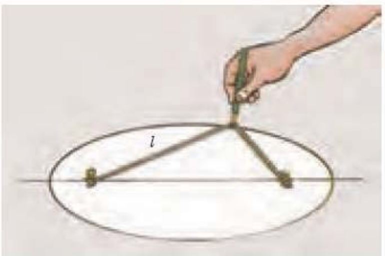
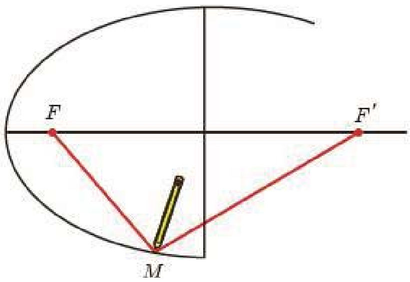
بیضی

یک تکه نخ را مطابق شکل در دو نقطه F',F ثابت کنید و فرض کنید که **طول نخ برابر L باشد،** بـه طوریکـه **طول نخ از فاصله بین** F',F **بیشتر باشد.** ($L > FF'$). یک مداد را مطابق شکل داخل نخ کرده و منحنـی را به گونه‌ای رسم کنید که در تمام زمان رسم، دو طرف نخ به صورت صاف و کشیده شده باشد. شکل حاصل شـده منحنی بسته‌ای به نام **بیضی** خواهد بود.



مثال: نقطه‌ای دلخواه مثل M را روی شکل رسم شده در نظر بگیرید. مجموع فاصله‌های این نقطـه از دو نقطـه ثابت F',F را بیابید. ($MF + MF' = ?$)

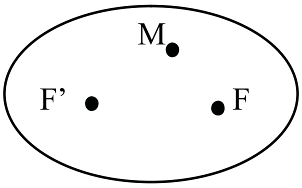


نتیجه: مجموعه نقاطی (**مکان هندسی نقاطی**) از صفحه است کـه **مجموع فاصله‌های آنها** از **دو نقطه ثابت** واقع در صفحه، **مقداری ثابت** است.

قرارداد: به دو نقطه ثابت در تعریف بیضی، دو **کانون بیضی** می‌گویند. (**به نقاط** F',F **دو کانون بیضی مـی-گویند.**) همچنین مقدار ثابت در تعریف بیضی را با عدد **2a** نشان می‌دهند. (در صفحات بعد راجع به a توضـیح می‌دهیم.)

وضعیت نقطه و بیضی:

اگر مجموع فواصل نقطه دلخواه M از نقاط F' , F (دو کانون بیـضی) **کمتـر از L باشـد، نقطـه M داخـل بیضی است** و برعکس.



حل: پاره خط MF' ادامه می‌دهیم تا **بیضی** را در نقطه A قطع کند.

A را به F وصل می‌کنیم. چون **نقطه A روی بیضی** است، بنا به تعریف بیضی داریم.

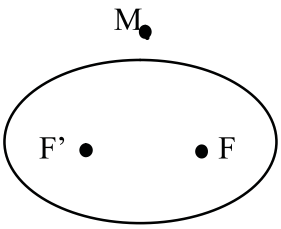
$AF + AF' = L$. از طرفی در مثلث $\overset{\Delta}{MAF}$ بنا به قضیه **نامساوی مثلثی** داریم.

$MF < MA + AF$ با اضافه کردن MF' به طرفین رابطه‌ی اخیر داریم.

$$MF' + MF < \underbrace{MF' + (MA}_{AF'} + AF) \Rightarrow MF' + MF < \underbrace{AF' + AF}_{L}$$

$MF + MF' < L \Leftrightarrow$ نقطه M داخل بیضی است.

۲) اگر مجموع فواصل نقطه دلخواه M از نقاط F و F' (دو کانون بیضی) **بیشتر از L** باشد، **نقطه M خارج بیضی** است و بر عکس.



حل: فرض کنیم نقطه تقاطع پاره خط MF با بیضی A باشد.

A را به F' وصل می‌کنیم. **چون نقطه A روی بیضی** است، بنا به تعریف بیضی داریم.

