



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

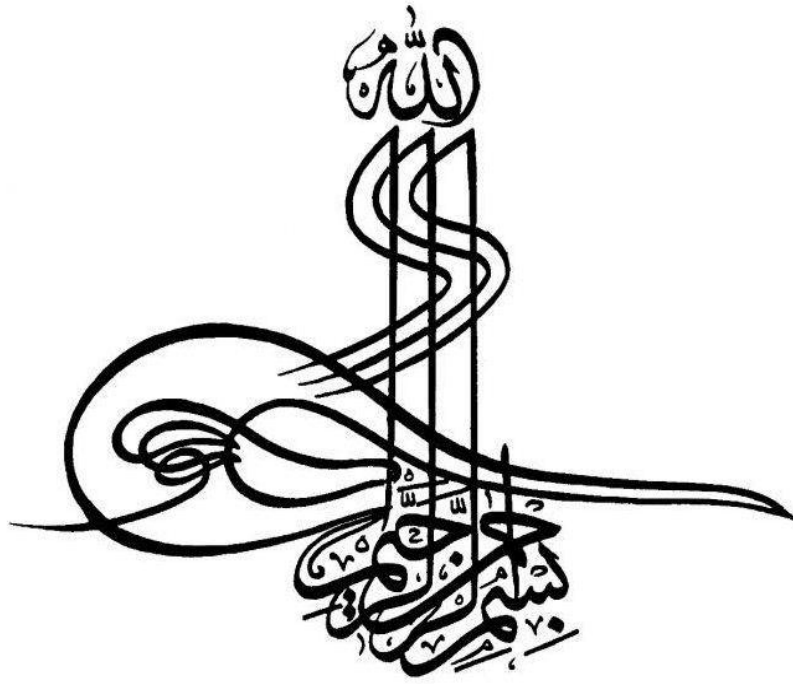
و...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)



مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

درس اول از فصل اول حسابان

طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی 

پاسخ کاملا تشریحی سوالات کنکور سراسری 

حل تمام تمرین ها ، فعالیت ها و کاردر کلاس ها 

مؤلف:

حبيب هاشمی

دانلود از سایت ریاضی سرا

www.riazisara.ir

۱۳۹۶

جهت تهیه جزوات کنکوری تمام مباحث ریاضی تالیف **حبيب هاشمی** کارشناس ارشد ریاضی
کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس در برگزاری کلاس های کنکور؛ دبیر رسمی آموزش
و پرورش منطقه ۴ تهران و مدرس دانشگاه با شماره **۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱** تماس حاصل فرمایید..

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبيب هاشمی در کانال تلگرامی [@eshgheriazikonkour](https://t.me/eshgheriazikonkour)

مقدمه

جزوه حاضر که براساس مطالب کتاب درسی، مبحث های «مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی» نگارش شده است، دارای ویژگی های زیر است:

- ۱- باز کردن مفاهیمی که در کتاب درسی به علت محدودیت حجم، به آن کمتر پرداخته شده است.
- ۲- مطالب به صورت ساده و روان و به زبان دانش آموز ارائه شده است.
- ۳- مطالب و نکات، به گونه ایی است که خلأ بین مطالب ارائه شده در کتب درسی و سؤالات مطرح شده در کنکورهای سراسری را پر کند.
- ۴- در این کتاب با نگاهی عمیق تر و جامع تر از کتاب درسی، به مطالب پرداخته شده و به همین منظور از مثال ها و مسائل حل شده متنوعی بهره گرفته ایم.
- ۵- ایجاد تعادل نسبی بین مهارت های محاسبات صوری و درک مفهومی.
- ۶- استفاده از مسائل باز پاسخ.
- ۷- توجه به دانش قبلی دانش آموزان.
- ۸- ایجاد اتصال و ارتباط بین جنبه های متفاوت یک مفهوم و نیز بین یک مفهوم و دیگر مفاهیم کتاب. در پایان امیدواریم که مطالعه ی دقیق این کتاب و بهره گیری از رهنمودهای دبیران فرهیخته و گران قدر بتواند موفقیت تحصیلی شما خوبان را تضمین و تثبیت نماید. ارائه ی نظرات شما دانش پژوهان، دبیران فرهیخته و گران قدر، موجب سپاس و امتنان است.

حبيب هاشمی

یادآوری دنباله حسابی (عددی)

تعریف دنباله حسابی: دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله ی قبل از خودش به دست می آید. به عبارت دیگر؛ تفاضل جملات متوالی آن عددی ثابت است. به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می گویند و آن را با d نشان می دهیم.

نکته: قدر نسبت دنباله ی حسابی از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$d = t_n - t_{n-1} \quad (\text{تفاضل دو جمله متوالی})$$

$$d = t_r - t_1$$

مثال: در دنباله های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جمله ی بعدی را بنویسید.

الف) $5, 10, 15, 20, \boxed{25}, \boxed{30}, \boxed{35}, \dots$ $d = 10 - 5 = 5$

ب) $1, 3, 5, 7, \boxed{9}, \boxed{11}, \boxed{13}, \dots$ $d = 3 - 1 = 2$

پ) $5, 9, 13, 17, \boxed{21}, \boxed{25}, \boxed{29}, \dots$ $d = 9 - 5 = 4$

ت) $13, 7, 1, -5, \boxed{-11}, \boxed{-17}, \boxed{-23}, \dots$ $d = 7 - 13 = -6$

ث) $5, 5, 5, 5, \boxed{5}, \boxed{5}, \boxed{5}, \dots$ $d = 5 - 5 = 0$

نکته: با توجه به مثبت؛ منفی و یا صفر بودن قدرنسبت می توان نوع دنباله حسابی را مشخص کرد؛

$$d > 0 \rightarrow \text{صعودی (افزایشی)}$$

$$d = 0 \rightarrow \text{دنباله ثابت}$$

$$d < 0 \rightarrow \text{نزولی (کاهشی)}$$

در مثال قبل قسمت های الف - ب - پ افزایشی. قسمت ت کاهشی. قسمت ث ثابت هستند.

ساختار کلی جمله عمومی دنباله حسابی

$$t_1 \xrightarrow{+d} \underbrace{t_1 + d}_{t_2} \xrightarrow{+d} \underbrace{t_1 + 2d}_{t_3} \xrightarrow{+d} \underbrace{t_1 + 3d}_{t_4} \xrightarrow{+d} \underbrace{t_1 + 4d}_{t_5}, \dots, \underbrace{t_1 + (n-1)d}_{t_n}$$

نکته: جمله ی n ام یا جمله عمومی یک دنباله ی حسابی با جمله ی اول t_1 و قدر نسبت d به صورت زیر

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

است.

دقت کنیم به جای حرف t می توان از حروف دیگر نیز استفاده کرد.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$b_n = b_1 + (n - 1)d$$

مثال: در دنباله های حسابی زیر جمله ی عمومی هر کدام را به دست آورید.

حل: دقت کنید برای مشخص کردن جمله عمومی به جمله ی اول و قدرنسبت نیاز داریم.

الف) $5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots$ $a_1 = 5$, $d = 5$, $a_n = 5 + (n - 1) \times 5 = \boxed{5n}$

ب) $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$ $b_1 = 1$, $d = 2$, $b_n = 1 + (n - 1) \times 2 = \boxed{2n - 1}$

پ) $5, 9, 13, 17, 21, 25, \dots$ $c_1 = 5$, $d = 4$, $c_n = 5 + (n - 1) \times 4 = \boxed{4n + 1}$

ت) $13, 7, 1, -5, -11, \dots$ $e_1 = 13$, $d = -6$, $e_n = 13 + (n - 1) \times (-6)$

$$= \boxed{-6n + 19}$$

مثال: در دنباله ی حسابی زیر جمله ی شانزدهم را به دست آورید.

$4, 11, 18, 25, \dots$

حل:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

$$t_{16} = t_1 + 15d$$

$$= 4 + (15)(7) = 109$$

تست: در یک دنباله حسابی با قدر نسبت ۵ جمله ی دوازدهم برابر ۶۲ است جمله ی اول آن کدام است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

$$\begin{cases} t_{12} = 62 \\ d = 5 \end{cases} \xrightarrow{t_{12} = t_1 + 11d}$$

تست: چندمین جمله از دنباله ی حسابی ... ۲, ۵, ۸, ۱۱ برابر ۵۶ است؟

۱۸ (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۷ (۴)

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ d &= 3 \\ a_n &= 56 \\ n &=? \end{aligned}$$

$$a_n = a + (n - 1)d \Rightarrow 56 = 2 + (n - 1)(3) \Rightarrow n = 19$$

تست: در یک دنبالی حسابی صعودی، جمله ی چهارم ۳ برابر جمله ی دوازدهم است. این دنباله چند جمله ی

منفی دارد؟

۱۴ (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۴ (۴) بیشمار

$$a_4 = 3a_{12} \rightarrow a_1 + 3d = 3(a_1 + 11d) \Rightarrow a_1 + 15d = 0 \Rightarrow a_{16} = 0$$

$$\underbrace{a_1, a_2, \dots, a_{15}}_{\text{منفی}}, \underbrace{a_{16}, a_{17}, a_{18}, \dots}_{\text{مثبت}}$$

چون دنباله صعودی است و جمله ی شانزدهم صفر است پس جملات ۱ تا ۱۵ منفی هستند.

مثال: جمله نهم يك دنباله عددی برابر ۱۱ و $t_{14}^2 - t_4^2 = 240$ می باشد، جمله بیست و یکم آن کدام است؟

$$t_9 = 11 \rightarrow t_1 + 8d = 11$$

$$t_{14}^2 - t_4^2 = 240 \rightarrow (t_{14} - t_4)(t_{14} + t_4) = 240$$

$$\rightarrow (t_1 + 13d - (t_1 + 3d))(t_1 + 13d + t_1 + 3d) = 240$$

$$(10d)(2t_1 + 16d) = 240 \rightarrow (10d)(2(t_1 + 8d)) = 240$$

$$(10d)(2(11)) = 240$$

$$(10d)(22) = 240$$

$$d = \frac{240}{220} = \frac{24}{22} = \frac{12}{11}$$

$$t_{21} = t_9 + 12d = 11 + 12 \times \frac{12}{11} = 11 + \frac{144}{11} = \frac{121 + 144}{11} = \frac{265}{11}$$

به دست آوردن خواسته سوال با داشتن دو جمله دلخواه از دنباله

نکته: اگر a_n, a_m دو جمله ی دلخواه از یک دنباله حسابی باشند داریم.

$$a_m = a_n + (m - n)d$$

حالت خاص $a_n = a_1 + (n - 1)d$

$$a_1, a_2, \boxed{a_3}, a_4, a_5, a_6, \boxed{a_7}, a_8, a_9, \dots$$

$$\text{مثال} \left\{ \begin{array}{l} a_7 = 19 \\ a_3 = 7 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a_7 = a_3 + (7 - 3)d \rightarrow 19 = 7 + 4d \rightarrow d = 3 \\ a_4 = a_3 + (4 - 3)d = 7 + (1)(3) = 10 \\ a_{10} = a_7 + (10 - 7)d = 19 + 3(3) = 28 \\ a_1 = a_3 + (1 - 3)d = 7 + (-2)(3) = 1 \\ a_5 = a_3 + (5 - 3)d = a_7 + (5 - 7)d = 13 \end{array} \right.$$

