار تابع $f(x) = 2x^3 - 1$ را در نقطه ای به طول ۱ به دست آورید. (دی ۹۰)

۲۱. معادله خط قائم بر منحنی تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ را در نقطه ای به طول ۲ واقع بر منحنی بیابید. (شهریور ۹۳)

۲۲. نقاطی از منحنی تابع $y = x^3 - 2x - 1$ را تعیین کنید که خط مماس بر منحنی در این نقاط موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد (شهریور ۹۰).

۲۳. معادله خط قائم بر نمودار تابع $f(x) = 2x^3 - 1$ را در نقطه ای به طول 1 بیابید. (دی ماه ۹۰)

۲۴. نقطه ای از نمودار تابع $y = x^2 + 3x$ را تعیین کنید که خط مماس بر تابع در آن نقطه موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد. (شهریور ۹۲).

❖ سوالات چهار گزینه ای

۳۱۴) مشتق تابع f در نقطه $x = 2$ به صورت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 + k(2+k) - 2k - 8}{h}$ بیان شده است، کدام است؟

(۱) ۲

(۲) ۳

(۳) ۴

(۴) ۶

۳۱۵) مشتق راست تابع با ضابطه $y = \frac{\sqrt{(x+2)^2(x+3)}}{2x+\sqrt{x+6}}$ در $x = -2$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{1}{4}$

(۴) $-\frac{1}{4}$

۳۱۶) اگر $f(x) = x|\sin \pi x|$ ، مقدار $f'_+(1)$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۷)

(۱) $-\pi$

(۲) -1

(۳) ۱

(۴) π

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۳۱۷) مشتق چپ تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۹)

$$\frac{-\sqrt{2}}{2} \quad (۱)$$

$$-\sqrt{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۳)$$

$$\sqrt{2} \quad (۴)$$

(۳۱۸) اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3}{x^2-4} = 1$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(2)-2f(x)}{x-2}$ کدام است؟

$$-۴ \quad ۱.$$

$$-۵ \quad ۲.$$

$$-۸ \quad ۳.$$

$$۱ \quad ۴.$$

(۳۱۹) اگر $f(x) = |(x-4)^3|$ در نقطه $x = 2$ چه وضعیتی دارد؟

۱. مشتق چپ دارد و مشتق راست ندارد.

۲. مشتق چپ و راست دارد و اما برابر نیستند.

۳. مشتق راست دارد و مشتق چپ ندارد.

۴. مشتق پذیر است.

(۳۲۰) مجموع مشتق چپ و راست تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x \geq 0 \\ x^2 + 3x & x < 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

$$۳ \quad ۱.$$

$$-۳ \quad ۲.$$

$$\text{صفر} \quad ۳.$$

$$۲ \quad ۴.$$

(۳۲۱) تابع $f(x)$ با ضابطه مقابل در چند نقطه ناپیوسته و در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ x+1 & 0 \leq x < 1 \\ 2x+2 & 1 \leq x < 2 \\ x^2+2 & x \geq 2 \end{cases} \quad \bullet$$

۱. یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق پذیر

۲. دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر

۳. یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر

۴. دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۳۲۲) در صورتی که $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ مقدار $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ کدام است؟

۱. $-\frac{1}{2}$
۲. $\frac{1}{2}$
۳. $\frac{1}{4}$
۴. $-\frac{1}{4}$

۳۲۳) مشتق تابع f در نقطه $x = 2$ به صورت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(2+h)^2 + k(2+h) - 2k - 8}{h} = 12$ بیان شده است k کدام است؟

۱. صفر
۲. $\frac{1}{2}$
۳. $-\frac{3}{4}$
۴. $\frac{3}{4}$

۳۲۴) اگر $f(x) = \sqrt[9]{x^2}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^3(1+h) - f^3(1)}{h}$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{3}$
۲. $\frac{1}{9}$
۳. $\frac{2}{3}$
۴. $\frac{2}{9}$

۳۲۵) اگر $f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^3$ حاصل $f'(1) + 16f'\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟

۱. ۷۱۷
۲. ۷۱۸
۳. -۷۱۸
۴. -۷۱۷

۳۲۶) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x}}{x} & x \geq 1 \\ ax^2 + bx & x < 1 \end{cases}$ بر روی اعداد حقیقی مشتق پذیر است b کدام است؟ (خارج ۸۹)

- (۱) -۲
- (۲) -۱
- (۳) ۳
- (۴) ۵

(۳۲۷) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & x < 1 \\ 2\sqrt{4x-3} & x \geq 1 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است b کدام است؟ (۹۲)

