

دوره تناوب و توابع تناوب

By: faramarz_sepehri@yahoo.com

حرکت متناوبی: حرکتی را متناوب می گویند که متحرک یک مسیر تکراری را در هر واحد زمانی طی کند.

تابع متناوبی: تابع f را متناوب یا دوره ای می گویند هر گاه عدد حقیقی مثبت و ثابت t وجود داشته باشد که اگر مضرب های آن را به x

اضافه کنیم مقدار تابع فرق نکند $f(x) = f(x+t) = f(x+2t) = \dots = f(x+kt)$ $K \in Z$

$$y = \cos x \rightarrow \cos x = \cos(x+2\pi) = \cos(x+4\pi) = \dots = \cos(x+2k\pi)$$

کوچکترین مقدار مثبت که به تابع اضافه می شود و تابع فرقی نمی کند دوره تناوب است و آن را با T نمایش می دهیم .

تذکر: $\cos x, \sin x$ توابعی متناوب با دوره تناوبی 2π می باشند و $\cot x, \tan x$ توابعی متناوب با دوره تناوبی π می باشند .

روش های تعیین دوره تناوب :

1- دوره تناوب توابع :

$$\cot^m(ax+b) \text{ و } \tan^m(ax+b) \quad T = \frac{\pi}{|a|}$$

$$y = \cot^7\left(1 - \frac{x}{3}\right) \Rightarrow T = \frac{\pi}{\left|-\frac{1}{3}\right|} = +3\pi \quad \text{مثال: } y = \tan^3(2x+1) \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

۲- دوره تناوب توابع :

$$\sin^m(ax+b) \text{ و } \cos^m(ax+b) \text{ اگر } m \text{ فرد باشد } T = \frac{2\pi}{|a|} \text{ و اگر } m \text{ زوج باشد } T = \frac{\pi}{|a|} .$$

مثال : دوره تناوب هر یک از توابع زیر را بدست بیاورید :

$$y = 2\sin^4(2-x) \quad T = \frac{\pi}{|-1|} = \pi \quad y = \sin^3(x-4) \quad T = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$$

$$y = \cos^8 x \quad T = \frac{\pi}{|1|} = \pi \quad y = \cos(1-2x) \quad T = \frac{2\pi}{|-2|} = \pi$$

تذکر: اگر توابع به صورت جبری از توابع مثلثاتی باشد ابتدا دوره تناوب هر یک از توابع را بدست آورده سپس کوچکترین مضرب مشترک

آنها را دوره تناوب انتخاب می کنیم .

مثال :

$$y = 2\sin \frac{x}{3} + 3\cos \frac{x}{4} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi, \quad T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi \Rightarrow T = [6\pi, 8\pi] = 24\pi$$

مثال:

$$y = \cos^3 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{3} \quad T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi, \quad T_2 = \frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi \Rightarrow T = [4\pi, 3\pi] = 12\pi$$

تذکر: اگر تابعی به صورت حاصل ضرب باشد در صورت امکان آن را به مجموع تبدیل کرده و سپس دوره تناوب آن را بدست می آوریم:

$$y = 2\sin 5x \cdot \cos x$$

مثال:

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$y = 2 \times \frac{1}{2} [\sin 6x + \sin 4x] = \sin 6x + \sin 4x$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6} \Rightarrow [2\pi, 3\pi] = 6\pi \Rightarrow T = \frac{6\pi}{6} = \pi$$

تذکر: اگر با اعمال مثلثاتی بتوان ضابطه تابع را ساده کرد ابتدا آن را ساده می کنیم سپس دوره تناوب را بدست می آوریم.