مثال: در یک دنباله ی حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با

به دست آوردن جمله ی اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

روش اول: استفاده از جمله عمومی

$$\begin{cases} t_3 = t_1 + 2d \rightarrow t_1 + 2d = -20 \\ t_7 = t_1 + 6d \rightarrow t_1 + 6d = 56 \end{cases} \rightarrow 4d = 36 \rightarrow \boxed{d = 9}$$

$$t_1 + 2(9) = 20 \rightarrow t_1 = 2$$

روش دوم: استفاده از نکته بالا

$$\begin{aligned} t_7 = t_3 + 4d \rightarrow 56 = 20 + 4d \rightarrow d = 9 \\ t_1 = t_3 + (-2)d \rightarrow t_1 = 20 + (-2)(9) = 2 \end{aligned}$$

به دست آوردن خواسته سوال با داشتن جمله عمومی (a_n)

نکته: در هر دنباله حسابی a_n بر حسب n از درجه اول بوده و ضریب n ؛ قدر نسبت دنباله را مشخص می کند.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = a_1 + nd - d \rightarrow a_n = dn + (a_1 - d)$$

مثال: در یک تصاعد عددی جمله ی n ام به صورت $a_n = \frac{3}{4}n - 5$ است مطلوبست الف (جمله اول

ب) جمله دوم پ) قدرنسبت

$$a_1 = \frac{3}{4}(1) - 5 = \frac{3}{4} - 5 = \frac{3-1}{4} = \frac{-7}{4}$$

$$a_2 = \frac{3}{4}(2) - 5 = 3 - 5 = -2$$

$$d = a_2 - a_1 = -2 - \left(-\frac{7}{4}\right) = -2 + \frac{7}{4} = \frac{-4+7}{4} = \frac{3}{4}$$

روش تستی: ضریب n همان قدرنسبت است: $d = \frac{3}{4}$

رابطه بين سه جمله متوالی دنباله حسابی

نکته: هرگاه a, b, c سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی باشند داریم:

$$a, b, c \xrightarrow{a+c=2b} \boxed{b} = \frac{a+c}{2}$$

واسط حسابی (عددی) بین c, a

تست: اگر $a, 21, a + 14$ سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی با جمله ی اول a باشند جمله ی چهارم

کدام است؟

- ۲۸ (۱) ۳۵ (۲) ۴۳ (۳) ۴۹ (۴)

$$21 = \frac{a + a + 14}{2} \Rightarrow 42 = 2a + 14 \rightarrow 28 = 2a \rightarrow \boxed{a = 14}$$

$$d = 21 - 14 = 7 \rightarrow a_4 = a + 3d = 14 + 3(7) = 35$$

تست: اگر $2p + 3, 3p + 4, 5p - 1$ سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی باشند، قدرنسبت کدام است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

$$3p + 4 = \frac{2p + 3 + 5p - 1}{2} \Rightarrow 6p + 8 = 7p + 2 \rightarrow -p = -6 \rightarrow p = 6$$

$$\text{جملات: } 2(6) + 3, 3(6) + 4, 5(6) - 1 \rightarrow 15, 22, 29 \rightarrow d = 7$$

مثال: اگر اعداد $5, x + 2, x^2 + 1, 3x - 1$ سه جمله ی متوالی یک دنباله حسابی باشند، آنگاه x را بیابید.

$$2(x^2 + 2) = (3x - 1) + (x + 5)$$

$$2x^2 + 4 = 4x + 4 \rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \rightarrow 2x(x - 2) = 0 \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

درج m واسطه حسابی

نکته: برای درج m واسطه ی حسابی بین دو عدد b, a ابتدا با فرمول جمله عمومی قدر نسبت را پیدا کرده، سپس واسط ها را می نویسیم.

مثال: بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله ی حسابی بدهند. در این حالت می گوئیم بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطه ی حسابی درج کرده ایم.

حل: با فرض اینکه ۱۸ جمله اول باشد، قدر نسبت را به دست می آوریم و جملات را می نویسیم.

$$\boxed{18}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \boxed{62}$$

$$a_1 \qquad \qquad \qquad a_5$$

$$\begin{cases} a_1 = 18 \\ a_5 = 62 \Rightarrow a_1 + 4d = 62 \Rightarrow 4d = 62 - 18 \Rightarrow d = 11 \end{cases}$$

$$a_1 \xrightarrow{+11} \xrightarrow{+11} \xrightarrow{+11} \xrightarrow{+11} a_5$$

$$18 \quad 29 \quad 40 \quad 51 \quad 62$$

تست: بین اعداد ۶ و ۶۶ چهار واسطه درج کرده ایم. مجموع واسطه ی اول و آخر چقدر است؟

- ۶۰ (۱) ۶۴ (۲) ۶۸ (۳) ۷۲ (۴)

$$\boxed{6}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \boxed{66}$$

$$a_1 \qquad \qquad \qquad a_6$$

$$a_6 = a_1 + 5d \rightarrow 66 = 6 + 5d \rightarrow d = 12$$

تست: بین دو عدد ۲ و ۲۹ چند واسطه حسابی با قدر نسبت ۳ می توان درج کرد؟

- ۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۵ (۴)

۲,, ۲۹

a_1 a_n

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \rightarrow 29 = 2 + (n - 1)(3) \rightarrow n = 10 \Rightarrow m = 10 - 2 = 8$$

به دست آوردن تعداد مضارب یک عدد در یک محدوده ی خاص

نکته: برای به دست آوردن تعداد اعداد بخشپذیر بر یک عدد (مضارب یک عدد) مراحل زیر را انجام می دهیم

۱- نوشتن چند جمله ی اول دنباله (بدون توجه به محدوده ی داده شده) و بدست آوردن جمله عمومی

۲- قرار دادن جمله ی عمومی در محدودی خواسته شده و حل آن تا جایی که n تنها شود.

۳- محاسبه تعداد اعداد

$$\text{if } a \leq x \leq b \xrightarrow{a, b \in \mathbb{Z}} \text{تعداد } x \text{ ها} = (b - a) + 1$$

تست: تعداد اعداد دو رقمی قابل قسمت بر ۸ کدام است؟

۱۱ (۱) ۱۲ (۲) ۱۳ (۳) ۱۴ (۴)

$$1, 8, 16, 24, \dots \rightarrow a_n = 8 + (n - 1)8 \Rightarrow a_n = 8n$$

$$10 \leq a_n \leq 99 \Rightarrow 10 \leq 8n \leq 99 \rightarrow 1/2 \leq n \leq 12/3$$

$$\xrightarrow{n \in \mathbb{N}} 2 \leq n \leq 12 \rightarrow \text{تعداد} = (12 - 2) + 1 = 11$$

$$\text{if } a \leq x \leq b \xrightarrow{a, b \in \mathbb{Z}} \text{تعداد } x \text{ ها} = (b - a) + 1$$

تست: تعداد اعداد دو رقمی که باقیمانده ی تقسیم آنها بر ۶ برابر ۲ است، کدام است؟

۱۴ (۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۷ (۴)

۶, ۱۲, ۱۸, ... $\xrightarrow{+2}$ ۸, ۱۴, ۲۰, ...

$$\Rightarrow a_n = 8 + (n - 1)(6) \Rightarrow \boxed{a_n = 6n + 2}$$

$$10 \leq 6n + 2 \leq 99 \rightarrow 8 \leq 6n \leq 97 \rightarrow 1/3 \leq n \leq 6/1$$

$$\Rightarrow 2 \leq n \leq 16 \rightarrow n = (16 - 2) + 1 = 15$$

مثال: تعداد اعداد طبیعی بخشپذیر بر ۶ بین ۱۰۰, ۲۰۰ کدام است؟

$$6, 12, 18, \dots, a_n = 6n$$

$$101 \leq 6n \leq 199 \xrightarrow{\div 6} \frac{101}{6} \leq n \leq \frac{199}{6} \rightarrow 16/8 < n < 33/1$$

$$n = (33 - 17) + 1 = 17$$

تست: تعداد اعداد طبیعی فرد بخشپذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۰۱ کدام است؟

۱۶ (۱) ۱۷ (۲) ۱۸ (۳) ۱۹ (۴)

۳, ۶, ۹, ۱۲, ۱۵, ... $\xrightarrow{\text{فرد}}$ ۳, ۹, ۱۵, ...

$$\text{جمله عمومی} \Rightarrow a_n = 3 + (n - 1)(6) \Rightarrow a_n = 6n - 3$$

$$1 \leq 6n - 3 \leq 100 \Rightarrow 4 \leq 6n \leq 103 \rightarrow 0/6 \leq n \leq 17/1$$

$$\Rightarrow 1 \leq n \leq 17 \rightarrow \text{تعداد} = 17 - 1 + 1 = 17$$

تست: تعداد اعداد طبیعی فرد و بخشپذیر بر ۷ که سه رقمی هستند کدام است؟

۶ (۱) ۶۵ (۲) ۶۶ (۳) ۶۷ (۴)

۷, ۱۴, ۲۱, ۲۸, ۳۵, ... $\xrightarrow{\text{فرد}}$ ۷, ۲۱, ۳۵, ...

$$\text{جمله عمومی} : a_n = a_1 + (n - 1)d = 7 + (n - 1)(14) = 14n - 7$$

$$100 \leq 14n - 7 \leq 999 \rightarrow 107 \leq 14n \leq 1006$$

$$\Rightarrow \frac{107}{14} \leq n \leq \frac{1006}{14} \rightarrow 7\frac{7}{14} \leq n \leq 71\frac{8}{14} \rightarrow \text{تعداد} = 71 - 8 + 1 = 64$$

تست: تعداد اعداد سه رقمی که رقم سمت راست آنها ۴ بوده و بر ۴ بخشپذیر هستند کدام است؟

۴۴ (۱) ۴۵ (۲) ۴۶ (۳) ۴۷ (۴)

رقم راست سمت ۴ باشد
۴ مضارب: ۴, ۸, ۱۲, ۱۶, ۲۰, ۲۴, ۲۸ \longrightarrow ۴, ۲۴, ...

$$a_n = 4 + (n - 1)(20) \rightarrow a_n = 20n - 16$$

$$100 \leq 20n - 16 \leq 999 \rightarrow 116 \leq 20n \leq 1015 \rightarrow 5\frac{8}{20} \leq n \leq 50\frac{15}{20}$$

$$\Rightarrow 6 \leq n \leq 50 \rightarrow n = (50 - 6) + 1 = 45$$

پیدا کردن جملات مشترک دو دنباله حسابی

برای پیدا کردن جملات مشترک دو دنباله حسابی مراحل زیر را انجام می دهیم

گام ۱: با نوشتن چند جمله ی اول هر یک از دو دنباله، اولین جمله مشترک آنها را پیدا می کنیم.

گام ۲: جملات مشترک دو دنباله خود تشکیل یک دنباله ی حسابی جدید می دهند که قدر نسبت آن ک م قدر نسبت های این دو دنباله است.

گام ۳: با جایگذاری مقادیر a_1 و d در فرمول $a_n = a_1 + (n - 1)d$ جمله ی عمومی دنباله ی

مشترک را می نویسیم

گام ۴: خواسته ی مسئله را پیدا می کنیم.

