عبارات جبری و معادلات و نامعادلات

۱-۱: مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

در سال قبل، در درس ریاضی (۲) شما با دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شده‌اید. در این بخش ما ابتدا مروری می‌کنیم بر آموخته‌های قبلی شما و سپس به بحث مجموع جملات این دنباله‌ها می‌پردازیم.

یادآوری: **دنباله‌های حسابی و هندسی**

۱- دنباله‌ی $\{a_n\}$ با تعریف $a_n = a + (n-۱)d$ یک دنباله‌ی حسابی (یا تصاعد حسابی) نامیده می‌شود. a جمله‌ی اول و d قدرنسبت تصاعد است $(d \neq ۰)$. این دنباله را می‌توانیم به صورت بازگشتی نیز تعریف کنیم:

$a_۱ = a \quad , \quad a_{n+۱} = a_n + d$

۲- دنباله‌ی $\{a_n\}$ با تعریف $a_n = aq^{n-۱}$ یک دنباله‌ی هندسی (یا تصاعد هندسی) نامیده می‌شود. a جمله‌ی اول و q قدرنسبت تصاعد است $(q \neq ۱ , a \neq ۰)$. این دنباله را می‌توانیم به صورت بازگشتی نیز تعریف کنیم:

$a_۱ = a \quad , \quad a_{n+۱} = a_n q$

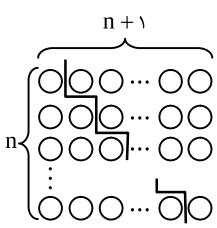
در واقع در دنباله‌ی حسابی، هر جمله از افزودن مقدار قدرنسبت به جمله‌ی قبلی به‌دست می‌آید. در دنباله‌ی هندسی نیز هر جمله از ضرب مقدار ثابت قدرنسبت در جمله‌ی قبلی به‌دست می‌آید.

مثال: ۱- دنباله‌ی $\{a_n\}$ با جمله‌ی عمومی $a_n = ۳ + ۴n$، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۴ و جمله‌ی اول $a_۱ = ۷$ است.

۲- دنباله‌ی $\{b_n\}$ با جمله‌ی عمومی $b_n = ۳ \times ۲^{n+۲}$، دنباله‌ای هندسی با قدرنسبت ۲ و جمله‌ی اول $a_۱ = ۲۴$ است.

مجموع اعداد طبیعی متوالی

اعداد طبیعی متوالی، نمونه‌ای از یک دنباله‌ی حسابی هستند. در این‌جا ما ابتدا مجموع اعداد طبیعی متوالی از ۱ تا n را پیدا می‌کنیم و سپس در حالت کلی، مجموع جملات یک دنباله‌ی حسابی را بررسی می‌کنیم.



دنباله‌ی $\{n\}$ (اعداد طبیعی) را در نظر بگیرید. می‌خواهیم $S_n = ۱ + ۲ + ... + n$ را بیابیم. به شکل روبه‌رو دقت کنید.

در شکل n ردیف و هر ردیف شامل $n+۱$ گوی وجود دارد. پس در شکل $n(n+۱)$ گوی داریم.
حال به خط شکسته‌ای دقت کنید که با تقارن شکل را به دو نیمه تقسیم کرده است. پس تعداد گوی‌های هر نیمه برابر $\frac{n(n+۱)}{۲}$ است. از طرفی به وضوح تعداد گوی‌های یک نیمه (مثلاً نیمه‌ی چپ) در سطرها برابر است با ۱، ۲، ... و n، پس مجموع $S_n = ۱ + ۲ + ... + n$ به‌دست آمده است.

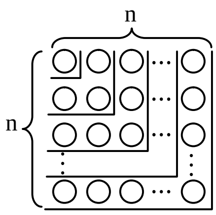
نکته: **مجموع اعداد طبیعی از ۱ تا n برابر است با:** $S_n = ۱ + ۲ + ... + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$

تذکر: این روش منسوب به گاوس، ریاضی‌دان بزرگ قرن هجدهم میلادی است. این روش را به صورت زیر نیز می‌توانیم با زبان ریاضی بیان کنیم:

$$S_n = ۱ + ۲ + ... + n \Rightarrow ۲S_n = ۱ + ۲ + ... + n + n + (n-۱) + ... + ۱ = (۱+n) + (۲ + (n-۱)) + ... + (n+۱)$$

$$\Rightarrow ۲S_n = \underbrace{(n+۱) + (n+۱) + ... + (n+۱)}_{\text{بار } n} = n(n+۱) \Rightarrow S_n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

مجموع اعداد طبیعی فرد متوالی



اعداد فرد طبیعی متوالی نمونه‌ای دیگر از یک دنباله‌ی حسابی‌اند. در این‌جا مجموع این اعداد را با روشی هندسی پیدا می‌کنیم. دنباله‌ی $\{۲n-۱\}$ شامل اعداد فرد طبیعی را در نظر بگیرید. می‌خواهیم $S_n = ۱ + ۳ + ... + (۲n-۱)$ را به‌دست آوریم. به شکل روبه‌رو دقت کنید.

در این شکل n ردیف و هر ردیف شامل n گوی وجود دارد. پس در شکل $n \times n = n^۲$ گوی داریم. حال بـه خطـوط شکسته دقت کنید که گوی‌های شکل را دسته‌بندی کرده‌اند. در دسته‌ی اول ۱ گوی داریـم، در دسـته‌ی دوم ۳ گـوی، بعدی ۵ گوی و ... به این ترتیب در دسته‌ی آخر $۲n-۱$ گوی داریم و اعداد دسته‌ها، همان اعداد فرد هستند.

نکته: **مجموع اعداد طبیعی فرد از ۱ تا $۲n-۱$ برابر است با:** $S_n = ۱ + ۳ + ... + (۲n-۱) = n^۲$

◄ **مثال:** چون $۱۷ = ۲ \times ۹ - ۱$، پس مجموع ۹ عدد فرد متوالی ۱، ۳، ... و ۱۷ برابر است با $۸۱ = ۹^۲$.

➢ **تذکّر:** به جز روش بالا، این مجموع را به‌صورت زیر نیز می‌توانیم به‌دست آوریم:

$$S_n = (۲\times۱-۱) + (۲\times۲-۱) + ... + (۲n-۱) = (۲\times۱ + ۲\times۲ + ... + ۲\times n) - (\underbrace{۱+۱+...+۱}_{n\text{ بار}})$$

$$= ۲(۱ + ... + n) - n = ۲ \times \frac{n(n+۱)}{۲} - n = n(n+۱) - n = n^۲$$

مجموع جملات دنباله‌ی حسابی

در تذکّری که پس از نکته‌ی قبل، در یافتن مجموع اعداد فرد ارائه کرده‌ایم، روشی آمده است که آن را برای هر دنباله‌ی حسابی می‌توانیم ارائه کنیم. فرض کنید می‌خواهیم مجموع n جمله از دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$ با جمله‌ی عمومی $a_n = a + (n-۱)d$ را پیدا کنیم. داریم:

$$S_n = a_۱ + a_۲ + ... + a_n = a + (a+d) + (a+۲d) + ... + (a + (n-۱)d)$$

$$= (\underbrace{a + a + ... + a}_{n\text{ بار}}) + d(۱ + ۲ + ... + (n-۱)) = na + d \times \frac{(n-۱)n}{۲}$$

به این ترتیب $S_n = \frac{n(۲a + (n-۱)d)}{۲}$، یا به بیان دیگر $S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$.

قضیه: **مجموع جملات دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$ با جمله‌ی عمومی $a_n = a + (n-۱)d$ از جمله‌ی اول تا nاُم برابر است با:**

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a + (n-۱)d) = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$$

در واقع برای محاسبه‌ی مجموع تعدادی جمله‌ی متوالی یک تصاعد حسابی، کافی است جمله‌ی اول و آخر را با هم جمع کنیم و حاصل را در نـصف تعداد جملات ضرب کنیم.