مثال: دوره تناوب $y = \cot x - \tan x$ را بدست آورید:

$$y = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 2 \cot 2x \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

مثال: دوره تناوب $y = \cot 2x - \tan 2x$ را بدست آورید:

$$y = 2 \cot 4x \Rightarrow T = \frac{\pi}{4}$$

مثال: دوره تناوب تابع $y = \frac{3 \sin x - \cos x}{\sin x + 4 \cos x}$:

$$y = \frac{3 \tan x - 1}{\tan x + 4} \quad T_1 = \pi, \quad T_2 = \pi \Rightarrow T = \pi$$

تذکر: دوره تناوب هر یک از توابع زیر را:

$$y = \cos(\sin ax)$$

$$y = \cos(\cos ax)$$

$$y = \cos(\tan ax)$$

$$y = \cos(\cot ax)$$

$$T = \frac{\pi}{|a|}$$

مثال : دوره تناوب $y = \cos(\sin 2x)$ برابر $T = \frac{\pi}{1} = \pi$ و $y = \cos(\cot \frac{x}{3})$ برابر $T = \frac{\pi}{2}$

تذکر : دوره تناوب هر یک از توابع زیر :

$$\begin{aligned} y &= |\sin ax| \\ y &= |\cos ax| \\ y &= |\tan ax| \\ y &= |\cot ax| \end{aligned} \quad T = \frac{\pi}{|a|}$$

مثال : دوره تناوب هر یک از توابع زیر :

$$\begin{aligned} y_1 &= \left| \cos \frac{2\pi x}{3} \right| \Rightarrow T_1 = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{3}} = \frac{3}{2} \\ y_2 &= \left| \cot \frac{3x}{4} \right| \Rightarrow T_2 = \frac{\pi}{\frac{3}{4}} = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

تذکر : دوره تناوب هر یک از توابع زیر :

$$\begin{aligned} y &= |\sin ax| + |\cos ax| \\ y &= |\tan ax| + |\cot ax| \end{aligned} \quad T = \frac{\pi}{2|a|}$$

مثال : دوره تناوب هر یک از توابع زیر :

$$\begin{aligned} y &= |\sin 3x| + |\cos 3x| \\ T &= \frac{\pi}{3(2)} = \frac{\pi}{6} \\ y &= |\tan(1-\sqrt{3})x| + |\cot(1-\sqrt{3})x| \\ T &= \frac{\pi}{2(1-\sqrt{3})} = \frac{\pi}{2(\sqrt{3}-1)} \end{aligned}$$

تذکر : دوره تناوب هر یک از توابع زیر :

$$\begin{aligned} y &= \sin^{2k} ax + \cos^{2k} ax & k \neq 1 \\ y &= \cot^{2k} ax + \tan^{2k} ax & k \neq 1 \\ y &= \cot^{2k-1} ax - \tan^{2k-1} ax & T = \frac{\pi}{2|a|} \end{aligned}$$

مثال : دوره تناوب هر یک از توابع زیر را بدست بیاورید :

$$y = \cot^3 x - \tan^3 x \quad T = \frac{\pi}{2}$$

$$y = \sin^4 2x + \cos^4 2x \quad T = \frac{\pi}{2(2)} = \frac{\pi}{4}$$

تذکر: تابع $y = ax - [ax]$ متناوب است و دوره تناوب آن $T = \frac{1}{|a|}$

مثال: دوره تناوبی $y = 3x - [3x]$ چقدر است؟ $T = \frac{1}{3}$

مثال: دوره تناوبی $y = 3x - [x] - [2x]$ چقدر است؟ $T = \frac{1}{3}$

$$y = x - [x] + 2x - [2x] \quad T_1 = 1, \quad T_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow T = \left[1, \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

تذکر: اگر از یک تابع متناوب، سینوس، تانژانت، کوتانژانت، لگاریتم، ریشه و یا **Arcsin, Arctan, Arcot** گرفته شود دوره تناوب تغییر نخواهد کرد.

مثال: دوره تناوب هر یک از توابع زیر را بدست بیاورید:

$$f(x) = \sin(\tan 5x) \Rightarrow T = \frac{\pi}{5}$$

$$f(x) = \log(\sin 2x) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\pi} = 2\pi$$

$$f(x) = \sqrt[3]{3 \tan^5 \left(-x + \frac{\pi}{3}\right)} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|-1|} = \pi$$

$$f(x) = \text{Arcsin}(\tan(\cot x)) \Rightarrow T = \frac{\pi}{|1|} = \pi$$

$$f(x) = \text{Arcsin}\left(\cos \frac{x}{2}\right) \Rightarrow T = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$$

تذکر: اگر واحد کمان توابع مثلثاتی رادیان نباشد پس از تبدیل به رادیان دوره تناوب را بدست می آوریم:

$$\frac{x^\circ}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{\pi x}{180}$$

$$f(x) = \sin \frac{\pi x}{180} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{180}} = 360$$

مثال: دوره تناوب $f(x) = \sin x^5$:

تذکر: تابع $f(x) = k$ متناوب است اما دوره تناوبی اصلی ندارد.