تست: در دنباله ی حسابی $I: 1, 5, 9, \dots$ و $II: 4, 7, 10, \dots$ پنجاهمین جمله مشترک کدام است؟

(۱) ۶۱ (۲) ۴۹ (۳) ۵۸ (۴) ۷۳

راه اول $\begin{cases} 1, 5, 9, \boxed{13}, 17, 21, \boxed{25}, 29, 33, \boxed{37}, 41, 45, \boxed{49}, 53, 57, \boxed{61}, 65, \dots \\ 4, 7, 10, \boxed{13}, 16, 19, 22, \boxed{25}, 28, 31, 34, \boxed{37}, 40, 43, 46, \boxed{49}, 52, 55, 58, \boxed{61}, 64, \dots \end{cases}$

$$\text{گام ۱: } \begin{cases} 1, 5, 9, 13, 17, \dots \\ 4, 7, 10, 13, 16, \dots \end{cases} \quad a_1 = 13$$

$$\text{گام ۲: } \begin{cases} d_1 = 4 \\ d_2 = 3 \end{cases} \rightarrow d = [3, 4] = 12$$

$$\text{گام ۳: } a_n = 13 + (n - 1)(12) = 12n + 1$$

$$\text{گام ۴: } a_{50} = 12(50) + 1 = 601$$

تست: در دنباله ی حسابی ... ۹, ۵, ۱ و ... ۱۰, ۷, ۴ چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

۷۴ (۱) ۷۵ (۲) ۷۶ (۳) ۷۷ (۴)

$$a_n = 12n + 1 \text{ طبق بالا}$$

$$100 \leq 12n + 1 \leq 999 \rightarrow 99 \leq 12n \leq 998$$

$$\stackrel{\div 12}{\rightarrow} 8\frac{1}{2} \leq n \leq 83\frac{1}{12} \rightarrow 9 \leq n \leq 83 \rightarrow \text{تعداد} = (83 - 9) + 1$$

سه جمله متوالی یک دنباله

نکته: سه جمله متوالی یک دنباله حسابی را بهتر است به صورت زیر نشان دهیم:

$$a - d, a, a + d$$

مثال: مجموع سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی برابر ۲۴ و حاصلضرب آنها ۳۱۲ است، قدر نسبت این

دنباله را بیابید.

$$(a - d) + a + (a + d) = 24 \rightarrow 3a = 24 \rightarrow a = 8$$

$$(a - d)(a)(a + d) = 312 \xrightarrow{a=8} (8 - d)(8)(8 + d) = 312$$

$$64 - d^2 = \frac{312}{8} \rightarrow 64 - d^2 = 39 \rightarrow 25 - d^2 = 0$$

$$(25 - d)(5 + d) = 0 \rightarrow \begin{cases} 5 - d = 0 \rightarrow d = 5 \\ 5 + d = 0 \rightarrow d = -5 \end{cases}$$

مثال: مجموع سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی برابر ۶ و مجموع مربعات آنها ۳۰ است. آن سه عدد را

مشخص کنید.

$$(a - d) + (a) + (a + d) = 6 \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$$

$$(a - d)^2 + (a)^2 + (a + d)^2 = 30 \Rightarrow (2 - d)^2 + 2^2 + (2 + d)^2 = 30$$

$$\Rightarrow (4 - 4d + d^2) + (4 + 4d + d^2) = 26$$

$$8 + 2d^2 = 26 \rightarrow 2d^2 = 18 \rightarrow d^2 = 9 \rightarrow d = \pm 3$$

نکته: پنج جمله متوالی یک دنباله حسابی را بهتر است به صورت زیر نشان دهیم:

$$a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$$

مجموع n جمله ی اول یک دنباله حسابی:

مجموعه اعداد طبیعی $1, 2, 3, \dots$ یک دنباله حسابی با قدر نسبت یک می باشد. چگونگی به دست آوردن مجموع

اعداد طبیعی ۱ تا n می تواند الگوی مناسبی باشد تا به یک دستور برای محاسبه مجموع جملات هر دنباله

حسابی برسیم.

فعالیت: تعدادی دگمه داریم که به شکل روبه ر و آرایش شده اند. تعداد این دگمه ها چندتا است؟



۱) یکی از راه ها، شمارش تعداد دگمه ها در هر ردیف است که مجموع آن برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

۲) راه دیگر استفاده از شهود و تجسم، با استفاده از شکل پایین، است.



در این شکل تعداد ردیف ها ۱۰ و تعداد دگمه ها در هر ردیف برابر ۱۱ است، پس تعداد کل دگمه ها برابر ۱۱۰

است و چون تعداد دگمه های آبی و قرمز برابر است پس:

$$\text{تعداد کل دگمه ها} = \frac{110}{2} = 55$$

تعداد دگمه های قرمز

۳) برای محاسبه مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n مراحل زیر را انجام داده ایم. چگونگی هر مرحله را توضیح دهید.

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ تا}}$$

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

ابتدا اعداد طبیعی ۱ تا n را نوشته به ترتیب صعودی سپس n تا ۱ را زیر مجموع ۱ تا n قرار می دهیم طوری که

مجموع هر دو عدد زیر هم $n + 1$ می شود و چون کل اعداد n تا هستند حال ما $n + 1$ داریم پس

$$2S = n(n + 1) \text{ می شود.}$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

مثال: روی محیط دایره ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می کنیم. تعداد کل

وترهای تشکیل شده را به دست آورید.

حل: نقطه اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می کنیم در این صورت ۱۹ وتر پدید می آید. با وصل نقطه

دوم به نقاط دیگر (به غیر از نقطه اول) ۱۸ وتر به دست می آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط

اول و دوم وصل می کنیم. ۱۷ وتر حاصل می شود. با ادامه این عمل تعداد وترهای حاصل برابر است با:

$$19 + 18 + 17 + \dots + 2 + 1 = \frac{19}{2}(1 + 19) = 190$$

فعالیت: دنباله حسابی زیر را، که در آن a جمله اول، d قدر نسبت و n تعداد جملات آن است، در نظر

بگیرید.

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n - 2)d, a + (n - 1)d$$

مجموع جملات این دنباله را S_n می نامیم و می نویسیم:

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n - 2)d) + (a + (n - 1)d)$$

حال، جملات S_n را از آخر به اول بنویسید و با جمع جملات متناظر دو عبارت اخیر، $2S_n$ را به دست آورید.

$$S = a + (a + d) + \dots + (a + (n - 2)d) + (a + (n - 1)d)$$

$$S = (a + (n - 1)d) + (a + (n - 2)d) + \dots + (a + d) + a$$

$$2S = \underbrace{(2a + (n - 1)d) + (2a + (n - 1)d) + \dots + (2a + (n - 1)d)}_{n}$$

$$2S = n[2a + (n - 1)d]$$

پس نتیجه خواهیم گرفت:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$$

مثال: نشان دهید در یک دنباله حسابی اگر a_1 و a_n به ترتیب جملات اول و آخر باشند آنگاه:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = \frac{n}{2} \left[a + \underbrace{(a + (n - 1)d)}_{a_n} \right] = \frac{n}{2}[a + a_n]$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

↑ جمله ی اول ↑ جمله ی آخر
↑ اگر جمله ی آخر معلوم باشد ↑ اگر قدر نسبت معلوم باشد

مثال: مجموع صد جمله اول دنباله حسابی ... ۱۵, ۱۱, ۷, ۳ را به دست آورید.

حل: جمله اول ۳، تعداد جمله ها ۱۰۰ و قدر نسبت جملات ۴ است. با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله

حسابی می توان نوشت:

$$S_{100} = \frac{100}{2} [2 \times 3 + (100 - 1) \times 4] = 50 \times 402 = 20100$$

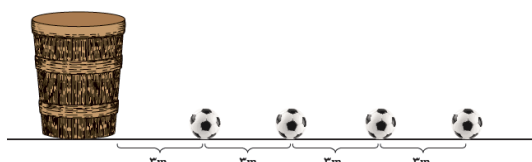
مثال: در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هر یک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند.

فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است (شکل زیر).. دوندۀ ای باید از کنار بید شروع کرده توپ اول را بردارد و

آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد

و این کار را ادامه دهد. اگر این دوندۀ در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمعاً چند توپ در سبد

انداخته است؟



حل: دوندۀ برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید مسافت $3+3=6$ متر را طی کند؛ برای توپ دوم

نیز باید ۱۲ متر و برای توپ سوم ۱۸ متر و ... طی کند. بنابراین مسافت های طی شده در این مراحل، تشکیل

يك دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدر نسبت ۶ می دهد. اگر n تعداد توپ های انداخته شده در سبد باشد از

فرمول مجموع جملات دنباله حسابی داریم:

$$S = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)d)$$

$$918 = \frac{n}{2}(12 + (n - 1)6) \Rightarrow 306 = n(n + 1) \Rightarrow 17 \times 18 = n(n - 1) \Rightarrow n = 17$$

تست: در يك دنباله عددی جمله ی n ام به صورت $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است مجموع ۱۵ جمله ی اول این دنباله کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

۹۰ (۱) ۱۰۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۳۵ (۴)

روش اول

$$a_1 = \frac{3}{2}(1) - 5 = -\frac{7}{2} \rightarrow s_{15} = \frac{15}{2} \left(-\frac{7}{2} + \frac{35}{2} \right) = \frac{15}{2} \left(\frac{28}{2} \right) = 105$$

$$a_{15} = \frac{3}{2}(15) - 5 = \frac{35}{2}$$

روش دوم

$$a_1 = -\frac{7}{2} \rightarrow \begin{cases} s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) \\ s_{15} = \frac{15}{2} \left(2 \left(-\frac{7}{2} \right) + (15 - 1) \left(\frac{3}{2} \right) \right) \end{cases}$$

$$= \frac{15}{2}(-7 + 21) = \frac{15}{2}(14) = 105$$

تست: در يك تصاعد عددی جمله ی پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله ی ما قبل خود به اندازه ی

$\frac{1}{2}$ کمتر است. مجموع ۱۰ جمله ی اول آن کدام است؟ (سراسری تجربی)

۲۲/۵ (۱) ۲۵ (۲) ۲۷/۵ (۳) ۳۰ (۴)

$$a_5 = 3 \rightarrow a_5 = a_1 + 4d \rightarrow 3 = a_1 + 4 \left(-\frac{1}{2} \right) \rightarrow \boxed{a_1 = 5}$$

$$d = -\frac{1}{2}$$

$$s_{10} = \frac{10}{2} \left(2(5) + (10 - 1) \left(-\frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= 5 \left(10 - \frac{9}{2} \right) = 5 \left(\frac{11}{2} \right) = 27/2$$

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = ?$$

$$a_1 = 1$$

الف) $d = 1$ $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + n) = \frac{n(n+1)}{2}$
تعداد = n
 $S_n = ?$

$$2, 4, 6, \dots, 2n = ?$$

ب) $a_1 = 2$
 $d = 2$
تعداد = n
 $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2 + 2n) = n(1 + n) = n + n^2$
 S_n

$$1, 3, 5, \dots, (2n - 1) = ?$$

ج) $a_1 = 1$
 $d = 2$
تعداد = n
 $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(1 + 2n - 1) = n^2$
 S_n

مثال: مقدار x از معادله $1 + 3 + 5 + \dots + x = 225$

$$\text{روش اول} \begin{cases} S_n = 225 \rightarrow \frac{n}{2}(2(1) + (n-1)(2)) = 225 \\ \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) = 225 \\ n^2 = 225 \rightarrow \boxed{n = 15} \end{cases}$$

$$a_{15} = 1 + 14(2) = 29$$

$$\text{روش دوم: } 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \rightarrow n^2 = 225 \rightarrow n = 15 \rightarrow x = 2n - 1 = 29$$

تست: در بیست جمله اول از یک تصاعد حسابی مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف

زوج ۱۵۰ می باشد جمله ی اول کدام است؟ (سراسری تجربی)

$$0 (1) \quad 1 (2) \quad 2 (3) \quad 3 (4)$$

$$\underbrace{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}}_{\text{تا } 10} = 135 \rightarrow \frac{10}{2}(a_1 + a_{19}) = 135 \rightarrow a_1 + a_1 + 18d = 27 \rightarrow 2a_1 + 18d = 27$$

$$a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{19} = 150 \rightarrow \frac{10}{2}(a_1 + a_{19}) = 150 \rightarrow a_1 + d + a_1 + 18d = 30 \rightarrow 2a_1 + 18d = 30$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 18d = 30 \\ 2a_1 + 20d = 30 \end{cases} \rightarrow a_1 = 0, \quad d = 1/5$$

