



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات

و...

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:

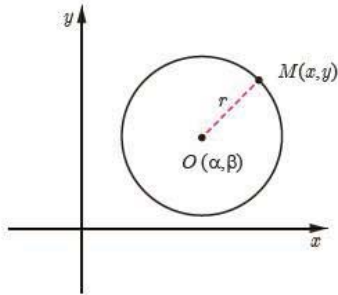


<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

درس دوم: دایره

دایره: مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک نقطه ثابت (مرکز دایره) به فاصله‌ی ثابت (شعاع دایره) واقع‌اند.

دایره به مرکز O و شعاع r را به صورت $c(O, r)$ نشان می‌دهند.

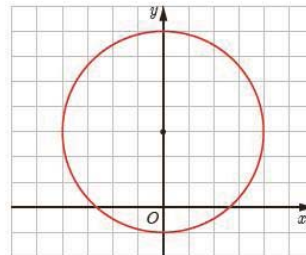
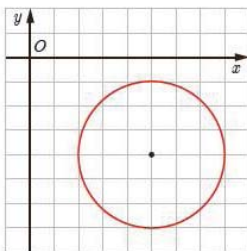


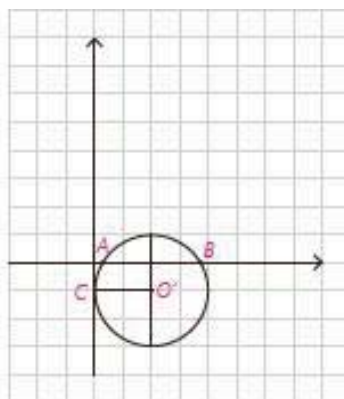
معادله استاندارد دایره: معادله‌ی دایره‌ای به مرکز (α, β) و شعاع r به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$ می‌باشد.

مثال: در دایره‌ای به معادله‌ی $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ مختصات مرکز و طول شعاع دایره را بدست آورید.

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-3, 1)$ و شعاع آن ۵ باشد.

مثال: معادله دایره‌های زیر را بنویسید.





مثال: معادله‌ی دایره‌ای به مرکز $O(2, -1)$ و شعاع ۲ را بنویسید.

سپس مختصات نقاط برخورد آن را با محورهای مختصات بدست آورید.

مثال: اگر معادله دایره به شکل $(x+1)^2 + y^2 = 4$ باشد:

الف) مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره را بنویسید.

ب) مختصات نقاط تقاطع این دایره را با محورهای مختصات پیدا کنید.

مثال: در دایره به معادله $x^2 + (y+3)^2 - 4 = 0$ مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره را بیابید و محل تقاطع دایره را با

محورهای مختصات در صورت وجود مشخص کنید.

مثال: معادله دایره‌ای بنویسید که نقاط $A(4, -1)$ و $B(-2, 1)$ دو سر قطری از آن باشد.

مثال: معادله دایره ای بنویسید که نقاط $A(-3, 2)$ و $B(1, -2)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشد.

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن مبدأ مختصات و شعاع آن r باشد.

مثال: معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ بنویسید.

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که نقطه $O(-2, -1)$ مرکز آن و $M(1, 1)$ نقطه‌ای از آن باشد.

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(1, 1)$ مرکز آن و $A(3, 2)$ نقطه‌ای از آن باشد.

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که:

الف) از مبدأ مختصات بگذرد و مرکز آن $(-1, 2)$ باشد.

ب) مرکز آن $(2, 3)$ باشد و نقطه $(-3, -9)$ نقطه ای روی آن باشد.

پ) نقاط $(0, 3)$ و $(-1, -4)$ دو سر یکی از قطرهای آن باشد.

معادله ضمنی (گسترده) دایره: معادله‌ی ضمنی یا گسترده دایره به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ می‌باشد.

مثال: طول شعاع و مرکز دایره $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ را بیابید.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$$

مثال: مختصات مرکز و طول شعاع دایره به معادله‌ی روبرو را بیابید.

مثال: شرط آنکه معادله‌ی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ معادله‌ی دایره باشد، را بیابید.

مثال: کدام یک از روابط زیر معادله‌ی دایره می‌تواند باشد؟ در صورت تشکیل معادله‌ی دایره، طول شعاع و مختصات مرکز

آن را بیابید. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 1 = 0$ (الف)

$$\text{ب) } x^2 + y^2 + 2x + 3y + 4 = 0$$

$$\text{پ) } 2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 2 = 0$$

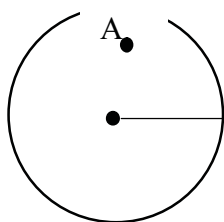
مثال: معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع آن را پیدا کرده و معادله ی آن را به صورت استاندارد بنویسید.