➢ **تذکّر:** با استفاده از روش گاوس نیز می‌توانیم این مجموع را به‌دست آوریم:

$$\left.\begin{array}{l} S_n = a + (a+d) + (a+۲d) + ... + (a+(n-۱)d) \\ S_n = (a+(n-۱)d) + (a+(n-۲)d) + ... + a \end{array}\right\} \Rightarrow ۲S_n = (۲a + (n-۱)d) + (۲a + (n-۱)d) + ... + (۲a + (n-۱)d)$$

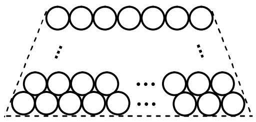
پس $۲S_n$ برابر مجموع n عدداست که هر کدام برابر $۲a + (n-۱)d$ هستند، بنابراین:

$$۲S_n = n(۲a + (n-۱)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{۲}(۲a + (n-۱)d) \xrightarrow[a_n = a + (n-۱)d]{a_۱ = a} S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n)$$

◄ **مثال:** اعداد طبیعی فرد از ۱ تا $۲n-۱$ دنباله‌ای حسابی با قدر نسبت ۲ را تشکیل می‌دهند. پس داریم:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۱ + (۲n-۱)) = \frac{n}{۲} \times ۲n = n^۲$$

مسألهی (۱): تعدادی الوار چوب با آرایشی مطابق شکل روبه‌رو روی هم قرار گرفته‌اند. در بالاترین ردیف ۷ چوب قرار دارد.



الف) اگر تعداد چوب‌های پایین‌ترین ردیف ۲۰ باشد، روی هم چند چوب در این شکل وجود دارد؟

ب) اگر روی هم ۱۱۵ چوب در شکل موجود باشد، تعداد ردیف‌های چوب چند تا است؟

حل: الف) (راه اول:) به راحتی مشخص می‌شود که تعداد چوب‌های ردیف‌ها، در واقع دنباله‌ای حسابی را تشکیل می‌دهند. دنباله‌ای با قدرنسبت ۱، یعنی دنباله‌ی ۷، ۸، ۹، ... و ۲۰. بنابراین تعداد کل چوب‌ها برابر است با:

$$S = ۷+۸+۹+...+۲۰ = \frac{۱۴}{۲}(۷+۲۰) = ۱۸۹$$

دقت کنید که در شمارش تعداد اعداد مجموع بالا از تساوی $۱۴ = ۱ + ۷ - ۲۰$ استفاده کرده‌ایم.

راه دوم: برای محاسبه‌ی مجموع به این روش نیز می‌توانیم عمل کنیم:

$$S = (۱+۲+...+۲۰)-(۱+۲+...+۶) = \frac{۲۰\times ۲۱}{۲} - \frac{۶\times ۷}{۲} = ۱۸۹$$

ب) تعداد ردیف‌ها را n می‌گیریم. پس تعداد چوب‌های پایین‌ترین ردیف برابر است با:

$$۷+(n-۱)\times ۱ = ۶+n$$

پس مجموع اعضای دنباله برابر است با:

$$S_n = \frac{n}{۲}(۷+(۶+n)) = \frac{n}{۲}(۱۳+n) \xrightarrow{S_n = ۱۱۵} n(۱۳+n) = ۲۳۰ \Rightarrow n^۲ + ۱۳n - ۲۳۰ = ۰$$

$$\Rightarrow n_۱ = ۱۰ \ , \ n_۲ = -۲۳$$

پاسخ $n = ۱۰$ قابل قبول است.

تست (۱): در دنباله‌ی حسابی $\{a_n\}$ می‌دانیم $a_۷ + a_{۱۶} = ۴۲$. مجموع ۲۲ جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

۱) ۴۶۲ **۲)** ۴۵۶ **۳)** ۵۴۲ **٤)** ۵۲۴

حل: می‌دانیم $a_n = a_۱ + (n-۱)d$، بنابراین:

$$a_۷ + a_{۱۶} = a_۱ + ۶d + a_۱ + ۱۵d = ۲a_۱ + ۲۱d \Rightarrow ۲a_۱ + ۲۱d = ۴۲$$

از طرفی طبق فرمول مجموع جملات یک دنباله‌ی حسابی داریم:

$$S_{۲۲} = \frac{۲۲}{۲}(۲a_۱ + ۲۱d) \Rightarrow S_{۲۲} = ۱۱\times ۴۲ = ۴۶۲$$

بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

مسألهی (۲): مجموع اعدادی بین ۱۰۰ و ۳۰۰ را بیابید که باقی‌مانده‌ی آن‌ها در تقسیم بر ۶ برابر ۲ باشد.

حل: اگر عدد a در تقسیم بر ۶، خارج‌قسمت k و باقی‌مانده‌ی ۲ داشته‌باشد، آن‌گاه $a = ۶k + ۲$. بین اعداد ۱۰۰ و ۳۰۰، کوچک‌ترین عددی که در تقسیم بر ۶ باقی‌مانده‌ی ۲ داشته باشد، ۱۰۴ است و بزرگ‌ترین عدد ۲۹۶، پس مجموع زیر را می‌خواهیم:

$$S = ۱۰۴ + ۱۱۰ + ۱۱۶ + ... + ۲۹۶$$

راه اول: با دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت ۶ مواجه‌ایم. تعداد اعداد مجموع بالا را n می‌گیریم. داریم:

$$۲۹۶ = ۱۰۴ + (n-۱)\times ۶ \Rightarrow n-۱ = ۳۲ \Rightarrow n = ۳۳$$

$$S = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) = \frac{۳۳}{۲}(۱۰۴+۲۹۶) = ۶۶۰۰$$

راه دوم: چون هر عدد در مجموع به شکل $۶k + ۲$ است، داریم:

$$S = (۶\times ۱۷ + ۲) + (۶\times ۱۸ + ۲) + ... + (۶\times ۴۹ + ۲) = ۶(۱۷+۱۸+...+۴۹) + (\underbrace{۲+...+۲}_{\text{۳۹ بار}})$$

$$= ۶(\frac{۴۹\times ۵۰}{۲} - \frac{۱۶\times ۱۷}{۲}) - ۳۹\times ۲ = ۶۶۰۰$$

مجموع جملات دنباله‌ی هندسی

فرض کنید می‌خواهیم مجموع n جمله‌ی اول از دنباله‌ی هندسی $\{aq^{n-1}\}$ را بیابیم. یعنی مجموع زیر را می‌خواهیم:

$$S = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

اگر مجموع S را در q ضرب کنیم و S را از آن کم کنیم، به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$qS - S = (aq + aq^2 + \dots + aq^n) - (a + aq + \dots + aq^{n-1}) = aq^n - a \Rightarrow (q-1)S = aq^n - a \Rightarrow S = a\frac{q^n - 1}{q-1}$$

نکته: **در دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول a و قدرنسبت q، مجموع n جمله‌ی اول برابر است با:** $S_n = a\frac{q^n - 1}{q-1}$

◄ **مثال:** در دنباله‌ی هندسی $\frac{1}{2}, 1, 2, 4, \dots$، قدرنسبت ۲ و جمله‌ی اول $\frac{1}{2}$ است، بنابراین:

$$S_n = \frac{1}{2}\left(\frac{2^n - 1}{2-1}\right) = \frac{2^n - 1}{2}$$

مسأله‌ی (۳): حاصل مجموع زیر را بیابید (مجموع از جملات یک دنباله‌ی هندسی تشکیل شده است).

$$S = -\sqrt{6} + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{3} + \dots + \frac{\sqrt{2}}{81}$$

حل: قدرنسبت مجموع برابر $q = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ و جمله‌ی اول آن $-\sqrt{6}$ است. تعداد جملات آن را n می‌گیریم. داریم:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{81} = -\sqrt{6} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} \Rightarrow 3^{-4} = -\sqrt{3} \times (-1)^{n-1} \times (\sqrt{3})^{1-n} \Rightarrow (\sqrt{3})^{-8} = (-1)^n \times (\sqrt{3})^{2-n} \Rightarrow n = 10$$

بنابراین طبق فرمول محاسبه‌ی مجموع داریم:

$$S_{10} = -\sqrt{6} \times \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{10} - 1}{-\frac{1}{\sqrt{3}} - 1} = -\sqrt{6} \times \frac{1 - \frac{1}{243}}{\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}} = -3\sqrt{2} \times \frac{\frac{242}{243}}{1+\sqrt{3}} = \frac{121}{81}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$$

تست (۲): در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع شش جمله‌ی اول، $\frac{19}{27}$ برابر مجموع سه جمله‌ی اول آن است. قدرنسبت کدام است؟

۱) $-\frac{4}{3}$ ۲) $-\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{3}{4}$