تست: مجموع تمام اعداد طبیعی بخشپذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ کدام است (سراسری تجربی)

$$2420 \quad (1) \quad 2450 \quad (2) \quad 2520 \quad (3) \quad 2550 \quad (4)$$

ابتدا با توجه به نکته گفته شده در صفحات قبل **تعداد** آنها را به دست می آوریم سپس **مجموع** را حساب می کنیم.

$$a_n = 6n \rightarrow 101 \leq 6n \leq 199$$

$$\rightarrow 16/8 \leq n \leq 33/1 \Rightarrow 17 \leq n \leq 33 \rightarrow \text{تعداد} = 33 - 17 + 1 = 17$$

$$\begin{aligned} a_{17} = 6 \times 17 = 102 & \quad \text{اولین جمله} \\ a_{33} = 6 \times 33 = 198 & \quad \text{آخرین جمله} \\ S_n = \frac{n}{2}(\text{جمله آخر} + \text{جمله اول}) & \\ S_{17} = \frac{17}{2}(102 + 198) & \\ S_{17} = \frac{17}{2} \times 300 = 2550 & \end{aligned}$$

روش دوم: با روش آزمون و خطا جمله اول و آخر را به دست می آوریم سپس به کمک جمله عمومی تعداد

جمالت را به دست می آوریم و در فرمول مجموع جملات قرار می دهیم

$$a = 102 \quad , \quad a_n = 198$$

$$a_n = a + (n-1)d \rightarrow 198 = 102 + (n-1)(6) \rightarrow n-1 = \frac{198-102}{6} = 16 \rightarrow n = 17$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{17}{2}[102 + 198] = 2550$$

مثال: مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می شود؟

$$102 \text{ و } 108 \text{ و } \dots \text{ و } 996 \quad a = 102 \quad a_n = 996$$

$$a_n = a + (n - 1)d \rightarrow 996 = 102 + (n - 1)(6) \rightarrow n - 1 = \frac{996 - 102}{6} = 149 \rightarrow n = 150$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{150}{2}[102 + 996] = 82350$$

مثال: مجموع همه عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به دست آورید.

$$\underbrace{12, 16, 20, \dots, 96}_{a_1 \quad a_n}$$

$$a_n = a + (n - 1)d \rightarrow 96 = 12 + (n - 1)(4) \rightarrow n - 1 = \frac{96 - 12}{4} = 21 \rightarrow n = 22$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{22}{2}[12 + 96] = 1188$$

تمرین: مجموع اعداد طبیعی فرد، بخشپذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۰۱ کدام است (سراسری تجربی ۸۵)

$$816 \quad (1) \quad 852 \quad (2) \quad 867 \quad (3) \quad 884 \quad (4)$$

تست: در دنباله ی عددی ...، -۹، -۱۲، -۱۵، مجموع جملات طبیعی دو رقمی کدام است؟

$$6105 \quad (1) \quad 6100 \quad (2) \quad 6095 \quad (3) \quad 6090 \quad (4)$$

$$a_n = -15 + (n - 1)(3) \rightarrow a_n = 3n - 18$$

$$10 \leq a_n \leq 99 \rightarrow 10 \leq 3n - 18 < 99 \rightarrow 9/3 \leq n \leq 39$$

$$\rightarrow 10 \leq n \leq 39 \rightarrow \text{تعداد جملات} = (39 - 10) + 1 = 30$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ a_1 \text{ اولین جمله} & & a_{39} \text{ آخرین جمله} \end{array}$$

$$a_{10} = 3(10) - 18 = 12 \quad S_{20} = \frac{20}{2}(12 + 99) = 610$$

$$a_{39} = 3(39) - 18 = 99$$

مثال: در يك دنباله ی حسابی با جمله ی اول $\frac{3}{4}$ و قدر نسبت -1 مجموع چند جمله برابر -6 است.

$$a_1 = \frac{3}{4}$$

$$d = -1$$

$$S_n = -6$$

$$n = ?$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) =$$

$$-6 = \frac{n}{2}\left(2\left(\frac{3}{4}\right) + (n-1)(-1)\right)$$

$$-6 = \frac{n}{2}(3 - n + 1)$$

$$-6 = \frac{n}{2}(4 - n) \xrightarrow{\times 2} -12 = 4n - n^2$$

$$\rightarrow n^2 - 4n - 12 = 0 \Rightarrow (n-6)(n+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 6 \\ n = -2 \text{ غ ق ق} \end{cases} \text{ عضو اعداد طبیعی است.}$$

مثال: مجموع چند جمله ای دنباله ی حساب ... , 10, 12 برابر صفر است؟

$$a_1 = 12$$

$$d = -2$$

$$S_n = 0$$

$$n = ?$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) =$$

$$0 = \frac{n}{2}(2(12) + (n-1)(-2))$$

$$0 = \frac{n}{2}(24 - 2n + 2)$$

$$0 = \frac{n}{2}(26 - 2n + 2) \xrightarrow{\times 2} n(2n - 2n) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \text{ غ ق ق} \\ n = 13 \end{cases}$$

مثال: مجموع چند جمله از جملات دنباله ی حسابی مقابل ۱۶۸ است؟

$$2a - 1, 7a - 9, a + 5$$

$$2(7a - 9) = (2a - 1) + (a + 5) \Rightarrow 14a - 18 = 3a + 4 \rightarrow 11a = 22 \rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$2(2) - 1, 7(2) - 9, 2 + 5 \rightarrow 3, 5, 7$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 2 \\ S_n = 168 \\ n = ? \end{cases}$$

مثال: حداقل چند جمله از دنباله ی حسابی ... ۱۱, ۱۵, ۱۹ را جمع کنیم تا حاصل منفی شود؟

$$\begin{cases} a_1 = 19 \\ d = -4 \\ S_n < 0 \\ n = ? \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) < 0 &\Rightarrow \frac{n}{2}(2(19) + (n-1)(-4)) < 0 \\ = \frac{n}{2}(38 - 4n + 4) < 0 &\rightarrow \frac{n}{2}(42 - 4n) < 0 \\ \times 2 &\rightarrow n(42 - 4n) < 0 \rightarrow \end{aligned}$$

			$\frac{42}{4}$	
n	-	0	+	+
$42 - 4n$	+		0	-
	-		+	$\underbrace{-}$ جواب

$$\begin{aligned} n &> \frac{42}{4} \\ n &> 10.5 \\ \boxed{n \geq 11} \\ n &= 11 \end{aligned}$$

مثال: در دنباله ی حسابی ... ۱, ۳, ۵, ... حداقل چند جمله را باید جمع کرد تا حاصل از ۲۰۰ بزرگتر شود؟

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) &> 200 \\ \Rightarrow \frac{n}{2}(2(1) + (n-1)(2)) &> 200 \\ = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) &> 200 \\ \frac{n}{2}(2n) > 200 &\rightarrow n^2 > 200 \rightarrow \sqrt{n} > \sqrt{200} \\ &\rightarrow n > 14.14 \dots \\ &\rightarrow n \geq 15 \end{aligned}$$

حداقل ۱۵ جمله

$$\rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \\ S_n > 200 \\ n = ? \end{cases}$$

مثال: در دنباله حسابی ... ۱۱, ۸, ۵, ... حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

$$\begin{aligned} a &= 5 & S_n &> 493 & \frac{n}{2}[10 + 3(n-1)] &> 493 \\ d &= 3 & 3n^2 + 7n - 986 &> 0 & \\ \Delta &= 11881 \end{aligned}$$

$$n_1 = \frac{-7 + 10.9}{6} \Rightarrow n > 17 \rightarrow n = 18$$

$$n_2 = \frac{-7 - 10.9}{6} = \text{غ ق ق}$$

تست: در يك دنباله حسابی مجموع نه جمله ی اول ۵۴ و مجموع ده جمله ی اول ۵۰ است مجموع چهارده

جمله ی اول این دنباله کدام است؟

$$0 \quad (1) \quad 14 \quad (2) \quad 16 \quad (3) \quad 18 \quad (4)$$

$$s_9 = 54 \rightarrow \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) = 54 \rightarrow a_1 + 4d = 6$$

$$s_{10} = 50 \rightarrow \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) = 50 \rightarrow a_1 + 4.5d = 5 \rightarrow a_1 = 14, d = -2$$

$$s_{14} = \frac{14}{2}(2a_1 + 13d) = \frac{14}{2}(2(14) + 13(-2)) = 14$$

مثال: در يك دنباله ی عددی $a_7 = 29$ و $a_3 = 5$ می باشد مجموع ۲۰ جمله ی اول این دنباله کدام است؟

$$a_7 = a_3 + (7 - 3)d \rightarrow 29 = 5 + 4d \rightarrow d = 6$$

$$a_7 = a_1 + (7 - 1)d \rightarrow 29 = a_1 + 6d \rightarrow 29 = a_1 + 36 \rightarrow a_1 = -7$$

$$s_{20} = \frac{20}{2}(2(-7) + 19(6)) = 10(-14 + 114) = 1000$$

تست: در يك تصاعد عددی مجموع ۱۲ جمله ی اول آن ۱۳۸ و جمله ی ششم آن ۱۰ است جمله ی اول این

تصاعد کدام است (سراسری تجربی)

$$-5 \quad (1) \quad -4 \quad (2) \quad -3 \quad (3) \quad -2 \quad (4)$$

$$s_{12} = 138 \rightarrow \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) = 138 \rightarrow a_1 = -5$$

$$a_6 = 10 \rightarrow a_1 + 5d = 10$$

تست: در يك دنباله ی عددی $s_9 - 6s_6 = 0$ حاصل $\frac{a_{11}}{a_4}$ کدام است؟

- ۷ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۳ (۴)

$$s_9 - 6s_6 = 0 \rightarrow \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) - 6\left(\frac{6}{2}(2a_1 + 5d)\right) = 0 \rightarrow a_1 = -2d$$

$$\frac{a_{11}}{a_4} = \frac{a_1 + 9d}{a_1 + 3d} = \frac{-2d + 9d}{-2d + 3d} = 7$$

تست: در يك دنباله ی عددی مجموع بیست جمله ی اول سه برابر مجموع دوازده جمله ی اول است. اگر

جمله ی سوم برابر ۶ باشد جمله ی دهم کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

- ۳۲ (۱) ۳۴ (۲) ۳۶ (۳) ۳۸ (۴)

$$\begin{cases} s_{20} = 3s_{12} \Rightarrow \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 3 \times \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) \rightarrow d = -2a_1 \\ a_3 = 6 \rightarrow a_1 + 2d = 6 \rightarrow a_1 + 2(-2a_1) = 6 \rightarrow -3a_1 = 6 \rightarrow \boxed{a_1 = -2} \xrightarrow{d=-2a_1} \boxed{d = 4} \end{cases}$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 9(+4) = 34$$

مثال: در يك دنباله حسابی $s_{21} = 210$ است جمله ی یازدهم دنباله چقدر است؟

$$s_{21} = \frac{21}{2}(2a_1 + 20d) \Rightarrow s_{21} = \frac{21}{2}(2(a_1 + 10d)) = 21(a_{11})$$

$$\Rightarrow 210 = 21a_{11} \rightarrow a_{11} = 10$$

تست: در يك دنباله ی عددی $a_3 + a_4 + a_5 + a_{12} = 160$ است حاصل جمع یازده جمله ی اول آن چقدر