۱. $\frac{1}{2}$
۲. ۱
۳. $\frac{3}{2}$
۴. ۲

(۳۲۸) تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(5x-2)^2} & x \geq 2 \\ ax + b & x < 2 \end{cases}$ بر روی R مشتق پذیر است. b کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$
- (۲) $\frac{2}{3}$
- (۳) $\frac{4}{3}$
- (۴) $\frac{5}{3}$

(۳۲۹) اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 1 + a \cos \pi x & x > 1 \\ bx^2 + x & x \leq 1 \end{cases}$ بر روی R مشتق پذیر باشد a کدام است؟

- (۱) ۱
- (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) -۱
- (۴) $\frac{1}{2}$

(۳۴۰) در تابع با ضابطه $f(x) = x\sqrt{x} + |x-1|$ مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ کدام است؟ (سراسری ۹۰)

- (۱) ۲
- (۲) ۳
- (۳) ۴
- (۴) ۵

(۳۴۱) مشتق راست تابع با ضابطه $y = ([x] - |x|)\sqrt[3]{9x}$ در ۳- کدام است؟ (۹۳ ریاضی)

۱. $-\frac{16}{3}$
۲. -۵
۳. -۴
- $\frac{7}{3}$

۳۴۲) مشتق تابع $y = \sqrt[3]{(x-1)^3(x+1)^2(x-2)}$ در $x = 1$ کدام است؟

(۱) $-\sqrt[3]{4}$

(۲) $-\sqrt[3]{2}$

(۳) صفر

(۴) $\sqrt[3]{4}$

۳۴۳) مشتق تابع $y = (x^3 - 1)(x^3 - 2)(x^3 - 3) \dots (x^3 - 28)$ در $x = 3$ چقدر است؟ (آزاد ۸۹)

(۱) $27!$

(۲) $26!$

(۳) $-27!$

(۴) $-26!$

۳۴۴) مشتق تابع $y = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 20}{x\sqrt{2x}}$ در $x = 2$ کدام است؟ (آزاد ۹۰)

(۱) $\frac{9}{2}$

(۲) $\frac{9}{8}$

(۳) $\frac{9}{4}$

(۴) ۹

۳۴۵) مشتق عبارت $\left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2}\right)^2$ به ازای $x = -8$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۸)

(۱) -۱

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) ۱

(۴) ۲

۳۴۶) مقدار مشتق $\sin x \cos 3x$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) ۲

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۳۴۷) مقدار مشتق تابع $y = \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right)$ به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

(۱) $-\frac{1}{4}$

(۲) $-\frac{1}{8}$

(۳) $\frac{1}{8}$

(۴) $\frac{1}{4}$

(۳۴۸) مقدار مشتق تابع با ضابطه $y = \cos^2 \frac{\pi}{3x}$ به ازای $x = 4$ کدام است؟ (سراسری تجربی خارج کشور ۹۰)

(۱) $\frac{\pi}{96}$

(۲) $\frac{\pi}{72}$

(۳) $\frac{\pi}{48}$

(۴) $\frac{\pi}{32}$

(۳۴۹) اگر $f(x) = \frac{\cos^2 x}{1 + \sin^2 x}$ مقدار $f\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ برابر کدام است؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۸۷)

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

(۳۵۰) مقدار مشتق $\frac{1 - \cos^2 x}{2 - \sin^2 x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

(۱) $\frac{4}{9}$

(۲) $\frac{5}{9}$

(۳) $\frac{7}{9}$

(۴) $\frac{8}{9}$

(۳۵۱) مقدار تابع با ضابطه $y = \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x + \sqrt[3]{x}}$ به ازای $x = 1$ کدام است؟ (آزاد ۸۹)

(۱) $-\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{1}{9}$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

$$\frac{-1}{9} \quad (\varepsilon)$$

(۳۵۲) اندازه ی مشتق تابع به معادله ی $y = \frac{1-\tan 2x}{1+\tan 2x}$ به ازای $x = \frac{\pi}{8}$ کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

$$-2 \quad (1)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

(۳۵۳) مشتق تابع $y = \cos^2(\tan^{-1}x)$ در $x = 1$ کدام است؟ (۹۳ ریاضی)

$$\frac{-1}{2} \quad 1.$$

$$\frac{-1}{4} \quad 2.$$

$$\frac{1}{4} \quad 3.$$

$$1 \quad 4.$$

(۳۵۴) اگر $f(x) = (\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})^6$, $g(x) = (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})^5$ باشد، حاصل $f'g + g'f$ در صفر کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt{2}-2} \quad (1)$$

$$\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \quad (4)$$

(۳۵۵) اگر $f(x) = \frac{x^3-2}{1+x^3}$, $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ حاصل $f'(g(x))(g'(x))$ کدام است؟ (۹۲)

$$\frac{3}{x} \quad 1.$$

$$\frac{3}{x^2} \quad 2.$$

$$\frac{1}{2x} \quad 3.$$

$$\frac{x-3}{x^2} \quad 4.$$

(۳۵۶) اگر $f(x) = (x - \sqrt{x^2 - x})^6$, $g(x) = (x + \sqrt{x^2 - x})^6$ آنگاه حاصل $f' \sqrt{\frac{g}{f}} + g' \sqrt{\frac{f}{g}}$ کدام است؟

$$6x^2 \quad (1)$$

$$12x^2 \quad (2)$$

$$4x \quad (3)$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

2x (۴)

