



www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

به نام خدا

کتاب برتر نهایی حسابان

ویرایش جدید

آموزش مطالب مهم درسی به همراه مثال‌های متعدد

مؤلف

حمید اصلانی

(کارشناس ارشد ریاضیات محض گرایش آنالیز هارمونیک و مدرس دانشگاه)

ویرایش علمی: یاسر غربی و ابراهیم سبحانی

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

کتاب برتر نهایی حسابان / مولف حمید اصلانی ، ویرایش علمی یاسر

غربی و ابراهیم سبحانی - تهران: نشر صبا، ۱۳۹۴

۱۹۸ ص. : مصور، نمودار.

فهرست نویسی براساس اطلاعات فیبا.

این کتاب از مجموعه کتابهای طبقه بندی شده حمید اصلانی است.

چاپ دوم

۱. ریاضیات - کتابهای درسی - راهنمای آموزشی (متوسطه). ۲.

ریاضیات - آزمونها و تمرینها (متوسطه). ۳. دانشگاهها و مدارس عالی -

ایران - آزمونها. الف. حمید اصلانی ۱۳۶۶

رده بندی کنگره : QA۱۳۹۲۱۳۹۳۳۶۵الف/

رده بندی دیویی : ۵۱۰/۷۶

شماره کتابشناسی ملی : ۳۲۲۱۶۳۱

موسسه فرهنگ سازان نامی

عنوان کتاب:	کتاب برتر نهایی حسابان
مؤلف:	حمید اصلانی (۰۹۳۰۲۰۱۰۳۹۹)
ویرایش علمی:	یاسر غربی و ابراهیم سبحانی
هماهنگی امور اجرایی:	حمید اصلانی
امور کامپیوتری:	سپیده غربی
قطع:	رحلی
نوبت چاپ:	اول
طراح جلد:	میلاد عزیزی
تیراژ:	۵۰۰
لیتوگرافی:	میلاد عزیزی
قیمت:	۱۶۰۰۰ تومان
شابک:	۹۶۹۱۶ - ۹۶۴۰۴ - ۹۷۸

کلیه ی حقوق برای ناشر محفوظ است و متخلفین تحت پیگرد قانونی قرار می گیرند.

پیشگفتار

خداوند منان را سپاسگزاریم که به ما توفیق خدمت به نظام مقدس جمهوری اسلامی ایران را دادند. مجموعه‌ای که در پیش‌رو دارید حاصل تجربه‌ی چندین سال تدریس چند معلم در پایه‌های مختلف دبیرستان‌ها می‌باشد که آنها را به گونه‌ای تنظیم نموده‌ایم که بتوان آن را در کلاس درس، تدریس نمود. البته سعی بر آن بوده که کتاب تا حدودی خودآموز باشد تا اگر دانش‌آموزی قصد فراگیری مطالب را به تنهایی داشت این امر میسر شود.

ساختار کتاب و نحوه‌ی استفاده از کتاب

این مجموعه شامل بحث می‌باشد بخش اول مطالب علمی و نکات مربوطه از ابتدایی‌ترین نکات تا پیچیده‌ترین مطالب (البته در سطح فهم دانش‌آموزان) قرار داده شده در بخش دوم سعی بر آن است تا با مثالی ساده و شیوا مطلب را روشن‌تر کنیم بخش سوم با عنوان تمرین در کلاس قالب‌بندی شده که این سؤالات در ۳ تیپ از ساده به دشوار و حالت‌های مختلف طرح سوال را قرار داده‌ایم. در بخش چهارم یعنی تمرینات دوره‌ای برای تثبیت مطالب علمی و فراگرفته‌های دانش‌آموز سؤالات متنوع‌تری را قرار داده‌ایم و در بخش آخر، تمرینات تکمیلی سؤالاتی در سطح المپیاد قرار داده‌ایم تا دانش‌آموزان سخت‌کوش نیز بتوانند از این مجموعه استفاده کنند.

سخنی با معلمان

یکی از مشکلاتی که اکثر معلمان با آن مواجه هستند، کلاس‌های با واریانس بالا است یعنی اینکه وقتی یک مطلب علمی ارائه می‌شود بعضی از دانش‌آموزان آن را متوجه می‌شوند و برخی آن را متوجه نمی‌شوند در این زمان وقتی معلم به‌سراغ تدریس مجدد می‌رود حوصله دانش‌آموزان باهوش به سر می‌رود و تحمل کلاس را ندارند ما برای این مشکل راه‌حلی را پیشنهاد می‌کنیم. مفیدترین و بهینه‌ترین روش تدریس با این مجموعه بدین صورت است که ابتدا مطالب علمی یک بار تدریس می‌شود و دانش‌آموزانی که مطلب را فرا گرفتند به‌سراغ حل سؤالات تیپ ۱ تمرین در کلاس می‌روند در

همین حین یکبار دیگر مطلب برای دانش‌آموزانی که مطالب را فرا نگرفته بودند گفته می‌شود به همین صورت بار سوم نیز درس داده می‌شود تجربه نشان داده با این روش بیش از ۹۸٪ دانش‌آموزان مطالب را فرا می‌گیرند و در کلاس حوصله‌ی کسی سر نمی‌رود چون در کتاب همه‌ی سطوح سوال قرار گرفته است.

سخن پایانی

با اینکه در تألیف این مجموعه نهایت دقت به کاربرده شده ولی انسان‌ها ممکن الخطا هستند در پایان از شما صاحب نظر محترم تقاضا داریم که در هر چه بهتر شدن این مجموعه ما را یاری رسانید و ما را از نظرات و پیشنهادات خودتان به‌رمند سازید.

با تشکر

حمید اصلانی

Aslani1388@gmail.com

۰۹۳۰۲۰۱۰۳۹۹

مقدمه

ریاضیات از علوم پایه و بسیار مهم جوامع بشری محسوب می‌شود امروزه کمتر کسی است که به اهمیت ریاضیات و کاربرد وسیع آن در دنیای علوم واقف نباشد. توجه به وابستگی شدید جامعه‌ی علمی کامپیوتر و به تبع آن وابستگی ناگسستنی کامپیوتر به علم ریاضی تنها گوشه‌ای از عظمت و اهمیت این دانش شگرف و پر اعجاز را نمایان می‌سازد. بی شک بزرگترین ثمره‌ی ریاضیات، ساختن انسان‌هایی فکور، مستعد و خوش ذوق در جهت خدمت به بشریت و تکامل همه‌ی ابعاد زندگی است.

و اما دانش‌آموزان عزیزی که از این کتاب استفاده می‌کنید: توجه نمایید که یادگیری ریاضی نیازمند به تمرین و دقت فراوان در کنار علاقه حقیقی به مباحث آن می‌باشد. پس سعی کنید بعد از تدریس درس توسط دبیر ریاضی خود، تمرین‌های این کتاب را که مکمل کتاب درسی شماست، شخصا و در اولین فرصت انجام دهید.

دبیران محترم نیز ضمن توجه به این مطلب که رمز موفقیت در آموزش ریاضی، استفاده از ساده‌ترین مفاهیم علمی در کنار حوصله‌ی فراوان است، متعلمین را به این نکته که ریاضیات درسی عملی است نه نظری، واقف نمایند.

قره‌باقری - مرداد ۹۲

هر چند ناچیز ولی

تقدیم به ساحت مقدس

آقا امام علی (ع)

به مناسبت شهادت ایشان

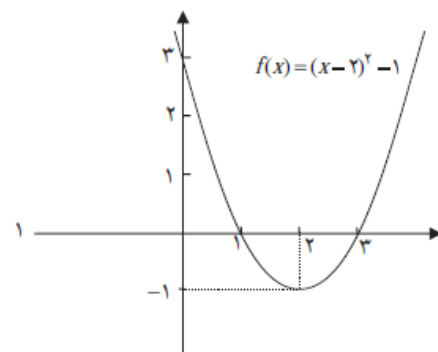
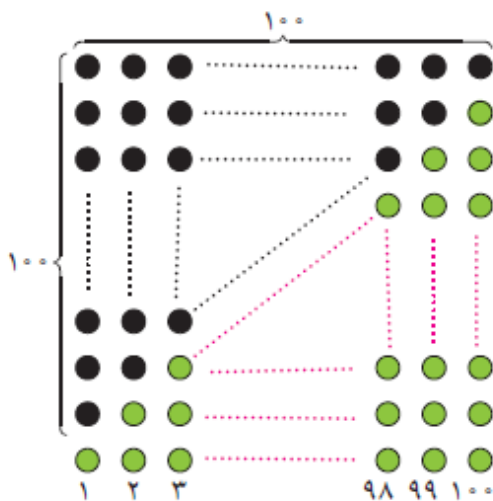
۱۳۹۲/۵/۱۲

فهرست

صفحه	عنوان
۲	فصل اول
۴۴	فصل دوم
۷۸	فصل سوم
۱۰۰	فصل چهارم
۱۲۶	فصل پنجم

فصل اول

محاسبات جبری ، معادلات و نامعادلات



خلاصه ی فصل اول

تصاد حسابی

(۱) اگر جمله اول تصاعد حسابی a_1 و قدر نسبت آن d باشد جمله n ام از رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ یا $a_n = dn + T$ تعیین می شود.

(۲) مجموع n جمله ی اولیه ی تصاعد حسابی از رابطه ی $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ بدست می آید.

(۳) با جایگذاری فرمول (۱) در فرمول (۲) رابطه ی دیگری برای S_n تعیین می شود که چنین است:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

مجموع n جمله ی اول دنباله های حسابی :

$$+ \begin{cases} s = a_1 & , & a_1 + d & , & a_1 + 2d & , & \dots & , & a_1 + (n-1)d \\ s = a_1 + (n-1)d & , & \dots & , & a_1 \end{cases}$$

$$2s = (2a_1 + (n-1)d) + \dots + (2a_1 + (n-1)d)$$

$$2s = n \times [2a_1 + (n-1)d]$$

 \Rightarrow

$$s = \frac{n}{2} \times [2a_1 + (n-1)d]$$

فرمول :

مثال

در دنباله ی حسابی ... و ۱۵ ۹ ۳ حداقل چند جمله ی آن باید جمع کنیم تا حاصل از ۳۰۰ بیشتر شود.

(دی ماه ۹۳)

(۰/۷۵ نمره)

نمونه

(۱) مجموع ۲۰ جمله ی اول دنباله ی حسابی ... ۲, ۴, ۶, ۸ را بنویسید .

پاسخ:

$$s_n = \frac{n}{2} \times [2a_1 + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow s_{20} = 10 \times [4 + (19) \times 2] = 420$$

(۲) مجموع حداکثر چندجمله از دنباله ی ... ۳, ۷, ۱۱, ۱۵, ۱۹ می باشد ؟

پاسخ:

$$s_n = \frac{n}{2} \times [2a_1 + (n-1)d]$$

$$\Rightarrow s_n = [6 + (n-1) \times 4] = 420 \Rightarrow s_n = \frac{n}{2} [6 + (4n-4)] = 420$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{n}{2} \times [4n + 2] \Rightarrow s_n = n(2n + 1) \Rightarrow s_n = n(2n + 1) < 200$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n=9 \rightarrow 9 \times 19 < 200 & \checkmark \\ n=10 \rightarrow 10 \times 21 > 200 & \times \end{cases} \Rightarrow n=9 \quad \text{روش آزمون و خطا:}$$

تصاعد هندسی

(۱) اگر جمله ی اول تصاعد هندسی a_1 و قدر نسبت آن q باشد جمله ی n ام از رابطه ی $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

تعیین می شود.

(۲) مجموع n جمله ی اولیه ی تصاعد هندسی از رابطه ی $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ به دست می آید.

(۳) در یک تصاعد هندسی نامتناهی اگر $|q| < 1$ | آنگاه مجموع بی نهایت جمله برابر است با: $\frac{a_1}{1-q}$

نمونه

(۱) در دنباله‌ی حسابی $2, 6, 10, 14, \dots$ حداقل چند جمله را باید جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر

(شهریور ۹۰)

شود؟ (انمره)

$$S_n > 200, \quad a_1 = 2, d = 4, n = ?$$

پاسخ:

$$\frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d] > 200$$

$$\frac{n}{2} [2(2) + (n-1)4] > 200 \Rightarrow \frac{n}{2} [4 + 4n - 4] > 200$$

$$\frac{4n^2}{2} > 200 \Rightarrow 2n^2 > 200 \Rightarrow n^2 > 100 \Rightarrow n > 10$$

پس باید حداقل ۱۱ جمله از دنباله‌ی فوق را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۲۰۰ بیشتر شود.

(۲) توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه‌ی $\frac{1}{3}$ ارتفاع اولیه‌ی

خود بالا می‌رود. فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۵ متری برسد، می‌خواهیم

بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن، این توپ چقدر مسافت طی می‌کند؟

(خرداد ۹۰)

(۱/۲۵ انمره)

پاسخ: دنباله مسافت پیموده شده به صورت زیر است.

$$10, \frac{10}{3}, \frac{10}{9}, \dots \rightarrow a = 10, q = \frac{1}{3}$$

$$S = \frac{a}{1-q} \Rightarrow S = \frac{10}{1-\frac{1}{3}} = \frac{10}{\frac{2}{3}} = \frac{30}{2} = 15$$

مجموع n جمله ی اول دنباله های هندسی :

$$\begin{cases} s_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^n \\ qs_n = a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \end{cases} \Rightarrow (q-1)s_n = a_1q^n - a_1$$

$$s_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} \quad \text{فرمول:}$$

نمونه

(۱) مجموع ۲۰ جمله ی اول دنباله ی هندسی ... $\frac{5}{2}, 5, 10, 20$ را بنویسید

پاسخ:

$$s_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} \rightarrow s_{20} = 2 \cdot \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right)$$

(۲) مجموع ۵ جمله ی اول دنباله ی ... $1, 3, 9$ را بنویسید.

پاسخ:

$$s_n = a_1 \frac{(1-q^n)}{1-q} \rightarrow s_5 = 9 \frac{\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{27}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5\right)$$

فرمول جدید مجموع n جمله ی اول دنباله های حسابی (عددی) :

$$s_n = \bigcirc n^2 + \bigcirc n$$

↓ ↓

تنظیم کننده ی جمله ی اول نصف قدر نسبت

نمونه

(۱) مجموع ۱۰ جمله ی اول دنباله ی حسابی ... ۷ ، ۴ ، ۱ را بنویسید .