است؟

- ۲۲۰ (۱) ۳۳۰ (۲) ۴۴۰ (۳) ۵۵۰ (۴)

$$s_{11} = \frac{11}{2}(2a + 10d) = ? \quad \frac{11}{2}(2(a_1 + 5d)) = 11(a_1 + 5d) = 11 \times 40$$

$$a_3 + a_6 + a_9 + a_{12} = 160 \rightarrow 4a_1 + 20d = 160 \xrightarrow{\div 4} a_1 + 5d = 40$$

به دست آوردن خواسته های سوال با داشتن مجموع n جمله اول دنباله (s_n)

مثال: مجموع n جمله ی اول یک دنباله ی عددی $s_n = \frac{n(9n-5)}{12}$ است مطلوبست الف) جمله اول

ب) جمله دوم پ) قدرنسبت ت) جمله عمومی

$$\begin{cases} n = 1 \rightarrow s_1 = \frac{1}{3} \rightarrow s_1 = a_1 = \frac{1}{3} \\ n = 2 \rightarrow s_2 = \frac{13}{6} \rightarrow a_1 + a_2 = \frac{13}{6} \rightarrow a_2 = \frac{13}{6} - \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \end{cases}$$

$$d = a_2 - a_1 = \frac{11}{6} - \frac{1}{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = \frac{1}{3} + (n-1)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}n - \frac{7}{6}$$

نکته: در هر دنباله حسابی، s_n بر حسب n از درجه دوم می باشد و دو برابر ضریب n^2 قدرنسبت را

مشخص می کند.

$$s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + nd - d) = na_1 + \frac{d}{2}n^2 - \frac{nd}{2}$$

$$s_n \text{ روش دوم} = \frac{9n^2 - 5n}{12} = \frac{9}{12}n^2 - \frac{5}{12}n \rightarrow d = 2 \times \frac{9}{12} = \frac{3}{2}$$

مثال: در یک دنباله ی حسابی $s_n = \frac{3n^2}{4} + n$ می باشد جمله ی پنجاه و یکم این دنباله چیست؟

$$a_1 = s_1 = \frac{5}{2} \rightarrow a_{\Delta 1} = \frac{5}{2} + (\Delta 1 - 1)(3) = 152/5$$

$$d = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

رابطه ی بین s_n و a_n

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2 \rightarrow s_2 - s_1 = a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \rightarrow s_3 - s_2 = a_3$$

$$s_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \rightarrow \boxed{s_n - s_{n-1} = a_n} \text{ : در هر دنباله}$$

تست: در يك دنباله ی حسابی مجموع n جمله ی اول آن برابر $s_n = n(n+1)$ می باشد مجموع جملات

ششم و هفتم کدام است؟

- ۴۰ (۴) ۳۰ (۳) ۲۸ (۲) ۲۶ (۱)

$$s_1 = a_1 = 2 \text{ روش اول}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = 6 \rightarrow a_2 = 6 - 2 = 4 \rightarrow d = 4 - 2 = 2$$

$$a_6 = 2 + 5(2) = 12$$

$$2 + 6(2) = 14 \rightarrow a_6 + a_7 = 26$$

$$a_6 = s_6 - s_5 = 42 - 30 = 12$$

$$a_7 = s_7 - s_6 = 56 - 42 = 14$$

تست: در تصاعد عددی $s_n = n(4n+1)$ ، جمله ی n ام این دنباله کدام است؟

- $4n - 3$ (۴) $4n + 3$ (۳) $4n - 1$ (۲) $4n + 1$ (۱)

$$s_1 = a_1 = 5 \text{ روش اول}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = 18 \rightarrow a_2 = 13 \rightarrow d = 8$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + (n-1)(8) = 8n - 3$$

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \dots$$

مجموع n جمله ی دوم (بعدی) دنباله

مثال: در دنباله ی حسابی مقابل مجموع ۵ جمله ی دوم را حساب کنید.

۲, ۵, ۸, ...

$$\underbrace{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5}_{S_5}, \underbrace{a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}}_{S_{10}}$$

(بعدی) = مجموع پنج جمله ی دوم $S_{10} - S_5$

(بعدی) = مجموع n جمله ی دوم $S_{2n} - S_n$

تست: در يك دنباله ی حسابی، مجموع ۵ جمله ی اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله ی بعدی است، جمله ی دوم

چند برابر جمله ی اول است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

$$4(4) \quad 3(3) \quad \frac{5}{2}(2) \quad \frac{3}{2}(1)$$

$$S_5 = \frac{1}{3} \times (\text{بعدی}) \Rightarrow S_5 = \frac{1}{3}(S_{10} - S_5)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3S_5 = S_{10} - S_5 \rightarrow 4S_5 = S_{10}$$

$$\rightarrow 4\left(\frac{5}{2}(2a_1 + 4d)\right) = \frac{10}{2}(2a_1 + 9d)$$

$$20(2a_1 + 4d) = 10(2a_1 + 9d)$$

$$4a_1 + 8d = 2a_1 + 9d \rightarrow d = 2a_1$$

$$\frac{a_2}{a_1} = ? \rightarrow \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{a_1 + 2a_1}{a_1} = \frac{3a_1}{a_1} = 3$$

مثال: در يك دنباله حسابی $S_n = 2n^2 - 3n$ می باشد حاصل $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$ را بدست آورید؟

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}_{S_5} + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} - \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}_{S_5} = S_{10} - S_5$$

$$= (2(10)^2 - 3(10)) - (2(5)^2 - 3(5)) = 135$$

تست: در يك دنباله ی حسابی نزولی، مجموع ۵ جمله ی دوم برابر مجموع ۴ جمله ی اول است این دنباله

چند جمله ی مثبت دارد؟

- (۱) ۲۹ (۲) ۳۰ (۳) ۳۱ (۴) ۳۲

مجموع چهار جمله اول = مجموع پنج جمله دوم

$$s_{10} - s_5 = s_4 \rightarrow \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) - \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = \frac{4}{2}(2a_1 + 3d)$$

$$\Rightarrow a_1 + 29d = 0 \rightarrow a_{30} = 0 \rightarrow \underbrace{a_1, a_2, \dots, a_{29}}_{\text{مثبت}} \quad a_{30} = 0$$

تست: در يك دنباله ی عددی با جمله ی اول a اگر يك واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آن گاه به

مجموع ۲۰ جمله ی اول آن چقدر اضافه خواهد شد؟

- (۱) ۱۶۰ (۲) ۱۷۰ (۳) ۱۸۰ (۴) ۱۹۰

$$\begin{cases} s_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) \rightarrow s_{20} = 20a + 190d \\ d \rightarrow d + 1 \rightarrow s'_{20} = 20a + 190(d + 1) = 20a + 190d + 190 \end{cases}$$

$$\rightarrow s'_{20} - s_{20} = 190$$

تست: در يك دنباله ی حسابی اگر يك واحد از جمله ی اول کم کرده و دو واحد به قدر نسبت بیافزاییم به مجموع ۲۰ جمله ی

اول چند واحد اضافه می شود؟

- (۱) ۳۴۵ (۲) ۳۵۰ (۳) ۳۵۵ (۴) ۳۶۰

$$\begin{cases} s_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) \rightarrow s_{20} = 20a_1 + 190d \\ a_1 \rightarrow a_1 - 1 \\ d \rightarrow d + 2 \rightarrow s'_{20} = 20(a_1 - 1) + 190(d + 2) = 20a_1 - 20 + 190d + 380 \end{cases}$$

$$s'_{20} - s_{20} = 360$$

یادآوری دنباله هندسی

مثال: دنباله مقابل را در نظر بگیرید

۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ...

این دنباله یک دنباله ی حسابی نیست؛ چرا که تفاضل جملات متوالی آن ثابت نیست، بلکه نسبت تقسیم هر دو جمله ی متوالی آن برابر عددی ثابت است.

$$\dots = \frac{۳۲}{۱۶} = \frac{۱۶}{۸} = \frac{۸}{۴} = \frac{۴}{۲} = ۲$$

اینگونه دنباله ها را دنباله های هندسی می نامیم.

تعریف دنباله هندسی: دنباله ای است که در آن هر جمله (به جز جمله ی اول) از ضرب جمله قبل از

خودش در عددی ثابت به دست می آید. به عبارت دیگر؛ نسبت تقسیم هر دو جمله ی متوالی آن برابر عددی ثابت است. این عدد ثابت (غیر صفر) را قدر نسبت دنباله می نامیم و آن را با q نشان می دهیم.

نکته: قدر نسبت از فرمول زیر به دست می آید:

$$q = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

(نسبت دو جمله متوالی)

$$q = \frac{t_2}{t_1}$$

مثال: از بین موارد زیر، دنباله های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

$q = ۴ \rightarrow ۷, ۲۸, ۱۱۲, ۴۴۸, \dots$ (الف)

$$\frac{28}{7} = 4, \frac{112}{28} = 4, \frac{448}{112} = 4$$

$$\text{ب) } 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots \rightarrow q = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{-\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$$

دنباله هندسی نیست ... $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$ پ)

دنباله ی ثابت $5, 5, 5, 5, \dots \rightarrow q = 1$ ت)

$$\frac{5}{5} = \frac{5}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

تعریف: دنباله ای که افزایشی یا کاهششی باشد را یکنوا گوئیم و دنباله ای که نه افزایشی است و نه کاهششی را

غیر یکنوا گوئیم

نکته: اگر $q > 0$ باشد دنباله را یکنوا و اگر $q < 0$ باشد دنباله را غیر یکنوا گوئیم.

مثال: در دنباله های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید.

مثال ۱: $6, 18, 54, \dots$ $t_1 = 6, q = 3 \rightarrow q > 0$ (افزایشی - صعودی) (یکنوا)

مثال ۲: $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots$ $t_1 = 3, q = \frac{1}{2} \rightarrow q > 0$ (کاهششی - نزولی) (یکنوا)

مثال ۳: $3, -6, 12, -24, 48, \dots$ $t_1 = 3, q = -2 \rightarrow q < 0$ (غیر یکنوا) (نه صعودی نه نزولی)

مثال ۴: $-1, +\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$ $t_1 = -1, q = -\frac{1}{3} \rightarrow q < 0$ (غیر یکنوا) (نه صعودی نه نزولی)

ساختار کلی جمله دنباله هندسی

در حالت در یک دنباله ی هندسی، اگر جمله ی اول t_1 و قدر نسبت q باشد، جملات آن به شکل زیر خواهند بود.

$$t_1 \quad , \quad \underbrace{t_1 q}_{t_2} \quad , \quad \underbrace{t_1 q^2}_{t_3} \quad , \quad \underbrace{t_1 q^3}_{t_4} \quad , \quad \dots \quad , \quad \underbrace{t_1 q^{n-1}}_{t_n}$$

$\xrightarrow{\times q} \quad \xrightarrow{\times q} \quad \xrightarrow{\times q}$

با دقت در الگوی به کار رفته در جملات بالا دیده می شود که:

نکته: جمله n ام یا جمله عمومی دنباله ی هندسی که در آن جمله اول و q قدر نسبت باشد به صورت زیر است.

$$t_n = t_1 q^{n-1}$$

دقت کنیم به جای حرف t از حروف دیگر نیز می توان استفاده کرد.

$$b_n = b_1 q^{n-1} \quad \text{یا} \quad a_n = a_1 q^{n-1}$$

مثال: در دنباله های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جمله ی بعدی را بنویسید. سپس جمله ی عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف) $2, 6, 18, 54, 162, 486, \dots$ $a_1 = 2$, $q = 3$, $a_n = 2 \times 3^{n-1}$