تذکر: مشتق و دوره تناوب هر تابع برابر با دوره تناوبی اصلی

تذکر:

• $\sin|x|$, $\tan|x|$, $\cot|x|$ متناوبی نیستند .

• اگر متغیر کمان توان داشته باشد تابع متناوبی نیست .

$$\cot \frac{2}{x}, \sin \sqrt[3]{x}, \cos \frac{1}{x}, \tan \sqrt{x}$$

• $y = \cos|x| \rightarrow T = 2\pi$

• توابعی که از عبارتی جبری و مثلثاتی تشکیل شده اند متناوبی نیستند .

$$\sqrt{x} + \sin x, 2x + \cos x, x + \sin x$$

$$\frac{1}{x} \cot x, x \tan x$$

تذکر : توابع جبری همراه با تابع جز صحیح را می توان به صورت یک تابع متناوب ایجاد کرد.

مثال :

$$f(x) = 2x - [2x] + 5 \sin^2 \pi x \quad T_1 = \frac{1}{2}, \quad T_2 = \frac{\pi}{\pi} = 1 \Rightarrow T = \left[\frac{1}{2}, 1 \right] = 1$$

- کدام گزینه متناوب است ؟

$$(1) \quad x + \sin x \quad (2) \quad \frac{x}{\tan x} \quad (3) \quad 2 + \sin x \quad (4) \quad x - [x] + 3 \sin^2 \pi x$$

$$x - [x] \Rightarrow T_1 = 1$$

$$3 \sin^2 \pi x \Rightarrow T_2 = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

$$\Rightarrow T = 1$$

پاسخ (گزینه چهار)

- دوره تناوب تابع $y = \tan \frac{\pi}{3} x + \cot \frac{\pi}{2} x$ کدام است ؟

$$(1) \quad 2 \quad (2) \quad 3 \quad (3) \quad 5 \quad (4) \quad 6$$

$$T_1 = \frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = 3, \quad T_2 = \frac{\pi}{\frac{\pi}{2}} = 2 \Rightarrow T = 6$$

- دوره تناوب $y = \sin \frac{x}{2} + \cos 3x$ کدام است ؟

$$T_1 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$T_1 = 4\pi = \frac{12\pi}{3}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{3}$$

$$T = \left[\frac{12\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right] = \frac{12\pi}{3} = 4\pi$$

دوره تناوب $y = \cos^2 2x - \sin^2 \frac{3x}{2} + 2$ کدام است ؟

3π (4

2π (3

$\frac{3\pi}{2}$ (2

π (1

$$T_1 = \frac{\pi}{2}, T_2 = \frac{\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6} \Rightarrow \frac{12\pi}{6} \quad T = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3} \right] = 2\pi$$

- دوره تناوب $y = \sin^2 \frac{\pi}{3} x + \sin \pi x$ کدام است ؟

6 (4

4(3

3 (2

2 (1

$$T_1 = \frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = 3, T_2 = \frac{\pi}{\pi} = 1 \Rightarrow T = [3, 1] = 6$$

- دوره تناوب $f(x) = \cot 2x - \cos^2 2x$ کدام است ؟

$\frac{\pi}{2}$ (4

$\frac{\pi}{4}$ (3

2π (2

π (1

$$T_1 = \frac{\pi}{2}, T_2 = \frac{\pi}{2}, T = \frac{\pi}{2}$$

- دوره تناوب $f(x) = (-1)^{\left[\frac{x}{\pi}\right]} \cos x$ کدام است ؟

4 (4

3(3

2π (2

π (1

$$f(x+T) = f(x) \Rightarrow (-1)^{\left[\frac{x+T}{\pi}\right]} \cos(x+t) = (-1)^{\left[\frac{x}{\pi}\right]} \cos x \Rightarrow \frac{T}{\pi} = 1 \Rightarrow T = \pi$$