۳۵۷) اگر $f(x) = x + 1 + (g(x))^5$ و $f'(0) = g(0) = 1$ مقدار $f''(0)$ برابر کدام است؟

4g''(0) (۱)

5g''(0) (۲)

4g''(0) + 20 (۳)

5g''(0) + 20 (۴)

۳۵۸) اگر $f(x) = x \ln x$ باشد مشتق دهم f در نقطه $x = 2$ کدام است؟ $\frac{10!}{2^{10}}$ (۱) $-\frac{9!}{2^8}$ (۲) $-\frac{8!}{2^9}$ (۳) $\frac{8!}{2^9}$ (۴)۳۵۹) اگر $f(x) = \sin^2 \pi x$ و $g(x) = \frac{1}{4} \sqrt{5x - 9}$ مشتق تابع $f \circ g$ به ازای $x = 2$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۱) $\frac{3}{4}$ (۱) $\frac{5}{8}$ (۲) $\frac{3}{4} \pi$ (۳) $\frac{5}{8} \pi$ (۴)۳۶۰) اندازه مشتق تابع $y = \ln(e^x + e^{-x})$ به ازای صفر چقدر است؟

صفر (۱)

 e (۲) $\frac{1}{e}$ (۳)

۱ (۴)

۳۶۱) اگر $f(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x+2}$ آنگاه مشتق تابع $f(xf(x))$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۹)

-۱ (۱)

 $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳)

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۴) ۱

۳۶۲) اگر $y = \tan^2(\pi x)$, $u = x + \sqrt{x}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x = \frac{1}{4}$ کدام است ؟

(۱) -8π (۲) -4π (۳) 4π (۴) 8π

۳۶۳) اگر $y = \sqrt{2u} - \frac{1}{u}$, $u = \sin^2 x - \cos 2x$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است ؟ (سراسری تجربی ۸۸)

(۱) ۹

(۲) ۱۰

(۳) ۱۲

(۴) ۱۵

۳۶۴) اگر $f(x)$ یک تابع زوج باشد و $y = f(2x - 1) - 2f(3x)$ مشتق دوم در ۱- با شرط $f''(3) = \frac{1}{2}$ چقدر است ؟

۱. -۷

۲. ۷

۳. ۱۴

۴. -۱۴

۳۶۵) اگر $f(x) = \sin \pi x$, $g(x) = x - [x]$, $h(x) = (f \circ g)(x)$ باشد حاصل $h'_+(3) - h'_-(3)$ کدام است ؟

۱. π ۲. $-\pi$ ۳. 2π

۴. صفر

۳۶۶) اگر f تابعی مشتق پذیر و $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x^2$ باشد آنگاه $f'(3)$ کدام است ؟

۱. ۱

۲. -۱

۳. ۲

۴. ۲

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

📖 درس نامه ۳) آهنگ تغییرات

❖ آهنگ تغییرات متوسط

اگر مقدار کمیت x برابر x_0 باشد و آن را به اندازه h واحد افزایش دهیم مقدار تابع f از $f(x_0)$ به $f(x_0 + h)$ تغییر می کند در این صورت آهنگ تغییرات متوسط تابع f نسبت به تغییرات x از رابطه زیر بدست می آید

$$\star \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

همچنین اگر تغییرات x از x_1 به x_2 باشد داریم:

$$\star \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

❖ آهنگ تغییرات لحظه ای

اگر داشته باشیم $h \rightarrow 0$ در این صورت آهنگ تغییرات متوسط به آهنگ تغییرات لحظه ای تبدیل شده و آن را به صورت

$$\star \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

که این همان مشتق تابع f در x_0 است.

- مثال ۱) آهنگ تغییرات متوسط حجم مکعبی را نسبت به تغییرات x وقتی x از ۲ به ۵ تغییر می کند را بیابید.

$$\star \frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{v(x_2)-v(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{125-8}{5-2} = \frac{117}{3} = 39$$

✱ حرکت یک متحرک

فرض کنیم تابع حرکت یک متحرک نسبت به زمان به صورت $x(t)$ باشد در این صورت بنا بر آنچه گذشت سرعت لحظه ای متحرک به صورت $x'(t)$ خواهد بود.