پاسخ : قدر نسبت = ۳

$$S_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n \Rightarrow S_{10} = \frac{3}{2} \times (10)^2 - \left(\frac{1}{2} \times 10 \right) = 150 - 5 = 145$$

پیدا کردن جمله ی عمومی از روی مجموع جمله ات :

$$s_n = Mn^2 + Nn \rightarrow a_n = 2Mn + (N - M)$$

نمونه

$$s_n = 1n^2 + 3n \rightarrow a_n = 2n + 2 \quad (۱)$$

$$s_n = 3n^2 + 5n \rightarrow a_n = 6n + 2 \quad (۲)$$

$$s_n = 5n^2 - 3n \rightarrow a_n = 10n - 8 \quad (۳)$$

ضریب n^2 \Leftarrow نصف قدر مطلق

مجموع ضرایب \Leftarrow جمله ی اول

نکته :

مثال

(۱) در دنباله ی هندسی نامتناهی زیر ، مجموع تمام جملات را بیابید (۷۵/نمره) (خرداد ۹۱)

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$$

(۲) مجموع بیست جمله ی اول دنباله ی حسابی زیر را بیابید. (نمره) (دی ۹۱)

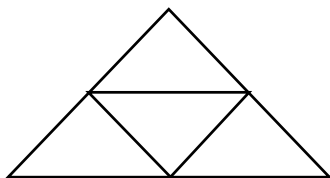
$$-5, -3, -1, \dots$$

(۳) در دنباله ی حسابی زیر ، مجموع بیست جمله ی اول دنباله را بیابید . (نمره) (شهریور ۹۲)

$$-5, 0, 5, \dots$$

(۴) یک مثلث با محیط p در نظر بگیرید. وسط های اضلاع آن را به هم وصل کنید و مثلث کوچکتر جدیدی بسازید. این عمل را مجددا روی مثلث کوچکتر انجام دهید. این عمل را به طور متوالی انجام دهید. مجموع

محیط های مثلث های به دست آمده چقدر است. (نمره) (خرداد ۹۴)



تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش پذیری

۱) اگر چند جمله‌ای $P(x)$ را بر $B(x)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت $Q(x)$ و باقیمانده $R(x)$ باشد:

$$P(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x) \quad \text{آنگاه:}$$

درجه‌ی $R(x)$ کوچکتر از درجه‌ی $B(x)$ است.

اگر $P(x)$ بر $B(x)$ بخش پذیر باشد آنگاه: $P(x) = B(x) \cdot Q(x)$

۲) باقیمانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x-a$ برابر است با $P(a)$.

اگر $P(a) = 0$ آنگاه $P(x)$ بر $x-a$ بخش پذیر است.

۳- باقیمانده‌ی تقسیم $P(x)$ را بر $B(x)$ تقسیم کنیم و خارج قسمت $Q(x)$ و باقیمانده $R(x)$ باشد.

۴) اتحادهای چاق و لاغر عبارتند از:

$$\text{الف) برای هر } n \text{ طبیعی: } a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

$$\text{ب) برای } n \text{ فرد: } a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \dots - a + 1)$$

$$\text{ج) برای هر } n \text{ طبیعی: } x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

$$\text{د) برای } n \text{ فرد: } x^n + y^n = (x+y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

نمونه

۱) مقدار k را چنان بیابید که چند جمله‌ای $P(x) = 2x^3 - kx^2 - x + 3$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد. (۷۵/نمره)

(خرداد ۹۰)

پاسخ:

$$x+1=0 \rightarrow x=-1$$

$$p(-1)=0 \rightarrow 2(-1)^3 - k(-1)^2 - (-1) + 3 = 0$$

$$-2 - k + 1 + 3 = 0 \rightarrow k = 2$$

۲) a را چنان بیابید که یک جواب معادله‌ی $x^3 - 2x^2 + ax + 2 = 0$ برابر ۲ باشد سپس جواب‌های

(دی ۹۰)

دیگر معادله را به دست آورید. (انمره)

پاسخ:

چون $x=2$ یک جواب معادله است لذا باید در معادله صدق کند.

$$2^3 - 2(2)^2 + a(2) + 2 = 0 \Rightarrow 8 - 8 + 2a + 2 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-2)q(x)$$

حال داریم:

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 \left| \begin{array}{l} x-2 \\ \hline x^2-1 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 \\ \hline -x + 2 \\ \hline -x + 2 \\ \hline 0 \end{array} \Rightarrow q(x) = x^2 - 1$$

حال جواب‌های دیگر معادله جواب‌های معادله $x^2 - 1 = 0$ می‌باشد.

$$x^2 - 1 = 0 \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

۳) مقادیر m و n را چنان بیابید که چند جمله‌ای $x^2 + mx + n$ بر $x-2$ و $x+1$ بخش پذیر باشد. (انمره)

(دی ۸۹)

پاسخ:

چون $p(x)$ بر $x-2$ و $x+1$ بخش پذیر است لذا $p(2) = 0$ و $p(-1) = 0$.

$$\begin{cases} P(2) = 2^2 + M(2) + n = 0 \\ P(-1) = (-1)^2 + M(-1) + n = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2m + n = -4 \\ -m + n = -1 \end{cases}$$

به روشنی $m = -1$ و $n = -2$ می‌باشد.

تقسیم به روش هورنر :

نمونه

$$3x^2 + 4x - 1 \quad | \quad x - 1$$

(۱) تقسیم زیر را با استفاده از روش هورنر محاسبه کنید .

پاسخ :

بزرگترین توان x	x^2	x^1	x^0	
ضرایب x ها	۳	۴	-۱	
عدد بالا		ضربدر ریشه به علاوه عدد بالایی		
	۳	$3 \times 1 + 4 = 7$	۶	
	x^1	x^0	R	

خارج قسمت : $3x + 7$ و باقیمانده = ۶

نکته : (۱) اگر ریشه مقسوم علیه را در مقسوم قرار دهیم باقیمانده بدست می آید .

$$p(x) = (x - a)q(x) + R(x) \quad \text{مقسوم علیه} \quad B(x) =$$

$$p(a) = (a - a)q(a) + R(a) \quad \Leftarrow \quad \text{به جای } x, a \text{ قرار می دهیم .}$$

$$\Rightarrow p(x) = R(a)$$

(۲) اگر ریشه مقسوم علیه را در مقسوم قرار دهید، باقیمانده بدست می آید .

نمونه

(۱) باقیمانده تقسیم $p(x) = x^2 + \varepsilon x - 1$ بر $x - 1$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \quad \text{ریشه:}$$

$$p(1) = 1^2 + \varepsilon(1) - 1 = \varepsilon \quad \text{باقیمانده:}$$

(۲) مقدار k را طوری بیابید تا باقیمانده $p(x) = 3x^2 + \varepsilon x - k$ به $x - 2$ برابر 10 باشد.

پاسخ:

$$p(2) = 3(2^2) + \varepsilon(2) - k = 10 \rightarrow 3 \times \varepsilon + 8 - k = 10 \rightarrow 12 + 8 - k = 10 \Rightarrow \boxed{k = 10}$$

* (۳) باقیمانده $p(x)$ بر $x - 1$ و $x - 2$ به ترتیب برابر 2 و 3 است. باقیمانده $p(x)$ بر $x^2 - 3x + 2$

را بدست آورید. (مهم نهایی)

$$\begin{cases} p(1) = 2 \\ p(2) = 3 \end{cases} \quad \text{باقیمانده}$$

پاسخ: ریشه مقسوم علیه $1 =$

روش اول: فرمول باقیمانده:

یادآوری: $x^2 - 3x + 2$ همان ضرب دو عبارت $x - 1$ و $x - 2$ است.

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 1}, \quad \boxed{b = 1} \Rightarrow R(x) = x + 1$$

$$\frac{-a = -1}{-a = -1}$$

روش دوم:

دو نقطه ی داده شده $(1, 2)$ و $(2, 3)$

$$\frac{3 - 2}{2 - 1} \Rightarrow m = 1$$

$$y = mx + b \Rightarrow 2 = 1 + b \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \boxed{y = x + 1} \quad \text{باقیمانده:}$$

مثال

حاصل اتحادهای زیر را بدست آورید .

الف) $a^x - 1 =$

ب) $a^{2x} + 1 =$

ج) $x^x - y^x =$

د) $x^y + y^y =$

نکته :

(۱) در $x^n + a^n$ ، اگر n زوج باشد ، بر $x + a$ بخش پذیر نیست .

اثبات : $x + a = 0$

بخش پذیر نیست . $x = -a \rightarrow (-a)^n + a^n \rightarrow a^n + a^n = 2a^n \neq 0$

(۲) در $x^n - a^n$ اگر n فرد باشد ، بر $x + a$ بخش پذیر نیست .

اثبات : $x + a = 0$

بخش پذیر نیست . $x = -a \rightarrow (-a)^n - a^n \rightarrow -a^n - a^n = -2a^n \neq 0$

نمونه

(۱) آیا $x^{10} + 3^{10}$ بر $x + 3$ بخش پذیر است ؟

پاسخ : کافی است ریشه ی $x + 3$ را در $x^{10} + 3^{10}$ قرار دهیم .

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

لذا بخش پذیر نیست . $(-3)^{10} + 3^{10} \rightarrow 3^{10} + 3^{10} \neq 0$

(۲) آیا $x^{24} + a^{24}$ بر $x^3 + a^3$ بخش پذیر است ؟

$x^3 + a^3 = 0$

پاسخ :

$x^3 = -a^3 \Rightarrow (x^3)^8 - a^{24} \Rightarrow (-a^3)^8 - a^{24} \Rightarrow a^{24} - a^{24} = 0$

مثال

۱) مقدار m را چنان بیابید که چند جمله ای $p(x) = 3x^3 - 2x + 2m$ بر $x - 2$ بخشپذیر باشد.

(شهریور ۹۱)

(انمره)

(دی ۹۱)

۲) به کمک اتحادها ، عبارت زیر را ساده کنید . (انمره)

$$A = \frac{(x^5 + 1)(x - 1)}{x^2 - 1}$$

(شهریور ۹۲)

۳) معادله ی $(x^2 - 1)^2 - 2 = 0$ را حل کنید . (۱/۲۵ انمره)

۴) $p(x)$ یک چندجمله ای درجه ۲ است و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است . $p(x)$ را به گونه ای

تعیین کنید که در شرایط روبه رو صدق کند . (انمره)

$$p(1) = 1, p(2) = 3$$

(خرداد ۹۲)

(۵) اگر باقیمانده ی تقسیم چند جمله ای $p(x) = 2x^4 + mx + 2$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد ، باقیمانده ی تقسیم آن بر $x - 1$ را بیابید . (۷۵/نمره)

(دی ۹۲)

(۶) مقدار m را چنان بیابید که چند جمله ای $p(x) = 2x^3 - mx^2 + 2x + 1$ بر $2x + 1$

(خرداد ۹۳)

(بخش پذیر باشد). (۷۵/نمره)

(خرداد ۹۴)

(۷) جاهای خالی را با اعداد مناسب پر کنید. (۷۵/۰)

(الف) باقیمانده ی تقسیم $p(x) = 5x^3 + 2x^2 - x + 4$ بر $x + 1$ برابر است با

(ب) مجموع ضرایب بسط دو جمله ای $(3x - 1)^6$ برابر است.

(ج) کمترین مقدار تابع $f(x) = 3x^2 - 12x + 1$ برابر است.

یادآوری : نکات فاکتوریل (!) :

$$۱) \binom{n}{1} = n \qquad ۲) \binom{n}{n-1} = n$$

نکته : برای محاسبات اعداد بزرگ می توان از اختلاف n و k استفاده کرد به طوری که n را به اندازه y اختلاف آن ها باز می کنیم.

نمونه

$$\binom{n}{k} = \binom{15}{12} = \frac{15 \times 14 \times 13}{\underbrace{3 \times 2 \times 1}_{n-k}} = 455$$

نمونه

(شهریور ۹۰)

۱) حاصل عبارت $\left(1 - \frac{2}{x}\right)^5$ را به دست آورید. (۷۵/نمره)

پاسخ :

با توجه مثلث خیام پاسکال

$$(a+b)^5 = 1, 5, 10, 10, 5, 1$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^5 &= 1^5 + 5(1)^4 \left(\frac{-2}{x}\right)^1 + 10(1)^3 \left(\frac{-2}{x}\right)^2 + 10(1)^2 \left(\frac{-2}{x}\right)^3 + 5(1) \left(\frac{-2}{x}\right)^4 + \left(\frac{-2}{x}\right)^5 \\ &= 1 - \frac{10}{x} + \frac{40}{x^2} - \frac{80}{x^3} + \frac{80}{x^4} - \frac{32}{x^5} \end{aligned}$$

مثال

(شهریور ۹۲)

۱) جمله ی سوم از بسط $(2x - 1)^7$ برابر است با (۵/نمره)

(شهریور ۹۳)

۲) حاصل عبارت $(x - 2)^8$ را به دست آورید. (۲۵/نمره)

(دی ۹۳)

۳) جمله ی سوم بسط $\left(x + \frac{2}{x}\right)^5$ را بنویسید. (۷۵/نمره)

ک.م.م. و پ.م.م

(۱) برای تعیین ک.م.م دو عدد یا دو عبارت، ابتدا باید آن دو را تجزیه کنیم، سپس عوامل مشترک را با توان بزرگتر در عوامل غیر مشترک ضرب می‌کنیم.

(۲) برای تعیین ب.م.م دو عدد یا دو عبارت، ابتدا باید آن دو را تجزیه کرد، سپس عوامل مشترک با توان کوچکتر را در هم ضرب می‌کنیم.

پ.م.م (gcd):

$$\frac{a}{d}, \frac{b}{d} \Rightarrow \begin{cases} d \leq a \\ d \leq b \end{cases} \quad (a, b) = d \quad \text{بزرگترین مقسوم علیه مشترک:}$$

ک.م.م (Lcm):

$$\frac{L}{a}, \frac{L}{b} \Rightarrow \begin{cases} L \geq a \\ L \geq b \end{cases} \quad [a, b] = L \quad \text{کوچکترین مضرب مشترک:}$$

نکته: (۱) ب.م.م حاصل ضرب عوامل مشترک با توان کمتر است.

(۲) ک.م.م حاصل ضرب عوامل مشترک با توان بیشتر و عوامل غیر مشترک با همان توان است.

نمونه

(۱) ب.م.م و ک.م.م دو عدد ۳۶ و ۴۸ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$a = 36 \rightarrow 2 \times 3 \times 2 \times 3 \rightarrow 2^2 \times 3^2$$

$$b = 48 \rightarrow 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \rightarrow 2^4 \times 3$$

ب.م.م: $2^2 \times 3$ و ک.م.م: $2^4 \times 3^2$

(۲) در دنباله های زیر صدمین جمله ی مشترک کدام است ؟

۳, ۷, ۱۱ ...

۲, ۷, ۱۲ ...

پاسخ :

$$\begin{cases} d_1 = 4 \\ d_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow [d_1, d_2] = 20$$

$$7, 27, 47, \dots \rightarrow d = 20 \rightarrow a_n = 2 \cdot n - 13 \rightarrow 20 \times 10 - 13 = 1987$$

معادله ی درجه ی دوم

(۱) ریشه های معادله ی درجه ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ در حالتی که $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ عبارتند از:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(۲) اگر $\Delta = 0$ آنگاه معادله ی درجه ی دوم ریشه ی مضاعف $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$ دارد.