$AF + AF' = L$. از طرفی در مثلث $\overset{\Delta}{MAF'}$ بنا به قضیه نامساوی مثلثی داریم.

$$AF' < MF' + AM \xrightarrow{\oplus AF} AF + AF' < (MF' + \underbrace{AM) + AF}_{MF}$$

$$\Rightarrow AF + AF' < MF' + MF \Rightarrow MF' + MF > L$$

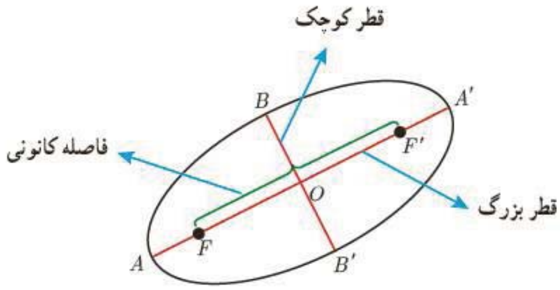
نقطه M خارج بیضی است. $\Leftrightarrow MF + MF' > L$

۳) اگر مجموع فواصل نقطه دلخواه M از نقاط F', F (دو کانون بیضی) **برابر با L** باشد، **نقطه M روی بیضی** است و بر عکس.

نقطه M روی بیضی است. $\Leftrightarrow MF + MF' = L$

ویژگی‌های بیضی:

در شکل بیضی رسم شده قوانین و ویژگی‌های زیر را داریم:



۱) نقاط F', F دو **کانون بیضی** هستند.

۲) اندازه (فاصله) FF' را **فاصله کانونی بیضی** می‌گویند.

۳) نقطه میانی پاره خط FF' را **مرکز بیضی** می‌گویند. **(نقطه O مرکز بیضی است.)**

۴) پاره خطی که از دو کانون بیضی می‌گذرد. (پاره خط AA') را **قطر بزرگ بیضی** (قطر کانونی) می‌گویند.

۵) به دو نقطه A', A **رئوس کانونی بیضی** می‌گویند.

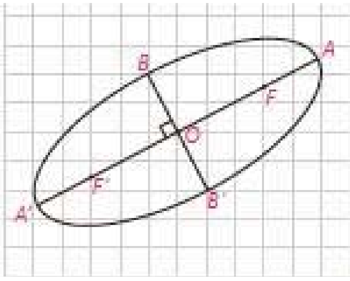
۶) پاره خطی که در **مرکز بیضی** بر **قطر بزرگ** (قطر کانونی) عمود است. (پاره خط BB') را **قطر کوچک** (قطر غیرکانونی) می‌گویند. **(قطر BB' عمود منصف AA' است.)**

۷) اگر قطر بزرگ (قطر کانونی) بیضی **افقی** باشد، بیضی را **بیضی افقی** می‌گویند.

۸) اگر قطر بزرگ (قطر کانونی) بیضی **عمودی** (قائم) باشد، بیضی را **بیضی قائم** می‌گویند.

مثال مهم و کاربردی: در بیضی شکل زیر اندازه‌های پاره خط‌های OA و OB و OF را به ترتیب با a و b و c نمایش داده‌ایم. نشان دهید:

الف) $AF = A'F'$



ب) مجموع فواصل هر نقطه از بیضی از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر طول قطر بزرگ بیضی است.

پ) $OA = OA' = a$

ت) مرکز بیضی قطر بزرگ را نصف کرده و طول قطر بزرگ بیضی برابر ۲a است. ($AA' = 2a$)

ث) نشان دهید نقطه B روی عمود منصف FF' است.

ج) رابطه‌ی بین a و b و c را بیابید.

چ) $OB = OB'$

نکته: اگر در یک بیضی، اندازه‌های **نیم قطر** بزرگ و کوچک را a و b و **نصف فاصله‌ی کانونی** را c بنامیم، آنگاه داریم:

$a^2 = b^2 + c^2$

قطر بزرگ = $AA' = 2a$

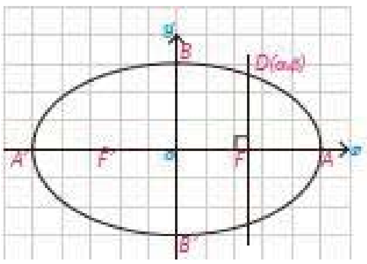
قطر کوچک = $BB' = 2b$

فاصله کانونی = $FF' = 2c$

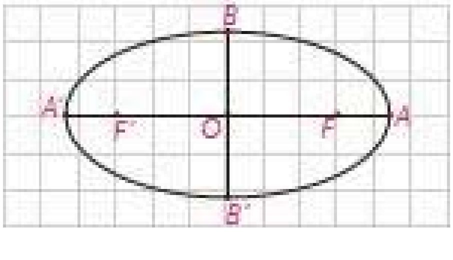
مثال: در یک بیضی، $a = 5$, $b = 3$ ، اندازه فاصله کانونی را بیابید. (ریاضی۳ - ۹۸/۶/۴)

مثال: در یک بیضی، $a = 4$, $c = 3$ ، اندازه قطر کوچک بیضی را بیابید.

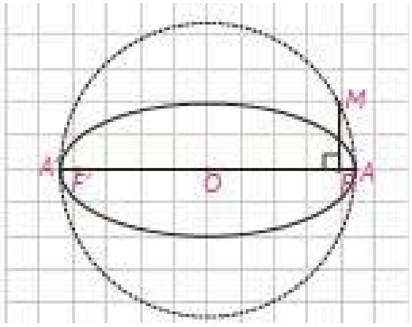
مثال: مرکز بیضی زیر بر مبداء مختصات و قطرهایش مانند شکل بر محورهای x و y منطبق هستند و فاصله F از هر دو نقطه O و A برابر ۴ است. اگر خطی که در نقطه F بر AA' عمود کردیم بیـضی را در نقطـه D قطـع کرده باشد، مختصات D را بدست آورید.



مثال: در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازه زاویـه FBF' چنـد درجـه اسـت؟ (هندسه ۳ - ۹۷/۱۰/۱۹)

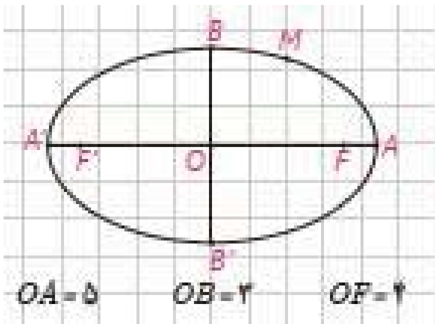


مثال: قطر دایره C ، مانند شکل، قطر بزرگ بیضی C است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



مثال: نقطه M روی بیضی بر اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصله‌ی آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.

الف) نشان دهید $OM = OF = OF'$

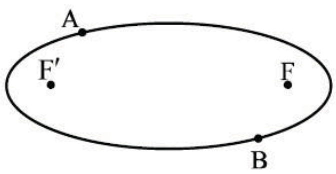


ب) نشان دهید مثلث $\overset{\Delta}{MFF'}$ قائم الزاویه است.

پ) طول‌های MF و MF' را به دست آورید.

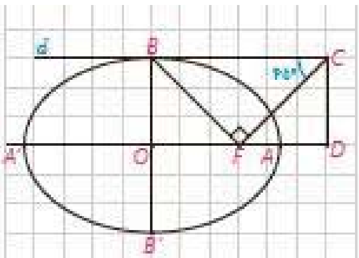
مثال: دو نقطه A و B روی یک بیضی F و F' کانون‌های بیضی‌اند. A به کانون F' نزدیک‌تر و B به کانون F نزدیک‌تر است. اگر $AF'=BF$ ، نشان دهید:

الف) در حالتی که دو پاره خط AF و AF' یکدیگر را درون بیضی قطع نکنند، با هم موازی‌اند.

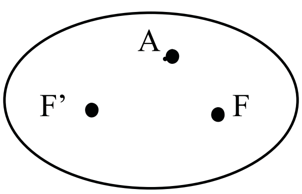


ب) در حالتی که AF و AF' یکدیگر را درون بیضی و در نقطه‌ای مثل M قطع کند، مثلث $\overset{\Delta}{FMF'}$ متساوی الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی است.