❖ آهنگ تغییرات تابع نسبت به تابع دیگر

ممکن است دو تابع بر حسب یک متغیر مشترک تغییر کنند و بخواهیم یکی از دو تابع را بر حسب تابع دیگر محاسبه کنیم یا یک تابع بر حسب متغیری باشد و این متغیر بر حسب متغیر دیگری باشد و بخواهیم تابع داده شده را بر حسب متغیر دوم بنویسیم

در این صورت به روش زیر عمل می کنیم:

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۱) در حالت اول متغیر مشترک را بین دو تابع حذف کرده سپس رابطه مستقیمی بین دو تابع می یابیم.

۲) در حالت دوم از ترکیب استفاده کرده و به کمک آن تابع اولیه را به صورت یک تابع از متغیر دوم می نویسیم.

- مثال ۲) محیط مربعی به ضلع x را به صورت تابعی بر حسب مساحت آن بنویسید. سپس آهنگ تغییرات محیط مربع را نسبت به مساحت آن برای مربعی به مساحت ۲۵ حساب کنید.

$$\triangleright P = 4x, S = x^2$$

در نتیجه $P(S) = 4\sqrt{S}$ آهنگ تغییرات محیط مربع نسبت به مساحت آن برابر است با $P'(S) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{S}}$ و اگر $S = 25$ آن گاه

$$\triangleright P'(25) = \frac{2}{5}$$

مثال ۳) یک بادکنک کروی شکل را طوری باد می کنند که شعاع آن با سرعت ثابت $\frac{103}{5} \text{ cm}$ افزایش می یابد. آهنگ تغییرات حجم این بادکنک را نسبت به زمان در لحظه ای که شعاع بادکنک ۵ سانتی متر است حساب کنید.

$$\triangleright V = \frac{4}{3}\pi r^3, r = \frac{103}{5}t$$

بنا بر این خواهیم داشت

$$\triangleright V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{103}{5}t\right)^3 = \frac{36}{10^6}\pi t^3$$

به این ترتیب خواهیم داشت: $V'(t) = \frac{108}{10^6}\pi t^2$ در لحظه ای که $r = 5$ خواهیم

داشت: $t = \frac{500}{3}$ که با جایگذاری این مقدار در $V'(t)$ خواهیم داشت: $V'(t) = \frac{108}{10^6}\pi \left(\frac{500}{3}\right)^2$ و در نتیجه:

$$\triangleright V'(t) = 3\pi \frac{(cm)^2}{s}$$

تمرین



۱. آهنگ تغییرات سطح یک مکعب را نسبت به حجم آن برای مکعبی که حجم آن ۶۴ است به دست آورید.

۲. محیط هر دایره ای تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییرات محیط دایره را نسبت به مساحت آن برای دایره ای به مساحت π حساب کنید.

۳. اگر آهنگ تغییرات تابع $f(x) = \sqrt{x}$ نسبت به x در $x = a$ با آهنگ تغییرات تابع وقتی متغیر x از ۴ به ۲۵ تغییر می کند برابر باشد مقدار a را بیابید.

۴. تابع حرکت متحرکی روی محور x ها به صورت $x(t) = 2t - 1$ است.

الف) سرعت متوسط متحرک را بین لحظات $t, t + h$ بدست آورید.

ب) سرعت متحرک را در هر لحظه حساب کنید.

ج) متحرک چه زمانی از مبدا می گذرد و سرعت آن در این لحظه چقدر است؟

۵. ماشینی که با سرعتی ثابت در حال حرکت است در لحظه $t = 0$ ترمز می کند تا این که متوقف شود. فاصله مکان ماشین از نقطه ی ترمز را با s نمایش می دهیم و داریم $s(t) = 25t - \frac{5}{2}t^2$ است.

الف) نمودار تابع را رسم و دامنه آن را مشخص کنید.

ب) سرعت ماشین در لحظه ترمز چقدر بوده است؟

ج) سرعت ماشین پس از چند ثانیه صفر می شود؟

د) ماشین از شروع ترمز چند متر را طی می کند تا متوقف شود؟

۶. آهنگ تغییرات مساحت یک مربع را نسبت به محیط آن برای مربعی که محیط آن ۸ واحد است به دست آورید.

۷. آهنگ تغییرات محیط یک مربع را نسبت به مساحت آن برای مربعی که مساحت آن ۴ واحد است به دست آورید.

۸. بادکنکی کروی توسط تلمبه ای در لحظه $t = 0$ شروع به باد شدن میکند. هر ثانیه ۴ سانتی متر مکعب هوا وارد بادکنک می شود. حداکثر حجمی که این بادکنک تحمل می کند 4500π سانتی متر مکعب است.