(۳) اگر در معادله ی $ax^2 + bx + c = 0$ رابطه ی $a + b + c = 0$ برقرار باشد آنگاه: $x' = 1$ و $x'' = \frac{c}{a}$

(۴) اگر در معادله ی $ax^2 + bx + c = 0$ رابطه ی $a + c = b$ برقرار باشد آنگاه: $x' = 1$ و $x'' = -\frac{c}{a}$

(۵) اگر x' و x'' ریشه های معادله ی درجه دوم باشند آنگاه: $x'x'' = \frac{c}{a}$ و $x' + x'' = -\frac{b}{a}$

(۶) اگر α و β ریشه های یک معادله ی درجه دوم باشند و $\alpha + \beta = S$ و $\alpha\beta = P$ آنگاه آن معادله ی درجه دوم به صورت: $x^2 - Sx + P = 0$ نوشته می شود.

(۷) تابع درجه ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ در حالت $a > 0$ به کمترین مقدار

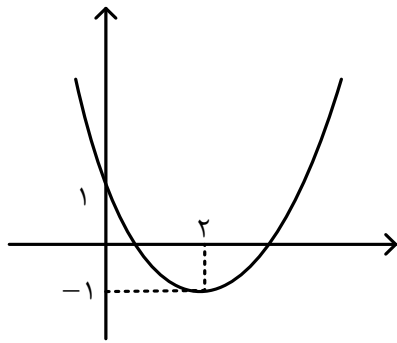
(می نرسد) و در حالت $a < 0$ به بیشترین مقدار (ماکزیمم) می رسد.

نمونه

۱) در شکل مقابل نمودار سهمی به معادله $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. ضرایب a ، b و c را تعیین

(شهریور ۹۰)

کنید. (۱/۲۵ نمره)



پاسخ:

چون نمودار محور y ها را در $y = 1$ قطع کرده است لذا $c = 1$ و چون \min تابع در $x = 2$ رخ داده پس

$\frac{-b}{2a} = 2$ و اما نقطه $(2, -1)$ باید در تابع صدق کند پس.

$$\begin{cases} a(2)^2 + b(2) + 1 = -1 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -2 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \end{cases}$$

(دی ۹۰)

۲) بیشترین مقدار تابع $f(x) = -x^2 + 4x + 1$ را تعیین کنید. (۷۵ نمره)

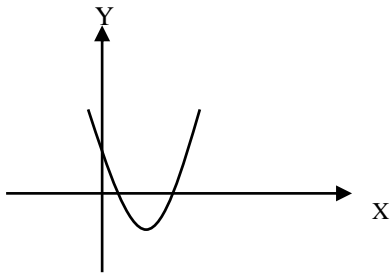
$$x = -\frac{b}{2a} \rightarrow x = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

پاسخ:

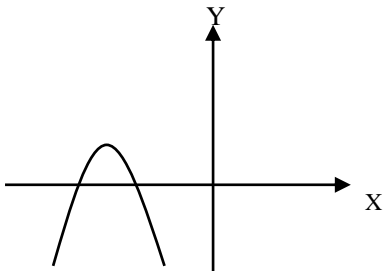
$$f(2) = -(2)^2 + 4(2) + 1 = -4 + 8 + 1 = 5$$

مثال

(۱) در شکل زیر ، سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است . علامت ضرایب a و b و c و تعداد ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید. (شهریور ۹۱) (انمره)

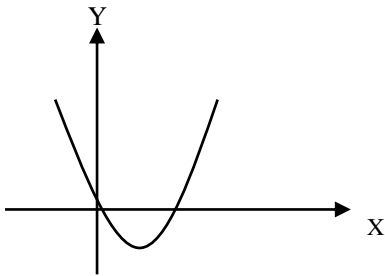


(۲) در شکل زیر سهمی به معادله $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است . علامت ضرایب a و b و c و تعداد جواب های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید . (انمره) (خرداد ۹۲)



(۳) در معادله $2x^2 - 8x + m = 0$ اگر یکی از جواب ها دو واحد از جواب دیگر بزرگتر باشد ، m و هر دو جواب را پیدا کنید . (۱/۲۵ انمره) (دی ۹۲)

(شهریور ۹۳)

۴) شکل زیر نمودار تابع $p(x) = ax^2 + bx + c$ است. (نمره ۰/۷۵)الف) علامت a و b را تعیین کنید .ب) مقدار c را بیابید .

۵) ۱۴۴ لیتر آب میوه ، ۴۵ لیتر شیر و ۶۳ لیتر دوغ در شیشه هایی با حجم یکسان بسته بندی شده اند .

حداقل تعداد شیشه ها را بیابید . (گنجایش شیشه ها را بر حسب لیتر ، عدد طبیعی فرض کنید)

(خرداد ۹۱)

(نمره ۰/۷۵)

۶) اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند ، ریشه های معادله یدرجه ی دوم $cx^2 + bx + a = 0$ برابرند با و ($c \neq 0$). (نمره ۰/۵)

(خرداد ۹۱)

۷) اگر α و β ریشه های معادله درجه ی دوم $x^2 - 5x - 5 = 0$ باشد، معادله ای بنویسید که ریشه هایآن 2α و 2β باشد. (نمره ۱/۵)

معادلات گویا

برای حل معادلات گویا (کسری)، طرفین معادله را در ک.م.م مخرجها ضرب می‌کنیم و با ساده کردن عبارت جبری بدست آمده، معادله را حل می‌کنیم. جواب بدست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند، همچنین ممکن است برخی از جوابها با شرایط مسئله که از واقعیت می‌آیند مطابقت نداشته باشند که این جوابها نیز قابل قبول نیستند.

نمونه

(۱) معادله ی زیر را حل کنید .

$$\frac{x+1}{2} + \frac{3x-1}{4} = \frac{2}{5}$$

پاسخ: دامنه ی معادله ی فوق می باشد چون در مخرج نداریم . تمام کسرها را در ک م م مخرجها ضرب می‌کنیم .

$$1 \cdot x + 1 \cdot 0 + 15x - 5 = 8 \Rightarrow 25x = 8 - 5 \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{25}}$$

(۲) معادله ی زیر را حل کنید .

$$\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x-1} = 1$$

پاسخ: دامنه : $R - \{\pm 1\}$ ک م م : $(x+1)(x-1)$

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1 = x^2 - 1 \Rightarrow x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{-3}}$$

تعریف نشده لذا معادله جواب ندارد.

معادلات گنگ

(۱) برای حل معادلات گنگ (رادیکالی) طرفین معادله را به توان مناسب می‌رسانیم و ساده می‌کنیم، اگر معادله چند رادیکال داشته باشد باید چند بار طرفین را به توان برسانیم تا در معادله، رادیکال باقی نماند.

سپس معادله‌ی بدون رادیکال را حل می‌کنیم. جواب‌های بدست آمده را باید در معادله‌ی اصلی (اولیه) امتحان کنیم زیرا عملیات به توان‌رسانی ممکن است جوابهای اضافی تولید کند.

(۲) عبارت‌های منفی نمی‌توانند زیر رادیکال فرجه‌ی زوج قرار می‌گیرند.

(۳) حاصل عبارت‌های رادیکالی با فرجه‌ی زوج منفی نمی‌شوند.

نمونه

(۱) معادله‌ی زیر را حل کنید .

$$x + \sqrt{x} = 12$$

$$(\sqrt{x})^2 = (12-x)^2$$

پاسخ: باتوان‌رسانی رادیکال را از بین می‌بریم

$$x = 144 - 24x + x^2 \Rightarrow x^2 - 25x + 144 = 0 \Rightarrow (x-9)(x-16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=9 \rightarrow 9 + \sqrt{9} = 12 & \text{ق ق} \\ x=16 \rightarrow 16 + \sqrt{16} \neq 12 & \text{غ ق} \end{cases}$$

نکته مهم: بعد از بدست آوردن جواب باید جواب‌ها در معادله امتحان شود.

(۲) معادله‌ی زیر را حل کنید .

$$x + \sqrt{x} = 8$$

$$(\sqrt{x})^2 = (8-x)^2$$

پاسخ:

$$x = 64 - 16x + x^2 \Rightarrow x^2 - 15x + 64 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 225 + \left(\frac{-4 \times 1 \times 64}{-256} \right) = -31$$

ریشه‌ی منفی لذا معادله جواب ندارد.

نمونه

(۱) عدد صحیحی را بیابید که جمع آن با جذرش برابر ۶ باشد. (۱/۲۵/نمره)

(دی ۹۰)

پاسخ:

$$x + \sqrt{x} = 6 \rightarrow \sqrt{x} = 6 - x$$

(طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم)

$$x = 36 - 12x + x^2 \rightarrow x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x-9) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=4 & \checkmark \\ x=9 & \times \end{cases}$$

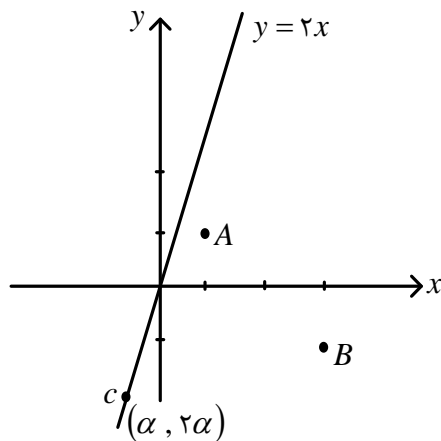
$x=9$ (چون در معادله صدق نمی‌کند) غ ق

جواب صحیح $x=4$ است.

(۲) نقطه‌ای روی خط $y=2x$ بیابید که از دو نقطه‌ی $A(1,1)$ و $B(3,-1)$ به یک فاصله باشد. (نمره)

(دی ۸۹)

پاسخ:



$$|Ac| = |Bc|$$

$$\sqrt{(\alpha-1)^2 + (2\alpha-1)^2} = \sqrt{(\alpha-3)^2 + (2\alpha+1)^2}$$

طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(\alpha-1)^2 + (2\alpha-1)^2 = (\alpha-3)^2 + (2\alpha+1)^2$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = \alpha^2 - 6\alpha + 9 + 4\alpha^2 + 4\alpha + 1$$

$$-6\alpha + 2 = -2\alpha + 10 \rightarrow \boxed{\alpha=2}$$

پس نقطه‌ی (۲ و ۴) روی خط $y=2x$ از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله می‌باشد.

۳) معادله های زیر را حل کنید. (۵/۲نمره)

(خرداد ۹۰ خارج از کشور)

الف) $\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = 2$

ب) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$

ج) $\sqrt{x^2 - 5x + 3} + x^2 - 5x = 9$

د) $\frac{3}{m+2} + \frac{2}{m} = \frac{4m-4}{m^2-4}$

ه) $\sqrt{x+\sqrt{x-1}} - \sqrt{2x-2} = 0$

پاسخ:

الف) $\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = 2$

$$[\sqrt{1+x} = 2 + \sqrt{x}]^2 \rightarrow 1+x = 4 + 4\sqrt{x} + x \Rightarrow 4\sqrt{x} = -3$$

چون یک طرف مساوی همواره منفی و طرف دیگر همواره مثبت است پس معادله جواب ندارد.

ب) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$

طرف راست تساوی را تجزیه می کنیم.

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$$

$$(1-\sqrt{x}) = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})^2 \rightarrow 1-\sqrt{x} = 0 \rightarrow \boxed{x=1}$$

$$\rightarrow (1+\sqrt{x})^2 = 0 \rightarrow \sqrt{x} = -1 \text{ جواب ندارد}$$

لذا معادله فقط یک جواب ($x=1$) دارد.

ج) $\sqrt{x^2 - 5x + 3} + x^2 - 5x = 9$

ابتدا قرار دهید $a = x^2 - 5x$

$$\sqrt{a+3} + a = 9 \rightarrow [\sqrt{a+3} = 9-a]^2$$

$$a+3 = 81 - 18a + a^2 \rightarrow a^2 - 19a + 78 = 0$$

$$(a-13)(a-6) = 0 \rightarrow \begin{cases} a=13 \\ a=6 \end{cases} \text{ (در معادله صدق نمی کند) غ ق ق}$$

$$\rightarrow x^2 - 5x = 6 \rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow (x-6)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$د) \frac{3}{m+2} + \frac{2}{m} = \frac{4m-4}{m^2-4}$$

$$\frac{3m+2m+4}{m(m+2)} = \frac{4m-4}{(m-2)(m+2)} \quad (\text{طرفین وسطین})$$

$$(\Delta m + 4)(m - 2) = m(4m - 4)$$

$$\Delta m^2 - 1 \cdot m + 4m - 8 = 4m^2 - 4m \rightarrow m^2 - 2m - 8 = 0$$

$$(m-4)(m+2) = 0 \rightarrow \begin{cases} m=4 \\ m=-2 \end{cases} \quad (\text{چون مخرج را صفر می کند غ ق ق})$$

$$ه) \sqrt{x+\sqrt{x-2}} = \sqrt{2x-2} = 0$$

$$\left[\sqrt{x+\sqrt{x-2}} = \sqrt{2x-2} \right]^2 \rightarrow x + \sqrt{x-2} = 2x-2$$

$$\rightarrow \left[\sqrt{x-2} = x-2 \right]^2 \rightarrow x-1 = x^2 - 4x + 4$$

$$\rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

مثال

(۱) معادله ی زیر را حل کنید. (۱/۲۵نمره)

(دی ۹۱)

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2 \right)^2 - 11 \left(\frac{x^2}{3} - 2 \right) + 10 = 0$$

(۲) مجموعه ی جواب معادله ی $\frac{x}{x-3} + \frac{3}{x-1} = 5$ برابر است با (نمره ۰/۲۵) (خرداد ۹۱)

(۳) معادله ی زیر را حل کنید. (نمره ۰/۷۵) (شهریور ۹۱)

$$2\sqrt{x} = \sqrt{3x+9}$$

(۴) مجموعه جواب معادله ی $x + \sqrt{x} = 6$ برابر است با (نمره ۰/۵) (خرداد ۹۲)

(۵) جواب معادله ی $\sqrt{2-x^2} = x$ برابر می باشد. (نمره ۰/۲۵) (خرداد ۹۳)

(۶) محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ متر مربع است. اندازه ی طول و عرض این زمین را تعیین کنید. (نمره) (خرداد ۹۳)