حل: طبق فرض $S_6 = \frac{19}{27}S_3$. حال طبق فرمول داریم:

$$a_1\frac{q^6 - 1}{q-1} = \frac{19}{27} \times a_1\frac{q^3 - 1}{q-1} \xrightarrow[q \neq 1]{a_1 \neq 0} q^6 - 1 = \frac{19}{27}(q^3 - 1) \xrightarrow{q^3 = x} 27x^2 - 27 = 19x - 19$$

$$\Rightarrow 27x^2 - 19x - 8 = 0 \Rightarrow (27x + 8)(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{8}{27}\ ,\ x_2 = 1$$

پاسخ $x = -\frac{8}{27}$ قابل قبول است، در نتیجه $q^3 = -\frac{8}{27}$، پس $q = -\frac{2}{3}$. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

مسأله‌ی (۴): در یک بانک، سالیانه ۱۰٪ سود به حساب سپرده‌ی بلندمدت تعلق می‌گیرد. اگر حسابی با دو میلیون تومان در این بانک باز کنیم، پس از ۱۰ سال مقدار موجودی حساب چقدر خواهد بود؟

حل: اگر موجودی اولیه را با a نشان دهیم، در پایان سال اول موجودی برابر $x_1 = a\left(1 + \frac{1}{10}\right)$ است. در پایان سال دوم موجودی برابر است با:

$$x_2 = x_1\left(1 + \frac{1}{10}\right) = a\left(1 + \frac{1}{10}\right)^2$$

به این ترتیب مقدار موجودی حساب در واقع یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $\frac{11}{10} = \frac{1}{10} + 1$ است. در پایان سال دهم، مقدار موجودی برابر است با:

$$x_{10} = a\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2 \times 10^6 \times \frac{11^{10}}{10^{10}} \simeq 5187500$$ تومان

مسأله‌ی (۵): فرض کنید دولت حدود ۳ هزار میلیارد تومان را برای هدیه بین مردم کشور پخش می‌کند! هر شخصی که پولی به‌دست می‌آورد، ۷۵٪ آن را خرج و ۲۵٪ آن را پس‌انداز می‌کند. بر اثر این تصمیم دولت چه مقدار پول در سطح کشور خرج می‌شود؟ آیا تصمیم دولت از نظر اقتصادی درست است؟

حل: فرض کنید پول اولیه‌ی پخش شده بین مردم a باشد. در نتیجه $x_1 = \frac{3}{4}a$ توسط مردم خرج و $\frac{1}{4}a$ پس‌انداز می‌شود. ولی آن x_1 واحد خرج شده، دوباره به‌دست مردم رسیده است! پس $x_2 = \frac{3}{4}x_1$ نیز دوباره توسط مردم خرج می‌شود. به همین ترتیب در مرحله‌ی بعد $x_3 = \frac{3}{4}x_2$ نیز توسط مردم خرج می‌شود و ... به این ترتیب مقدار پول خرج شده توسط مردم در هر مرحله یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $\frac{3}{4}$ تشکیل می‌دهد. پس پول خرج شده توسط مردم پس از n مرحله برابر است با:

$$S_n = x_1 + \dots + x_n = \frac{3}{4}a + (\frac{3}{4})^2 a + \dots + (\frac{3}{4})^n a = \frac{3}{4}a \times \frac{1-(\frac{3}{4})^n}{1-\frac{3}{4}}$$

در دراز مدت با افزایش n، مقدار $(\frac{3}{4})^n$ مرتباً کوچک و کوچک‌تر می‌شود، تا جایی که تقریباً برابر صفر می‌شود. بنابراین می‌توانیم کل پول خرج شده توسط مردم را عدد زیر در نظر بگیریم:

$$\frac{3}{4}a \times \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 3a$$

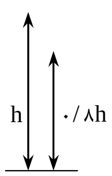
یعنی بر اثر این تصمیم دولت ۹ هزار میلیارد تومان توسط مردم خرج می‌شود. مطمئناً این تصمیم دولت از نظر اقتصادی کاری اشتباه است. زیرا ۳ هزار میلیارد تومان در سطح کشور پخش شده است، و بدون کار اقتصادی خاصی برای تولید پول، ۹ هزار میلیارد تومان خرج شده است. یعنی مردم ۶ میلیارد تومان پول را بدون پشتوانه‌ی اقتصادی مناسب تنها به شکل صوری خرج کرده‌اند و همین امر موجب تورم می‌شود.

حد مجموع

در مسأله‌ی (۵) دیدیم که چگونه با بزرگ شدن مقدار n، مجموع S_n تقریباً برابر $3a$ شد. در حالت کلی اگر دنباله‌ی هندسی $\{a_n\}$ با شرط $|q|<1$ را در نظر بگیریم، در مجموع $S_n = a_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$، وقتی n بسیار بزرگ می‌شود، به‌جای q^n می‌توانیم عدد صفر را قرار دهیم. به این ترتیب مجموع همه‌ی جملات دنباله به‌دست می‌آید.

قضیه: **مجموع همه‌ی جملات دنباله‌ی هندسی $\{a_n\}$ با تعریف $q_n = a_1 q^{n-1}$، به‌شرط آن‌که $|q|<1$ برابر است با:** $S = \frac{a_1}{1-q}$

مسأله‌ی (۶): توپی از ارتفاع ۱۰ متر رها می‌شود. توپ هر بار پس از برخورد با زمین، به اندازه‌ی ۸۰٪ ارتفاع قبل بالا می‌رود.
الف) کل مسافتی که توپ پس از ۲۰ بار برخورد با زمین طی می کند چقدر است؟
ب) نشان بدهید که مسافت طی شده توسط توپ هیچ‌گاه بیش‌تر از ۹۰ متر نمی‌شود.



حل: الف) توپ پس از رها شدن به اندازه‌ی ارتفاع $a_1 = h = 10$ مسافت طی می‌کند. پس از برخورد با زمین در بار اول، به بالا به اندازه‌ی $0/8h$ بازمی‌گردد و دوباره به پایین می‌آید. یعنی بین بار اول و بار دوم برخورد، توپ به اندازه‌ی $a_2 = 2\times 0/8h$ مسافت طی می‌کند. به همین ترتیب بین بار دوم و بار سوم برخورد توپ به اندازه‌ی $a_3 = 2\times 0/8(0/8h) = 2\times(0/8)^2 h$ مسافت طی می‌کند.

به این ترتیب باید مجموع زیر را برای به‌دست آوردن مسافت طی شده در ۲۰ برخورد به‌دست آوریم:

$$S = h + 2\times 0/8h + 2\times(0/8)^2 h + \cdots + 2\times(0/8)^{19} h$$

اگر h اول را درنظر نگیریم، بقیه‌ی جملات یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $0/8$ و جمله‌ی اول $2\times 0/8h$ را تشکیل می‌دهند:

$$S = h + 2\times 0/8h \times \frac{1-(0/8)^{19}}{1-0/8} = 10 + 16\times\frac{1-(0/8)^{19}}{0/2} \simeq 88/85 \text{ متر}$$

ب) راه اول: در حالت کلی بعد از n برخورد مسافت طی شده توسط توپ برابر است با:

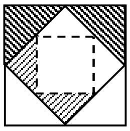
$$S_n = h + 2\times 0/8h + 2\times(0/8)^2 h + \cdots + 2\times(0/8)^{n-1} h = h + 2\times 0/8h \times \frac{1-(0/8)^{n-1}}{1-0/8} = 10 + 16\times\frac{1-(0/8)^{n-1}}{0/2}$$

می‌دانیم همواره $۱ > {}^{۱-}(۰/۸)^{n-۱} - ۱$، پس همواره داریم:

$$\frac{۱-(۰/۸)^{n-۱}}{۰/۲} < \frac{۱}{۰/۲} \Rightarrow ۱۶ \times \frac{۱-(۰/۸)^{n-۱}}{۰/۲} < ۱۶ \times ۵ \Rightarrow S_n < ۱۰ + ۸۰ \Rightarrow S_n < ۹۰$$

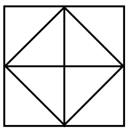
راه دوم: مجموع همه‌ی جملات دنباله برابر است با: $S = ۱۰ + \frac{۱۶}{۰/۲} = ۹۰$، پس همواره $S_n < ۹۰$.