الف) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چقدر است؟

ب) آهنگ تغییرات مساحت سطح بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چقدر است؟

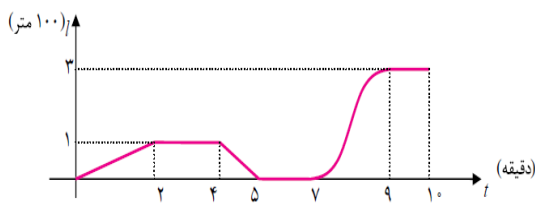
ج) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به سطح بادکنک چقدر است؟

د) در آخرین لحظه که بادکنک می ترکد، آهنگ تغییرات سطح بادکنک نسبت به شعاع بادکنک چقدر است؟

۹. آهنگ تغییرات مساحت یک دایره نسبت به محیط دایره ای را بیابید که محیط آن 3π است. (دی ماه ۹۳ و ۹۱)

۱۰. آهنگ تغییرات مساحت یک دایره نسبت به شعاع که قطر برابر ۴ باشد را بیابید. (دی ماه ۹۲)

۱۱. مدرسه علی در انتهای خیابانی است که خانه علی در آن خیابان است. علی موقع رفتن به مدرسه ممکن است



راه برود یا بدود یا برای دیدن مغازه ها بایستد یا به عقب

برگردد یا برای به موقع رسیدن سوار ماشین شود نمودار

حرکت یکی از روز هایی که علی به مدرسه رفته است مطابق

شکل زیر است واحد زمان را دقیقه و واحد مکان را ۱۰۰ متر بگیرید.

الف) فاصله مدرسه علی تا خانه او چقدر است و چقدر طول کشیده است تا علی به مدرسه برسد ؟

ب) در دو دقیقه اول حرکت سرعت علی چقدر بوده است ؟

ج) در دو دقیقه دوم حرکت احتمالاً علی چکار می کرده است ؟

د) در دقایق بین ۴ تا ۵ علی با چه سرعتی و در چه جهتی حرکت می کرده است ؟ در حال دویدن بوده است یا راه رفتن ؟

ه) در دقایق بین ۵ تا ۷ علی کجا بوده و احتمالاً چکار می کرده است ؟

و) در بین دقایق ۷ تا ۹ حدوداً سرعت حرکت او چقدر بوده است و احتمالاً علی چه عملی انجام داده است ؟

ز) بین دقایق ۹ تا ۱۰ علی کجا بوده و احتمالاً چه می کرده است ؟

۱۲. آهنگ تغییرات مکان متحرکی که روی یک محور حرکت می کند نسبت به زمان چه معنایی دارد ؟

۱۳. آهنگ تغییرات مساحت یک مربع را نسبت به محیط آن برای مربعی که محیط آن ۱۶ واحد است به دست آورید. (خرداد ۹۰)

۱۴. آهنگ تغییرات مساحت یک دایره نسبت به شعاع که شعاع برابر 4 باشد را بیابید. (خرداد ۹۴)

۱۵. آهنگ تغییرات محیط یک مربع نسبت به مساحت آن برای مربعی که مساحت آن 9 واحد است به دست آورید. (شهریور ۹۱)

- * $y = \sin u \Rightarrow y' = u' \times \cos u$
- * $y = \cos u \Rightarrow y' = u' \times (-\sin u)$
- * $y = \tan u \Rightarrow y' = u' \times (1 + \tan^2 u)$
- * $y = \cot u \Rightarrow y' = -u' \times (1 + \cot^2 u)$

📖 درس نامه ۴) مشتق توابع مثلثاتی

تمرین



۱. نشان دهید مشتق تابع $y = \tan x$ به صورت $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ است.

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۲. نشان دهید مشتق تابع $y = \cot x$ به صورت $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$ است.

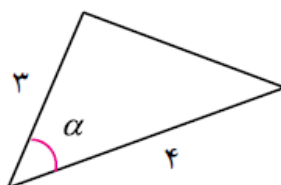
۳. مشتق توابع زیر را بیابید.

- $y = \sin 3x$

- $y = \sin^2 2x$

- $y = x \tan \frac{x}{2}$

۴. مثلثی ساخته ایم که دو ضلع آن ۳، ۴ است و زاویه بین آنها مقدار متغیر α است.



آهنگ تغییرات مساحت این مثلث نسبت به α را در α_0 به دست آورید.

در کدام زاویه آهنگ تغییرات منفی است و معنای آن چیست؟

در کدام زاویه آهنگ تغییرات مثبت است و معنای آن چیست؟

در کدام زاویه آهنگ تغییرات صفر است و در این زاویه مساحت مثلث به دست آمده چه ویژگی دارد؟

۵. در چه نقاطی خط مماس بر نمودار تابع $y = \sin 3x$ موازی محور x است؟

۶. آیا می توان بر نمودار تابع $y = \sin x + \cos x$ خط مماسی رسم کرد که با خط $y = 3x - 1$ موازی باشد؟

۷. نمودار توابع $y = \sin x$, $y = \tan x$ با چه زاویه ای از مبدا می گذرند؟

۸. در خط $y = mx + 2$ چه مقادیری می تواند داشته باشد تا بتوان بر نمودار تابع $y = \tan 3x$ خط مماسی رسم کرد که با آن موازی باشد؟

مشتق توابع زیر را حساب کنید.