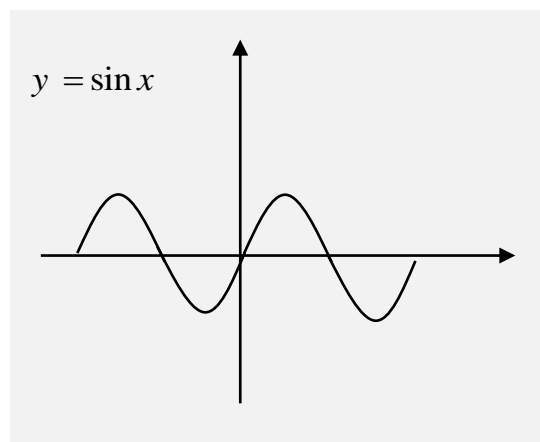
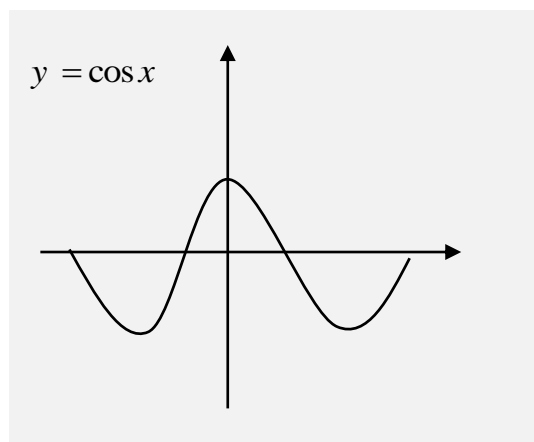
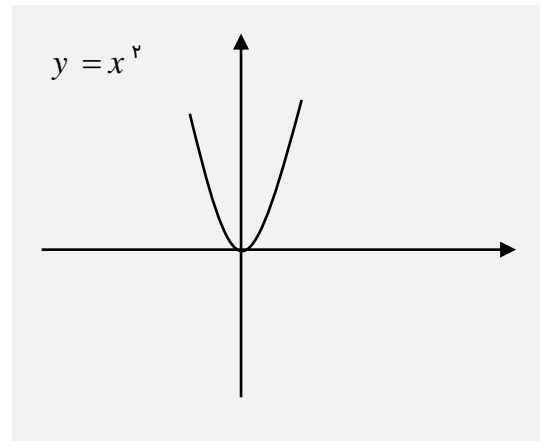
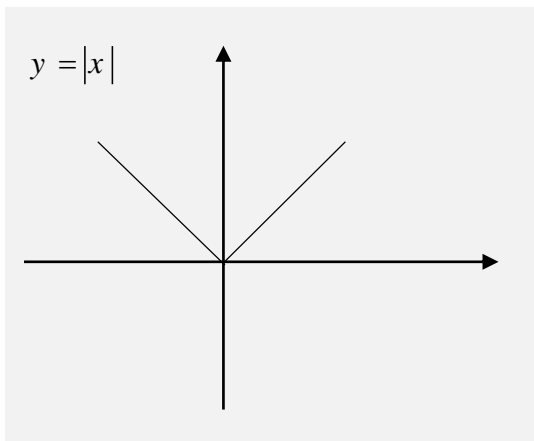
(۷) معادله ی $||x| - 2| = 3$ را حل کنید. (نمره) (شهریور ۹۳)

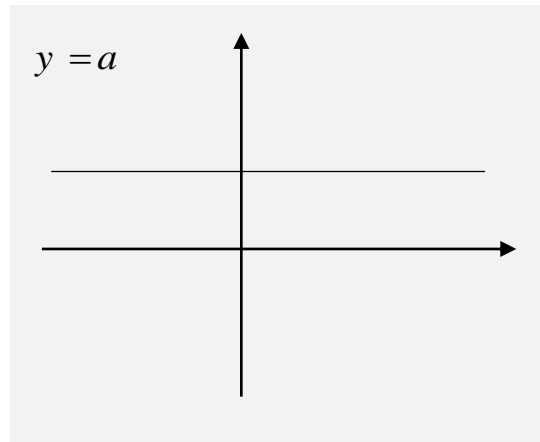
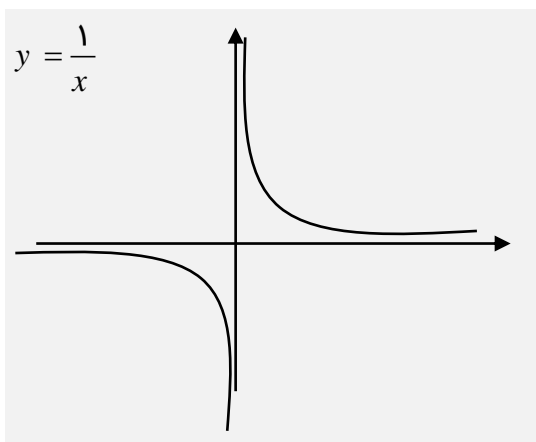
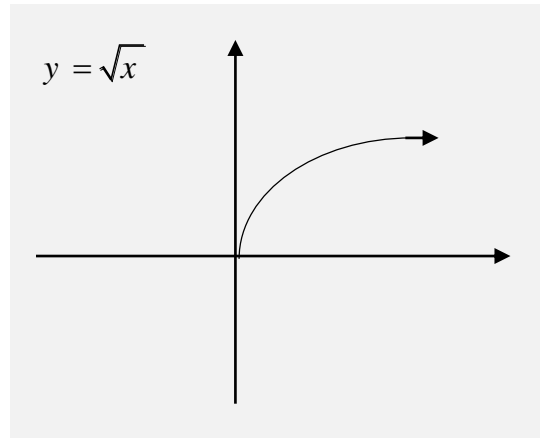
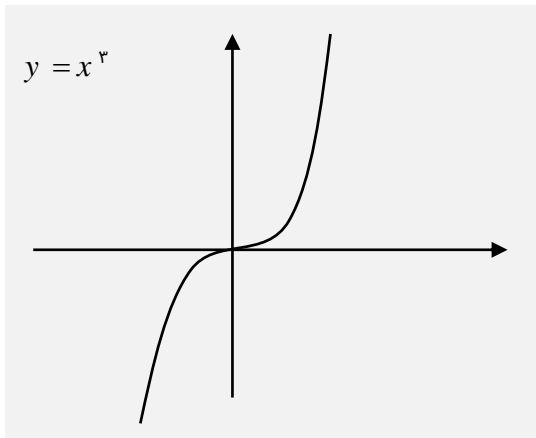
(۸) معادله ی $\frac{5}{x} - \frac{4}{x(x-2)} = \frac{x-4}{x-2}$ را حل کنید. (نمره) (خرداد ۹۴)

حل معادلات و نامعادلات به روش هندسی (نموداری):

- (۱) جواب‌های معادله‌ی $f(x) = g(x)$ ، طول نقاط تلاقی نمودارهای دو تابع $y = f(x)$ و $y = g(x)$ است. اگر نمودار دو تابع همدیگر را قطع کنند معادله‌ی $f(x) = g(x)$ ریشه‌ی ساده و اگر نمودار دو تابع بر هم مماس باشند، معادله‌ی $f(x) = g(x)$ ریشه‌ی مضاعف دارد.
- (۲) جوابهای نامعادله‌ی $f(x) < g(x)$ مقداری از دامنه‌ی مشترک دو تابع است که نمودار $y = f(x)$ زیر نمودار $y = g(x)$ است.

توابع پرکاربرد:

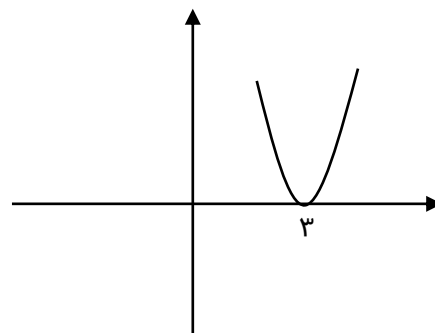




نکته ۱: برای رسم $y = (mx + b)^2$ یا هر تابع دیگری، ابتدا ریشه ی معادله را بدست می آوریم سپس نمودار را از ریشه ی آن رسم می کنیم .

نمونه

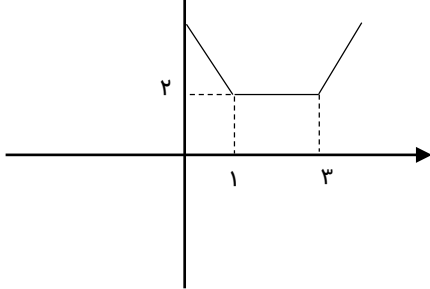
ریشه : $x = 3 \rightarrow y = (2x - 6)^2$



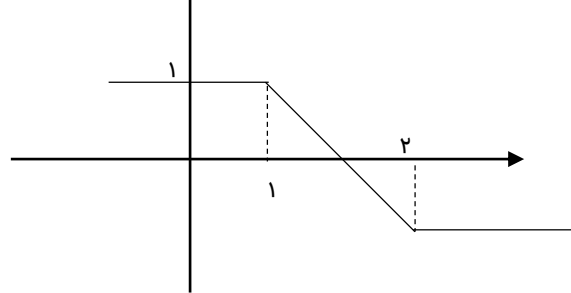
نکته ۲: تابع $y = |x - a| + |x - b|$ به صورت گلدانی و تابع $y = |x - a| - |x - b|$ به صورت پلکانی می باشد .

نمونه

$$y = |x - 1| + |x - 3|$$



$$y = |x - 2| - |x - 1|$$



نکته ۳: فضای زیر نمودار گلدانی همیشه باید مربع باشد. اختلاف دو عدد روی محور x ها را بدست می آوریم تا عدد روی محور y بدست آید.

$$\frac{3-x}{x-3} = -1 \quad \text{نمونه:} \quad \frac{a-b}{b-a} = -1 \quad (۴)$$

نمونه

(۱) نامعادلات زیر را به روش هندسی حل کنید.

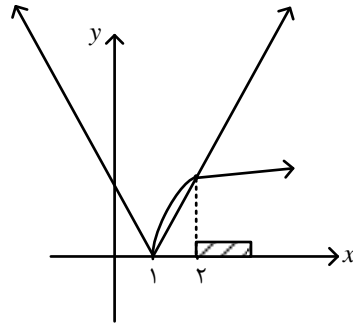
۱) $\sqrt{x-1} \leq |x-1|$ (۲۵/۱نمره) (خرداد ۹۰)

۲) $\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$ (۱نمره) (شهریور ۹۰)

۳) $|x| < x^2$ (۲۵/۱نمره) (دی ۸۹)

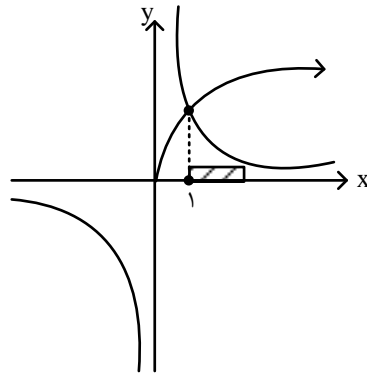
پاسخ:

۱) $\sqrt{x-1} \leq |x-1|$



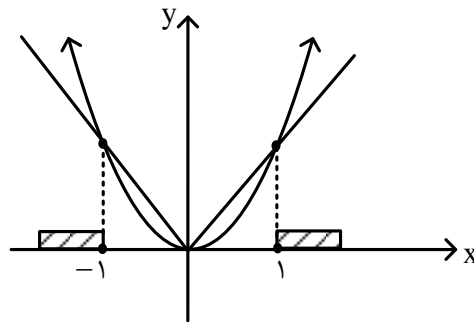
$x \in [2, +\infty) \cup \{1\}$

۲) $\frac{1}{x} \leq \sqrt{x}$



$x \in [1, +\infty)$

۳) $|x| < x^2$



$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

مثال

(شهریور ۹۱)

۱) نامعادله ی $|x| \leq x^2$ را به روش هندسی حل کنید . (انمره) ۱/۲۵

(خرداد ۹۱)

۲) معادله ی $\sqrt{1-x} - 1 = x^2 - 2x$ را به روش هندسی حل کنید . (انمره)

(۳) معادله ی $\sqrt{x+1} = x - 1$ را به روش هندسی حل کنید و جواب آن را مشخص کنید. (۱/۲۵نمره) (شهریور ۹۲)

(۴) نامعادله ی $|x| + |x - 1| \leq 3$ را به روش هندسی حل کنید. (۱/۵نمره) (خرداد ۹۲)

(۵) معادله ی $\sqrt{x+1} = x^2 + 2x + 1$ را به روش هندسی حل کرده و جواب آن را در صورت وجود به دست آورید. (۱/۲۵نمره) (دی ۹۲)

(۶) معادله ی $x + \frac{x}{|x|} = 3$ را به روش هندسی حل کنید. (۱/۵نمره) (خرداد ۹۳)

قدر مطلق و ویژگی های آن

(۱) برداشتن قدر مطلق: هر گاه بخواهیم قدر مطلق را از روی یک عدد یا عبارت برداریم باید علامت داخل قدر مطلق را بدانیم آنگاه:

$$|a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

نتیجه: برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم کرده و جاهایی که زیر محور x هاست، تصویر آئینه‌ای آن را رسم می‌کنیم.

ویژگی‌های قدر مطلق:

$$۱) |x| < a \rightarrow -a < x < a$$

a همواره از صفر بزرگتر است.
 $a > 0$

$$۲) |x| > a \rightarrow x > a \quad \vee \quad x < -a$$

$$۳) |x| = a \rightarrow x = \pm a$$

(۲) اعمال بر روی قدر مطلق‌ها:

الف) $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$

ب) $\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|$

ج) $k > 0; k|a| = |ka|$

د) $|a| + |b| \geq |a + b|$

هـ) $|a| - |b| \leq |a - b|$

(۳)

؛ حالت خاص: $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} x \\ |x| \end{cases}$

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{فرد } n \\ |x| & \text{زوج } n \end{cases}$$

(۴) معادلات قدر مطلق:

الف) $|x| = c \Rightarrow \begin{cases} c \geq 0 \Rightarrow x = \pm c \\ c < 0 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$

ب) $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$

(۵) نامعادلات قدر مطلق:

$$\text{الف) } |x| \leq c \Rightarrow \begin{cases} c \geq 0 \Rightarrow -c \leq x \leq c \\ c < 0 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

$$\text{ب) } |x| \geq c \Rightarrow \begin{cases} c \geq 0 \Rightarrow x \leq -c \text{ یا } x \geq c \\ c < 0 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \end{cases}$$

$$\text{ج) } |x| \leq |y| \Rightarrow x^2 \leq y^2$$

نمونه

(۱) برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید: $|a+b| \leq |a|+|b|$ (۰/۷۵)

سپس با استفاده از آن ثابت کنید: $|b|-|a| \leq b-a$ (خرداد ۹۰)

پاسخ:

$$\begin{aligned} & -|a| \leq a \leq |a| \\ + \\ & -|b| \leq b \leq |b| \\ \hline & -(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b| \\ \Rightarrow & |a+b| \leq |a|+|b| \end{aligned}$$

می‌توان در عبارت بالا به جای b قرار دهید $b-a$.

$$|a+b-a| \leq |a|+|b-a| \rightarrow |b|-|a| \leq b-a$$

(۲) به کمک تعیین علامت عبارت داخل قدر مطلق، ضابطه‌ی $f(x) = x|x-2|$ را بدون استفاده

از قدر مطلق بنویسید. (انمره) (دی ۹۰)

پاسخ:

$$f(x) = \begin{cases} x(x-2) & x \geq 2 \\ x(2-x) & x < 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ 2x - x^2 & x < 2 \end{cases}$$

نمونه

(۱) نامعادلات زیر را حل کنید .