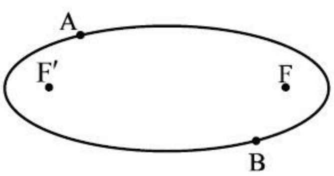
مثال: در بیضی مقابل AA' و BB' دو قطراند. خط d در نقطه B بر بیضی مماس است. پاره خط BF' را رسم می‌کنیم و در نقطه F عمودی بر BF رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطه c قطع کند و از c عمودی بر امتداد قطر بزرگ بیضی رسم می‌کنیم تا آنرا در نقطه‌ای مانند D قطع کند. اگر $\overset{\Delta}{BCF} = 45^\circ$، مقدار $\frac{AD}{AF}$ را به دست آورید.



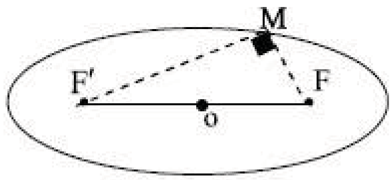
مثال: در شکل مقابل نقطه A داخل بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند.
ثابت کنید مجموع فواصل نقطه A از F و F' کوچکتر از قطر بزرگ بیضی است.
(هندسه۳ - ۹۸/۶/۲۳)



مثال: دو نقطه A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانونهای بیضی‌اند. اگر $AF'=BF$ باشد، ثابت کنید دو پاره خط AF و BF' موازی‌اند. (هندسه ۳ – ۹۸/۳/۲)



مثال: نقطه M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ به گونه‌ای قرار دارد که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. در صورتی که بدانیم مثلث MFF' قائم‌الزاویه است، طول MF را به دست آورید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند.) (هندسه ۳- ۹۸/۱۰/۲۱)



یادآوری: اگر قطر بزرگ (**قطر کانونی**) بیضی **افقی** باشد، بیضی را **بیضی افقی** می‌گویند.

تذکر: بیضی‌هایی که تاکنون بررسی کردیم دارای مرکزی به نام مبدا مختصات بود. (**نقطه** $O(0\,,\,0)$ **مرکز بیضی بود.**) اما اگر مرکز بیضی مبدا مختصات نباشد مرکز بیضی را نقطه‌ای مثل $O(\alpha\,,\beta)$ در نظر می‌گیریم.

نکات و ویژگی‌های بیضی افقی:

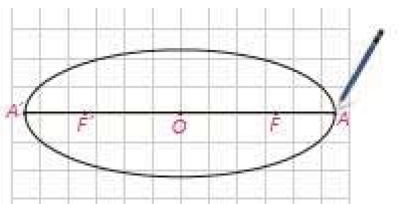
۱) مختصات مرکز بیضی افقی بصورت $O(\alpha\,,\beta)$ است نه $O(0\,,\,0)$.

۲) مختصات دو کانون بیضی افقی به صورت $F(\alpha+c\,,\beta)$ و $F'(\alpha-c\,,\beta)$ می‌باشد.

۳) مختصات دو سر قطر کانونی (قطر بزرگ) به صورت $A(\alpha+a\,,\beta)$ و $A'(\alpha-a\,,\beta)$ می‌باشد.

۴) مختصات دو سر قطر کوچک به صورت $B(\alpha\,,\beta+b)$ و $B'(\alpha\,\,,\beta-b)$ می‌باشد.

۵) رابطه‌ی $a^2=b^2+c^2$ برقرار است.



مثال: در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۶ و طول قطر کوچک ۴ واحد است.

اگر مرکز این بیضی دارای مختصات (۵ و ۴) باشد.

الف) فاصله‌ی کانونی بیضی را بیابید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ و قطر کوچک و همچنین مختصات کانونهای بیضی را بنویسید.

مثال: در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است. فاصله‌ی کانونی بیضی را به دست آورید. (ریاضی ۳ – ۹۸/۳/۲)

یادآوری: اگر قطر بزرگ (**قطر کانونی**) بیضی **قائم** باشد بیضی را **بیضی قائم** می‌گویند.

نکات و ویژگیهای بیضی قائم:

۱) مختصات مرکز بیضی قائم بصورت $O(\alpha , \beta)$ است نه $O(\circ , \circ)$.

۲) مختصات دو کانون بیضی قائم به صورت $F(\alpha , \beta + c)$ و $F'(\alpha , \beta - c)$ می‌باشد.