1. $y = \frac{\sin x}{x}$

2. $y = \frac{x^2 - \sin^2 x}{1 + \cos^2 x}$

$$3. y = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$$

$$4. y = \frac{\sin x - \cos x}{2 \cos x + 3}$$

$$5. y = \cos(2x - 3) \tan^2(x + 1)$$

دی ماه ۹۰

$$6. h(x) = \sqrt[3]{x^5 - \cos 2x}$$

خرداد ۹۱

$$7. y = \frac{\sin \sqrt{x}}{1 + x^2}$$

خرداد ۹۰

$$8. y = \sqrt{1 - 2 \cos 3x}$$

$$9. y = \sin^3 x$$

شهریور ۹۳

$$10. y = (3x + 5)\cos(4x^2 + 1)$$

(دی ماه ۹۳)

$$11. y = (3x^2 + 5)(4x^2 + \sin x)$$

(خرداد ۹۴)

$$12. y = (4x^5 + 2)(\cos x)$$

$$13. y = \sqrt[3]{x^2 + \sin x} - 1$$

شهریور ۹۰

$$14. y = \sin\sqrt{2x + 5}$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

$$15. h(x) = \sqrt[3]{x^5 - \cos 2x}$$

شهریور ۹۱

$$16. y = (2x + 3)^5 (\sin x)$$

دی ماه ۹۱

$$17. y = \sin x (1 + \cos x)$$

شهریور ۹۲

$$18. y = \sqrt{5 \sin x}$$

۱۹. تابع حرکت متحرکی روی محور افقی به صورت $x(t) = 1 + 2\sin^2 x$ است. چگونگی حرکت این متحرک را توصیف کنید. در چه نقاطی روی محور x این متحرک ایست آنی دارد؟ در چه نقاطی این متحرک بیشترین سرعت را دارد؟ مقدار این سرعت چقدر است

۲۰. در چه نقاطی از بازه ی $[0, 2\pi]$ ، خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \sin x$ موازی محور افقی است. (خرداد ۹۳)

📖 درس نامه ۵) مشتق تابع وارون و توابع مرکب

❖ مشتق تابع وارون :

اگر نقطه $A(a, b)$ روی منحنی تابع f باشد نقطه $B(b, a)$ روی تابع f^{-1} است و داریم :

$$* (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

❖ مشتق توابع معکوس مثلثاتی:

$$* y = \sin^{-1}u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$* y = \cos^{-1}u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$* y = \tan^{-1}u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$* y = \cot^{-1}u \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

❖ مشتق تابع مرکب :

اگر f, g دو تابع مشتق پذیر باشد .

$$* (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

تمرین



۱. مشتق توابع زیر را بیابید .

A. $y = \cos^3 \sqrt{t}$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

B. $y = \tan^2\left(\frac{\pi}{3} + \sin^{-1}x\right)$

C. $y = \sqrt{1 + \sqrt{1 + t^2}}$

۲. آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق پذیر است؟ آیا تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در صفر مشتق پذیر است؟

۳. مثلثی ساخته ایم که طول دو ضلع آن 1 و 3 می باشد و زاویه بین دو ضلع α است که قابل تغییر از صفر تا π رادیان است. طول ضلع سوم را l بنامید.

الف) l را بر حسب α و آهنگ تغییرات l نسبت به α را به دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟

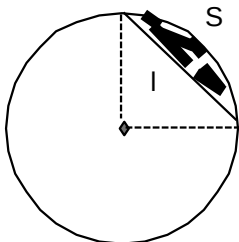
ب) α را بر حسب l و آهنگ تغییرات α نسبت به l را به دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟

ج) آهنگ تغییرات در دو قسمت بالا چه رابطه ای با هم دارند؟

۴. دامنه و برد تابع $f(x) = \sin^{-1}(\sin x)$ را تعیین کنید و نشان دهید این تابع متناوب است و نمودار آن را رسم کنید. این تابع در چه نقاطی مشتق ناپذیر است و مشتق آن را در بقیه نقاط تعیین کنید.

۵. تابع $y = 1$ را در نظر می گیریم و از نقطه $(x, 1)$ روی نمودار این تابع خط واصل به مبدا را رسم می کنیم. زاویه این خط با محور افقی را α می نامیم که تابعی از x است. تابع $\alpha(x)$ و دامنه و برد آن را حساب کنید و مشتق α نسبت به x را حساب کنید. مقدار α با افزایش x افزایش می یابد یا کاهش؟ علامت مشتق α چگونه است؟

۶. در شکل زیر وتری از دایره به شعاع واحد به طول l رسم شده است که کمانی به زاویه α را از دایره جدا می کند. مساحت قسمت هاشود خورده را با S نشان می دهیم.