الف) $|2x + 3| < 4$

پاسخ:

$$-4 < 2x + 3 < 4 \xrightarrow{+(-3)} -4 - 3 < 2x < 4 - 3 \rightarrow -7 < 2x < 1 \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} -\frac{7}{2} < x < \frac{1}{2}$$

ب) $|3x - 1| < 2$

پاسخ:

$$-2 < 3x - 1 < 2 \xrightarrow{+1} -2 + 1 < 3x < 2 + 1 \rightarrow -1 < 3x < 3 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} -\frac{1}{3} < x < 1$$

(۲) نامعادلات زیر را حل کنید . (حل نامعادله به روش جبری)

الف) $|3x + 4| > 10$

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4 > 10 \rightarrow 3x > 6 \rightarrow x > 2 \\ 3x + 4 < -10 \rightarrow 3x < -14 \rightarrow x < -\frac{14}{3} \end{array} \right\} \xrightarrow{\cup} (2, +\infty) \cup \left(-\infty, -\frac{14}{3}\right)$$

ب) $|-3x + 4| \geq 3$

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} -3x + 4 \geq 3 \rightarrow -3x \geq -1 \rightarrow x \leq \frac{1}{3} \\ -3x + 4 \leq -3 \rightarrow -3x \leq -7 \rightarrow x \geq \frac{7}{3} \end{array} \right\} \xrightarrow{\cup} \left(-\infty, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{3}, +\infty\right)$$

مثال

(دی ۹۱)

(۱) با فرض آن که a و b دو عدد حقیقی باشند ، نشان دهید (۷۵/نمره)

$$|ab| = |a||b|$$

(۲) اگر $x \leq 1$ باشد ، ضابطه ی تابع $y = |x - 3| + |x - 1|$ بدون استفاده از قدر مطلق برابر است

با (۲۵/نمره) (خرداد ۹۱)

(۳) نامعادله ی قدر مطلق $|2x - 1| < 1$ را حل کنید . (۷۵/نمره) (دی ۹۲)

(۴) جاهای خالی را با عدد یا عبارت ریاضی مناسب پر کنید. (نمره) (دی ۹۳)

الف) جواب های معادله ی $|x + 1| = 4$ برابر با و است.

ب) مجموعه ی جواب نامعادله ی $|2x - 1| \leq 7$ بازه ی است.

(۵) ابتدا ضابطه ی تابع $y = |x - 1| + |2 - x|$ را بدون استفاده از قدر مطلق بنویسید. سپس نمودار آن را رسم

کنید. (۲۵/نمره) (خرداد ۹۴)

آزمون ۱ - فصل ۱ - با جواب

(۱) چند جمله از دنباله ی ... , ۸ , ۵ , ۲ بین ۱۰۰ , ۲۰۰ است؟ (نمره)

پاسخ:

$$a_n = 3n - 1$$

$$100 < 3n - 1 < 200 \rightarrow \frac{101}{3} < \frac{3n}{3} < \frac{201}{3} \rightarrow 33\frac{2}{3} < n < 67 \rightarrow 66 - 34 + 1 = 33$$

(۲) حاصل عبارت $3+7+\dots+79$ را بنویسید. (۲ نمره)

پاسخ:

$$\text{تعداد جملات } \varepsilon n - 1 = 79 \rightarrow \varepsilon n = 80 \rightarrow n = 20$$

$$\begin{cases} S = 3 + 7 + \dots + 79 \\ S = 79 + \dots + 7 + 3 \end{cases} \Rightarrow 2S = 82 + \dots + 82 \Rightarrow S = 820 \quad \text{جواب نهایی:}$$

(۳) مجموع حداکثر چند جمله از دنباله ی ... , ۱۰ , ۶ , ۲ کمتر از ۸۰۰ می باشد؟ (۲ نمره)

پاسخ:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2} [\varepsilon + (n-1)\varepsilon] \rightarrow S_n = \frac{n}{2} [\varepsilon + \varepsilon n - \varepsilon] \rightarrow S_n = 2n^2 \rightarrow 2n^2 < 800 \rightarrow n^2 < 400 \rightarrow n < 20$$

(۴) مجموع تمام جملات دنباله ی زیر را بنویسید. (۲ نمره)

$$M = 9, -3, 1, \dots$$

پاسخ:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{9}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{9}{\frac{4}{3}} = \frac{27}{4}$$

(۵) باقیمانده تقسیم $p(x) = 3x^3 - 2x - 1$ را بر $x - 2$ بدست آورید. (۲ نمره)

پاسخ:

$$p(2) = 3(2)^3 - 2(2) - 1 = 24 - 4 - 1 = 19$$

۶) مقدار k را طوری بیابید تا باقیمانده $p(x) = 3x^2 + \varepsilon x - k$ بر $x - 2$ برابر 10 باشد؟ (۲نمره)

پاسخ:

$$p(2) = 3(2)^2 + \varepsilon(2) - k = 10 \rightarrow 12 + 2\varepsilon - k = 10 \rightarrow k = 2 + 2\varepsilon$$

۷) حاصل عبارت زیر را بدست آورید. (۳نمره)

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^6$$

پاسخ:

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^6 = (x^2)^6 - \binom{6}{1}(x^2)^5\left(\frac{1}{x^2}\right) + \binom{6}{2}(x^2)^4\left(\frac{1}{x^2}\right)^2 - \binom{6}{3}(x^2)^3\left(\frac{1}{x^2}\right)^3 + \binom{6}{4}(x^2)^2\left(\frac{1}{x^2}\right)^4 - \binom{6}{5}(x^2)\left(\frac{1}{x^2}\right)^5 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^6$$

$$\Rightarrow \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^6 = x^{12} - 6x^8 + 15x^4 - \frac{20}{x^0} + \frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^8} + \frac{1}{x^{12}}$$

۸) حاصل جمع یک عدد با جذرش برابر 7 است. آن عدد چند است؟ (۲نمره)

پاسخ:

$$x + \sqrt{x} = 7 \Rightarrow \left[\sqrt{x} = 7 - x\right]^2$$

$$\Rightarrow x = 49 - 14x - x^2 \Rightarrow x^2 - 15x + 49 = 0 \Rightarrow \Delta = 225 - 4(49) = 29$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{29}}{2}$$

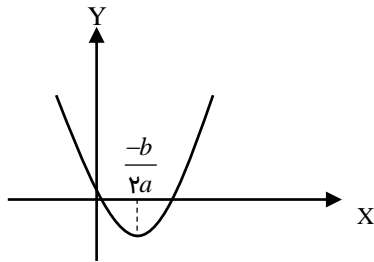
۹) معادله ای بنویسید که ریشه های آن 2 برابر ریشه های معادله $3x^2 + \varepsilon x - 2 = 0$ باشند. (۲نمره)

پاسخ:

$$y = 2x \Rightarrow x = \left(\frac{y}{2}\right) \Rightarrow 3\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \varepsilon\left(\frac{y}{2}\right) - 2 = 0$$

$$\left[\frac{3}{\varepsilon}y^2 + 2y - 2 = 0\right] \times \varepsilon \Rightarrow \boxed{3y^2 + 2\varepsilon y - 2\varepsilon = 0}$$
 پاسخ نهایی:

۱۰) علامت های a و b و c را بیابید. (۲نمره)



پاسخ:

چون تقعر به سمت بالاست و $a > 0$ و $c > 0$ چون محور y ها در قسمت مثبت قطع شده است.

می دانیم $\frac{-b}{2a}$ مثبت است لذا چون a مثبت است پس b باید منفی باشد.

$$a > 0 \quad \text{و} \quad c > 0 \quad \text{و} \quad b < 0$$

آزمون ۲ - فصل ۱ - بدون جواب

۱) مجموع چند جمله از دنباله ی ... $5, 3, 1$ برابر 100 می باشد. (۱نمره)

۲) مجموع حداکثر چند جمله از دنباله ی ... $30, 27, \dots$ مثبت می باشد؟ (۵/۱نمره)

۳) اگر $S_n = n^2 + n$ باشد، a_n, a_p, S_p را بنویسید. (۵/۲نمره)

۴) توپی با این خاصیت داریم که اگر از هر ارتفاعی رها شود به $\frac{1}{3}$ ارتفاع قبلی خود بالا می رود. اگر این توپ

را از زمین به هوا به ارتفاع 5 متری پرتاب کنیم توپ تا لحظه ی ایستادن چه مسافتی را طی می کند؟

(۲نمره)

(۵) باقیمانده ی تقسیم $p(x)$ بر $x-1, x+2$ به ترتیب برابر ۳ و -3 است. باقیمانده ی $p(x)$ بر x^2+x-2 چقدر است؟ (۱/۵ نمره)

(۶) آیا x^9-3^9 بر $x+3$ بخش پذیر است؟ (۱/۵ نمره)

(۷) معادله ی زیر را حل کنید. (۱/۵ نمره)

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{3} = \frac{4}{x-1}$$

(۸) در دنباله های زیر پنجمین جمله ی مشترک چیست؟ (۱/۵ نمره)

$$E = 2, 5, 8, 11, \dots$$

$$M = 3, 7, 11, 15, \dots$$

(۹) اگر $1 < x < 2$ باشد، حاصل عبارت زیر چند است؟ (۲/۵ نمره)

$$|2x-1| + |4-x| + |x+3|$$

(۱۰) بسط های زیر را انجام دهید. (۲/۵ نمره)

الف) $(x+1)^4 =$

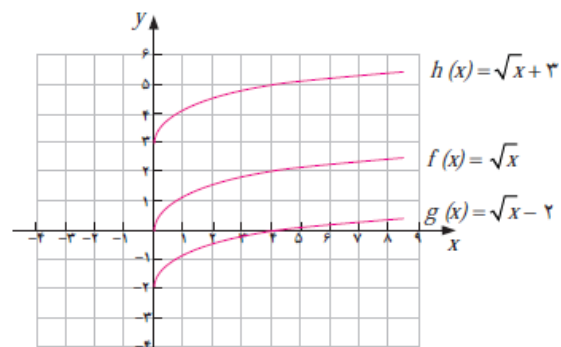
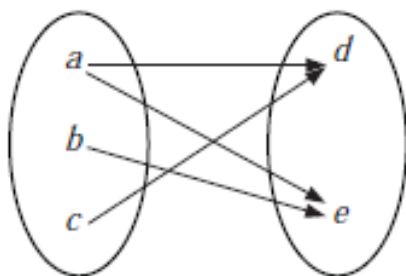
ب) $(2x+y)^5 =$

(۱۱) معادله ای بنویسید که ریشه های آن ۷- و ۳ باشد. (نمره)

(۱۲) تابع $y = x^2 - 4x + 3$ را رسم کنید. (نمره)

فصل دوم

تابع



خلاصه ی فصل دوم

تعریف تابع

یک تابع از مجموعه ی A به مجموعه ی B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. لازم نیست که به هر عضو B حتماً عضوی از A نسبت داده شود و یا ممکن است به عضوی از B بیش از یک عضو از A نسبت داده شود.

تشخیص تابع بودن در معادلات بر حسب x و y :

اگر معادله ای بر حسب x و y داده شود، برای تشخیص تابع بودن، y را بر حسب x به دست می‌آوریم. اگر برای مقدار دلخواه x ، دقیقاً یک مقدار برای y به دست آید، y تابعی بر حسب x است. اما اگر با حل معادله‌ی y بر حسب x ، مقدار یکتایی برای y بدست نیاید، تابع نیست.

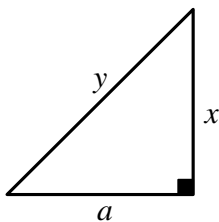
نمونه

(۱) مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۴ سانتی متر مربع است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از یک

ضلع آن (x) به دست آورید. (نمره)

(خرداد ۹۰)

پاسخ:



$$S = 4$$

$$\frac{ax}{2} = 4 \Rightarrow a = \frac{8}{x}$$

$$y^2 = a^2 + x^2 \Rightarrow y^2 = \left(\frac{8}{x}\right)^2 + x^2 \Rightarrow y = \sqrt{\left(\frac{8}{x}\right)^2 + x^2}$$

مثال

آیا در معادله ی $x^2 - y^2 = 1$ ، y را می‌توان به صورت تابعی از x مشخص کرد؟ برای پاسخ خود دلیل

(شهریور ۹۳)

بیاورید. (۷۵/نمره)

تساوی دو تابع

(۱) دو تابع f و g را مساوی می‌نامیم هرگاه:

{ الف) دامنه‌ی f و دامنه‌ی g با هم برابر باشند.

{ ب) برای هر x از دامنه‌ی f (یا g): $f(x) = g(x)$

(۲) نمودارهای دو تابع مساوی دقیقاً بر هم منطبق است.

(۳) اگر دو تابع به صورت مجموعه‌ی زوج‌های مرتب داده شده باشند، هنگامی با هم برابرند که

مجموعه‌ی زوج‌های مرتب داده شده با هم مساوی باشند.

نمونه

(۱) آیا دو تابع $f(x) = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}$ و $g(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$ با هم مساویند؟ چرا؟ (۲۵/نمره) (دی ۹۰)

پاسخ:

$$f(x) = \frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}}, \quad g(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$$

اولاً $D_f = D_g$ ثانیاً

$$\frac{x^2}{1+\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1-\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^2(1-\sqrt{1+x^2})}{1-1-x^2} = \sqrt{1+x^2} - 1$$

لذا $f(x) = g(x)$. پس تابع f و g مساوی‌اند.

مثال

(۱) آیا دو تابع زیر با هم مساویند؟ چرا؟ (۷۵/نمره) (خرداد ۹۲)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & x \neq 5 \\ 6 & x = 5 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = x + 5$$

(خرداد ۹۴)

۲) آیا دو تابع زیر مساویند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید. (۷۵/نمره)

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x} \quad , \quad g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{x-1}$$

توابع چند ضابطه ای

توابعی که بخش‌های مختلف دامنه‌ی آن با ضابطه‌های مختلف تعریف می‌شوند توابع چند ضابطه‌ای

نامیده می‌شوند.