مسأله‌ی (۷): **مربعی به طول ضلع ۴ سانتی‌متر را درنظر بگیرید. وسط‌های اضلاع این مربع را مطابق شکل به هم وصل می‌کنیم و دو مثلث از ۴ مثلث ایجاد شده را رنگ می‌زنیم. حال دوباره در مرحله‌ی دوم، وسط‌های اضلاع مربع جدید داخل مربع اولیه را به هم وصل می‌کنیم و باز دو قسمت ایجاد شده را رنگ می‌زنیم. این کار را همین‌طور تکرار می‌کنیم.**



الف) پس از ۱۰ مرحله چه سطحی رنگ شده است؟

ب) سطح رنگ شده پس از تعداد زیادی از مراحل به چه عددی نزدیک می‌شود؟



حل: الف) طبق شکل روبه‌رو، در هر مرحله ما درواقع یک مربع را به ۸ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و دو قسمت از آن‌ها را رنگ می‌کنیم. یعنی $\frac{۱}{۴}$ مساحت مربع را رنگ می‌کنیم.

در مرحله‌ی اول در مربع به مساحت S، $a_۱ = \frac{۱}{۴}S$ را رنگ کرده‌ایم و مربع جدیدی به مساحت $\frac{S}{۲}$ داخل آن ایجاد کرده‌ایم. در مرحله‌ی دوم، از مربع به مساحت $\frac{S}{۲}$، مقدار $a_۲ = \frac{۱}{۴} \times \frac{S}{۲}$ رنگ کرده‌ایم و مربعی به مساحت $\frac{S}{۲} \times \frac{۱}{۲}$ را داخل آن ایجاد کرده‌ایم. در مرحله‌ی دوم از مربع به مساحت $\frac{S}{۲} \times \frac{۱}{۲}$، مقدار $a_۳ = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{S}{۲}$ را رنگ کرده‌ایم. به این ترتیب بخش‌های رنگ شده یک دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $\frac{۱}{۲}$ تشکیل می‌دهند و ما مجموع زیر را می‌خواهیم:

$$S_{۱۰} = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{۱۰} = \frac{S}{۴} + \frac{۱}{۲} \times \frac{S}{۴} + (\frac{۱}{۲})^۲ \times \frac{S}{۴} + \cdots + (\frac{۱}{۲})^۹ \times \frac{S}{۴}$$

$$\xrightarrow{S=۱۶} S_{۱۰} = ۴ + \frac{۱}{۲} \times ۴ + (\frac{۱}{۲})^۲ \times ۴ + \cdots + (\frac{۱}{۲})^۹ \times ۴ = ۴ \times \frac{۱-(\frac{۱}{۲})^{۱۰}}{۱-\frac{۱}{۲}} \approx ۷/۹۸$$

پس تقریباً ۷/۹۸ سانتی‌متر مربع پس از ۱۰ مرحله رنگ شده است.

ب) مجموع همه‌ی جملات دنباله برابر است با: $S = \frac{۴}{۱-\frac{۱}{۲}} = ۸$، پس سطح رنگ شده تقریباً برابر ۸ می‌شود.

مسأله‌ی (۸): **عدد گویای بسط اعشاری** $a = ۰/۶۶۶...$ **را به شکل** $\frac{p}{q}$ **بنویسید که** p **و** q **دو عدد طبیعی نسبت به هم اول‌اند.**

حل: بسط را می‌توانیم به این صورت به شکل مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی بنویسیم.

$$a = ۰/۶ + ۰/۰۶ + ۰/۰۰۶ + ... = \frac{۶}{۱۰} + \frac{۶}{۱۰۰} + \frac{۶}{۱۰۰۰} + ...$$

یعنی دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $\frac{۶}{۱۰}$ و قدر نسبت $\frac{۱}{۱۰}$. پس مجموع همه‌ی جملات برابر است با:

$$a = \frac{۰/۶}{۱-۰/۱} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow p = ۲ \ , \ q = ۳$$

مجموع اعداد مربع کامل متوالی

هرچند اعداد مربع کامل متوالی، یعنی $۱^۲$، $۲^۲$، $۳^۲$ و ... دنباله‌ای حسابی یا هندسی تشکیل نمی‌دهند، ولی لازم است فرمول مجموع آن‌ها را بدانید که در بعضی از مسائل ظاهر می‌شوند. با توجه به این‌که $k^۲ = \underbrace{k + k + \cdots + k}_{k \text{ بار}}$، می‌توانیم مجموع اعداد مربع کامل متوالی از ۱ تا $n^۲$ را به تعدادی مجموع دنباله‌ی حسابی تبدیل کنیم:

$$S_n = ۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + n^۲ = ۱ + (۲+۲) + (۳+۳+۳) + \cdots + (\underbrace{n + n + \cdots + n}_{n \text{ بار}})$$

$$= (۱+۲+\cdots+n) + (۲+۳+\cdots+n) + (۳+\cdots+n) + \cdots + ((n-۱)+n) + n$$

مجموع‌های داخل پرانتز در عبارت آخر، همگی جمع جملات دنباله‌ی حسابی هستند. حال می‌توانیم با جایگذاری فرمول‌ها، فرمول کلی S_n را به‌دست آوریم.

در این‌جا ما روش ابتکاری دیگری نیز ارائه می‌دهیم.

به جای به‌دست آوردن مستقیم S_n، حاصل $۳S_n = ۳(۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + n^۲)$ را با شکل به‌دست می‌آوریم. با توجه به $k^۲ = \underbrace{k + k + \cdots + k}_{k\ \text{بار}}$، می‌توانیم شکل زیر را برای $۳S_n$ بسازیم:

$$\begin{array}{ccccc} n & n & \cdots & n & n \\ n-۱ & n-۱ & \cdots & n-۱ & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ ۲ & ۲ & & & \\ ۱ & & & & \end{array} + \begin{array}{ccccc} n & n-۱ & \cdots & ۲ & ۱ \\ n & n-۱ & \cdots & ۲ & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ n & n-۱ & & & \\ n & & & & \end{array} + \begin{array}{ccccc} ۱ & ۲ & \cdots & n-۱ & n \\ ۲ & ۳ & \cdots & n & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ n-۱ & n & & & \\ n & & & & \end{array}$$

در آرایه‌ی سمت چپ، مجموع اعداد هر ردیف همان $n^۲$، $(n-۱)^۲$، $\cdots$، $۲^۲$ و $۱^۲$ است. در آرایه‌ی وسط مجموع اعداد هر ستون، همان مربع‌های کامل است و در آرایه‌ی سمت راست، مجموع اعداد روی خط‌های مورب موازی وتر مثلث، اعداد مربع کامل را ایجاد می‌کند. حال با کمی دقت متوجه می‌شویم که جمع اعداد متناظر در سه مثلث برابر $۲n + ۱$ است، یعنی با جمع اعداد بالا به شکل زیر می‌رسیم:

$$\begin{array}{cccc} ۲n+۱ & ۲n+۱ & \cdots & ۲n+۱ & ۲n+۱ \\ ۲n+۱ & ۲n+۱ & \cdots & ۲n+۱ & \\ \vdots & \vdots & \iddots & & \\ ۲n+۱ & ۲n+۱ & & & \\ ۲n+۱ & & & & \end{array}$$

در مثلث نهایی $\frac{n(n+۱)}{۲}$ عدد وجود دارد (چرا؟) که همگی برابر $۲n + ۱$ هستند، پس مجموع آن‌ها $(۲n+۱)\frac{n(n+۱)}{۲}$ می‌شود. می‌دانیم این مجموع ۳ برابر S_n است. پس نکته‌ی زیر را نتیجه می‌گیریم:

نکته: **مجموع اعداد مربع کامل از ۱ تا $n^۲$ برابر است با:** $S_n = ۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

◀ **مثال:** مجموع اعداد مربع کامل متوالی از ۱ تا ۲۵ برابر است با:

$$۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + ۵^۲ = \frac{۵ \times ۶ \times ۱۱}{۶} = ۵۵$$

مسأله‌ی (۹): حاصل مجموع زیر را به‌دست آورید.

$$S = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶}(۱^۲ + ۲^۲) + \frac{۱}{۱۲}(۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲) + \frac{۱}{۲۰}(۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲) + \cdots + \frac{۱}{۳۶۶۰}(۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + ۶۰^۲)$$

حل: اگر قرار دهیم $a_n = \frac{۱}{n(n+۱)}(۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + n^۲)$، آن‌گاه مجموع بالا همان $S_{۶۰}$ است. داریم:

$$a_n = \frac{۱}{n(n+۱)} \times \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶} = \frac{۲n+۱}{۶}$$

$$S_{۶۰} = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{۶۰} = \frac{۲\times۱+۱}{۶} + \frac{۲\times۲+۱}{۶} + \cdots + \frac{۲\times۶۰+۱}{۶} = \frac{۱}{۶}(۲(۱+\cdots+۶۰) + \underbrace{(۱+\cdots+۱)}_{۶۰\ \text{بار}})$$

$$= \frac{۱}{۶}(۲ \times \frac{۶۰\times۶۱}{۲} + ۶۰) = \frac{۱}{۶} \times ۶۰ \times ۶۲ = ۶۲۰$$

مسأله‌ی (۱۰): معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۱\times۱۹۸۷ + ۲\times۱۹۸۶ + ۳\times۱۹۸۵ + \cdots + ۱۹۸۶\times۲ + ۱۹۸۷\times۱ = ۱۹۸۷\times۹۹۴\times x$$

حل: اگر قرار دهیم $a_n = n(۱۹۸۸ - n)$، عبارت سمت چپ تساوی همان $S_{۱۹۸۷}$ است.