مثال: حدود a را طوری بیابید که معادله ی $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$ بتواند معادله ی یک دایره باشد.

وضعیت نقطه و دایره نسبت به هم:

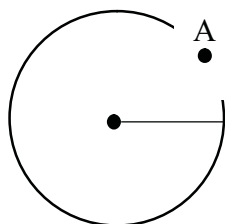
الف: نقطه داخل دایره باشد. نقطه A داخل دایره است اگر فاصله A تا مرکز دایره کمتر از شعاع دایره باشد. به

$$\text{عبارتی: } OA < r$$



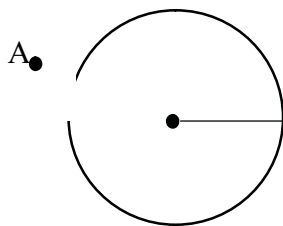
ب: نقطه روی دایره باشد. نقطه A روی دایره است اگر فاصله A تا مرکز دایره برابر با شعاع دایره باشد. به عبارتی:

$$OA = r$$



پ: نقطه خارج دایره باشد. نقطه A خارج دایره است اگر فاصله A تا مرکز دایره بیشتر از شعاع دایره باشد. به

عبارتی: $OA > r$



مثال: وضعیت نقاط $A(1,2)$, $B(1,1)$, $C(1,-1)$ را نسبت به دایره $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$ مشخص کنید.

نکته: اگر معادله ی دایره C به صورت $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ بوده و $A(x',y')$ نقطه ای دلخواه در صفحه باشد،
 آنگاه:

۱- اگر $(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 < r^2$ باشد، نقطه $A(x',y')$ داخل دایره قرار دارد

۲- اگر $(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 > r^2$ باشد نقطه $A(x',y')$ خارج دایره قرار دارد.

۳- اگر $(x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 = r^2$ باشد، نقطه $A(x',y')$ روی دایره قرار دارد.

مثال: با تکمیل جدول، وضعیت هر نقطه را نسبت به دایره مشخص کنید.

معادله دایره	شعاع و مختصات مرکز دایره	نقاط		
		$A(1, 1)$	$B(0, 3)$	$C(-2, 4)$
$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$
.....	دایره به مرکز $(1, -2)$ و شعاع ۳	بیرون دایره

مثال: وضعیت نقاط زیر را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ را بیابید.

نکته:

الف) $A(-1, -1)$

ب) $B(1, -2)$

پ) $C(2, 3)$

ت) $D(4, -1)$

مثال: وضعیت نقاط $(0, 0), (1, 0), (0, -1), (-1, -2)$ را نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ مشخص کنید.

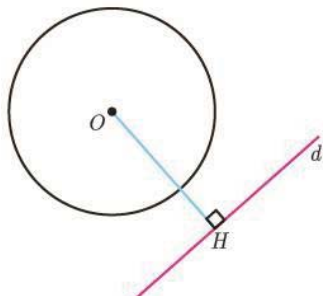
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

نکته: فاصله نقطه $A(x_0, y_0)$ از خط $ax + by + c = 0$ برابر است با:

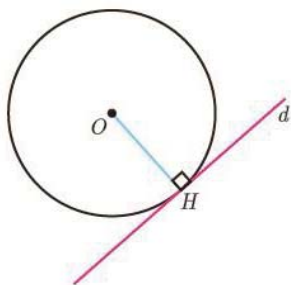
وضعیت خط و دایره: کافی است فاصله مرکز دایره را از خط داده شده حساب کرده و با اندازه شعاع دایره مقایسه کنیم.

الف: خط خارج دایره باشد. اگر خط d ، دایره را قطع نکند، آنگاه فاصله y مرکز دایره تا خط d بیشتر از شعاع دایره

است. $(oH > r)$

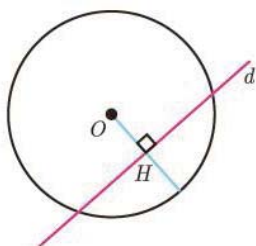


ب: خط بر دایره مماس باشد. در این حالت فاصله y مرکز دایره تا خط d مساوی شعاع دایره است. $(oH = r)$



پ: خط و دایره متقاطع باشند. اگر خط دایره را قطع کند، در این حالت فاصله y مرکز دایره تا خط d کمتر از شعاع

دایره است. $(oH < r)$



تذکر: خط و دایره می توانند یک یا دو نقطه اشتراک داشته ، یا هیچ نقطه اشتراکی نداشته باشند.