نمونه

۱) تابع $y = |1-x| - 3$ را به صورت یک تابع چند ضابطه ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به

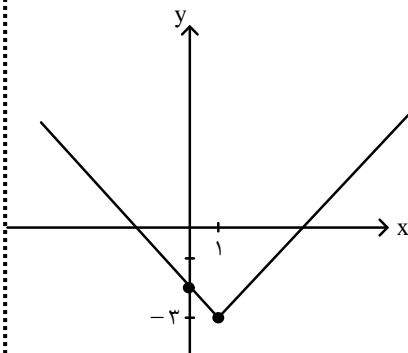
(شهریور ۹۰)

کمک نمودار، برد آن را معلوم کنید. (۲۵/نمره)

$$y = \begin{cases} x-1-3 & x \geq 1 \\ 1-x-3 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow y = \begin{cases} x-4 & x \geq 1 \\ -x-2 & x < 1 \end{cases}$$

پاسخ:

با توجه به نمودار تابع $R_f = [-3, +\infty)$

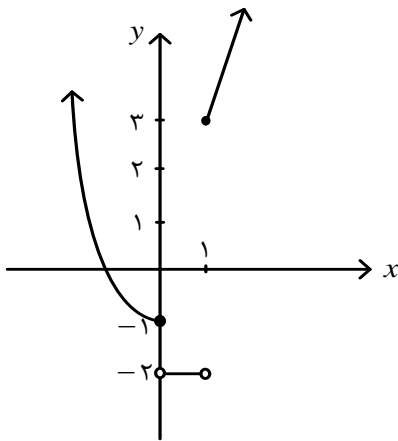


۲) نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1; & x \leq 0 \\ -2; & 0 < x < 1 \\ 2x + 1; & x \geq 1 \end{cases}$ را رسم کنید، سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید.

(دی ۹۰)

(۱/۲۵ انمره)

پاسخ:

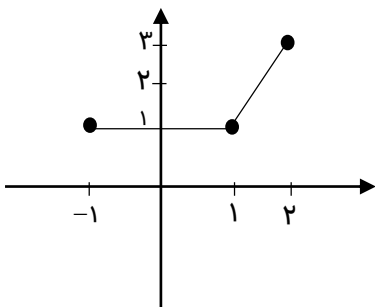
با توجه به نمودار $D_f = R$ و $R_f = [-1, +\infty) \cup \{-2\}$ 

مثال

۱) نمودار تابع چند ضابطه ای زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. (۱/۲۵ انمره) (دی ۹۲)

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$

(دی ۹۳)

۲) ضابطه ی تابع f که نمودار آن در زیر آمده است را بیابید. (انمره)

اعمال بر روی نمودار توابع

اگر نمودار تابع $y = f(x)$ را داشته باشیم آنگاه:

(الف) اگر یک عدد ثابت با x ضابطه ی تابع جمع و تفریق و یا ضرب و تقسیم شود برعکس آن

عملیات بر روی طول نقاط نمودار تابع انجام می شود:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = f(x-a) \Rightarrow a \text{ واحد به راست} \\ y = f(x+a) \Rightarrow a \text{ واحد به چپ} \\ y = f(ax) \Rightarrow a \text{ در امتداد محور } x \text{ ها انقباض به نسبت} \\ y = f\left(\frac{x}{a}\right) \Rightarrow a \text{ در امتداد محور } x \text{ ها انبساط به نسبت} \end{array} \right.$$

(ب) اگر یک عدد ثابت با $f(x)$ ضابطه ی تابع جمع و تفریق و یا ضرب و تقسیم شود همان عملیات بر

روی عرض نقاط نمودار تابع انجام می شود:

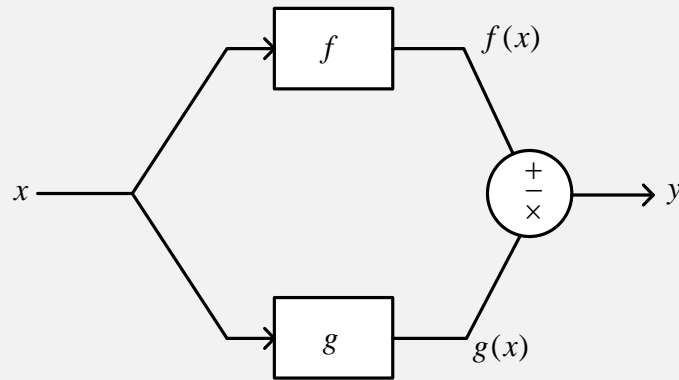
$$\left\{ \begin{array}{l} y = f(x) - a \Rightarrow a \text{ واحد به پایین} \\ y = af(x) \Rightarrow a \text{ واحد به بالا} \\ y = \frac{1}{a} f(x) \Rightarrow a \text{ در امتداد محور } y \text{ ها انقباض به نسبت} \\ y = f(-x) \Rightarrow \text{قرینه یابی نسبت به محور } y \text{ ها} \\ y = -f(x) \Rightarrow \text{قرینه یابی نسبت به محور } x \text{ ها} \end{array} \right. \Rightarrow y = -f(-x) \text{ (ج) قرینه یابی نسبت به مبدأ}$$

اعمال چپری بر روی توابع

(۱) چهار عمل اصلی بر روی توابع:

$$\text{(الف)} \left(f \frac{+}{-} g \right)(x) = f(x) \frac{+}{-} g(x)$$

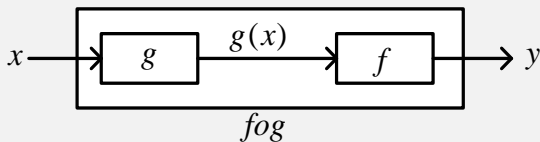
$$D_{f \frac{+}{-} g} = D_f \cap D_g$$



$$\text{ب) } (f \div g)(x) = f(x) \div g(x)$$

$$D_{f \div g} = D_f \cap D_g - \{x : g(x) = 0\}$$

(۲) ترکیب توابع:



$$fog(x) = f(g(x))$$

$$D_{fog(x)} = \{x : x \in D_g, g(x) \in D_f\}$$

نمونه

(۱) اگر $f = \{(0, 1), (1, 2), (3, 4)\}$ و $g = \{(-2, 1), (0, 0), (1, 5), (3, 3)\}$ دو تابع باشند؛ (۵/۱نمره)
(دی ۹۰)

الف) $(f + g)_{(1)}$ را به دست آورید.

ب) تابع $\frac{f}{g}$ را به صورت زوج‌های مرتب مشخص کنید.

ج) دامنه‌ی تابع fog را تعیین کنید.

$$\text{الف) } (f + g)(1) = f(1) + g(1) = 2 + 5 = 7$$

پاسخ:

$$\text{ب) } \frac{f}{g} = \left\{ \left(1, \frac{2}{5} \right), \left(3, \frac{4}{3} \right) \right\}$$

ج) تمام از
اعضای f که با برد
g شروع
می‌شوند

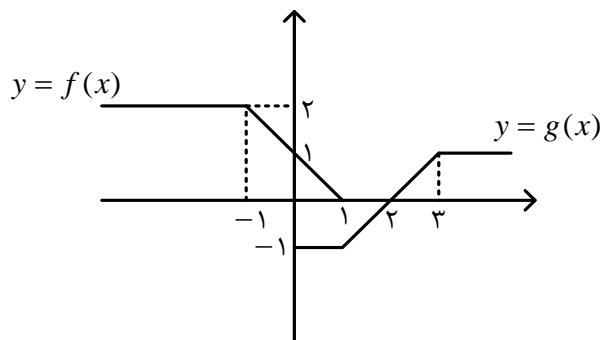
$$(-2, 1) \rightarrow (1, 2) \rightarrow (-2, 2)$$

$$(0, 0) \rightarrow (0, 1) \rightarrow (0, 1) \Rightarrow fog = \{(-2, 2)(0, 1)(3, 4)\}$$

$$(1, 5) \rightarrow (\text{وجود ندارد})$$

$$(3, 3) \rightarrow (3, 4) \rightarrow (3, 4) \quad D_{fog} = \{-2, 0, 3\}$$

۲) با استفاده از نمودار توابع f و g در شکل زیر، عبارت داده شده را محاسبه کنید. (۷۵/۰۷ شماره) (شهریور ۹۰)



الف) $(f + g)(1)$

ب) $(fog)(2)$

پاسخ:

الف) $(f + g)(1) = f(1) + g(1) = 0 + (-1) = -1$

ب) $(fog)(2) = f(g(2)) = f(0) = 1$

۳) اگر $g(x) = \frac{1}{x-3}$ و $f(x) = 3x - 2$ باشد، آنگاه حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید. (۷۵/۱ شماره)

(خرداد ۹۰)

ب) D_{fog}

الف) $(3f + 2g)(\frac{1}{2})$

پاسخ:

$$\text{الف) } (3f + 2g)(4) = 3f(4) + 2g(4)$$

$$= 3(10) + 2(1) = 30 + 2 = 32$$

$$\text{ب) } fog(x) = f(g(x)) = 3 \times \frac{1}{x-3} - 2$$

$$D_{fog} = R - \{3\}$$

۴) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{1-x}$ باشند، دامنه‌ی $f \times g$ را تعیین کنید. (نمره) (خرداد ۹۰ - خارج کشور)

پاسخ:

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g, D_f = [0, +\infty), D_g = (-\infty, 1]$$

$$D_{f \times g} = [0, 1]$$

۵) اگر $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ، تابع $g(x)$ را به گونه ای بیابید که: $fog(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ (نمره)

(خرداد ۹۰ - خارج کشور)

پاسخ:

$$fog(x) = f(g) = \frac{g}{g+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$gx^2 + g = gx^2 - g + x^2 - 1$$

$$2g = x^2 - 1 \rightarrow g(x) = \frac{x^2 - 1}{2}$$

۶) اگر $f = \{(3, 4), (7, 8), (5, 2)\}$ و $g = \{(1, 3), (-2, 7), (5, 9)\}$ باشد، آنگاه fog و $f + g$ را

(دی ۸۹)

حساب کنید. (۷۵/نمره)

پاسخ:

$f \circ g =$	تمام اعضای g	اعضایی از f که با برد g شروع می‌شود.
	$(۱, ۳)$	$(۳, ۴) \rightarrow (۱, ۴)$
	$(-۲, ۷)$	$(۷, ۸) \rightarrow (-۲, ۷)$
	$(۵, ۹)$	نداریم

$$f \circ g = [(۱, ۴), (-۲, ۸)]$$

$$f + g = \{(۵, ۱۱)\}$$

محاسبه ی دامنه ی $f \circ g$ و $g \circ f$:

$$۱) D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g \in D_f\}$$

در امتحانات نهایی حتما باید از این فرمول ها استفاده کرد.

$$۲) D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f \in D_g\}$$

مثال

۱) ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - ۳|$ را در بازه ی $[۲, ۴]$ رسم کنید سپس به کمک آن ، نمودار تابع $f(-x)$ را رسم کنید. (انمره)

(دی ۹۱)

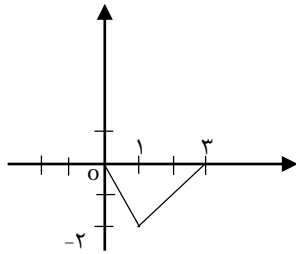
۲) اگر $f = \{(۴, ۵), (۶, ۳), (۷, ۱)\}$ و $g = \{(۳, ۴), (۶, ۰), (۴, ۶)\}$ دو تابع باشند : (۷۵/انمره) (دی ۹۱)

الف) توابع $f \circ g$ و $\frac{f}{g}$ را به صورت زوج های مرتب بنویسید .

ب) مقدار $(2f + g)(x)$ را بیابید .

۳) در زیر ، نمودار تابع $y = f(x)$ رسم شده است. با استفاده از انتقال ، ابتدا نمودار تابع $y = f(x - 3)$

را رسم کرده و سپس نمودار تابع $y = -2f(x - 3)$ را رسم کنید . (۱/۲۵ نمره) (خرداد ۹۱)



۴) اگر $f(x) = \sqrt{x - 3}$ و $g = \{(0, 4), (3, 2), (5, 6)\}$ دو تابع باشند : (۱ نمره)

(خرداد ۹۱)

الف) تابع $f \circ g$ را به صورت زوج های مرتب بنویسید .

ب) دامنه ی تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید .

۵) اگر $f(x) = \frac{3}{x-2}$ و $g(x) = \frac{x}{x}$ باشد ، آن گاه حاصل عبارت های زیر را به دست

(شهریور ۹۱)

آورید . (۱/۷۵ نمره)

الف) $\left(\frac{2f}{g}\right)(x)$ (۴)

ب) $D_{f \circ g}$

۶) اگر $f = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ و $g = \{(1,2), (3,5)\}$ دو تابع باشند (انمره) (شهریور ۹۲)

الف) تابع $f + g$ را به صورت زوج های مرتب مشخص کنید .

ب) مقدار $(g \circ f)(3)$ را بیابید .

۷) ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم نموده سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x) = -2f(x) - 1$ را رسم کنید . (انمره) (خرداد ۹۲)

۸) اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ دو تابع باشند (۱/۷۵ انمره) (خرداد ۹۲)

الف) مقدار $(f - g)(3)$ را به دست آورید .

ب) دامنه ی تابع $f \circ g$ را بیابید .

۹) دو تابع $f(x) = x - 1$ و $g(x) = \sqrt{x+2}$ را در نظر بگیرید. (۱/۷۵ انمره) (دی ۹۲)

الف) دامنه ی تابع gof را بدون محاسبه ی $(gof)(x)$ به دست آورید .

ب) ضابطه ی gof را به دست آورید .

ج) مقدار $(\frac{f}{g})(2)$ را محاسبه کنید .

۱۰) دو تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ و $g(x) = \sqrt{x+4}$ را در نظر بگیرید . (انمره) (خرداد ۹۳)

الف) مقدار $(f+g)(0)$ را به دست آورید .

ب) دامنه ی $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید .

۱۱) اگر $f(x) = x^2 + 2x + 2$ باشد ، تابع $g(x)$ را به گونه ای مشخص کنید که: (انمره) (خرداد ۹۳)

$$(fog)(x) = x^2 - 4x + 5$$

۱۲) ابتدا نمودار تابع $f(x) = |x - 1|$ را با دامنه ی $[0, 2]$ رسم کنید. سپس نمودار $y = f(x) + 1$

(شهریور ۹۳)

را رسم کرده و برد آن را به دست آورید. (۱/۲۵نمره)

۱۳) دو تابع $f = \{(1, 3), (-2, 5), (0, 7), (3, -4)\}$ و $g = \{(1, 4), (3, 1), (0, 0), (5, -2)\}$

(شهریور ۹۳)

را در نظر بگیرید. (۱نمره)

الف) تابع $f \times g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) مقدار $f \circ g(0)$ را به دست آورید.