الف) S را بر حسب α و α را بر حسب l و S را بر حسب l حساب کنید.

ب) آهنگ تغییرات S را نسبت به α و آهنگ تغییرات α را نسبت به l و

آهنگ تغییرات S را نسبت به l حساب کنید.

مشتق بگیرید.

خرداد ۹۰

$$1. \quad y = 2\tan^{-1}x + 3\sin^{-1}x + \frac{4}{x}$$

خرداد ۹۲

$$2. \quad y = \sqrt[3]{x} + \cos^{-1}x$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

3. $y = 2\tan^{-1}x$

خرداد ۹۴

4. $y = 1 + 3\cos^{-1}x$

شهریور ۹۰

5. $k(x) = (1 + \tan x)\cos^{-1}x$

دی ماه ۹۰

6. $g(x) = \tan^3 x + \sin^{-1}x$

شهریور ۹۱

7. $y = \frac{1}{x+1} + \tan^{-1}x$

دی ماه ۹۱

8. $y = \sqrt{x} + \sin^{-1}x$

شهریور ۹۲

9. $y = 2\sin^{-1}x$

دی ماه ۹۲

10. $f(x) = 2\sin 5x + 3\cos^{-1}x$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

$$11. y = \sqrt{4 - x^2} + 2\sin^{-1}x$$

(دی ۹۰)

$$12. g(x) = \tan^3 x + \sin^{-1}x$$

۱۳. در مثلثی طول دو ضلع آن ۲ و ۴ می باشد و طول ضلع سوم مقدار متغیر l می باشد زاویه مقابل به این ضلع را با α نشان می دهیم .

(الف) l تابعی از α است این تابع را محاسبه کنید و دامنه و برد آنرا بیابید .

(ب) تابع وارون

(ج) مساحت این مثلث تابعی از α قسمت قبلی چه چیز را نشان می دهد ؟

است این تابع را محاسبه کنید و آهنگ تغییرات آن را به دست آورید . آهنگ تغییرات به ازای چه مقدار های α مثبت است و معنای

آن چیست ؟ آهنگ تغییرات به ازای چه مقدار های α منفی است و معنای آن چیست ؟ آهنگ تغییرات به ازای چه مقدار های α صفر

است و مثلث در این مقدار چگونه است مساحت آن چه ویژگی دارد ؟

❖ سوالات چهار گزینه ای

۳۶۷) معادله خط قائم بر منحنی $y = x\sqrt{2x-5}$ در نقطه ای به طول ۲ واقع بر آن کدام است ؟

$$1. \quad 2y + 3x = 2$$

$$2. \quad y - 3x = -8$$

$$3. \quad y + 2x = 2$$

$$4. \quad y + 3x = 4$$

۳۶۸) از مبدا مختصات مماسی بر منحنی $y = \ln x$ رسم می کنیم . شیب خط مماس کدام است ؟

$$(1) \quad e$$

$$(2) \quad \frac{1}{e}$$

$$(3) \quad -e$$

$$(4) \quad \frac{-1}{e}$$

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۳۶۹) خط مماس بر نمودار تابع $y + \frac{\pi}{4} = \tan^{-1}\sqrt{2x-5}$ در نقطه ای به طول ۲ و تقعر بر آن محور عرض ها را با کدام عرض قطع

می کند ؟

(۱) $-\frac{3}{2}$

(۲) $-\frac{2}{3}$

(۳) $\frac{2}{3}$

(۴) $\frac{3}{2}$

۳۷۰) ضریب زاویه خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه $y = \sin^{-1}\sqrt{2x-1}$ در نقطه $x = \frac{3}{4}$ کدام است ؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) $\sqrt{2}$

(۴) $\frac{1}{2}$

۳۷۱) اگر $x > 0$ و $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$ باشد، عرض از مبدا خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه ی تلاقی آن با نیمساز ناحیه اول کدام است ؟ (سراسری ریاضی خارج کشور ۸۹)

(۱) $\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{3}{4}$

(۳) $\frac{4}{3}$

(۴) $\frac{3}{2}$

۳۷۲) اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و خط به معادله $4y + 5x = a$ قائم بر نمودار تابع f^{-1} باشد آنگاه a کدام است ؟

(۱) ۳۴

(۲) ۳۶

(۳) ۴۶

(۴) ۴۸

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

(۳۷۳) اگر $x > 1$ و $f(x) = x^3 - 2x$ خط به معادله $10y = x + m$ مماس بر نمودار تابع f^{-1} باشد آنگاه m کدام است؟ (سراسری ریاضی ۸۹)