مثال: وضعیت خط به معادله $x + y = 4$ و دایره $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ را تعیین کنید.

مثال: وضعیت هریک از خطوط و دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

الف) $3x + 4y = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$

ب) $x + y = 2$, $x^2 + y^2 = 2$

ج) $x + y = 1$, $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$

ت) $x + y = 3$, $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

ث) $y = -x - 2$, $x^2 + y^2 = 2$

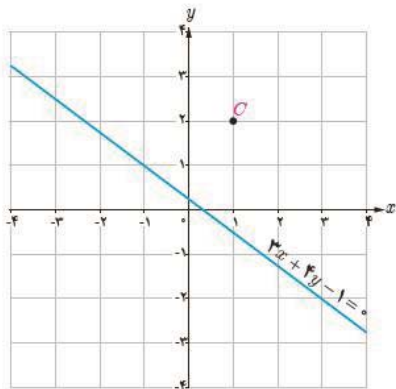
ج) $6x + 4y = 0$, $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$

چ) $x + y = 1$, $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0$

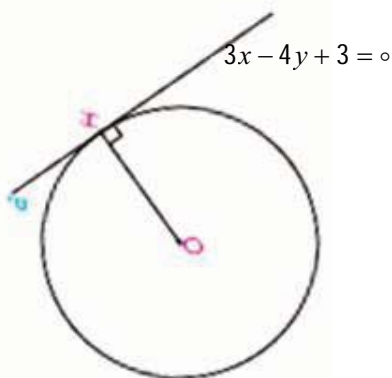
ح) $y = -1$, $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$

مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که $O(2, 1)$ مرکز آن بوده و بر خط $3x + 4y = 0$ مماس باشد.

مثال: معادله دایره ای را بنویسید که بر خط $3x + 4y - 1 = 0$ مماس بوده و مرکز آن $O(1, 2)$ باشد.



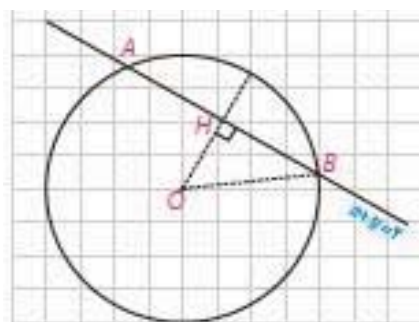
مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که نقطه $O(1, -1)$ مرکز آن بوده و برخط به معادله‌ی $3x - 4y + 3 = 0$ مماس باشد.



مثال: معادله دایره ای بنویسید که مرکز آن $O(3, 0)$ باشد و بر خط $3x - 4y = 3$ مماس باشد.

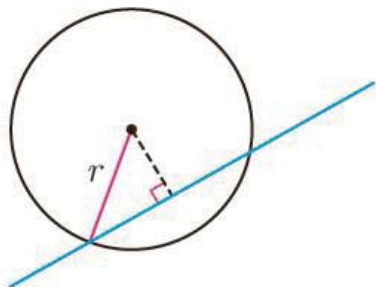
مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که $O(0, 1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله‌ی $x + y = 2$ وترى به طول $2\sqrt{2}$

جدا کند.



مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که $O(-1,-1)$ مرکز آن و روی خط $x+y=1$ وترى به طول ۲ ایجاد کند.

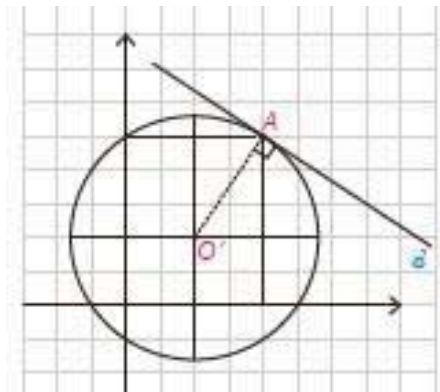
مثال: مرکز دایره ای ، نقطه $(۲ و -۳)$ است. این دایره روی خط $3x-4y+2=0$ وترى به طول ۶ جدا می کند ، معادله این دایره را بنویسید.