۳) مختصات دوسر قطر کانونی(قطر بزرگ) به صورت $A(\alpha , \beta + a)$ و $A'(\alpha , \beta - a)$ می‌باشد.

۴) مختصات دو سر قطر کوچک به صورت $B(\alpha + b , \beta)$ و $B'(\alpha - b , \beta)$ می‌باشد.

۵) رابطه‌ی $a^2 = b^2 + c^2$ برقرار است.

مثال: کانون های یک بیضی نقاط (۳ و ۱) و (۵- و ۱) است.

الف) فاصله کانونی، مختصات مرکز بیضی و معادله قطرهای بزرگ و کوچک بیضی را بنویسید.

ب) اگر ۶= a باشد، اندازه قط کوچک و بزرگ بیضی را بیابید. (ریاضی ۳- ۹۸/۱۰/۹)

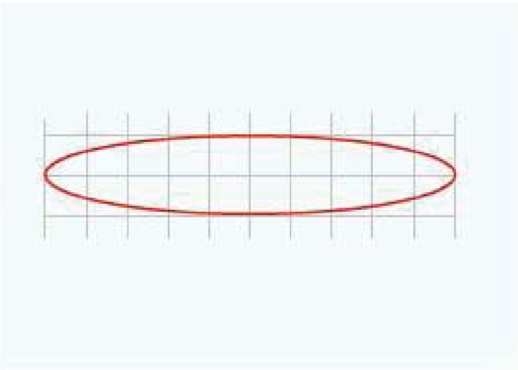
خروج از مرکز بیضی:

نکته: در هر بیضی همیشه c < a است. (**چون فاصله‌ی مرکز تا کانون از فاصله‌ی مرکز تاراس کانونی کمتر** است، یا $a^2 = b^2 + c^2$ پس $c^2 < a^2$ و از آنجا $c < a$)

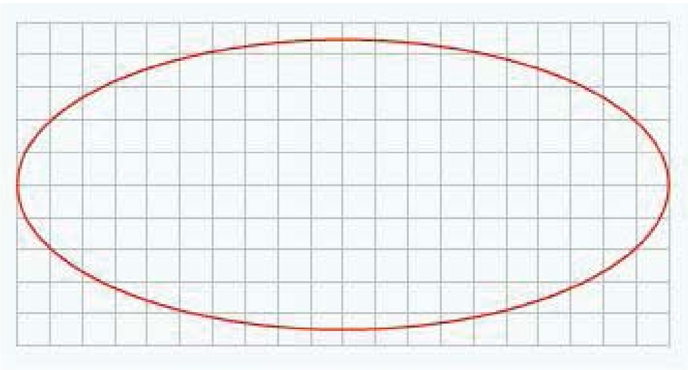
خروج از مرکز بیضی: در هر بیضی به مقدار $\frac{c}{a}$ خروج از مرکز بیضی می‌گویند و آن را با e نشان می‌دهند.

نکته: در هر بیضی داریم: $\circ < e < 1$.

تذکر: هر چه نسبت $\frac{c}{a}$ ، بزرگ‌تر و به عدد یک (**۱**) نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی **کشیده‌تر** می‌شود. (**شکل بیضی به پاره خط نزدیکتر است.**)