(۱) ۱۲

(۲) ۱۴

(۳) ۱۶

(۴) ۱۸

(۳۷۴) اگر داشته باشیم $f(x) = x + e^x$ خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} در نقطه ای به طول $(1,0)$ واقع بر آن نیمساز ناحیه دوم و چهارم را در نقطه ای با کدام طول قطع می کند؟

۱. $\frac{1}{3}$ ۲. $-\frac{1}{3}$

۳. ۱

۴. -۱

(۳۷۵) اگر $f(x) = xe^x, x > 0$ آنگاه خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه ای به طول e واقع بر آن محور عمودی را با کدام عرض قطع می کند؟ (۹۲)

۱. $\frac{1}{4}$ ۲. $\frac{1}{3}$ ۳. $\frac{1}{2}$ ۴. $\frac{1}{e}$

(۳۷۶) خط مماس بر منحنی به معادله $y = \frac{2x-1}{x+1}$ در نقطه ای به طول α واقع بر آن از نقطه $(-1,0)$ می گذرد α کدام است؟

(خارج ۸۷)

(۱) -۱

(۲) ۱

(۳) $\frac{3}{2}$

(۴) ۲

377) خط گذرا بر نقاط به طول های $\frac{-1}{2}$ واقع بر منحنی به معادله $y = \frac{1}{x^2}$ در نقطه با کدام طول بر این منحنی مماس است؟

(خارج کشور ۹۰)

(۱) -2

(۲) $\frac{-1}{2}$

(۳) 1

(۴) نشدنی

۳۷۸) خط مماس بر منحنی $y = xe^{2x} + e^x$ در نقطه برخورد منحنی با محور عرض ها کدام است؟

(۱) $y + 2x = 0$

(۲) $y - 2x = 0$

(۳) $y - 2x = 1$

(۴) $y + 2x = 1$

۳۷۹) شیب خط قائم بر منحنی $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{x+y}$ در نقطه $(1, 1)$ کدام است؟

(۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(۲) 1

(۳) -1

(۴) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$

۳۸۰) اگر داشته باشیم $f(x) = x + e^x$ خط مماس بر منحنی تابع f^{-1} در نقطه $(1, 0)$ واقع بر آن نیمساز ناحیه دوم و چهارم را در نقطه ای با کدام طول قطع می کند؟

(۱) $\frac{1}{3}$

(۲) $\frac{-1}{3}$

(۳) 1

(۴) -1

۳۸۱) از نقطه $A(0, -1)$ دو خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + x$ رسم شده است. شیب مثبت این مماس کدام است؟

(۱) 1

(۲) 2

(۳) 3

(۴) 4

حسابان - تهیه و تنظیم: لطفی نژاد

۳۸۲) از نقطه $A(0, \alpha)$ دو خط مماس عمود بر منحنی به معادله $y = \frac{1}{2}x^2 + 3$ رسم شده است. α کدام است؟ (سراسری ۹۰ ریاضی)

- (۱) $\frac{3}{2}$
 (۲) ۲
 (۳) $\frac{9}{4}$
 (۴) $\frac{5}{2}$

۳۸۳) از نقطه $A(0, -2)$ دو خط مماس بر منحنی به معادله $y = x^2 - 1$ رسم شده است. مساحت مثلث با راس های این نقطه و دو نقطه ی تماس کدام است؟ (خارج ریاضی ۹۰)

- (۱) ۲
 (۲) $\frac{5}{2}$
 (۳) ۳
 (۴) ۴

۳۸۴) نمودار های دو تابع $f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$ و $g(x) = x + 1$ در چند نقطه مماس و نسبت به هم چگونه تند؟

۱. یک نقطه - قاطع
 ۲. یک نقطه - غیر قاطع
 ۳. دو نقطه - قاطع
 ۴. دو نقطه - غیر قاطع

۳۸۵) تابع $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$ در چند نقطه از دامنه اش دارای مماس های عمود محور افقی است؟

۱. صفر
 ۲. ۱
 ۳. ۲
 ۴. بیشمار

۳۸۶) اگر $f(x) = x^3 - x^2 + 2x$ باشد معادله خط قائم بر منحنی تابع f^{-1} در نقطه ۲ واقع بر آن کدام است؟ (۹۴)

۱. $y + 3x = 7$
 ۲. $y - 3x = -5$
 ۳. $3y + x = 5$
 ۴. $3y - x = 1$

387) خط مماس بر منحنی تابع f در نقطه ای به طول ۳ واقع بر آن به معادله $2y + x = 7$ می باشد اگر $g(x) = \frac{1}{x} f^{-1}(x)$

آن گاه $g'(2)$ کدام است؟ (۹۳)

۱. $\frac{-7}{4}$
۲. $\frac{-5}{4}$
۳. $\frac{-3}{4}$
۴. $\frac{1}{4}$