- دوره تناوب تابع $f(x) = \tan 2x - \cot 2x$ کدام است ؟

$$\frac{\pi}{4} \quad (4)$$

$$\frac{\pi}{3} \quad (3)$$

$$2\pi \quad (2)$$

$$\pi \quad (1)$$

$$T_1 = \frac{\pi}{2 \times 2} = \frac{\pi}{4}, \quad T_2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow T = \frac{\pi}{4}$$

- دوره تناوب $f(x) = \sin 5x \cos(x - \frac{\pi}{4})$ کدام است ؟

$$2\pi \quad (4)$$

$$\pi \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{2} \quad (2)$$

$$\frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[\sin(5x + x - \frac{\pi}{4}) + \sin(5x - x + \frac{\pi}{4}) \right] = \frac{1}{2} \sin(6x - \frac{\pi}{4}) + \frac{1}{2} \sin(4x + \frac{\pi}{4})$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{4\pi}{12}, \quad T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{6\pi}{12} \Rightarrow T = \left[\frac{4\pi}{12}, \frac{6\pi}{12} \right] = \frac{12\pi}{12} = \pi$$

تذکر: در توابی که به صورت جمع جبری یا به صورت ضرب و تقسیم چند تابع متناوب باشد که بین دوره تناوب آنها کوچکترین مضرب

مشترک نتوان بدست آورد متناوب نیستند. (کمان و نسبت های آنها عددی گنگ باشد تابع متناوب نخواهد بود.)

$$y = \sin^2 \sqrt{2}x - \cos \sqrt{3}x \quad T_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad T_2 = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad \text{کوچکترین م.م وجود ندارد} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \text{ گنگ است.}$$

تذکر: اگر f تابعی متناوب با تناوب اصلی باشد آنگاه $|f|$ هم تناوبی است.

ممکن است تناوب اصلی همانند خود تابع یا ممکن است تناوب اصلی نصف شود.

تذکر خیلی مهم:

اگر تابعی دارای تناوب اصلی T باشد ولی برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(x + \frac{T}{2}) = f(x)$ آنگاه تناوب اصلی تابع $\frac{T}{2}$ است.

$$y = \cot x - \tan x$$

$$f(x + \frac{\pi}{2}) = \cot(x + \frac{\pi}{2}) - \tan(x + \frac{\pi}{2}) = -\tan x + \cot x = f(x)$$

پس تناوب $\frac{\pi}{2}$ است ولی در ظاهر تناوب اصلی تابع π است.

مثال : دوره تناوب $f(x) = |\tan x + \cot x|$ را بررسی می کنیم :

$$T_{f(x)} = \pi$$

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \left|\tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |-\tan x - \cot x| = f(x) \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$$

تذکر : اگر f تابعی متناوب با تناوب اصلی باشد آنگاه :

$f > 0$, \sqrt{f} , $[f]$, $\sin f$, $\tan(f)$, $\cot(f)$, $\text{Arcsin}(f)$, $\text{Arc cos}(f)$, $\text{Arc tan}(f)$, $\text{Arc cot}(f)$ متناوبند.

مثال : دوره تناوب هر یک از تابع های زیر را مشخص کنید :

$$f(x) = \sqrt{\sin x} \Rightarrow T = 2\pi$$

$$f(x) = [\sin x] \Rightarrow T = 2\pi$$

$$f(x) = \tan(\sin x) \Rightarrow T = 2\pi$$

$$f(x) = \text{Arc cot}(\sin x) \Rightarrow T = 2\pi$$

تذکر : دوره تناوب $f(x) = (-1)^{[x]}$ برابر 2 است .

مثال :

$$f(x) = (-1)^{[x]} \sin \pi x \Rightarrow T = 1$$

$$f(x+1) = f(x) \Rightarrow (-1)^{[x]+1} \sin \pi(x+1) = (-1)^{[x]} \sin \pi x$$

نویسنده : فرامرز سپهری

دبیر ریاضی دبیرستان نمونه دولتی امیر المومنین ناحیه 1 تبریز

وب سایت : www.karamath.ir