با توجه به $a_n = ۱۹۸۸n - n^۲$ داریم:

$$S_{۱۹۸۷} = ۱۹۸۸\times۱ - ۱^۲ + ۱۹۸۸\times۲ - ۲^۲ + \cdots + ۱۹۸۸\times۱۹۸۷ - ۱۹۸۷^۲ = ۱۹۸۸(۱+۲+\cdots۱۹۸۷) - (۱^۲ + ۲^۲ + \cdots + ۱۹۸۷^۲)$$

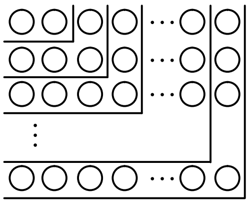
$$= ۱۹۸۸ \times \frac{۱۹۸۷\times۱۹۸۸}{۲} - \frac{۱۹۸۷\times۱۹۸۸\times۳۹۷۵}{۶} = ۱۹۸۷\times۹۹۴(۱۹۸۸ - ۱۳۲۵)$$

با توجه به آن‌که $S_{۱۹۸۷} = ۱۹۸۷ \times ۹۹۴ \times x$، از تساوی بالا نتیجه می‌گیریم:

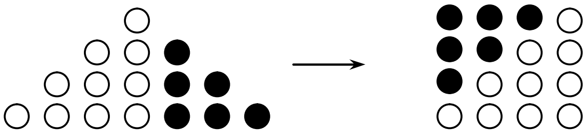
$$x = ۱۹۸۸ - ۱۳۲۵ \Rightarrow x = ۶۶۳$$

تمرین‌های بخش ۱-۱

۱- الف) مجموع اعداد طبیعی زوج متوالی از ۲ تا $۲n$ را با استفاده از شکل زیر به‌دست آورید (ابعاد شکل را خودتان به‌دست آورید).
ب) این مجموع را با دو روش دیگر نیز به‌دست آورید.



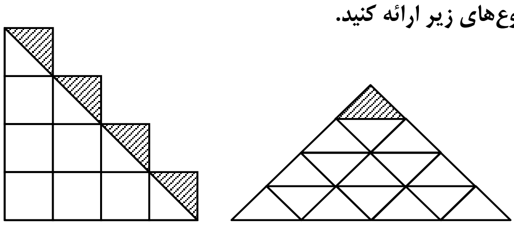
۲- با استفاده از دو شکل زیر، مجموع اعداد طبیعی فرد متوالی را با روشی دیگر به‌دست آورید.



۳- با استفاده از دو شکل زیر، و در نظر گرفتن مساحت‌ها، روشی جدید برای یافتن مجموع‌های زیر ارائه کنید.

الف) $S_n = ۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n$

ب) $S_n = ۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱)$

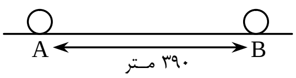


(الـف) (ب)

٤- مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $a_n = ۲n + ۱$ ب) $a_n = \frac{n-۱}{۳}$ پ) $a_n = \frac{۳ - ۲n}{۴}$

۵- در هر حرکت شتابدار با شتاب ثابت، می‌توانیم مسافتی را که متحرک در مدت ۱ ثانیه می‌پیماید، با یک دنباله‌ی حسابی مدل کنیم.



الف) فرض کنید متحرکی از نقطه‌ی A شروع به حرکت کند، در ثانیه‌ی اول ۵ متر و در ثانیه‌ی دوم ۸ متر را طی کند. این متحرک در چه زمانی به نقطه‌ی B می‌رسد؟

ب) ادعای فرض مسأله را با قوانین فیزیکی اثبات کنید. یعنی نشان دهید که اگر با شتاب ثابت a و سرعت اولیه‌ی $V_{\circ}$ شروع به حرکت کنیم، مسافت طی شده در ثانیه‌های ۱، ۲، ... یک دنباله‌ی حسابی را تشکیل می‌دهد.

٦- مجموع اعداد طبیعی سه‌رقمی با شرایط زیر را بیابید.

الف) مضرب ۵ باشند. ب) در تقسیم بر ۸، باقی‌مانده‌ی ۳ داشته باشند.

۷- هریک از مجموع‌های زیر شامل جملات یک دنباله‌ی هندسی است. حاصل مجموع را بیابید.

الف) $۵۴ - ۱۸ + ۶ - ۲ + \cdots + \frac{۲}{۲۴۳}$ ب) $۲ - \sqrt{۲} + ۱ - \frac{\sqrt{۲}}{۲} + \cdots + \frac{۱}{۱۶}$

۸- در یک دنباله‌ی هندسی می‌دانیم مجموع ۱۲ جمله‌ی اول، ۱۷ برابر مجموع ۶ جمله‌ی اول است. قدرنسبت تصاعد را به‌دست آورید.

۹- در یک تصاعد هندسی با قدرنسبت $\frac{۱}{۳}$ و جمله‌ی اول $\frac{۴}{۳}$، مجموع جملات ابتدایی آن برابر $\frac{۴۳۷۲}{۲۱۸۷}$ شده است. چند جمله‌ی تصاعد جمع شده است؟

۱۰- در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی دهم ۹ برابر جمله‌ی ششم است. اگر جمله‌ی سوم برابر ۱۲ باشد، مجموع ۱۰ جمله‌ی اول دنباله را به‌دست آورید.

۱۱- یک قرص دارویی، در هر بار مصرف ۵۰ میلی‌گرم ماده‌ی دارویی وارد بدن می‌کند. پس از هر ۸ ساعت، به طور متوسط هنوز ۲۳٪ از داروی ۸ ساعت قبل در بدن باقی مانده است.

الف) اگر فقط یک بار قرص را مصرف کنیم، پس از ۸۰ ساعت چقدر دارو در بدن باقی‌مانده است؟

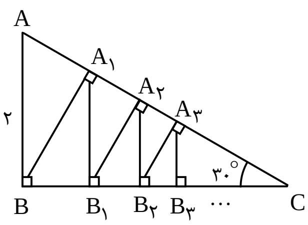
ب) اگر هر ۸ ساعت یک‌بار، یک عدد از قرص را مصرف کنیم، پس از ۸۰ ساعت چقدر دارو در بدن باقی‌مانده است؟

۱۲- **فرض کنید بانکی برای حساب سپرده‌ی کوتاه مدت ۱۰٪ سود سالیانه درنظر گرفته است. شخصی با یک میلیون تومان موجودی، حسابی کوتاه مدت باز می‌کند و در ابتدای هر سال، یک میلیون تومان دیگر به حساب واریز می‌کند. پس از ۶ سال موجودی حساب او چقدر است؟**

* ۱۳- **بانکی برای یک حساب سپرده، سود ۸٪ سالیانه درنظر گرفته است. طی ۲۰ سال، هر سال مبلغ ۱۰ میلیون تومان از این حساب برداشت شده است تا حساب خالی و بسته شده است. موجودی اولیه‌ی این حساب چقدر بوده است؟**

۱۴- **یک شرکت تولیدی سالانه ۱۳ هزار کالا تولید می‌کند و هر سال ۱۰٪ از محصولات تولیدی آن شرکت در آن سال، از چرخه‌ی مصرف خارج می‌شوند. ۲۰ سال از شروع به کار این شرکت می‌گذرد. حدوداً چندهزار واحد کالا از این شرکت در چرخه‌ی مصرف است؟**

۱۵- **در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC داریم $\hat{C} = 30^\circ$ و $AB = 2$. ارتفاع وارد بر وتر BA_1 را رسم می‌کنیم، سپس در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BA_1C، ارتفاع وارد بر وتر A_1B_1 را رسم می‌کنیم و این روند را ادامه می‌دهیم.**