۱۴) اگر $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ و $g(x) = \frac{1}{x+2}$ باشد، دامنه ی تابع $g \circ f$ را تعیین کنید. (۱/۲۵نمره) (دی ۹۳)

۱۵) اگر $f = \left\{ (0, 2), (1, -1), \left(3, -\frac{1}{4} \right), (-2, 3), (-1, 0) \right\}$ و $g = \left\{ (2, \sqrt{2}), (-1, 2), \left(\frac{1}{4}, 3 \right), \left(1, \frac{3}{2} \right) \right\}$ باشند.

(خرداد ۹۴)

(۱/۵نمره)

الف) تابع $g \circ f - g$ را به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب بنویسید.

ب) تابع $g \circ f$ را به دست آورید.

ج) مقدار $\left(\frac{f}{g} \right)(1)$ را محاسبه کنید.

تابع زوج و تابع فرد

۱) تعریف تابع زوج:

الف) دامنه ی متقارن $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

ب) $\forall x \in D_f \Rightarrow f(-x) = f(x)$

نمودار تابع زوج نسبت به محور y ها متقارن است.

۲) تعریف تابع فرد:

الف) دامنه متقارن $\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$

ب) $\forall x \in D_f \Rightarrow f(-x) = -f(x)$

نمودار تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات متقارن است.

۳) تابعی که دامنه ی نامتقارن داشته باشد نه زوج و نه فرد است.

۴) اگر در تابعی حاصل $f(-x)$ نه با $f(x)$ برابر باشد و نه با $-f(x)$ آن تابع نه زوج و نه فرد است.

$$f(x) = x^3 + x^2 \quad \text{مانند:}$$

(۵) با تبدیل x به $-x$ به راحتی اثبات می شود که:

f	g	$g \pm f$	f.g	f / g	fog
زوج	زوج	زوج	زوج	زوج	زوج
زوج	فرد	نه زوج و نه فرد	فرد	فرد	زوج
فرد	زوج	نه زوج و نه فرد	فرد	فرد	زوج
فرد	فرد	فرد	زوج	زوج	فرد

(۶) رابطه ی $f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$ نشان می دهد که هر تابع با دامنه ی

متقارن را می توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

(۷) تابع ثابت صفر با دامنه ی متقارن، تنها تابعی است که هم زوج و هم فرد است.

نکته:

(۱) توابع x^{2n} و $\cos x$ و $|x|$ زوج هستند.

(۲) توابع x^{2n+1} و $\sin x$ و $\tan x$ و $\cot x$ فرد هستند.

$$\begin{cases} f(-x) = f(x) & \text{زوج} \\ f(-x) = -f(x) & \text{فرد} \end{cases}$$

(۳) اگر f زوج و g فرد باشد، fog و gof زوج هستند.

(۴) در ترکیب توابع اگر یک تابع زوج وجود داشته باشد، ترکیب زوج است.

نمونه: اگر f زوج و g فرد و h فرد باشد حاصل $hofog$ چیست؟

پاسخ: زوج، زیرا یک تابع زوج وجود دارد.

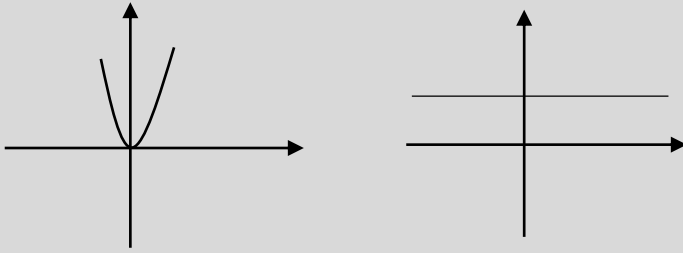
(۵) توابع ثابت همه زوج اند.

نمونه: $y=2$ و $y=11$ و $y=5$ و $y=3$ چون توان x در این توابع صفر است.

(۶) تنها تابع هم زوج و هم فرد تابع ثابت $f(x)=0$ است.

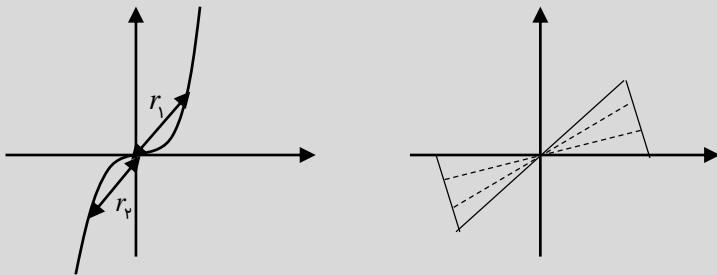
۷) توابع زوج نسبت به محور y متقارن است.

نمونه:



۸) توابع فرد نسبت به مبدأ متقارن است.

نمونه:



نمونه

۱) زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = x\sqrt{27-3x^2}$ را معلوم کنید. (نمره)

(دی ۸۹)

پاسخ:

$$f(-x) = (-x)\sqrt{27-3(-x)^2} = -x\sqrt{27-3x^2} = -f(x)$$

پس f فرد است.

(شهریور ۹۰)

۲) زوج یا فرد بودن تابع $y = \frac{x^2-3x}{x^2-1}$ را معلوم کنید. (نمره)

پاسخ:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-3(-x)}{(-x)^2-1} = -\frac{x^2-3x}{x^2-1} = -f(x)$$

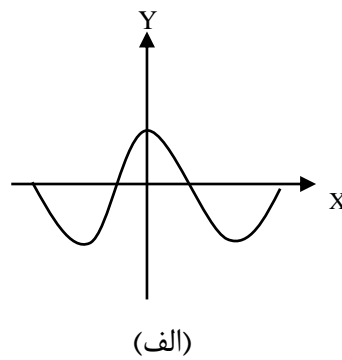
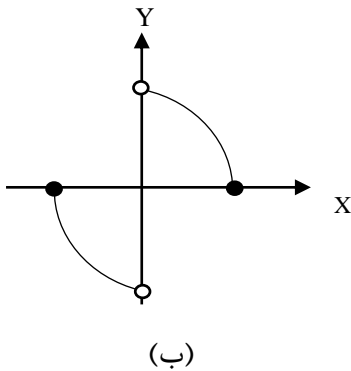
پس f فرد است.

مثال

(۱) زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = x^2 + \cos x$ را معلوم کنید. (۱/۲۵ نمره) (دی ۹۱)

(۲) زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = 3x + \sin x$ را معلوم کنید. (۱ نمره) (شهریور ۹۱)

(۳) زوج یا فرد بودن توابعی که نمودار آن هادر زیر آمده است را مشخص کنید. (۵/۰ نمره) (خرداد ۹۳)



(۴) زوج یا فرد بودن تابع $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{2x^4 + x^2}$ را مشخص کنید. (نمره) (دی ۹۳)

(۵) i- تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ است. (۲۵/نمره) (خرداد ۹۴)

الف) زوج ب) فرد

تابع صعودی و تابع نزولی

(۱) تابع $f(x)$ را صعودی می‌نامیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی f که $x_2 > x_1$ آنگاه:

$$f(x_2) \geq f(x_1)$$

(۲) تابع $f(x)$ را نزولی می‌نامیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی f که $x_2 > x_1$ آنگاه:

$$f(x_2) \leq f(x_1)$$

(۳) تابع $f(x)$ را صعودی اکید نامیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی f که $x_2 > x_1$ آنگاه:

$$f(x_2) > f(x_1)$$

(۴) تابع $f(x)$ را نزولی اکید نامیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی f که $x_2 > x_1$ آنگاه:

$$f(x_2) < f(x_1)$$

(۵) تابع $f(x)$ را ثابت نامیم هرگاه برای هر x_1 و x_2 از دامنه‌ی f : $f(x_2) = f(x_1)$

(۶) هر تابعی که در دامنه‌ی خودش صعودی اکید و یا نزولی اکید باشد، یک به یک است.

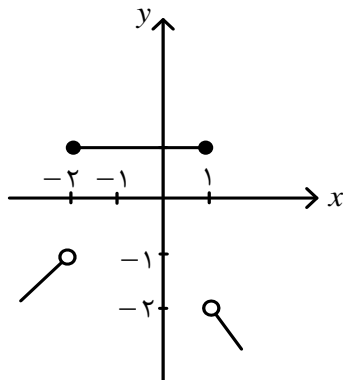
نمونه

$$(۱) \text{ تابع } f(x) = \begin{cases} x+1 & ; & x < -۲ \\ ۱ & ; & -۲ \leq x \leq ۱ \\ -۲x & ; & x > ۱ \end{cases}$$

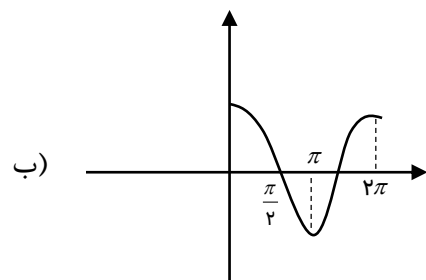
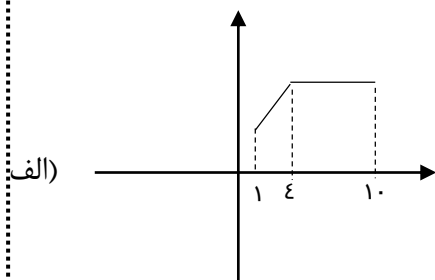
(خرداد ۹۰)

ثابت است را مشخص کنید. (۱/۲۵ نمره)

پاسخ:

تابع در بازه‌ی $(-\infty, -۲)$ صعودی در بازه‌ی $[-۲, ۱]$ ثابت و در بازه‌ی $(۱, +\infty)$ نزولی می‌باشد.

(۲) صعودی و نزولی بودن توابع زیر را مشخص کنید.



پاسخ الف:

تابع در بازه‌ی $[۱, ۴]$ صعودی اکید است.
 تابع در بازه‌ی $[۱, ۱۰]$ صعودی است.
 تابع در بازه‌ی $[۴, ۱۰]$ ثابت است.

پاسخ ب:

تابع در بازه ی $[0, \pi]$ نزولی اکید است.
 تابع در بازه ی $[\pi, 2\pi]$ صعودی اکید است.

مثال

(۱) ii. تابع $y = x^2 - 1$ در بازه ی $(-\infty, 0)$ است. (۲۵/۰ نمره) (خرداد ۹۴)

الف) نزولی
ب) صعودی

(۲) iii. تابع $y = f(x)$ با دامنه ی $[-2, 1]$ را در نظر بگیرید. دامنه ی تابع $g(x) = -f(2x) + 1$

بازه ی است. (۲۵/۰ نمره) (خرداد ۹۴)

الف) $[-4, 2]$
ب) $[-1, \frac{1}{2}]$

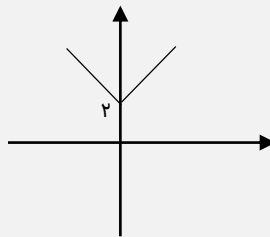
رسم توابع به کمک انتقال

(۱) رسم $f(x) = \pm a$

نمونه:

$$y = |x| + 2$$

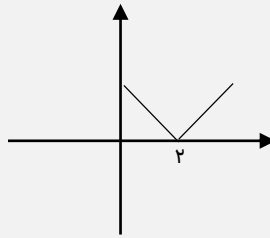
→



رسم $f(x \pm a)$ (۲)

$y = |x - 2|$

→



نمونه:

(۳) رسم $af(x)$ ← اعداد روی محور y ها a برابر می شود.

(۴) رسم $f(ax)$ ← اعداد روی محور x ها تقسیم بر a می شود.

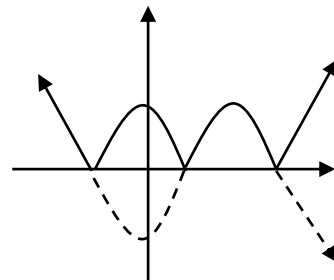
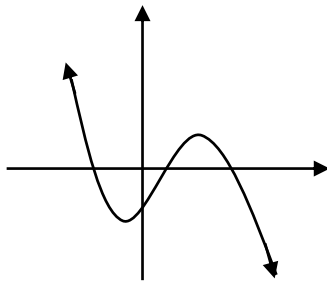
(۵) رسم $-f(x)$ ← نمودار نسبت به محور x ها قرینه می شود.

(۶) رسم $f(-x)$ ← نمودار نسبت به محور y ها قرینه می شود.

نکته: اگر تابع $f(x)$ را داشته باشیم، برای رسم $|f(x)|$ تمامی قسمت های زیر محور مختصات به بالا می آیند.

نمونه

اگر $f(x)$ به صورت زیر باشد، $|f(x)|$ را رسم کنید.

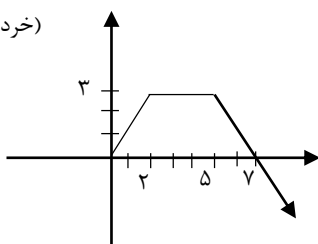


پاسخ:

مثال

(۱) تابع زیر در بازه ی صعودی اکید و در بازه ی نزولی اکید و در بازه ی

(خرداد ۹۱)



ثابت است. (۷۵/نمره)

۲) ابتدا نمودار تابع زیر را رسم کنید سپس بازه هایی را که در آن تابع، صعودی اکید، نزولی اکید

یا ثابت است را مشخص کنید. (۵/۱نمره)

(شهریور ۹۲)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 1 & x > 1 \end{cases}$$

۳) وارون تابع $y = x^3$ ، تابع است. (۲۵/۰نمره)

(دی ۹۲)

توابع یک به یک و تابع وارون

۱) تابع f یک به یک است اگر برای هر دو نقطه‌ی x_1 و x_2 از دامنه‌ی f داشته باشیم:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

۲) اگر نمودار تابعی توسط خطی موازی محور x ها، بیش از یک بار قطع شود، آن تابع یک به یک نیست.

۳) در توابع غیر یک به یک، می توان با محدود کردن دامنه‌ی تابع، تابعی یک به یک ایجاد کرد.

۴) اگر تابع f یک به یک باشد آنگاه وارون پذیر است و تابع وارون آن که با f^{-1} نشان می‌دهیم، چنین

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

تعریف می‌شود:

(۵) با توجه به تعریف f^{-1} ، هنگامی که نمودار یک تابع یک به یک f داده شود، برای بدست آوردن نمودار تابع f^{-1} ، کافی است قرینه‌ی نمودار f را نسبت به خط $y = x$ به دست آوریم.

(۶) برای به دست آوردن ضابطه‌ی تابع وارون یک تابع وارون پذیر مانند f ، در معادله‌ی $y = f(x)$ ، x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x و x به y ، تابع $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم.

(۷) اگر وارون تابع f برابر با f^{-1} باشد آنگاه:

$$\text{الف) } D_f = R_{f^{-1}} \quad ; \quad R_f = D_{f^{-1}}$$

$$\text{ب) } f \circ f^{-1}(x) = x \quad ; \quad D_{f \circ f^{-1}} = D_{f^{-1}}$$

$$\text{ج) } f^{-1} \circ f(x) = x \quad ; \quad D_{f^{-1} \circ f} = D_f$$

(۸) اگر در تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ رابطه‌ی $a+d=0$ برقرار باشد آنگاه تابع و تابع وارون بر هم منطبق شوند:

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

در این حالت خط $y = x$ محور تقارن نمودار تابع $y = f(x)$ است.