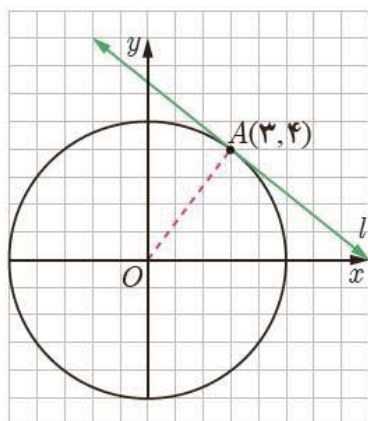
مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=6$ بر آن مماس باشد.

مثال: معادله‌ی دایره‌ای را بنویسید که از نقاط $A(1,2)$ و $B(3,0)$ بگذرد و $y=2x-1$ شامل قطری از آن باشد.

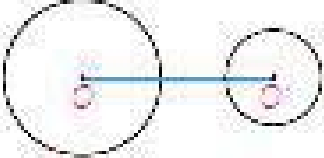
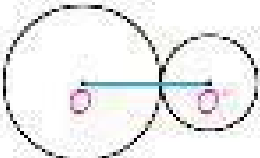
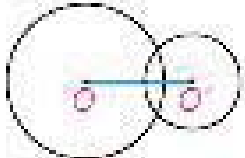

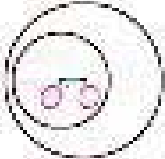
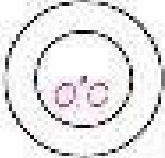
مثال: در نقطه $A(2,3)$ روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم. معادله‌ی این خط مماس را بیابید.



مثال: اگر بدانیم خط L در نقطه $(۳ و ۴)$ بر دایره ای به مرکز مبدا مختصات مماس است. معادله خط مماس چیست؟



وضعیت دو دایره نسبت به هم:

	$d > R + R'$	دو دایره بیرون هم (منفصل)
	$d = R + R'$	دو دایره مماس بیرون
	$R - R' < d < R + R'$	دو دایره متقاطع
	$d = R - R'$	دو دایره مماس درون
	$d < R - R'$	دو دایره متداخل
	$d = 0$	دایره‌های هم‌مرکز

مثال: وضعیت هر یک از جفت دایره‌های زیر را نسبت به هم مشخص کنید .

الف) $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$, $x^2 + y^2 - 10x - 14y + 73 = 0$

ب) $x^2 + y^2 - 2x = 1$, $x^2 + y^2 = 1$

پ) $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 3x + 2y + 1 = 0$

ت) $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 2x = 4$

ث) $x^2 + (y-1)^2 = 1$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$$\text{ج) } x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad x^2 + y^2 - 3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 5 = 0$$

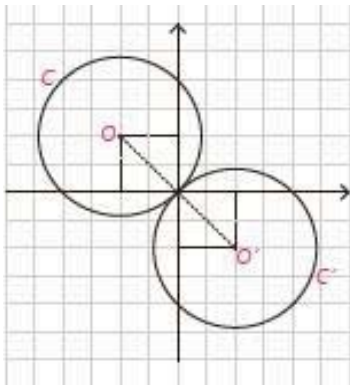
$$\text{پ) } x^2 + y^2 = 1 \quad , \quad x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$$

$$\text{ح) } x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$$

$$\text{خ) } x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0 \quad , \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$$

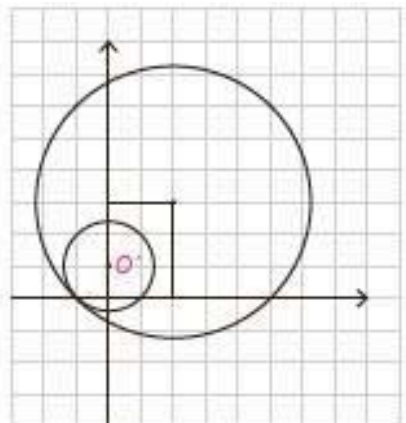
$$\text{ر) } x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \quad , \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(-1,1)$ بوده و بر دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ مماس بیرون باشد.



مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که بر دایره $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ مماس بیرون و مرکز آن نقطه $O(2, -2)$ باشد.

مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(0, 1)$ بوده و با دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3$ مماس داخل باشد.



مثال: معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(-1, -1)$ و $(-1, -1)$ بوده و با دایره $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ مماس درون باشد.