الف) طول پاره‌خط B_1A_1 چقدر است؟

ب) طول پاره‌خط BB_2 چه کسری از طول BC است؟

پ) مجموع طول همه‌ی پاره‌خط‌های BB_1، B_1B_2، ... چه می‌شود؟ آیا نتیجه با دید هندسی شما سازگار است؟

۱۶- **هر یک از بسط های اعشاری زیر را به شکل یک کسر $\frac{p}{q}$ بنویسید که در آن p و q دو عدد طبیعی نسبت به هم اول‌اند.**

الف) $a = 0/676767...$ ب) $b = 2/123232323...$

۱۷- **اگر $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$، آن‌گاه حاصل $f(1) + f(2) + \cdots + f(20)$ را به‌دست آورید.**

۱۸- **حاصل مجموع $S = 1\times 4 + 3\times 6 + 5\times 8 + \cdots + (2n-1)(2n+2)$ را به‌دست آورید.**

* ۱۹- **الف) اتحاد $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ را درنظر بگیرید. با نوشتن این تساوی به ازای $k = 1$، $k = 2$، ... و $k = n$ به n تساوی برسید و با جمع دو طرف آن‌ها نتیجه بگیرید: $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$**

ب) با درنظر گرفتن اتحاد $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ و با روشی شبیه روش قسمت (الف)، مجموع $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$ را به‌دست آورید.

پ) مجموع $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ را به‌دست آورید.

۲۰- **شبکه‌های هرمی (مانند شبکه‌ی غیر قانونی گلدکوئیست) از ساختاری استفاده می‌کنند که با استفاده از دنباله‌های هندسی می‌توانید آن‌ها را مدل کنید. در این تمرین حالت ساده‌ای از این نوع شبکه‌ها را بررسی می‌کنیم. فرض کنید در شبکه‌ی «هرم طلایی»، هر کسی برای ورود به شبکه باید ۵۰۰ هزار تومان پول بدهد. این شخص در عوض هدیه‌ای ۳۰۰ هزار تومانی از شبکه دریافت می‌کند. اگر یک نفر بتواند فرد دیگری را برای ورود به شبکه راضی کند، آن فرد زیرشاخه‌ی نفر اول محسوب می‌شود. هم‌چنین تمام زیرشاخه‌های فرد جدید درآینده نیز زیرشاخه‌ی فرد اولیه هستند.**

الف) اگر یک نفر در طول ۲ ماه بتواند دو نفر را زیرشاخه‌ی خود بکند و یک شهر یک میلیون نفر جمعیت داشته باشد، طی چه مدتی همه‌ی افراد شهر عضو شبکه خواهند بود؟

ب) اگر جمعیت شهر با نرخ ۰/۲ درصد در ماه زیاد شود، قسمت (الف) را دوباره حل کنید.

پ) فرض کنید هر فرد به ازای هر زیرشاخه‌ای که جذب می‌کند، ۵۰ هزار تومان جایزه بگیرد. با فرض قسمت (الف) یک نفر طی چند ماه می‌تواند به سود برسد؟

ت) با درنظر گرفتن یک جمع ۱۰۰ نفره و فرض‌های قسمت (الف) و (پ) تعیین کنید که چنددرصد افراد در این شبکه ضرر خواهند کرد و هیچ‌گاه به پول اولیه‌ی خود نخواهند رسید.

فصل ۱

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- در یک تصاعد عددی، جمله‌ی n اُم به صورت $a_n = \frac{۳}{۲}n - ۵$ است. مجموع ۱۵ جمله‌ی اول این تصاعد کدام است؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۹۰ ۴) ۱۳۵

۲- حاصل‌جمع $S = ۱۶۹ + ۱۷۱ + ۱۷۳ + ... + ۲۰۹$ برابر کدام‌یک از اعداد زیر است؟

۱) $۴۱^۲$ ۲) $۴۰^۲$ ۳) $۶۳^۲$ ۴) $۸۱^۲$

۳- مقدار x از معادله‌ی $۱ + ۵ + ۹ + ... + x = ۲۳۱$ کدام است؟

۱) ۴۳ ۲) ۳۹ ۳) ۴۱ ۴) ۳۷

٤- در تصاعد حسابی $..., -۲۱, x, -۲۷$، مجموع جملات منفی کدام است؟ (آزاد- ۸۷)

۱) -۱۳۵ ۲) -۱۵۰ ۳) -۷۵ ۴) -۲۷۰

۵- در یک دنباله‌ی حسابی داریم: $S_۵ = a_۱ + ... + a_۵ = ۶۰$ و $S_۴ = a_۱ + ... + a_۴ = ۵۴$. قدرنسبت دنباله کدام است؟

۱) -۳ ۲) -۶ ۳) ۳ ۴) ۶

٦- جواب معادله‌ی $۴^{۳+۶+۹+...+۳x} = ۸^{۵۶}$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۷- در یک تصاعد عددی با جمله‌ی اول a، اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آن‌گاه به مجموع ۲۰ جمله‌ی اول چقدر افزوده خواهد شد؟ (سراسری- ۸۳)

۱) ۱۶۰ ۲) ۱۷۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۹۰

۸- اگر مجموع هشت جمله‌ی اول از تصاعد حسابی با جملات $a_۱ = ۱ + ۲p$ و $a_۲ = p - ۱$ برابر ۶۰ باشد، قدرنسبت این تصاعد چقدر است؟ (آزاد- ۸۸)

۱) ۹ ۲) ۷ ۳) -۹ ۴) -۷

۹- مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی $S_n = \frac{n(۹n - ۵)}{۱۲}$ است. قدرنسبت این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۵}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۰- مجموع اعداد دو رقمی که باقی‌مانده‌ی آن‌ها بر ۵ برابر ۲ باشد، کدام است؟

۱) ۹۸۱ ۲) ۹۹۳ ۳) ۸۹۱ ۴) ۹۰۱

۱۱- مجموع n جمله‌ی اولیه‌ی یک دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی $S_n = n^۲ + n$ به‌دست می‌آید. اگر جملات این دنباله را با $a_۱$، $a_۲$ و ... نشان بدهیم، حاصل $A = a_۱ + a_۳ + a_۵ + ... + a_{۹۹}$ چقدر است؟

۱) ۲۵۰۰ ۲) ۲۵۵۰ ۳) ۴۹۰۰ ۴) ۵۰۰۰

۱۲- حاصل مجموع $S = ۷ + ۸ + ۱۷ + ۱۸ + ۲۷ + ۲۸ + ... + ۱۹۷ + ۱۹۸$ کدام است؟

۱) ۴۵۰۰ ۲) ۳۸۰۰ ۳) ۴۰۰۰ ۴) ۴۱۰۰

۱۳- مجموع n جمله‌ی اولیه از دنباله‌ی هندسی زیر برابر ۱۰۲۶ است. n کدام است؟

$۶, -۱۲, ۲۴, ...$

۱) ۸ ۲) ۹

۳) ۱۰ ۴) هیچ‌گاه جمع جملات برابر ۱۰۲۶ نمی‌شود.

۱۴- اگر جملات اول و پنجم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب $\frac{۷}{۳}$ و ۱۸۹ باشند، مجموع شش جمله‌ی اول آن چقدر است؟ (در دنباله جملات منفی نیز حضور دارند!)