ب) $5, 10, 20, 40, 80, 160, \dots$ $b_1 = 5$, $q = 2$, $b_n = 5 \times 2^{n-1}$

ب) $6, -60, 600, -6000, 60000, -600000, \dots$ $c_1 = 6$, $q = -10$, $c_n = 6 \times (-10)^{n-1}$

$$ت) \quad ۴, ۲, ۱, \frac{1}{۲}, \frac{1}{۴}, \frac{1}{۸}, \dots, e_1 = ۴, q = \frac{1}{۲}, e_n = ۴ \times \left(\frac{1}{۲}\right)^{n-1}$$

مثال: چندمین جمله ی یک دنباله ی هندسی با جمله اول ۱ و قدر نسبت $\frac{1}{۲}$ برابر $\frac{1}{۲۵۶}$ می باشد؟

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 & t_n &= t_1 q^{n-1} \\ q &= \frac{1}{2} & \frac{1}{256} &= 1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 9 \\ t_n &= \frac{1}{256} \end{aligned}$$

مثال: تعداد جملات دنباله ی $۲۵ \times ۱۰۲۴, \frac{۲۵}{۸}, \frac{۲۵}{۴}, \frac{۲۵}{۲}, \dots, ۲۵$ کدام است؟

$$q = \frac{\frac{۲۵}{۴}}{\frac{۲۵}{۲}} = \frac{۲}{۸}$$

$$t_n = t_1 q^{n-1} \rightarrow ۲۵ \times ۱۰۲۴ = \frac{۲۵}{۸} \times (۲)^{n-1}$$

$$۵^۲ \times ۲^{۱۰} = \frac{۵^۲}{۲^۳} \times ۲^{n-1}$$

$$۵^۲ \times ۲^{۱۰} = ۵^۲ \times ۲^{n-1-۳} \rightarrow ۵^۲ \times ۲^{۱۰} = ۵^۲ \times ۲^{n-۴} \rightarrow n-۴ = ۱۰ \rightarrow n = ۱۴$$

تست: در یک دنباله ی هندسی حاصل ضرب جمله ی چهارم و ششم برابر جمله ی دهم است، تفاضل جمله

ی اول از قدر نسبت کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$t_۴ \times t_۶ = t_{10}$$

$$t_1 q^۳ \times t_1 q^۵ = t_1 q^۹$$

$$t_1^۲ q^۸ = t_1 q^۹ \rightarrow t_1^۲ q^۸ - t_1 q^۹ = ۰ \rightarrow t_1 q^۸ (t_1 - q) = ۰$$

$$\begin{cases} t_1 q^۸ = ۰ \\ t_1 - q = ۰ \end{cases}$$

مثال: در يك دنباله ی هندسی $a_4 a_6 = 2a_5$ ، جمله ی اول این دنباله را مشخص کنید.

$$a_1 q^3 \times a_1 q^5 = 2a_1 q^4 \rightarrow a_1 q^8 = 2q^4 \rightarrow a_1 = 2$$

مثال: در يك دنباله هندسی رابطه ی $2a_5 a_7 = (a_6)^2$ برقرار است، قدر نسبت این دنباله را بیابید.

$$2(a_1 q^4)(a_1 q) = (a_1 q^6)^2$$

$$2a_1^2 q^5 = a_1^2 q^{12} \rightarrow 2q^5 = q^{12} \rightarrow 2 = q^7 \rightarrow q = \sqrt[7]{2}$$

مثال: در يك دنباله هندسی جمله دهم مربع جمله ششم است، چه رابطه ای بین جمله اول و قدر نسبت وجود

دارد؟

$$(t_1 \cdot) = (t_6)^2 \quad t_1 q^9 = (t_1 q^5)^2 \rightarrow t_1 q^9 = t_1^2 q^{10}$$

$$1 = t_1 q \rightarrow t_1 = \frac{1}{q} \quad \left(\text{جمله اول و قدر نسبت معکوس یکدیگرند} \right)$$

مثال: مجموع جمله های اول و چهارم يك دنباله ی هندسی ۵۶ و مجموع جمله های دوم و سوم آن ۲۴ است.

قدر نسبت این دنباله را مشخص کنید.

$$t_1 + t_4 = 56 \rightarrow t_1 + t_1 q^3 = 56 \rightarrow t_1(1 + q^3) = 56$$

$$t_2 + t_3 = 24 \rightarrow t_1 q + t_1 q^2 = 24 \rightarrow t_1 q(1 + q) = 24$$

$$\frac{t_1(1 + q^3)}{t_1 q(1 + q)} = \frac{56}{24} \rightarrow \frac{(1 + q)(1 - q + q^2)}{q(1 + q)} = \frac{56}{24} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{(1 - q + q^2)}{q} = \frac{7}{3} \rightarrow 3(1 - q + q^2) = 7q$$

$$\Rightarrow 3 - 3q + 3q^2 = 7q \rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(3)(3) = 100 - 36 = 64$$

$$q = \frac{+10 \pm \sqrt{64}}{2(3)} = \frac{+10 \pm 8}{6} \rightarrow q = 3$$

$$\rightarrow = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

تست: در يك دنباله ی هندسی جمله ی سوم مساوی است با جمله ی دوم بعلاوه دو برابر جمله ی اول، کدام

دو عدد می توانند قدرنسبت این دنباله باشند

$$-2, -1 \quad (1) \quad 2, -1 \quad (2) \quad 2, 1 \quad (3) \quad -2, 1 \quad (4)$$

$$t_r = t_r + 2t_1 \rightarrow t_1 q^r = t_1 q + 2t_1 \rightarrow t_1 q^r - t_1 q - 2t_1 = 0$$

$$t_1(q^r - q - 2) = 0 \begin{cases} t_1 \neq 0 \rightarrow \text{اگر } t_1 = 0 \text{ باشد دنباله } 0, 0, \dots \text{ می شود} \\ q^r - q - 2 = 0 \rightarrow (q-2)(q+1) = 0 \Rightarrow q = 2, q = -1 \end{cases}$$

به دست آوردن خواسته سوال با داشتن جمله عمومی (t_n)

مثال: در دنباله های زیر جمله ی اول و قدرنسبت را مشخص کنید.

$$1: t_n = 5 \times 2^n \rightarrow \begin{cases} t_1 = 10 \\ t_r = 20 \end{cases} \rightarrow q = \frac{20}{10} = 2$$

روش کنکوری: $q = (\text{پایه})^n$ ضرب

$$2: t_n = 7 \times 3^{2n} \quad q = (3)^2 = 9$$

$$3: t_n = 2 \times 3^{n+1} \quad q = (3)^2 = 27$$

$$4: t_n = 5 \times 2^{-3n+1} \quad q = (2)^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$5: t_n = 3(-2)^{n+1} \quad q = (-2)^1 = -2$$

$$6: t_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \quad q = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

تمرین: جمله عمومی یک دنباله هندسی $a_n = 6 \times 2^{3n-1}$ است، قدر نسبت آن کدام است؟

نکته: اگر t_n, t_m دو جمله دلخواه از یک دنباله هندسی باشند داریم:

$$\Rightarrow t_m = t_n q^{(m-n)}$$

حالت خاص $t_n = t_1 q^{n-1}$

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبيب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

به دست آوردن خواسته سوال با داشتن دو جمله دلخواه از دنباله

$$\begin{cases} t_v = 64 \\ t_r = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_v = t_r q^{v-r} \rightarrow 64 = 4q^4 \rightarrow q^4 = 16 \rightarrow \begin{matrix} q = 2 \\ q = -2 \end{matrix} \\ t_r = t_1 q^{r-1} = 4(\pm 2)^1 = \pm 4 \\ t_1 = t_r q^{1-r} = 4(\pm 2)^{-2} = 4 \times \frac{1}{(\pm 2)^2} = 4 \times \frac{1}{4} = 1 \\ t_{11} = t_v q^r = 64(\pm 2)^3 = \pm 64 \times 8 = \pm 512 \end{cases}$$

مثال: اگر جملات پنجم و هفتم یک دنباله ی هندسی به ترتیب ۸ و ۱۶ باشد، جمله ی یازدهم این دنباله کدام

است؟

(۱) ۳۲ (۲) ۱۲۸ (۳) ۶۴ (۴) ۲۰۶

$$t_v = t_5 q^x \rightarrow 16 = 8q^x \rightarrow q = \pm\sqrt{2}$$

$$t_{11} = t_v q^4 = 16 \times (\pm\sqrt{2})^4 = 16(4) = 64$$

درج واسطه m هندسی

نکته: برای درج m واسطه هندسی بین دو عدد a و b ابتدا با فرمول جمله عمومی قدرنسبت را پیدا کرده، سپس واسطه‌ها را بین دو عدد می‌نویسیم.

تست: بین $\frac{1}{3}$ و ۲۷ سه واسطه هندسی درج کرده ایم. مجموع این سه جمله کدام است؟

- ۱۰ (۱) -۷ (۲) -۸ (۳) ۱۲ (۴)

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{3}, -, -, -, 27 & & t_n = t_1 q^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ t_1 & & t_5 \end{array} \quad 27 = \frac{1}{3} q^{5-1} \rightarrow 81 = q^4 \rightarrow q = \pm 3$$

$q = +3 \rightarrow \frac{1}{3}, \underline{1, 3, 9}, 27 \rightarrow 1 + 3 + 9 = 13$
 $q = -3 \rightarrow \frac{1}{3}, -1, 3, -9, 27 \rightarrow -1 + 3 - 9 = -7$

مثال: بین ۳ و ۴۸ سه واسطه ی هندسی درج کنید. آیا جواب یکتاست؟ خیر

$$\begin{array}{ccc} 3, -, -, -, 48 & & t_n = t_1 q^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ t_1 & & t_5 \end{array} \quad 48 = 3 q^{5-1} \rightarrow 16 = q^4 \rightarrow q = \pm 2$$

اگر $q=2$
 $\longrightarrow 3, 6, 12, 24, 48$

اگر $q=-2$
 $\longrightarrow 3, -6, 12, -24, 48$

تست: بین دو عدد ۱۵ و ۴۰۵ چند واسطه هندسی با قدرنسبت ۳ می‌توان درج کرد؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

$$\begin{array}{ccc} 15, \dots \dots \dots, 405 & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ t_1 & & t_n \end{array} \quad \begin{array}{l} t_n = t_1 q^{n-1} \\ \longrightarrow 405 = 15(3)^{n-1} \rightarrow 27 = (3)^{n-1} \rightarrow 3^3 = 3^{n-1} \end{array}$$

تعداد کل جملات $\rightarrow n - 1 = 3 \rightarrow n = 4$

تعداد واسطه ها $= n - 2 = 4 - 2 = 2$

تست: بین دو عدد ۱۵ و ۴۰۵ چند واسطه هندسی با قدرنسبت $\sqrt[3]{3}$ می توان درج کرد

۶ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴)

۱۵,, ۴۰۵
 \downarrow \downarrow
 a_1 a_n

$$\frac{a_n = a_1 q^{n-1}}{\rightarrow 405 = 15(\sqrt[3]{3})^{n-1} \rightarrow 27 = (\sqrt[3]{3})^{n-1} \rightarrow 3^3 = 3^{\frac{n-1}{3}}}$$

تعداد کل جملات $\rightarrow n - 1 = 9 \rightarrow n = 10$

تعداد واسطه ها $= 10 - 2 = 8$

رابطه ی بین سه جمله متوالی در دنباله هندسی

نکته: هر گاه a, b, c سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی باشند داریم.