تابع f را متناوب نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موج $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(x+T) = f(x)$ ، کوچکترین عدد T با خاصیت گفته شده را دوره‌ی تناوب f می‌نامند.

$$\text{نکته: } (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \quad (۱)$$

(۲) برای بدست آوردن وارون یک تابع a و d را جابه جا و قرینه می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix}$$

نمونه

وارون تابع $y = \frac{3x-1}{x-2}$ را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \frac{2x-1}{x-3}$$

نمونه

(۱) ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{x-1}{x}$ یک به یک است. (نمره)

(دی ۸۹)

$$f(x_1) = f(x_2)$$

پاسخ:

$$\frac{x_1-1}{x_1} = \frac{x_2-1}{x_2} \Rightarrow x_2x_1 - x_2 = x_1x_2 - x_1 \rightarrow x_2 = x_1$$

لذا یک به یک است.

(۲) اگر $f(x) = 4x - 3$ و $g(x) = x + 2$ تابع $(g \circ f)^{-1}$ را حساب کنید. (نمره)

(شهریور ۹۰)

$$g \circ f(x) = g(f) = f + 2 = 4x - 3 + 2$$

پاسخ:

$$= 4x - 1 \rightarrow y = 4x - 1 \rightarrow x = 4y - 1$$

$$4y = x + 1 \rightarrow y = \frac{x+1}{4} \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x+1}{4}$$

(۳) ابتدا نمودار تابع $f(x) = 2x + |x-1|$ را رسم کرده و با استفاده از شکل، وارون پذیری آن را بررسی

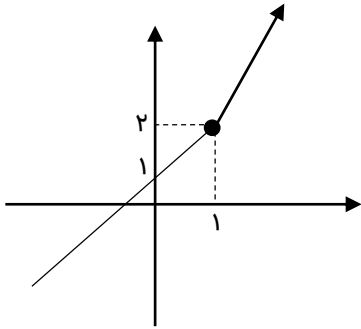
(خرداد ۹۰ - خارج کشور)

کنید. (۷۵/۰ نمره)

پاسخ:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + (x-1) & x \geq 1 \\ 2x + (1-x) & x < 1 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x \geq 1 \\ x+1 & x < 1 \end{cases}$$

تابع یک به یک نیست لذا وارون پذیر نیست.



مثال

(۱) ثابت کنید تابع $f(x) = (x - 2)^2$, $x \geq 2$ وارون پذیر است سپس ضابطه ی وارون آن را بنویسید.

(خرداد ۹۱)

(۱ نمره)

(۲) وارون تابع $y = \frac{2x + 1}{x - 3}$ برابر است با تابع (۵/۰ نمره)

(خرداد ۹۲)

(۳) آیا تابع $y = x^2 - 2x$ یک به یک است؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید. (۱ نمره)

(خرداد ۹۳)

(۴) ضابطه ی وارون تابع $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ را به دست آورید. (۷۵/۰ نمره)

(دی ۹۳)

(۵) به کمک رسم نمودار، ثابت کنید تابع زیر وارون پذیر نیست. (انمره)

(خرداد ۹۴)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x - 1 & x < 0 \end{cases}$$

توابع پله ای و تابع جزء صحیح

(۱) هر تابعی که بتوان دامنه‌ی آن را به تعدادی بازه تقسیم بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه ها، تابع ثابت باشد، یک تابع پله‌ای می‌نامند.

(۲) برای هر عدد حقیقی x ، جزء صحیح آن، بزرگترین عدد صحیح است که از x بیشتر نیست. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم.

(۳) اگر $k \in Z$ آنگاه: $k \leq x < k + 1 \Rightarrow [x] = k$

(۴) اگر $k \in Z$ آنگاه: $[x \pm k] = [x] \pm k$

توجه: $[kx] \neq k[x]$

(۵) برای رسم توابع جزء صحیح دار در یک بازه، ابتدا برد عبارت داخل جزء صحیح را در آن بازه بدست می‌آوریم، سپس با ناحیه‌بندی کردن عبارت داخل جزء صحیح متوالی، تابع را ساده کرده و در محدوده‌ی x آن ناحیه، رسم می‌کنیم.

(۶) در حل معادلات جزء صحیح دار از رابطه‌ی زیر استفاده می‌کنیم:

اگر $k \in Z$: $[x] = k \Rightarrow k \leq x < k + 1$

نمونه

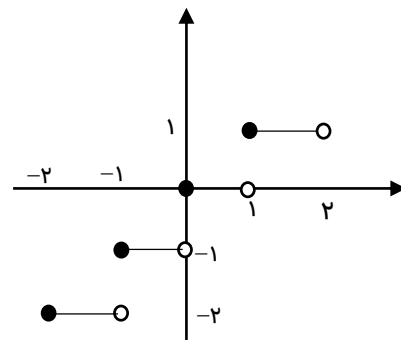
(۱) تابع زیر را رسم کنید.

$$y = [x] \quad \text{و} \quad -2 \leq x < 2$$

پاسخ: تابع را به واحدهای یک تایی تقسیم می‌کنیم. مثلاً ۰ تا ۱، ۱ تا ۲، ...

با توجه به $y = [x]$ ، y را هم بدست می‌آوریم.

$$\left\{ \begin{array}{l} -2 \leq x < -1 \rightarrow [x] = -2 \rightarrow y = -2 \\ -1 \leq x < 0 \rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = -1 \\ 0 \leq x < 1 \rightarrow [x] = 0 \rightarrow y = 0 \\ 1 \leq x < 2 \rightarrow [x] = 1 \rightarrow y = 1 \end{array} \right.$$

(۲) (مهم): اگر داشته باشیم: $a = 1 - \sqrt{2}$

(خرداد ۹۰ - خارج کشور)

حاصل عبارت $\left[(\sqrt{a-2})^2 \right]$ را بدست آورید. (۷۵/نمره)

پاسخ:

$$\left[\sqrt{(a-2)^2} \right] = \left[\sqrt{(1-\sqrt{2}-2)^2} \right] = \left[|1-\sqrt{2}-2| \right] = \left[1+\sqrt{2} \right] = 2$$

(۳) اگر $f(x) = [x+2]$ باشد، در این صورت حاصل $f(1-\sqrt{2})$ چقدر است؟ (نمره) (دی ۸۹)

پاسخ:

$$f(1-\sqrt{2}) = [1-\sqrt{2}+2] = [3-\sqrt{2}] = [1/6] = 1$$

مثال

(۱) نمودار تابع $y = [x] + ۲$ را در بازه $[-۱, ۲]$ رسم کنید. (۱/۲۵ نمره) (شهریور ۹۱)

(۲) وارون پذیری تابع زیر را بررسی کنید و در صورت وارون پذیر بودن تابع، ضابطه ی وارون آن را به دست

آورید. (۱/۵ نمره) (شهریور ۹۲)

$$f(x) = \sqrt{x+3} - 5$$

(۳) مقدار تابع $f(x) = [x+1]$ به ازای $x = \sqrt{۲}$ ، می باشد. (۵/۰ نمره) (دی ۹۲)

(۴) اگر $f(x) = [x+3]$ باشد، در این صورت حاصل $f(۲ - \sqrt{۲})$ برابر است. (۵/۰ نمره)

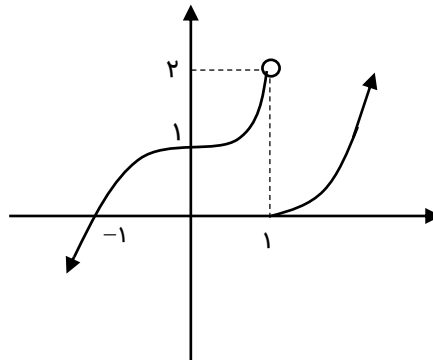
(خرداد ۹۳)

(۵) نمودار تابع $f(x) = [۲x]$ را در بازه $[۰, ۱]$ رسم کنید. (۱ نمره) (شهریور ۹۳)

آزمون ۱ - فصل ۲ - با جواب

(۱) تابع چندضابطه ای زیر را رسم کنید. (۲نمره)

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \geq 1 \\ x^2 + 1 & x < 1 \end{cases}$$



پاسخ:

(۲) اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{2}{x-2}$ باشند، دامنه ی $f+g$ ، $f-g$ ، $f \times g$ را بنویسید. (۲نمره)

$$D_f = R - \{1\} \quad , \quad D_g = R - \{2\} \quad \Rightarrow \quad D_{f \pm g} = R - \{1, 2\}$$

$$\Rightarrow D_{f \times g} = R - \{1, 2\}$$

(۳) اگر $f(x) = x^2 + 6$ و $g(x) = x^2 - 4$ دامنه ی $\frac{f}{g}$ را بنویسید. (۲نمره)

پاسخ:

$$\begin{cases} D_f = R \\ D_g = R \end{cases} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = R \cap R - \{g = 0\} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = R - \{\pm 2\}$$

(۴) تابع $f(x) = \sqrt{x}$ زوج است یا فرد؟ دلیل خود را بنویسید. (۲نمره)

پاسخ: $D_f = [0, +\infty)$ ، دامنه متقارن نیست لذا زوج است نه فرد.

(۵) اگر $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = x^2 + 1$ باشد، $f \circ g$ و $g \circ f$ را بیابید. (۲نمره)

پاسخ:

$$f \circ g(x) = f(g) = 2g + 1 \rightarrow 2(x^2 + 1) + 1 = 2x^2 + 3$$

$$g \circ f(x) = g(f) = f^2 + 1 = (2x + 1)^2 + 1$$

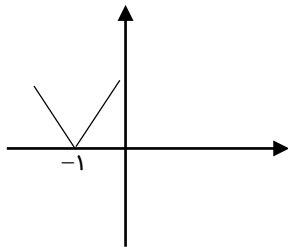
(۶) اگر $f(x) = x^2 + 3$ و $f \circ g(x) = x - 3$ باشد، $g(x)$ را بیابید. (۲نمره)

پاسخ:

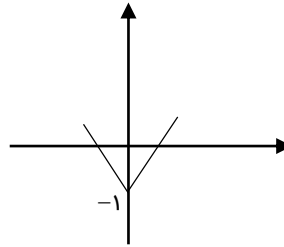
$$f(g) = x - 3 \rightarrow g^2 + 3 = x - 3 \rightarrow g^2 = x - 3 - 3 \rightarrow g = \pm\sqrt{x - 6}$$

(۷) توابع زیر را رسم کنید. (۲نمره)

الف) $|x + 1|$



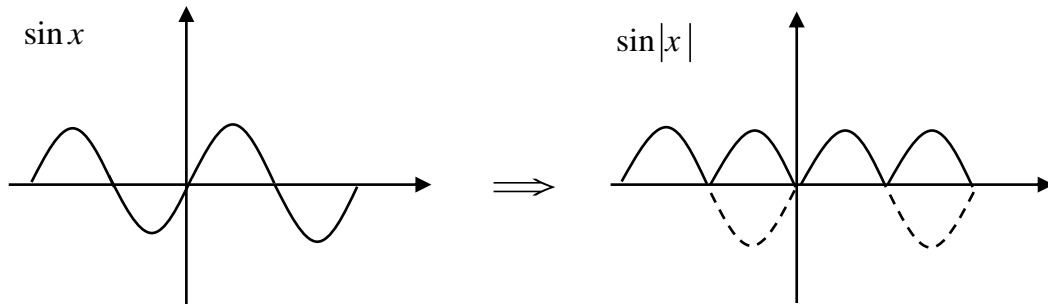
ب) $|x| - 1$



پاسخ:

(۸) تابع $\sin|x|$ را رسم کنید. (۲نمره)

پاسخ:



۹) آیا تابع $f(x) = x^2 + 1$ یک به یک است؟ (۲نمره)

پاسخ:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 + 1 = x_2^2 + 1 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow |x_1| = |x_2| \Rightarrow x_1 = \pm x_2$$

لذا یک به یک نیست.

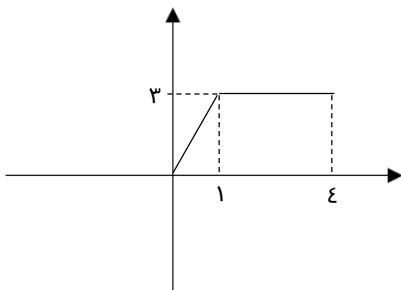
۱۰) اگر $a = 2 - \sqrt{3}$ باشد، حاصل $\left[\sqrt{(a-3)^2} \right]$ را بیابید. (۲نمره)

پاسخ:

$$\left[\sqrt{(2 - \sqrt{3} - 3)^2} \right] = \left[|2 - \sqrt{3} - 3| \right] = \left[|1 + \sqrt{3}| \right] = 2$$

آزمون ۲ - فصل ۲ - بدون جواب

۱) اگر $f(x) = 2x + 1$ و g به صورت زیر باشد، دامنه ی $f + g$ و حاصل $(f - g)(2)$ را بنویسید. (۲نمره)



۲) اگر $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \frac{1}{x-3}$ باشند، دامنه ی fog و gof را بنویسید. (۲نمره)

۳) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ باشد، دامنه ی fog و gof چیست؟ (۲نمره)

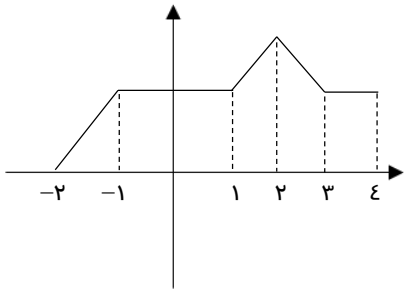
(۴) تابع زیر زوج است یا فرد؟ دلیل بیاورید. (۲نمره)

$$f(x) = \cos x + x^2 + 3x^4 + 6x^8$$

(۵) اگر $f(x) = 2x - 2$ و $gof = x^2 + 1$ ، $g(x)$ را بیابید. (۲نمره)

(۶) اگر $g(x) = 3x - 6$ و $fog(x) = x^2 + 3x - 1$ آن گاه $f(x)$ چیست؟ (۲نمره)

(۷) صعودی و نزولی بودن تابع زیر را مشخص کنید. (در بازه های مختلف) (۲نمره)



(۸) تابع $y = 2[x] + 3$ را در بازه $-2 \leq x < 2$ رسم کنید. (۲نمره)

۹) آیا تابع $f(x) = 3x + 1$ یک به یک است؟ در صورت وارون پذیری، وارون آن را بنویسید. (۲نمره)

۱۰) ثابت کنید $f(x) = \frac{2x-1}{3x+4}$ یک به یک است. (۲نمره)