۱) $-\frac{۱۲۴۷}{۳}$ ۲) $\frac{۲۵۴۸}{۳}$ ۳) $-\frac{۲۵۴۸}{۳}$ ۴) $\frac{۱۲۴۷}{۳}$

۱۵- در یک تصاعد هندسی، مجموع سه جمله‌ی اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله‌ی اول آن ۱۵۳ است. جمله‌ی اول چند برابر جمله‌ی پنجم است؟ (سراسری- ۸۹)

۱) $\frac{۸۱}{۱۶}$ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۱۶

۱۶- در یک تصاعد هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله‌ی اول آن ۳ است. مجموع شش جمله‌ی اول کدام است؟ (سراسری- ۸۸)

۱) ۱۳/۴ ۲) ۱۱/۲ ۳) ۱۲/۶ ۴) ۱۰/۸

۱۷- اگر S_n مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی باشد و $S_n = \frac{۲^n - ۱}{۵}$، آن‌گاه جمله‌ی هفتم این دنباله کدام است؟

۱) $\frac{۱۲۷}{۵}$ ۲) $\frac{۶۴}{۵}$ ۳) $\frac{۶۳}{۵}$ ۴) $\frac{۱۲۸}{۵}$

۱۸- حاصل $(۱+x+x^۲+\dots+x^۸)(۱-x+x^۲-\dots+x^۸)$ به ازای $x=\sqrt{۲}$ کدام است؟ (سراسری- ۸۲)

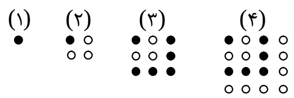
۱) ۵۰۷ ۲) ۵۱۱ ۳) ۵۱۲ ۴) ۵۱۶

۱۹- در دنباله‌ی $\{a_n\}$ می‌دانیم $a_۱ = ۲$ و $a_{n+۱} - a_n = \frac{۱}{۲^n}$. مقدار $۱۲۸a_۷$ کدام است؟

۱) ۵۱۱ ۲) ۳۸۳ ۳) ۱۲۶ ۴) ۳۸۲

۲۰- دنباله‌ای از شکل‌ها طبق روند زیر می‌سازیم. اختلاف تعداد دایره‌های سیاه در شکل‌های پانزدهم و هفدهم کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) ۳۱
۳) ۳۵ ۴) صفر



۲۱- موجی بر روی نیم‌دایره‌ها بالای یک محور حرکت می‌کند. با قطر اولیه‌ی ۱ واحد، هر بار که به محور برخورد می‌کند، ۲۰ درصد از طول قطر آن کاسته می‌شود. اندازه‌ی محیط این نیم‌دایره‌های متوالی، دنباله‌ی اعداد حقیقی است. مجموع این دنباله کدام است؟ (سراسری - ۸۴)

۱) ۲π ۲) ۳π
۳) $\frac{۳}{۲}\pi$ ۴) $\frac{۵}{۲}\pi$

۲۲- وسط‌های اضلاع یک شش‌ضلعی منتظم به ضلع a را به هم وصل می‌کنیم تا شش‌ضلعی منتظم جدیدی تشکیل شود. سپس وسط‌های اضلاع شش‌ضلعی منتظم جدید را به هم وصل می‌کنیم و عمل را ادامه می‌دهیم. حد مجموع محیط‌های این شش‌ضلعی‌ها کدام است؟

۱) $۱۲a(\sqrt{۲}+۲)$ ۲) $۱۲a(\sqrt{۳}+۲)$ ۳) $۱۸a(\sqrt{۳}+۲)$ ۴) $۱۸a(\sqrt{۲}+۲)$

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

پاسخ‌های تشریحی

۱- گزینه‌ی (۲) جمله‌ی اول $a_{۱}=\frac{۳}{۲}-۵$ و جمله‌ی پانزدهم $a_{۱۵}=\frac{۳}{۲}\times ۱۵-۵$ است، حال داریم:

$$S_{۱۵}=\frac{۱۵}{۲}(a_{۱}+a_{۱۵})=\frac{۱۵}{۲}(\frac{۳}{۲}-۵+\frac{۳}{۲}\times ۱۵-۵)=\frac{۱۵}{۲}(\frac{۳}{۲}\times ۱۶-۱۰)=۱۰۵$$

۲- گزینه‌ی (۳) می‌دانیم جمع اعداد فرد از ۱ تا ۲۰۹ برابر است با $۱۰۵^{۲}$ و جمع اعداد فرد از ۱ تا ۱۶۷ برابر است با $۸۴^{۲}$، بنابراین:

$$S=۱۰۵^{۲}-۸۴^{۲}=(۱۰۵-۸۴)(۱۰۵+۸۴)=۲۱\times ۱۸۹=۲۱^{۲}\times ۹=۶۳^{۲}$$

۳- گزینه‌ی (۳) با جملات یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۴ مواجه‌ایم. تعداد جملات مجموع را n می‌گیریم، داریم:

$$x=۱+(n-۱)\times ۴\Rightarrow n-۱=\frac{x-۱}{۴}\Rightarrow n=\frac{x+۳}{۴}$$

$$S_{n}=\frac{n}{۲}(a_{۱}+a_{n})=\frac{x+۳}{۸}(۱+x)\xrightarrow{S_{n}=۲۳۱}(x+۳)(x+۱)=۸\times ۲۳۱=۴۲\times ۴۴\Rightarrow x=۴۱$$

۴- گزینه‌ی (۱) قدرنسبت تصاعد را d می‌گیریم، پس $-۲۱=-۲۷+۲d$، بنابراین $d=۳$. حال آخرین جمله‌ی منفی را a_{n} می‌گیریم. داریم:

$$a_{n}<۰\Rightarrow -۲۷+۳(n-۱)<۰\Rightarrow n-۱<۹\Rightarrow n<۱۰\xrightarrow{n\in N}n\le ۹$$

پس مجموع $S=a_{۱}+a_{۲}+...+a_{۹}$ را می‌خواهیم که برابر است با: $\frac{۹}{۲}(۲\times(-۲۷)+۸\times ۳)=-۱۳۵$

۵- گزینه‌ی (۱) با توجه به فرمول دنباله‌ی حسابی، دستگاهی شامل دو معادله تشکیل می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} S_{۵}=\frac{۵}{۲}(۲a_{۱}+۴d)\xrightarrow{S_{۵}=۶۰}a_{۱}+۲d=۱۲\\ S_{۴}=\frac{۴}{۲}(۲a_{۱}+۳d)\xrightarrow{S_{۴}=۵۴}۲a_{۱}+۳d=۲۷\end{array}\right\}\Rightarrow d=-۳\ ,\ a_{۱}=۱۸$$

۶- گزینه‌ی (۲) مجموع اعداد در توان ۴ را پیدا می‌کنیم:

$$۳+۶+۹+...+۳x=۳(۱+۲+۳+...+x)=۳\times\frac{x(x+۱)}{۲}\Rightarrow ۴^{۳+...+۳x}=۲^{۳x(x+۱)}$$

چون $۸^{۵۶}=۲^{۳\times ۵۶}$، از مقایسه‌ی دو طرف معادله نتیجه می‌گیریم $x(x+۱)=۵۶$، پس $x=۷$.

۷- گزینه‌ی (۴) مجموع ۲۰ جمله‌ی اول تصاعد اولیه برابر است با $S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(a+۱۹d)$ و مجموع ۲۰ جمله‌ی تصاعد دوم برابر است با $S'_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(a+۱۹(d+۱))$. بنابراین:

$$S'_{۲۰}-S_{۲۰}=۱۰(a+۱۹d+۱۹-a-۱۹d)=۱۰\times ۱۹=۱۹۰$$

۸- گزینه‌ی (۲) قدرنسبت تصاعد برابر است با: $d=a_{۲}-a_{۱}=-۲-p$، پس مجموع ۸ جمله‌ی اول آن برابر است با:

$$S_{۸}=\frac{۸}{۲}(۲a_{۱}+۷d)=۴(۲(۱+۲p)+۷(-۲-p))=-۴(۱۲+۳p)\xrightarrow{S_{۸}=۶۰}۱۲+۳p=-۱۵\Rightarrow p=-۹\Rightarrow d=-۲+۹=۷$$

۹- گزینه‌ی (۴) می‌دانیم $S_{۱}=a_{۱}$ و $a_{۲}=S_{۲}-S_{۱}$، بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} a_{۱}=\frac{۱\times ۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}\\ a_{۲}=\frac{۲\times ۱۳}{۱۲}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱۱}{۶}\end{array}\right\}\Rightarrow d=a_{۲}-a_{۱}=\frac{۱۱}{۶}-\frac{۱}{۳}=\frac{۹}{۶}=\frac{۳}{۲}$$