$$a, b, c \xrightarrow{a \times c = b^2} b = \pm \sqrt{a \times c}$$

\downarrow
 واسطه هندسی بین a, c

۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, ...
 $3 \times 12 = 6^2$ $6 \times 24 = 12^2$

مثال: اگر سه عدد $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$ تشکیل دنباله هندسی دهند، واسطه حسابی بین دو عدد a, b را بدست

آورید.

$$(4\sqrt{2}) = 2^a \times 2^b$$

$$16 \times 2 = 2^{a+b} \rightarrow 2^4 \times 2 = 2^{a+b} \rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \rightarrow a + b = 5$$

$$2x = a + b \rightarrow x = \frac{a + b}{2} = \frac{5}{2}, \quad a, x, b \text{ واسطه حسابی بین}$$

تست: در دنباله ی هندسی و افزایشی ... $4, a, 9, b$ قدرنسبت کدام است؟

$$+6 \quad (1) \quad +\frac{3}{2} \quad (2) \quad -6 \quad (3) \quad -\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$a^2 = 4 \times 9 \rightarrow a^2 = 36 \rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -6 \end{cases}$$

$$a = 6 \rightarrow 4, 6, 9, \dots \text{ افزایشی} \rightarrow q = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$a = -6 \rightarrow 4, -6, 9, \dots \text{ غیر یکنوا} \rightarrow q = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

تست: در دنباله ی هندسی $4, n, n-1, \frac{m+1}{4}$ حاصل $m + 2n$ کدام است.

$$3 \quad (1) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 5 \quad (4)$$

$$4, n, n-1 \Rightarrow 4 \times (n-1) = n^2 \rightarrow 4n - 4 = n^2 \rightarrow n^2 - 4n + 4 = 0 \rightarrow n = 2$$

$$4, \boxed{2, 1, \frac{m+1}{4}} \rightarrow 2 \times \left(\frac{m+1}{4}\right) = 1^2 \Rightarrow \frac{m+1}{2} = 1 \rightarrow m = 1$$

مثال: به ازای کدام مقدار a سه عدد $9 + 6\sqrt{3}, a - 7, 3 - 2\sqrt{3}$ جمله متوالی از دنباله هندسی هستند؟

$$(9 + 6\sqrt{3})(3 - 2\sqrt{3}) = (a - 7)^2 \Rightarrow 27 - 18\sqrt{3} + 18\sqrt{3} - 12 \times 9 = a^2 - 14a + 49$$

$$-9 = a^2 - 14a + 49 \rightarrow a^2 - 14a + 58 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-14)^2 - 4(1)(58) = 196 - 232 = -36 < 0 \xrightarrow{\text{ریشه ندارد}} \text{هیچ مقدار } a$$

نکته: سه جمله متوالی یک دنباله هندسی را بهتر است به صورت زیر نشان دهیم

$$\frac{a}{q}, a, aq$$

تست: در یک تصاعد هندسی مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصلضرب آنها ۲۱۶ است تفاضل کوچکترین و

بزرگترین این سه عدد کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۴ (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴)

$$\begin{cases} \frac{a}{q} + a + aq = 19 \xrightarrow{a=6} \frac{6}{q} + 6 + 6q = 19 \xrightarrow{\times q} 6 + 6q + 6q^2 = 19q \\ \frac{a}{q} \cdot a \cdot aq = 216 \rightarrow a^3 = 216 \rightarrow a = 6 \end{cases} \begin{cases} 6q^2 - 13q + 6 = 0 \\ (6q - 4)(6q - 9) = 0 \\ q = \frac{2}{3} \quad q = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$q = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{6}{\frac{2}{3}}, 6, 6 \times \frac{2}{3} \rightarrow 9, 6, 4 \rightarrow 9 - 4 = 5$$

$$q = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{6}{\frac{3}{2}}, 6, 6 \times \frac{3}{2} \rightarrow 4, 6, 9 \rightarrow 9 - 4 = 5$$

حاصلضرب n جمله ی اول دنباله ی هندسی

مثال: حاصلضرب ۱۰ جمله اول دنباله ی هندسی را به دست آورید.

$$t_1 \times t_2 \times t_3 \times \dots \times t_n \times t_{n+1}$$

$$t_1 \times t_1 q \times t_1 q^2 \times \dots \times t_1 q^{n-1} \times t_1 q^n \times t_1 q^n$$

$$= (t_1 \times t_1 q^n) \times (t_1 q \times t_1 q^n) \times (t_1 q^2 \times t_1 q^{n-2}) \times (t_1 q^3 \times t_1 q^{n-3}) \times (t_1 q^4 \times t_1 q^{n-4})$$

$$= (t_1 \times t_1 q^n) \times (t_1 \times t_1 q^n) \times (t_1 \times t_1 q^n) \times (t_1 \times t_1 q^n) \times (t_1 \times t_1 q^n)$$

$$= \underbrace{(t_1 \cdot t_1 q^n) \times (t_1 \cdot t_1 q^n) \times (t_1 \cdot t_1 q^n) \times (t_1 \cdot t_1 q^n) \times (t_1 \cdot t_1 q^n)}_{\text{۵ بار}} = (t_1 t_1 q^n)^5 = (t_1 \times t_1 q^n)^{\frac{10}{2}}$$

با توجه به مثال بالا در حالت کلی داریم:

نکته: حاصلضرب n جمله ی اول دنباله ی هندسی از فرمول زیر بدست می آید.

$$(t_1 t_n)^{\frac{n}{2}}$$

۲, ۴, ۸, ۱۶, ...

مثال: حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله ی هندسی مقابل را محاسبه کنید.

حل (روش اول)

$$\begin{array}{ccc} 2^1 & 2^2 & 2^3 \\ 2 & 4 & 8, \dots \end{array}$$

$$(t_1 t_n)^{\frac{n}{2}} = (2 \times 2^{20})^{\frac{21}{2}} = (2^{21})^{\frac{21}{2}} = (2^{21})^{10.5} = 2^{210}$$

روش دوم)

$$2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{20} = 2^{1+2+3+\dots+20} = 2^{210}$$

$$1 + 2 + 3 \dots + n = \frac{(n)(n+1)}{2} \rightarrow 1 + 2 + 3 \dots + 20 = \frac{(20)(20+1)}{2} = 210$$

اگر سه جمله ی غیرمتوالی از یک دنباله حسابی تشکیل دنباله ی هندسی بدهند

مثال $t_1, \dots, t_6, \dots, t_6, \dots, t_6, \dots$ دنباله حسابی

$$t_4, t_6, t_{12}, \dots \Rightarrow t_4 \times t_{12} = t_6^2$$

$$\Rightarrow (t_1 + 3d)(t_1 + 11d) = (t_1 + 5d)^2$$

$$\Rightarrow t_1^2 + 11t_1d + 3t_1d + 33d^2 = t_1^2 + 10t_1d + 25d^2 \rightarrow \boxed{t_1 = -2d} \quad |$$

جمله ی سوم دنباله حسابی صفر است $\rightarrow t_3 = 0 \rightarrow t_1 + 2d = 0$

$$q = \frac{t_6}{t_4} = \frac{t_1 + 5d}{t_1 + 3d} \stackrel{\text{طبق 1}}{\implies} q = \frac{-2d + 5d}{-2d + 3d} = \frac{3d}{1d} = 3$$

قدر نسبت دنباله هندسی

نکته: در دنباله ی حسابی $t_1, \dots, t_m, \dots, t_n, \dots, t_k$ اگر جملات t_m, t_n, t_k تشکیل دنباله ی هندسی دهند قدرنسبت دنباله ی

$$q = \frac{k-n}{n-m}$$

هندسی برابر است با

$$q = \frac{12-6}{6-4} = \frac{6}{2} = 3$$

روش کنکوری

تست: جملات دوم و پنجم و دوازدهم از یک دنباله ی حسابی، می توانند سه جمله ی متوالی از دنباله هندسی

باشند، قدرنسبت دنباله ی هندسی کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۲)

$$(1) \frac{5}{3} \quad (2) \frac{7}{4} \quad (3) \frac{9}{4} \quad (4) \frac{7}{3}$$

تست: در يك تصاعد عددی جملات سوم، هفتم و نهم می توانند سه جمله متوالی از تصاعد هندسی باشند،

چندمین جمله ی این تصاعد صفر است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

$$q = \frac{t_v}{t_r}$$

$$12 (4) \quad 11 (3) \quad 10 (2) \quad 9 (1)$$

$$q = \frac{9-7}{7-3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{t_v}{t_r} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{t_1 + 6d}{t_1 + 2d} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2t_1 + 12d = t_1 + 2d$$

$$\rightarrow t_1 + 10d = 0 \rightarrow t_9 = 0$$

مجموع n جمله ی اول دنباله ی هندسی

فعالیت: دنباله هندسی زیر را در نظر بگیرید، ($q \neq 1$)

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}$$

فرض می کنیم مجموع n جمله اولیه دنباله هندسی S_n باشد:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

طرفین رابطه را در q ضرب می کنیم:

$$S_n q = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

$S_n - S_n q$ را تشکیل و آن را ساده کنید:

$$\begin{aligned} S_n - S_n q &= (a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}) - (aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n) \\ &= a - aq^n \end{aligned}$$

با فاکتورگیری داریم:

$$S_n(1 - q) = a(1 - q^n)$$

پس نتیجه می گیریم:

$$S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

حالت خاص: در صورتی که قدرنسبت دنباله هندسی یک باشد مجموع n جمله اول دنباله هندسی را به دست

آورید. ($a \neq 0$)

$$a, a, a, \dots, a \quad q = 1 \quad S_n = na$$

مثال: مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots \quad S_{10} = \frac{1}{8} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} \cong 0.249755$$

مثال: برای محافظت از تابش خطرناک مواد رادیواکتیویته لایه های محافظتی وجود دارد که شدت تابش

پرتوها پس از عبور از هر یک از آنها نصف می شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد

خطرناک دست کم تا ۹۷ درصد کاهش یابد؟

حل: اولین لایه: شدت تابش را نصف می کند. دومین لایه باز این تابش را نصف می کند $\left(\frac{1}{2}\right)$ و... بدین ترتیب

دنباله ای از اعداد به دست می آید:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

این یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{2}$ است. حال می خواهیم بدانیم چند جمله از این دنباله باید جمع شود تا

حاصل حداقل ۹۷ درصد شود.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{3}{100} \Rightarrow 2^n \geq \frac{100}{3} \cong 33.3$$

با آزمایش اعداد طبیعی در نامعادله اخیر، و اینکه $2^6 = 64$ در می یابیم که حداقل مقدار n برابر برقراری

نامساوی فوق برابر با ۶ خواهد بود. پس تعداد لایه ها باید حداقل شش تا باشد.