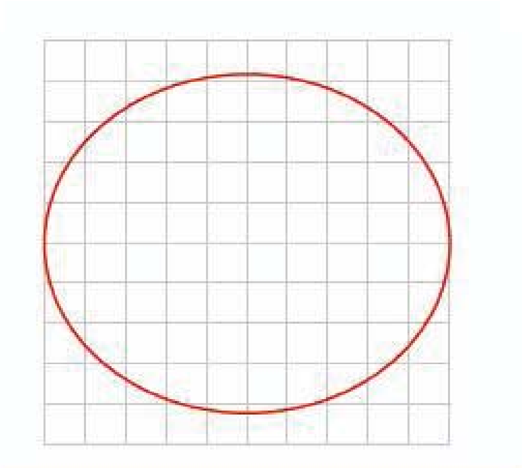


$\frac{c}{a}=۰/۹۸$

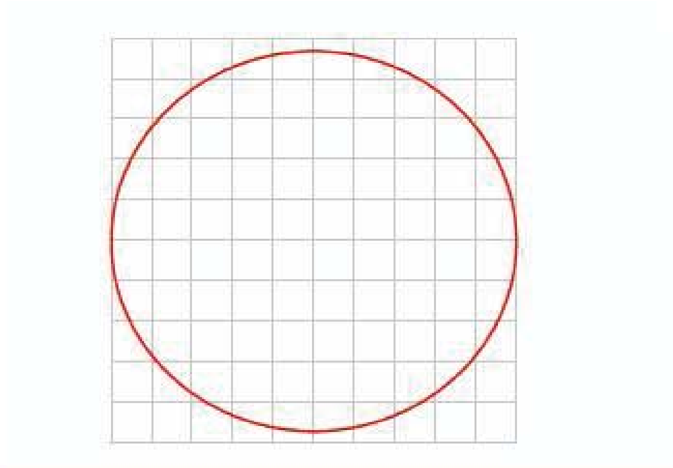


$\frac{c}{a}=۰/۹$

تذکر: هرچه نسبت $\frac{c}{a}$ ، کوچک‌تر و به عدد **صفر** نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به شکل **دایره** نزدیک‌تر می‌شود.

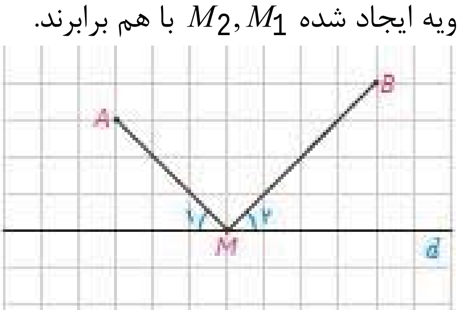


$\frac{c}{a}=۰/۴$

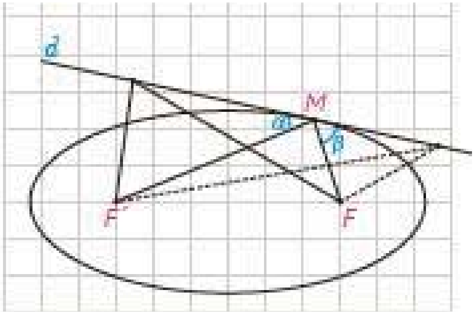


$\frac{c}{a}=۰/۲$

یادآوری: در پایه‌ی یازدهم در درس هندسه (۲) دیدیم که کوتاهترین مسیر از نقطه A به نقطه B و با عبور از خط d ، از نقطه‌ای مانند M روی خط d می‌گذرد، به گونه‌ای که دو زاویه ایجاد شده M_2, M_1 با هم برابرند.



مثال: فرض کنیم خط d مانند شکل زیر در نقطه M بر بیضی مماس باشد.

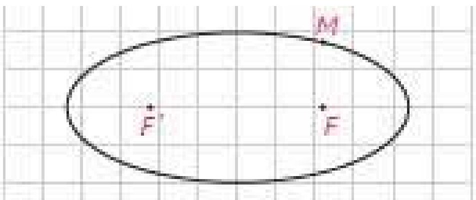


۱- مجموع فواصل کدام یک از نقاط خط d نسبت به دو کانون F', F کمترین مقدار را دارد؟ چرا؟

۲- دو زاویه‌ی β, α نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

۳- با توجه به آنچه گفته شد اگر بدنه داخلی یک بیضی آینه‌ای باشد و از یکی از کانون‌های بیضی اشعه نوری بر بدنه داخلی بیضی تابیده شود، انعکاس نور از کدام نقطه خواهد گذشت؟ چرا؟

مثال: در شکل زیر نقطه M ، روی بیضی و کانون های F', F مشخص شده‌اند. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$.



مثال: اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{3}{5}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانونی آن را به دست آورید. (هندسه۳ – ۹۸/۳/۲)

مثال: در یک بیضی قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟
(ریاضی ۳- ۹۸/۱۰/۸)

مثال: خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ و مرکز آن (۱- و ۴-) و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر کوچک و قطر بزرگ و کانون‌های بیضی را پیدا کنید.