۱۰- گزینه‌ی (۱) می‌خواهیم مجموع $S=۱۲+۱۷+۲۲+...+۹۷$ را پیدا کنیم. با مجموع یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۵ مواجه‌ایم که اگر تعداد جملات آن را n بگیریم، داریم:

$$۹۷=۱۲+۵(n-۱)\Rightarrow n=۱۸\Rightarrow S=\frac{۱۸}{۲}(۱۲+۹۷)=۹۸۱$$

۱۱- گزینه‌ی (۴) اولاً چون $S_۱=a_۱$، پس $a_۱=۱+۱=۲$. ثانیاً مجموع A را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$A=a_۱+(a_۱+۲d)+(a_۱+۴d)+...+(a_۱+۹۸d)=۵۰a_۱+۲(d+۲d+...+۴۹d)$$

$$\Rightarrow A=۲(۵۰a_۱+d+۲d+...+۴۹d)-۵۰a_۱=۲(a_۱+(a_۱+d)+(a_۱+۲d)+...+(a_۱+۴۹d))-۵۰a_۱$$

$$=۲S_{۵۰}-۵۰a_۱\Rightarrow A=۲(۵۰^۲+۵۰)-۵۰\times۲=۵۰۰۰$$

۱۲- گزینه‌ی (۴) مجموع S را به دو مجموع از جملات دو دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت‌های ۱۰ تقسیم می‌کنیم:

$$S_۱=۷+۱۷+۲۷+...+۱۹۷=\frac{۱}{۲}(\frac{۱۹۷-۷}{۱۰}+۱)(۷+۱۹۷)=۱۰\times۲۰۴$$

$$S_۲=۸+۱۸+۲۸+...+۱۹۸=\frac{۱}{۲}(\frac{۱۹۸-۸}{۱۰}+۱)(۸+۱۹۸)=۱۰\times۲۰۶$$

پس مجموع نهایی برابر است با: $S=۱۰(۲۰۴+۲۰۶)=۴۱۰۰$

۱۳- گزینه‌ی (۲) قدرنسبت دنباله‌ی هندسی برابر ۲- است، پس اگر تعداد جملات را n بگیریم، داریم:

$$S_n=۶\times\frac{۱-(-۲)^n}{۱-(-۲)}\xrightarrow{S_n=۱۰۲۶}\frac{۱۰۲۶}{۶}=\frac{۱-(-۲)^n}{۳}\Rightarrow ۵۱۳=۱-(-۲)^n\Rightarrow(-۲)^n=-۵۱۲\Rightarrow n=۹$$

۱۴- گزینه‌ی (۱) جملات دنباله را $a_۱$، $a_۲$ و ... می‌نامیم. داریم $a_۵=۱۸۹$ و $a_۱=\frac{۷}{۳}$، بنابراین:

$$۱۸۹=\frac{۷}{۳}\times q^۴\Rightarrow q^۴=۲۷\times۳\xrightarrow{q<۰}q=-۳\Rightarrow S_۶=a_۱\times\frac{۱-q^۶}{۱-q}=\frac{۷}{۳}\times\frac{۱-(-۳)^۶}{۱+۳}=-\frac{۱۲۴۷}{۳}$$

۱۵- گزینه‌ی (۴) طبق فرمول $S_n=a_۱\frac{۱-q^n}{۱-q}$ و استفاده از فرض‌های $S_۶=۱۵۳$ و $S_۳=۱۳۶$ داریم:

$$S_۶=\frac{۱۵۳}{۱۳۶}S_۳=\frac{۹}{۸}S_۳\Rightarrow a_۱\times\frac{۱-q^۶}{۱-q}=\frac{۹}{۸}a_۱\times\frac{۱-q^۳}{۱-q}\xrightarrow[q\neq۱]{a_۱\neq۰}۸-۸q^۶=۹-۹q^۳\Rightarrow ۸q^۶-۹q^۳+۱=۰$$

$$\Rightarrow(۸q^۳-۱)(q^۳-۱)=۰\xrightarrow{q\neq۱}q^۳=\frac{۱}{۸}\Rightarrow q=\frac{۱}{۲}$$

$a_۱$ جمله‌ی اول، $q^{-۴}$ برابر جمله‌ی پنجم یعنی $a_۱q^۴$ است. پس پاسخ تست $(\frac{۱}{۲})^{-۴}=۱۶$ برابر می‌شود.

۱۶- گزینه‌ی (۳) جمله‌ی اول را a و قدرنسبت را q می‌گیریم. پس $a+aq^۲=۱$ و طبق فرض داریم:

$$a\frac{۱-q^۴}{۱-q}=۳\Rightarrow a(۱+q^۲)\times\frac{۱-q^۲}{۱-q}=۳\xrightarrow{a(۱+q^۲)=۱}\frac{۱-q^۲}{۱-q}=۳\Rightarrow ۱+q=۳\Rightarrow q=۲$$

حال طبق فرض $a(۱+q^۲)=۱$، نتیجه می‌گیریم $a=\frac{۱}{۵}$، بنابراین:

$$S_۶=a\times\frac{۱-q^۶}{۱-q}=\frac{۱}{۵}\times\frac{۱-۲^۶}{۱-۲}=\frac{۱}{۵}(۶۴-۱)=\frac{۶۳}{۵}=۱۲/۶$$

۱۷- گزینه‌ی (۲) می‌دانیم $a_۷=S_۷-S_۶$، بنابراین:

$$a_۷=\frac{۲^۷-۱}{۵}-\frac{۲^۶-۱}{۵}=\frac{۲^۷-۲^۶}{۵}=\frac{۲^۶(۲-۱)}{۵}=\frac{۶۴}{۵}$$

۱۸- گزینه‌ی (۲) در پرانتز اول با جملات یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت x و در پرانتز دوم با قدرنسبت $-x$ مواجه‌ایم:

$$(۱+x+x^۲+...+x^۸)(۱-x+x^۲-...+x^۸)=\frac{۱-x^۹}{۱-x}\times\frac{۱-(-x)^۹}{۱-(-x)}=\frac{(۱-x^۹)(۱+x^۹)}{(۱-x)(۱+x)}=\frac{۱-x^{۱۸}}{۱-x^۲}$$

به ازای $x=\sqrt{۲}$ عبارت بالا برابر است با: $\frac{۱-۲^۹}{۱-۲}=۵۱۱$

۱۹- گزینه‌ی (۴) در رابطه‌ی بازگشتی به جای n قرار می‌دهیم ۱ ، ۲ ، ... و ۶ . نتیجه می‌گیریم:

$$a_2-a_1=\frac{1}{2}\ ,\ a_3-a_2=\frac{1}{4}\ ,\ a_4-a_3=\frac{1}{8}\ ,\ \dots\ ,a_7-a_6=\frac{1}{2^6}$$

با جمع دو طرف تساوی‌های بالا به‌دست می‌آوریم:

$$a_7-a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^6}\Rightarrow a_7-a_1=\frac{1}{2}\times\frac{1-(\frac{1}{2})^6}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$$

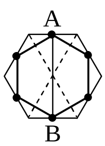
با توجه به $a_1=2$ نتیجه می‌گیریم $a_7=2+\frac{63}{64}=\frac{191}{64}$، پس $128a_7=382$.

۲۰- گزینه‌ی (۱) در شکل‌های اول و دوم تعداد دایره‌های سیاه برابر ۱ ، در شکل‌های سوم و چهارم برابر $5+1$، در شکل‌های پنجم و ششم برابر $9+5+1$ و ... است. یعنی در شکل‌های شماره‌ی $(2n-1)$ و $(2n)$، تعداد دایره‌های سیاه از دو شکل قبلی به اندازه‌ی $(2n-1)$ اُمین عدد فرد بیش‌تر است. پس در شکل هفدهم، تعداد دایره‌های سیاه به اندازه‌ی هفدهمین عدد فرد از شکل‌های پانزدهم و شانزدهم بیش‌تر است، یعنی به اندازه‌ی $2\times17-1=33$ تا.

۲۱- گزینه‌ی (۴) محیط نیم‌دایره‌ی اول $a_1=\frac{\pi}{2}$ است. همچنین محیط نیم‌دایره‌ها، یک دنباله‌ی هندسی با قدرنسبت $\frac{4}{5}=\frac{80}{100}$ تشکیل می‌دهند (زیرا هر بار ۸۰ درصد محیط قبلی باقی می‌ماند). به این ترتیب حد مجموع جملات دنباله برابر است با: $\frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{4}{5}}=\frac{5\pi}{2}$

۲۲- گزینه‌ی (۲) ضلع شش‌ضلعی منتظم داخلی را b و ضلع شش‌ضلعی اول را a می‌گیریم. مطابق شکل، پاره‌خط AB از طرفی برابر $2b$ است و از طرفی دو برابر ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع‌های به ضلع a. بنابراین:

$$2b=2a\times\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow b=a\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$



به این ترتیب با یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی اول $6a$ (محیط شش‌ضلعی اول) و قدرنسبت $\frac{\sqrt{3}}{2}$ مواجه‌ایم که حد مجموع آن برابر است با: $\frac{6a}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=12a(2+\sqrt{3})$