روش دوم

درصد کاهش داشته $98/375 \rightarrow 1/625 \xrightarrow{\text{لایه ۶ } 3/25} \xrightarrow{\text{لایه ۵ } 6/5} \xrightarrow{\text{لایه ۴ } 12/5} \xrightarrow{\text{لایه ۳ } 25} \xrightarrow{\text{لایه ۲ } 50} \xrightarrow{\text{لایه ۱ } 100}$ شدت تابش

مثال: در داستان مخترع شطرنج (صفحه ۵ کتاب) اگر در خانه اول یک دانه گندم و در خانه دوم دو دانه گندم و

به همین صورت در هر خانه دو برابر خانه قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم:

الف) این جایزه چند گرم می شود؟

گرم $(1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63})$

$$\frac{1(1 - 2^{64})}{1 - 2} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

ب) نشان دهید جایزه او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن خواهد شد. چون ۱۰۰۰ میلیارد تن برابر است با 10^{18} گرم

$$a = 1 \quad q = 2 \quad n = 64 \quad S_n = a \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) \rightarrow 1 \left(\frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} \right) = S_{64}$$

$$S_{64} = 2^{64} - 1 > 2^{63} = (2^7)^9 > 100^9 = 10^{18}$$

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی

مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از قبل را رنگ می کنیم. پس از دست کم

چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \quad S_n = a \left[\frac{1 - q^n}{1 - q} \right]$$

$$S_n > \frac{99}{100} \quad \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \right] > \frac{99}{100} \quad 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 99/100$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{100} \rightarrow 2^n > 100 \quad n \text{ حداقل} = 7$$

تمرین: در یک دنباله ی هندسی جمله ی اول برابر ۳ و قدرنسبت برابر ۲- است مجموع هفت جمله ی اول این

دنباله چیست؟ جواب ۱۲۹

مثال: در دنباله ی هندسی با شرایط $a_1 = 3$ و $a_5 = 24$ مجموع ۵ جمله ی اول برابر چیست؟

$$a_5 = a_1 q^4 \rightarrow 24 = 3q^4 \rightarrow q = 2$$

$$S_5 = \frac{a_1(1 - q^5)}{1 - q} = \frac{3(1 - 2^5)}{1 - 2}$$

مثال: جمله ی عمومی یک دنباله ی هندسی $a_n = 2^{n+1}$ است

الف) مجموع ۱۰ جمله ی اول آنرا حساب کنید.

$$\begin{aligned} a_1 &= 2^{1+1} = 2^2 = 4 \\ q &= 2^1 = 2 \end{aligned} \rightarrow S_{10} = \frac{4(1 - 2^{10})}{1 - 2} = \frac{4(1 - 1024)}{-1} = 4(1023)$$

ب) مجموع چند جمله از دنباله هندسی برابر ۱۲۴ است؟

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 \\ q &= 2 \\ S_n &= 124 \\ n &=? \end{aligned} \quad S_n = \frac{4(1 - 2^n)}{1 - 2} \Rightarrow 124 = \frac{4(1 - 2^n)}{-1} \Rightarrow 1 - 2^n = \frac{-124}{4}$$

$$\rightarrow 1 - 2^n = -31 \rightarrow -2^n = -32 \rightarrow 2^n = 32 \Rightarrow \boxed{n = 5}$$

مثال: جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا

مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

$$a_n = 2^{n-1} \quad 1, 2, 4, 8, \dots$$

$$S_n = a \left[\frac{1 - q^n}{1 - q} \right] \quad S_n = 255 \quad \left[\frac{1 - 2^n}{-1} \right] = 255$$

$$2^n - 1 = 255 \quad 2^n = 256 \rightarrow 2^n = 2^8 \rightarrow n = 8$$

تمرین: مجموع چند جمله اول از دنباله ی هندسی ... ۱۶, ۸, ۴, ۲ برابر ۱۰۲۲ است

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ q &= 2 \\ S_n &= 1022 \\ n &=? \end{aligned}$$

تمرین: مجموع n جمله ی اول دنباله هندسی ... ۶, -۱۲, ۲۴, ... برابر ۲۵۸ است n چقدر است؟

$$\begin{aligned} a_1 &= 6 \\ q &= -2 \\ S_n &= 258 \\ n &=? \end{aligned}$$

مثال: در يك دنباله هندسی هر جمله دو برابر جمله قبلی است. اگر مجموع ۵ جمله ی اول آن ۳۱ باشد جمله

ی اول آن دنباله کدام است؟

$$\begin{aligned} q &= 2 \\ S_5 &= 31 \\ n &= 5 \\ a_1 &=? \end{aligned} \quad S_5 = \frac{a(1-q^5)}{1-q} \Rightarrow 31 = \frac{a(1-2^5)}{1-2} \Rightarrow 31 = \frac{a(1-32)}{-1} \Rightarrow -31 = a(-31) \rightarrow \boxed{a=1}$$

مثال: مجموع شش جمله ی اول دنباله ... $\frac{1}{4}, x, 2$ را در دو حالت بررسی کنید.

$$x^2 = 2 \times \frac{1}{4} \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

$$\left\{ \begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ q = \frac{1}{4} \text{ (یکنوا)} \\ n = 6 \\ S_6 = ? \end{cases} \end{aligned} \right.$$

مثال: در دنباله ی هندسی و غیریکنوای ... $a, 9, b, 4$ مجموع ۶ جمله ی اول چند است؟

$$\frac{673}{8} \text{ (۴)} \quad \frac{-131}{32} \text{ (۳)} \quad \frac{665}{8} \text{ (۲)} \quad \frac{-133}{32} \text{ (۱)}$$

$$a^2 = 4 \times 9 \rightarrow a^2 = 36 \rightarrow a = \pm 6$$

$$a = 6 \rightarrow q = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{دنباله صعودی} \Rightarrow \text{دنباله یکنوا} \Rightarrow \text{غ ق ق}$$

$$a = -6 \rightarrow q = \frac{-3}{2} \Rightarrow \text{دنباله غیر یکنوا} \Rightarrow \text{ق ق}$$

$$\begin{cases} a = 6 \\ q = \frac{-3}{2} \\ n = 6 \\ s_p = ? \end{cases} \Rightarrow s_p = \frac{6 \left(1 - \left(\frac{-3}{2} \right)^6 \right)}{1 - \left(\frac{-3}{2} \right)} =$$

مثال: برای عدد حقیقی $a (a \neq 1)$ و عدد طبیعی n ؛

الف) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = ? \rightarrow a = 1, q = a, n = n \quad S_n = a \left[\frac{1 - q^n}{1 - q} \right]$$

$$S_n = 1 \left[\frac{1 - a^n}{1 - a} \right] \rightarrow 1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

$$\rightarrow 1 - a^n = (1 - a)(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$$

مثال: حاصل $(1 + x + x^2 + \dots + x^8)(1 - x + x^2 - \dots + x^8)$ به ازای $x = \sqrt{2}$ کدام است؟

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^8)(1 - x + x^2 - \dots + x^8)$$

↓
نه جمله

$$\begin{cases} n = 9 \\ a_1 = 1 \\ q = x \end{cases} \quad \begin{cases} n = 9 \\ a = 1 \\ q = -x \end{cases}$$

$$s_9 = \frac{1(1 - x^9)}{1 - x} \quad s_9 = \frac{1(1 - (-x)^9)}{1 - (-x)} = \frac{1 + x^9}{1 + x}$$

$$\frac{(1-x^9)}{1-x} \times \frac{1+x^9}{1+x} = \frac{1-x^{18}}{1-x^2} \xrightarrow{x=\sqrt{2}} \frac{1-2^9}{1-2} = 511$$

تست: به ازای یک مقدار x اعداد $x^2 - 2$ و $2x$ و $x^2 + 4$ به ترتیب سه جمله ی هندسی نزولی

اند. مجموع هفت جمله ی اول این دنباله کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۳)

$$\frac{127}{8} \text{ (۴)} \quad \frac{63}{4} \text{ (۳)} \quad \frac{125}{16} \text{ (۲)} \quad \frac{117}{16} \text{ (۱)}$$

$$(x^2 + 4)(x^2 - 2) = (2x)^2$$

$$x^4 + 2x^2 - 8 = 4x^2 \rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 = t \rightarrow t^2 - 2t - 8 = 0 \quad \begin{matrix} t = 4 \\ t = -2 \end{matrix}$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2 \quad \begin{matrix} \text{یکنوا } x = +2 \rightarrow 8, 4, 2, \dots \\ \text{غیریکنوا } x = -2 \rightarrow 8, -4, 2, \dots \end{matrix}$$

$$a_1 = 8 \quad q = \frac{1}{2} \quad s_7 = \frac{8(1 - (\frac{1}{2})^7)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{8(1 - \frac{1}{128})}{\frac{1}{2}} = \frac{8(1 - \frac{1}{128})}{\frac{1}{2}} = \frac{8 \times 127}{128} = \frac{8 \times 127 \times 2}{128} = \frac{127}{8}$$

مثال: در یک دنباله ی هندسی یکنوا، مجموع هشت جمله ی اول، ۱۷ برابر مجموع چهار جمله ی اول است

قدرنسبت دنباله چیست؟

$$s_8 = 17s_4 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = 17 \times \frac{a_1(1-q^4)}{1-q}$$

$$\Rightarrow 1 - q^8 = 17(1 - q^4) \Rightarrow (1 - q^4)(1 + q^4) = 17(1 - q^4)$$

$$\Rightarrow 1 - q^4 = 17 \rightarrow q^4 = 16 \rightarrow q = \pm 2 \quad \begin{matrix} q = +2 \text{ ق ق} \\ q = -2 \text{ غ ق ق} \end{matrix}$$

مثال: در یک دنباله ی هندسی جمله ی هفدهم، ۸ برابر جمله ی چهاردهم آن است. مجموع هشت جمله ی

اول این دنباله چند برابر جمله ی اول آن است؟

$$a_{17} = 8a_{14} \rightarrow a_1 q^{16} = 8a_1 q^{13} \rightarrow q^3 = 8 \rightarrow q = 2$$

$$\frac{s_8}{a_1} = ? \quad \frac{a_1(1-q^8)}{\frac{1-q}{a_1}} = \frac{1-2^8}{1-2} = 255$$

تست: در دنباله ی هندسی ... ۱, ۲, ۴, ... مجموع چهارده جمله ی اول چند برابر مجموع هفت جمله ی اول است

(سراسری تجربی ۹۰)

۶۵ (۱) ۶۳ (۲) ۱۲۷ (۳) ۱۲۹ (۴)

$$\frac{s_{14}}{s_7} = ? \rightarrow \frac{\frac{a_1(1-q^{14})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^7)}{1-q}} = \frac{(1-q^{14})(1+q^7)}{1-q^7} = 1+q^7 = 1+2^7 = 129$$

مثال: در یک دنباله ی هندسی، مجموع سه جمله ی اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله ی اول ۱۵۳ است جمله ی

اول چند برابر جمله ی پنجم است؟ (سراسری ریاضی ۸۹)

$$s_3 = 136 \rightarrow \frac{s_6}{s_3} = \frac{153}{136} \rightarrow \frac{\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}} = \frac{153}{136}$$

$$\Rightarrow \frac{1-q^6}{1-q^3} = \frac{153}{136} \rightarrow \frac{(1-q^3)(1+q^3)}{1-q^3} = \frac{153}{136}$$

$$\Rightarrow 1+q^3 = \frac{153}{136} \rightarrow q^3 = \frac{153}{136} - 1 = \frac{17}{136} = \frac{1}{8}$$

$$\rightarrow \boxed{q = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{a_1}{a_6} = ? \quad \frac{a_1}{a_1 q^5} = \frac{1}{q^5} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^5} = 32$$

به دست آوردن خواسته سوال با داشتن مجموع n جمله اول دنباله (s_n)

مثال: اگر مجموع n جمله ی اول یک دنباله هندسی به صورت $1 - 2^n = S_n$ باشد مطلوبست: الف) جمله اول ب) جمله دوم

پ) قدرنسبت ت) جمله عمومی

$$\begin{cases} n = 1 \rightarrow s_1 = 1 \rightarrow s_1 = a_1 = 1 \\ n = 2 \rightarrow s_2 = 3 \rightarrow a_1 + a_2 = 3 \rightarrow a_2 = 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

$$q = \frac{a_2}{a_1} = 2$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 1 \times 2^{n-1}$$

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبیب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour