جزوه آموزشی

هندسه ۲

یازدهم ریاضی

کاری از استاد بابالویان

پاییز ۹۶

فصل اول : دایره

درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

درس دوم : رابطه های طولی در دایره

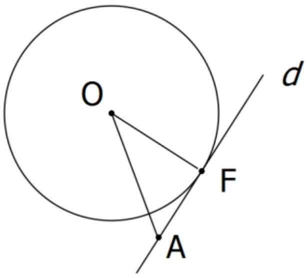
درس سوم : چند ضلعی های محاطی و محیطی

درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

با مفهوم دایره و بعضی از ویژگی هاش سال های قبل آشنا شدیم حالا می خوایم با ویژگی های دیگش آشنا بشیم و حتی این ویژگی ها رو اثبات کنیم .

قضیه : یک خط و یک دایره بر هم مماسند اگر و تنها اگر این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع آن عمود باشد .

اثبات : چون قضیه دو شرطی هستش باید هر دو طرف ثابت بشه !!



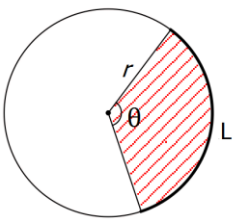
$\Leftarrow$ فرض کنید خط d بر دایره در نقطه F مماس است پس هر نقطه دیگرمانند A روی خط d خارج از دایره است پس $OA > OF$ و این یعنی OF کوتاه ترین فاصله بین نقطه O و خط d است پس خط d بر شعاع OF عمود است .

$\Rightarrow$ فرض کنید خط d بر شعاع OF عمود باشد پس برای هر نقطه دیگر مانند A روی خط $OA > OF$ (وتر بزرگ ترین ضلع مثلث قائم الزاویه است) لذا تمام نقاط روی خط d به جز F خارج از دایره است پس تنها نقطه تماس F است و خط بر دایره مماس است .

تمرین : طریقه رسم مماس بر دایره از نقطه ای روی آن را توضیح دهید .

طول کمان و مساحت قطاع :

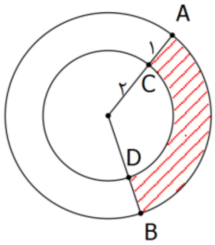
با توجه به محیط و مساحت دایره طول کمان و مساحت قطاع مربوط به زاویه مرکزی θ رادیان را می توان به کمک تناسب بدست آورد :



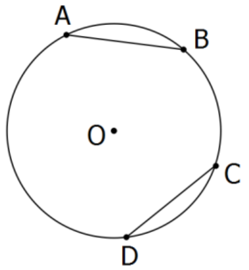
$$\frac{L}{2\pi r} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow L = r\theta$$

$$\frac{S}{\pi r^2} = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow S = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

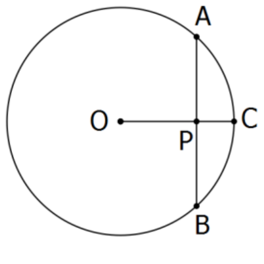
تمرین : طول کمان های AB,CD مساحت قسمت هاشور خورده را بدست آورید .



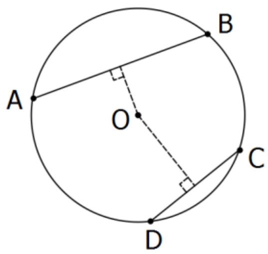
تمرین : ثابت کنید در یک دایره طول کمان های نظیر دو وتر مساوی با هم برابرند و برعکس .



تمرین : ثابت کنید اگر در یک دایره شعاع بر وتر عمود باشد آن وتر و کمان مقابلش را نصف می کند و برعکس .



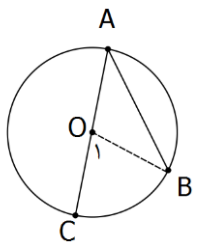
تمرین : ثابت کنید از دو وتر یک دایره آنکه به مرکز نزدیک تر است بزرگ تر است و برعکس .



قضیه : اندازه هر زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه کمان مقابل آن .

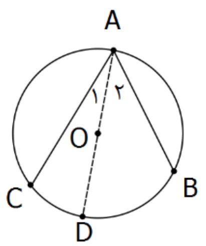
اثبات :

الف) فرض کنید یکی از اضلاع زاویه از مرکز دایره می گذرد . در این صورت با وصل کردن نقاط B و O داریم :



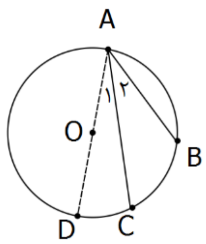
$$\left.\begin{array}{l} O_1 = A + B \\ A = B \end{array}\right\} \Rightarrow O_1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2} O_1 \Rightarrow A = \frac{1}{2} BC$$

ب) فرض کنید اضلاع زاویه اطراف مرکز دایره باشد. با رسم قطر گذرنده از A طبق قسمت الف داریم :



$$\left.\begin{array}{l} A_1 = \frac{1}{2} CD \\ A_2 = \frac{1}{2} BD \end{array}\right\} \Rightarrow A_1 + A_2 = \frac{1}{2}(CD + BD) \Rightarrow A = \frac{1}{2} BC$$

ج) فرض کنید اضلاع زاویه در یک طرف مرکز باشد . با رسم قطر گذرنده از A طبق قسمت الف داریم :

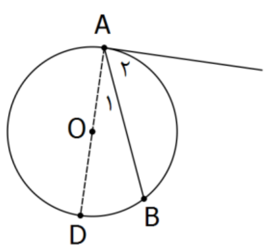


$$\left.\begin{array}{l} A = \frac{1}{2} BD \\ A_1 = \frac{1}{2} DC \end{array}\right\} \Rightarrow A - A_1 = \frac{1}{2}(BD - DC) \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} BC$$

قضیه : اندازه هر زاویه ظلی برابر است با نصف کمان مقابل آن .

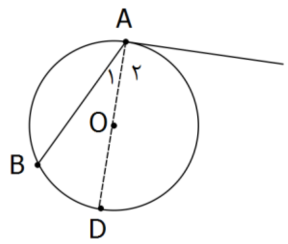
اثبات :

الف) اگر زاویه ظلی حاده باشد با رسم قطر گذرنده از A داریم :



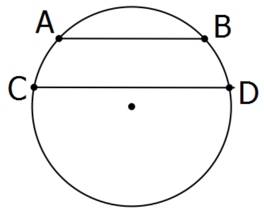
$$\left.\begin{array}{l} A = 90^\circ \Rightarrow A = \frac{1}{2} AD \\ A_1 = \frac{1}{2} BD \end{array}\right\} \Rightarrow A - A_1 = \frac{1}{2}(AD - BD) \Rightarrow A_2 = \frac{1}{2} AB$$

ب) اگر زاویه ظلی منفرجه باشد با رسم قطر گذرنده از A داریم :

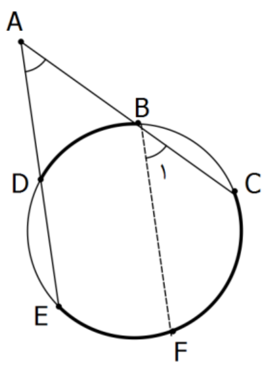


$$\left.\begin{array}{l} A_{۲} = ۹۰^{\circ} \Rightarrow A = \frac{۱}{۲}AD \\ A_{۱} = \frac{۱}{۲}BD \end{array}\right\} \Rightarrow A_{۲} + A_{۱} = \frac{۱}{۲}(AD + BD) \Rightarrow A = \frac{۱}{۲}AB$$

تمرین : ثابت کنید دو وتر از دایره با هم موازیند اگر و تنها اگر کمان های محدود بین آنها مساوی باشند .



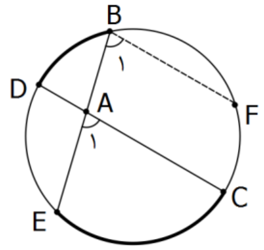
قضیه : زاویه حاصل از برخورد دو وتر در بیرون از دایره برابر با نصف تفاضل اندازه کمان هایی است که بین اضلاع زاویه محصورند .



اثبات : از نقطه B وتری موازی DE رسم می کنیم در این صورت :

$$A = B_{۱} = \frac{۱}{۲}FC = \frac{۱}{۲}\left(EC - EF\right) \xrightarrow{EF = BD} A = \frac{EC - BD}{۲}$$

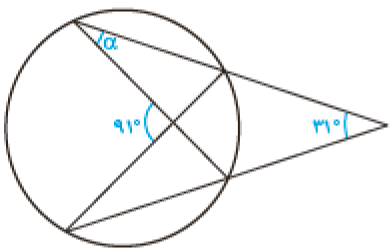
قضیه : زاویه حاصل از برخورد دو وتر در درون دایره برابر با نصف مجموع اندازه کمان هایی است که بین اضلاع زاویه محصورند .



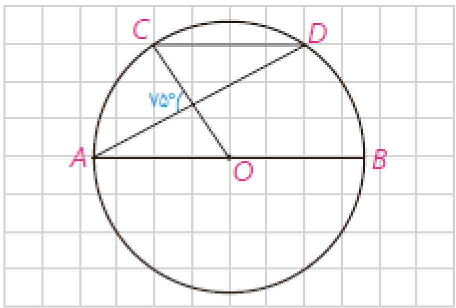
اثبات : از نقطه B وتری موازی DC رسم می کنیم در این صورت :

$$A_{۱} = B_{۱} = \frac{۱}{۲}EF = \frac{۱}{۲}\left(EC + FC\right) \xrightarrow{FC = BD} A = \frac{EC + BD}{۲}$$

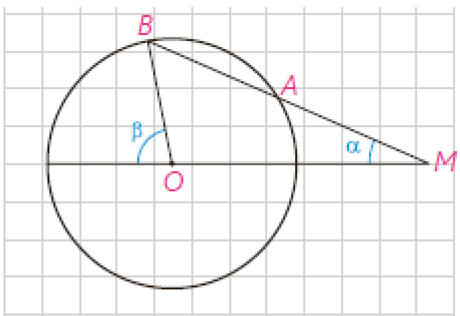
تمرین :مقدار α را حساب کنید .



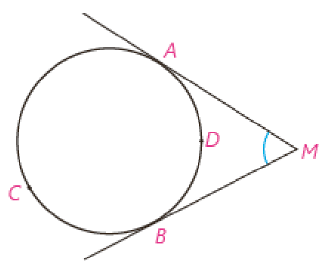
تمرین : اگر $AB \parallel CD$ باشد . اندازه کمان AC را بیابید .



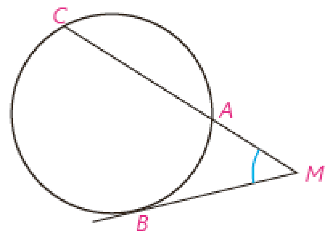
تمرین : در شکل زیر $MA = R$. نشان دهید $\beta = ۳\alpha$.



تمرین : در شکل زیر ثابت کنید . (راهنمایی : از نقطه B خطی موازی ضلع دیگر زاویه رسم کنید)

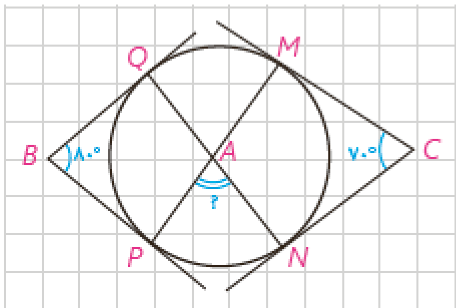


الف) $\hat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB}}{۲}$



ب) $\hat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{۲}$

تمرین : در شکل زیر اندازه زاویه A چند درجه است ؟

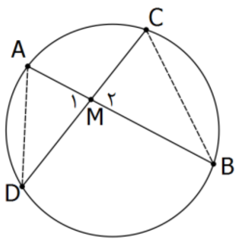


درس دوم : رابطه های طولی در دایره

قضیه : هرگاه خط هایی شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه ای مانند M (درون یا بیرون دایره) همدیگر را قطع کنند .
آنگاه : $MA.MB = MC.MD$

الف) اگر درون دایره همدیگر را قطع کنند :

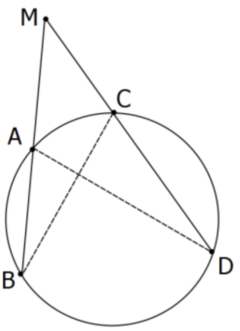
A را به D و B را به C وصل می کنیم :



$$\left.\begin{array}{l} B = \frac{AC}{۲} = D \\ M_{۱} = M_{۲} \end{array}\right\} \xrightarrow{ز ز} \overset{\Delta}{ADM} \sim \overset{\Delta}{MBC} \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA.MB = MC.MD$$

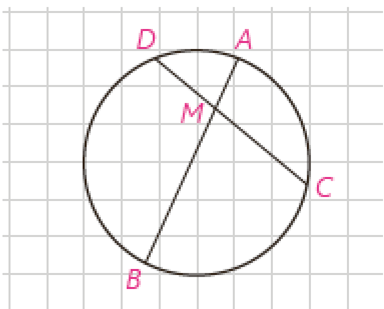
ب) اگر بیرون دایره همدیگر را قطع کنند :

A را به D و B را به C وصل می کنیم :

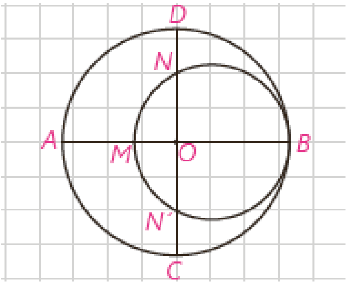


$$\left.\begin{array}{l} B = \frac{AC}{۲} = D \\ M = M \end{array}\right\} \xrightarrow{ز ز} \overset{\Delta}{ADM} \sim \overset{\Delta}{MBC} \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA.MB = MC.MD$$

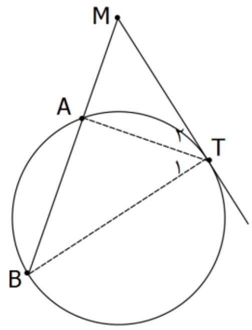
تمرین : در شکل زیر $CD = ۹$ و $AB = ۱۱$. وتر AB وتر CD را به نسبت ۱به ۲ تقسیم کرده است . وتر CD وتر AB را به چه نسبتی قطع می کند ؟



تمرین : در شکل دو دایره مماس هستند . و دو قطر داده شده عمودند . اگر $AM = ۱۶, ND = ۱۰$ شعاع دو دایره راپیدا کنید .

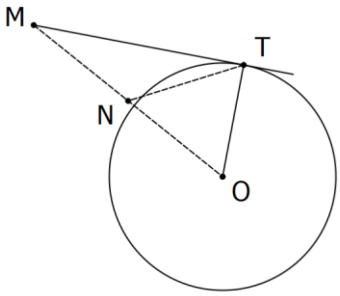


قضیه : هر گاه از نقطه ای خارج از دایره یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم شود ، مربع اندازه مماس با حاصل ضرب اندازه های دو قطعه قاطع برابر است . ($MT^{2} = MA.MB$)



تمرین : از نقطه P د رخارج دایره، مماس PA به طول $10\sqrt{3}$ و قاطعی را بر آن رسم کرده ایم . که قاطع در نقاط B وC دایره را قطع کرده است . اگر $BC = 20$ باشد طول PB و PC را بدست آورید .

تمرین : طریقه رسم مماس بر دایره از نقطه ای خارج آن را توضیح دهید و دلیل خود را برای درستی روش بیان کنید .



حل : اگر T نقطه ای باشد که خط گذرنده از M بر دایره مماس شده است

آنگاه مثلث MTO قائم الزاویه است و میانه وارد بر وتر نصف وتر است

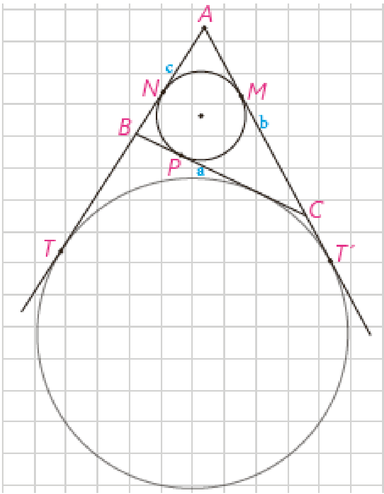
(سال قبل اثبات کردیم) یعنی $NM = NO = NT$ پس دایره ای که

به قطر MO رسم شود از T خواهد گذشت . در نتیجه برای رسم مماس

کافیست دایره ای به قطر MO رسم کنیم و نقاط برخورد دو دایره را به M وصل کنیم .

تمرین : ثابت کنید اندازه دو مماس رسم شده بر یک دایره از نقطه ای خارج آن با هم برابرند .

تمرین : در شکل زیر نشان دهید $AT = AT' = P$.



حالت های دو دایره نسبت به هم :

طبق جدول مقابل برای اینکه بدانیم دو دایره نسبت به هم چه وضعی را دارند ، بهتر است ابتدا مجموع دو شعاع و تفاضل دوشعاع را بدست آوریم و سپس اندازه فاصله دو مرکز را با دو عدد بدست آمده مقایسه کنیم .

اگر برابر با یکی از این اعداد باشد مماس درون یا بیرون است (به جدول نگاه کنید)

اگر عددی بین این ها باشد متقاطع است.

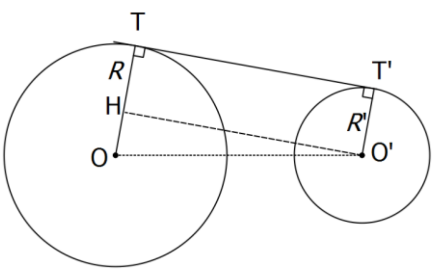
اگر عددی اطراف اینها باشد متداخل یا متخارج است (به جدول نگاه کنید)

دو دایرهٔ برون هم (متخارج)	$d > R + R'$	
دو دایره مماس برون	$d = R + R'$	
دو دایره متقاطع	$R - R' < d < R + R'$	
دو دایره مماس درون	$d = R - R'$	
دو دایره متداخل	$d < R - R'$	
دایره‌های هم‌مرکز	$d = 0$	

مماس شترک خارجی :

می خواهیم اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع های R و R′ و طول خط المرکزین d را بدست آوریم :

اگر شعاع های OT و OT′ را رسم کنیم بر مماس مشترک عمود خواهند بود . پاره خط O′H را موازی TT′ رسم می کنیم و چون چهار ضلعی حاصل مستطیل است مثلث OHH' مثلث قائم الزاویه خواهد بود و داریم :

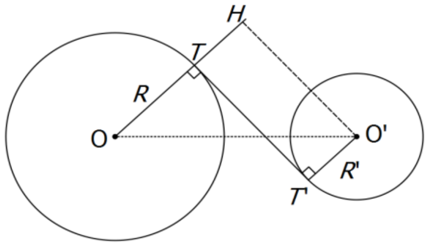


$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

مماس مشترک داخلی :

می خواهیم اندازه مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع های R و R′ و طول خط المرکزین d را بدست آوریم :

اگر شعاع های OT و OT′ را رسم کنیم بر مماس مشترک عمود خواهند بود . پاره خط O′H را موازی TT′ رسم می کنیم تا امتداد شعاع OT را قطع کند. مثلث OHH' مثلث قائم الزاویه خواهد بود و داریم :



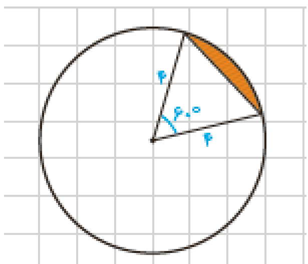
$$TT' = \sqrt{d^{۲} - (R + R')^{۲}}$$

تمرین : دو دایر به شعاع های ۳ و ۴ مماس خارجی هستند . طول مماس مشترک آنها چقدر است ؟

تمرین : طول شعاع های دو دایره متخارج را بدست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط المرکزین آنها مساوی ۸ واحد است .

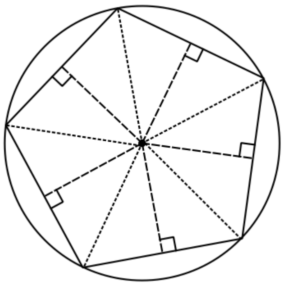
تمرین : طول خط المرکزین دو دایره مماس دورنی ۲ و مساحت ناحیه محدود بین آنها ۱۶π است . طول شعاع دو دایره را بدست آورید .

تمرین : در شکل زیر مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید .



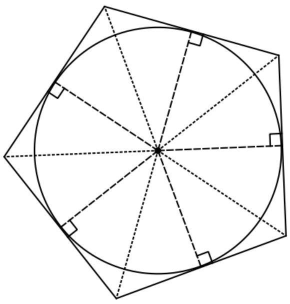
درس سوم : چند ضلعی های محاطی و محیطی

چند ضلعی محاطی : چند ضلعی که تمام رئوس آن روی یک دایره باشد . (آن دایره بر چند ضلعی محیط خواهد بود)



پس می توان گفت « **چند ضلعی محاطی است اگر و تنها اگر همه عمود منصف های اضلاع در یک نقطه همرس باشند** » .

چند ضلعی محیطی : چند ضلعی که تمام اضلاع آن بر یک دایره مماس باشد .(آن دایره در چند ضلعی محاط خواهد بود)



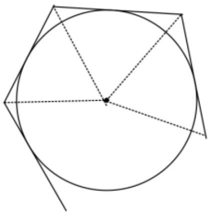
پس می توان گفت « **چند ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر همه نیم ساز های زاویه ها در یک نقطه همرس باشند** » .

نتیجه : از آنجایی که سال گذشته ثابت کردیم عمود منصف ها و نیمساز های مثلث همرسند پس مثلث هم چند ضلعی محیطی است و هم محاطی و محل همرسی عمود منصف های اضلاع، مرکز دایره محیطی و محل همرسی نیمسازها، مرکز دایره محاطی است .

تمرین : ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل آن ضلع ، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می کنند .

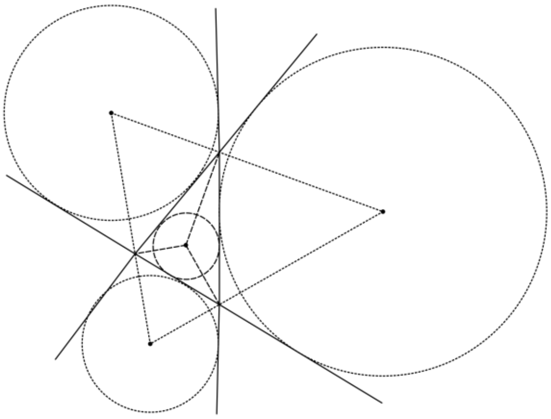
تمرین : نشان دهید یک n ضلعی محیطی با شعاع دایره محاطی r و محیط ۲P دارای مساحت $S = rp$ است ؟

راهنمایی : مساحت n مثلث را بدست آورده (اضلاع لزوماً مساوی نیستند) و جمع کنید .

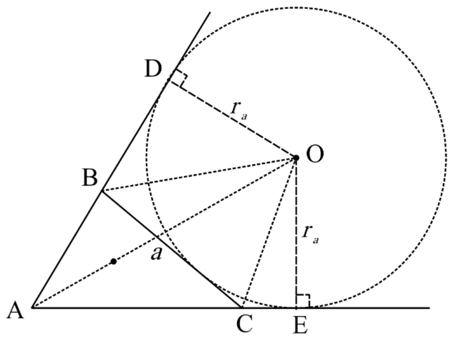


نتیجه : شعاع دایره محاطی هر مثلث برابر است با $r = \frac{S}{P}$ (P نصف محیط است)

دایره محاطی خارجی و شعاع آن : هر مثلث سه دایره محاطی خارجی نیز دارد که از بیرون بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس هستند و مرکز آنها محل برخورد یک نیمساز داخلی با دو نیمساز خارجی است .



تمرین : در مثلث ABC فرض کنید ضلع مقابل به زاویه A را a و شعاع دایره خارجی محاطی مقابل آن را r_a بنامیم حال داریم :



$$S_{ABC} = S_{ABO} + S_{ACO} - S_{BCO} = \frac{۱}{۲} r_a (b + c - a)$$

از طرفی $۲p = a + b + c \Rightarrow ۲p - ۲a = b + c - a$

پس داریم : $S = r_a (p - a) \Rightarrow r_a = \frac{S}{p - a}$

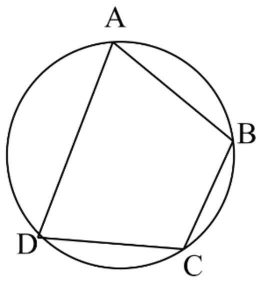
در نتیجه برای دایره های محاطی خارجی دیگر نیز داریم : $r_b = \frac{S}{p - b}$ و $r_c = \frac{S}{p - c}$

تمرین : نشان دهید رابطه شعاع دایره محاطی و دوایر خارجی محاطی به صورت $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_c}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_a}$ است .

تمرین : نشان دهید رابطه شعاع دایره محاطی و ارتفاع های مثلث به صورت $\frac{1}{r}=\frac{1}{h_c}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_a}$ است. ($\frac{1}{h_a}=\frac{a}{2s}$)

قضیه : چهار ضلعی محاطی است اگر و تنها اگر دو مقابل آن مکمل باشند .

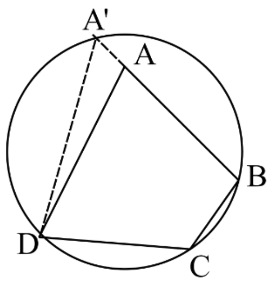
اثبات : فرض کنید چهار ضلعی محاطی باشد پس :



$$A=\frac{BCD}{2}\quad , \quad C=\frac{BAD}{2}\quad \Rightarrow \quad A+C=\frac{360^\circ}{2}=180^\circ$$

و به همین ترتیب دو زاویه مقابل دیگر نیز مکمل هستند .

حال فرض کنید زاویه های A,C مکمل باشد نشان می دهیم دایره ای که از سه نقطه B,C,D میگذرد از نقطه A نیز خواهد گذشت و چهار ضلعی خواهد بود .

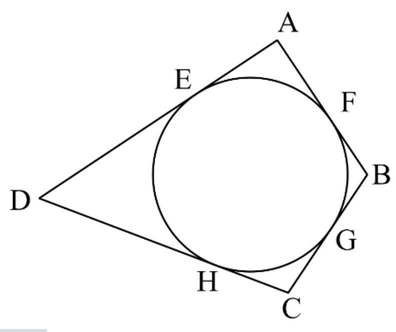


(فرض خلف) فرض کنیم اینطور نباشد و دایره خط BA را در A' قطع کند در این صورت چهار ضلعی A'BCD محاطی است و A',C مکمل هستند .

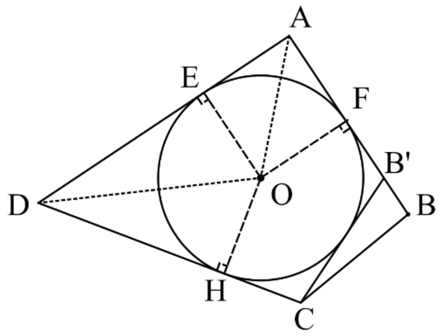
پس A و A' هم اندازه خواهند بود که این امکان ندارد در نتیجه A' همان A است .

قضیه : چهار ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر مجموع اندازه دو ضلع مقابل برابر با مجموع اندازه دو ضلع دیگر باشد .

اثبات : فرض کنید چهار ضلعی محیطی باشد پس :



$$\begin{aligned} AB+DC &= AF+BF+DH+CH \\ &= \underline{AE}+\underline{\underline{BG}}+\underline{DE}+\underline{\underline{CG}} \\ &= AD+BC \end{aligned}$$



حال فرض کنید $AB+CD=AD+BC$ و نیم ساز های زاویه های A و D را رسم می کنیم تا همدیگر را در O قطع کنند فاصله این نقطه از سه ضلع AD,AB,AC برابر است (چرا ؟) پس دایره ای به مرکز O و شعاع OE بر این سه ضلع مماس است ثابت می کنیم بر ضلع چهارم نیز مماس است.

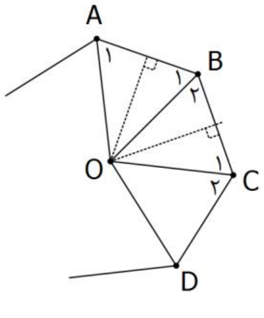
(فرض خلف) فرض کنید این دایره بر BC مماس نباشد از C مماسی بر دایره رسم می کنیم در این صورت چهار ضلعی AB'CD محیطی است و $AB'+CD=AD+B'C$ از تفاضل دو رابطه قبل داریم :

$$AB-AB'=BC-B'C \Rightarrow BB'=BC-B'C \Rightarrow BC=B'C+BB'$$

و این رابطه غیر ممکن است زیرا طبق نامساوی مثلثی در هر مثلث مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ تر است .

تمرین : ثابت کنید یک ذوزنقه ، محاطی است اگر و تنها اگر متساوی الساقین باشد .

تمرین : یک ذوزنقه هم محیطی است و هم محاطی . ثابت کنید مساحت این ذوزنقه برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آنها .



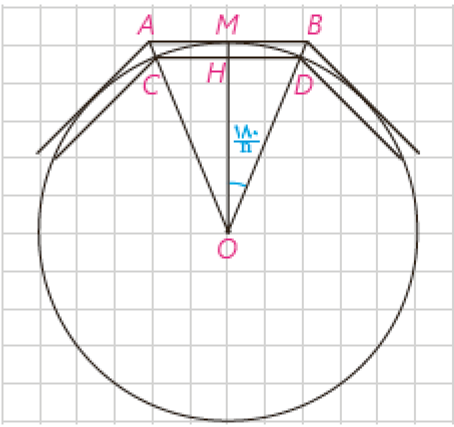
قضیه : هر چند ضلعی منتظم هم محاطی است و هم محیطی .

عمود منصف های اضلاع AB و BC را رسم می کنیم تا در O همدیگر را قطع کنند اگر O را به A,B,C وصل کنیم $OA=OB=OC=k$ و بنا به حالت (ض ض ض) مثلث های OAB و BOC همنهشت هستند و $A_۱=B_۱=B_۲=C_۱=\alpha$ در نتیجه

$C_{۲} = \alpha$. حال اگر O را به D وصل کنیم بنا به حالت (ض ز ض) دو مثلث OBC و OCD همنهشتند و $OD = k$.
به همین ترتیب فاصله O از بقیه رئوس نیز برابر K است و این یعنی O مرکز دایره ای است که از رئوس چند ضلعی می گذرد و از آنجایی که فاصله O از تمام ضلع ها نیز برابر است مرکز دایره ای است که بر اضلاع مماس است و این یعنی چند ضلعی منتظم هم محیطی و هم محاطی است .

تمرین : نشان دهید اندازه اضلاع یک n ضلعی منتظم محاطی و محیطی در دایره ای به شعاع R برابر است با :

$CD = ۲R \sin\frac{۱۸۰}{n}$ و $AB = ۲R \tan\frac{۱۸۰}{n}$



فصل دوم : تبدیلات هندسی

درس اول : تبدیلات هندسی

درس دوم : کاربرد تبدیل ها

درس اول : تبدیلات هندسی

گاهی در اثر حرکت مجموعه نقاط یک شکل مانند F ، یک شکل دیگر مانند F' طبق قانون معین T بدست می آید . قانون T می تواند موقعیت ، اندازه و نوع شکل را تغییر دهد.

اگر قانون T دارای ویژگی خاصی باشد به آن تبدیل گفته می شود و F' را تصویر شکل F تحت تبدیل T می گویند و می نویسند $T(F)=F'$.

تبدیل ها انواع مختلفی دارند که با برخی از آنها در این فصل آشنا خواهیم شد .

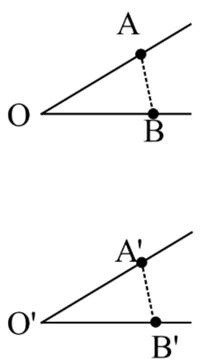
تبدیل : تبدیل T در صفحه P تابعی است که به هر نقطه A از صفحه P دقیقاً یک نقطه مانند A' را از صفحه P نظیر می کند و برعکس ; هر نقطه A' از صفحه P ، تصویر دقیقاً یک نقطه A از صفحه P است .

$$T : P \to P \qquad T(A)=A'$$

(تابع T یک به یک است)

تبدیل طولپا (ایزومتری) : به تبدیلی که طول پاره خط را حفظ می کند تبدیل طولپا می گویند . به عبارت دیگر تبدیل T طولپا است اگر و تنها اگر به ازای هر دو نقطه A,B از یک صفحه، $AB=A'B'$ که $T(A)=A', T(B)=B'$.

قضیه : در هر تبدیل طولپا تبدیل یافته هر زاویه، زاویه ای هم اندازه آن است .(تبدیل طولپا اندازه زاویه را حفظ می کند)



فرض کنید زاویه AOB تحت تبدیل طولپای T به زاویه $A'O'B'$ تصویر شده باشد .

به طوری که $T(A)=A', T(O)=O', T(B)=B'$.

چون تبدیل طولپاست : $OA=O'A', OB=O'B', AB=A'B'$

در نتیجه بنا به حالت (ض ض ض) دو مثلث $OAB, O'A'B'$

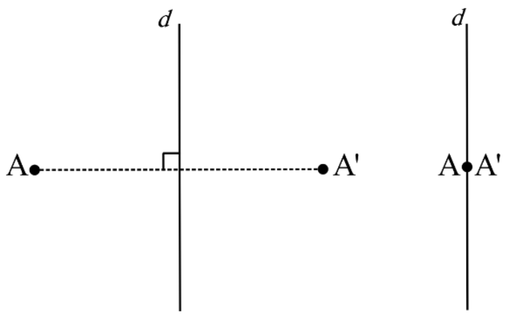
همنهشتند و $O=O'$.

نقطه ثابت تبدیل : در هر تبدیل ، نقطه ای که تبدیل یافته آن خودش باشد را نقطه ثابت آن تبدیل می نامند .

بازتاب : بازتاب نسبت به خط d تبدیلی است که تحت آن تصویر هر نقطه خارج از خط مانند A نقطه ای مانند A′ است به طوری که خط d عمود منصف AA′ است . ($S(A)=A'$)

همچنین تصویر هر نقطه روی خط d خودش است .

در این تبدیل خط d را محور بازتاب می نامند .

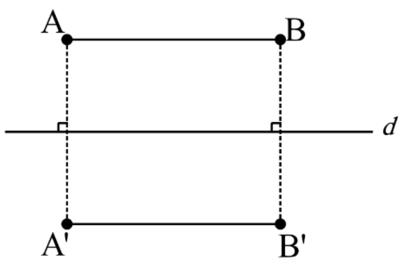


قضیه : بازتاب تبدیلی طولپا است .

ابتدا حالت های مختلف یک پاره خط نسبت به محور بازتاب d را در نظر می گیریم و در حالت نشان می دهیم اندازه پاره خط با اندازه تصویرش برابر است .

الف) پاره خط AB موازی خط d باشد .

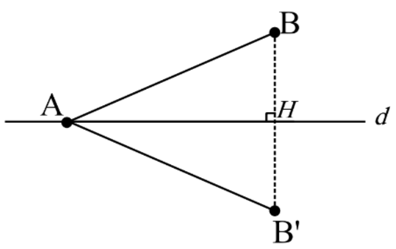
تصویر آن خط موازی d در طرف دیگر آن است و چهار ضلعی $ABB'A'$ مستطیل خواهد بود پس $AB=A'B'$.



ب) یک سر پاره خط روی خط d باشد .

(اگر هر دو سر پاره خط روی d باشد حکم بدیهی است.)

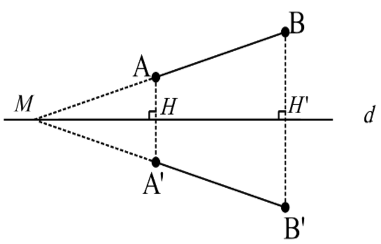
تصویر A خودش است و تصویر B، B′ است . و چون d عمود منصف BB' است پس $AB=A'B'$.



پ) پاره خط با d نه موازی و نه متقاطع است .

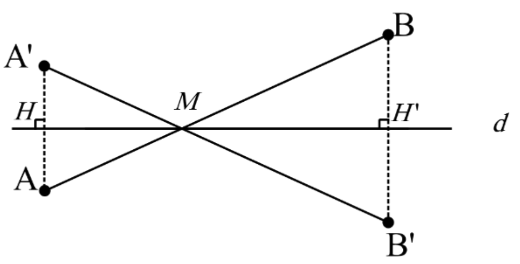
پاره خط AB را امتداد می دهیم تا d را در M قطع کند .

سپس تصویر B یعنی B′ را نیز مشخص می کنیم و پاره خط MB′ را نیز می کشیم .حال از نقطه A عمودی بر d رسم می کنیم تا خط MB′ را در A′ قطع کند ، این نقطه همان تصویر A است زیرا بنا به حالت (ز ض ز) دو مثلث



$MAH, MA'H$ همنهشتند و $AH = A'H$.از آنجایی که d عمود منصف AA', BB' است پس

$MB = MB', MA = MA'$ در نتیجه $MB - MA = MB' - MA'$ یعنی $AB = A'B'$.



ت) پاره خط و d در جایی به غیر از دو سر پاره خط متقاطع باشند .

فرض کنید پاره خط و خط d در نقطه M متقاطع باشند .

تصویرB یعنی B′ را مشخص کرده و پاره خط MB′ را

رسم می کنیم حال از نقطه A عمودی بر d رسم می کنیم تا

امتداد MB′ را در A′ قطع کند ، این نقطه همان تصویر A است زیرا بنا به حالت (ز ض ز) دو مثلث

$MAH, MA'H$ همنهشتند و $AH = A'H$.از آنجایی که d عمود منصف AA', BB' است پس

$MB = MB', MA = MA'$ در نتیجه $MB + MA = MB' + MA'$ یعنی $AB = A'B'$.

تمرین : جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید .

الف) اگر $S(A) = A'$ باشد آنگاه $S(A') = ...$.

ب) $S(S(A)) = ...$ به زبان ساده تر $(A')' = ...$. یعنی قرینه قرینه هر نقطه .... است .

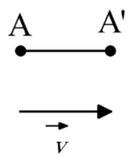
ج) در هر بازتاب تبدیل یافته یک مثلث .... است که با مثلث اولیه .... است .

د) در حالتی که پاره خط نسبت به محور بازتاب .... یا .... باشد . شیب آن حفظ می شود .

ه) تعداد نقاط ثابت در هر بازتاب .... است .

تمرین : شیب خط به معادله $ax - y = ۱$ در بازتاب نسبت به خط $x + ۳y - ۲ = ۰$ حفظ می شود ، مقادیر مورد قبول برای a را بنویسید .

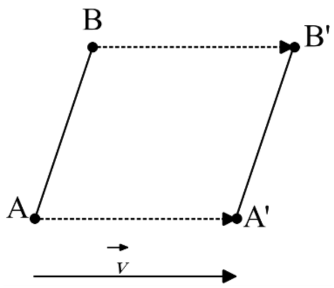
تمرین : اگر دو نقطه $A(-۱, ۵), B(۱, ۳)$ بازتاب یکدیگر نسبت به خط d باشند . معادله خط d را بیابید .



انتقال : انتقال T تحت بردار $\vec{v}$ ، تبدیلی از صفحه است که در آن تصویر هر نقطه مانند A از صفحه، نقطه ای مانند A' از همان صفحه است که $\overrightarrow{AA'}=\vec{v}$.

قضیه : انتقال تبدیل طولپا است .

پاره خط AB و بردار $\vec{v}$ را در نظر بگیرید . دو حالت را برای اثبات قضیه در نظر می گیریم :

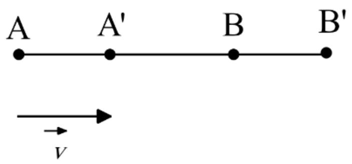


الف) اگر پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی نباشد .

انتقال یافته AB تحت این بردار را رسم می کنیم . در چهار ضلعی AA′B′B دو ضلع AA′ و BB′ موازی و مساویند پس چهار ضلعی متوازی الاضلاع است در نتیجه AB=A′B′.

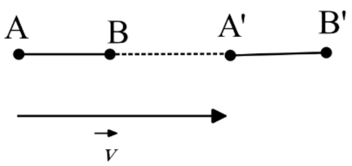
ب) اگر پاره خط AB با بردار $\vec{v}$ موازی باشد .

اگر شکل ۱ حاصل شود داریم :

۱) 

$$\left.\begin{array}{l} AB=AA'+A'B \\ A'B'=A'B+BB' \\ \overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow AB=A'B'$$

اگر شکل ۲ حاصل شود داریم :

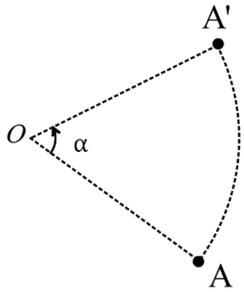
۲) 

$$\left.\begin{array}{l} AB=AA'-BA' \\ A'B'=BB'-BA' \\ \overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow AB=A'B'$$

تمرین : تحت انتقالی که نقطه $A(۱,-۲)$ را به نقطه $B(-۲,۵)$ منتقل می کند ، تصویر نقطه $C(-۱,-۱)$ چیست ؟

تمرین : تصویر خط $۲x-y=۲$ تحت بردار انتقال $\vec{v}=(۲,-۳)$ را بنویسید .

دوران : دوران به مرکز O و زاویه α ، تبدیلی است که هر نقطه مانند A در صفحه را به نقطه ای مانند A' از همان صفحه نظیر می کند به طوری که $OA=OA', AOA'=\alpha$.



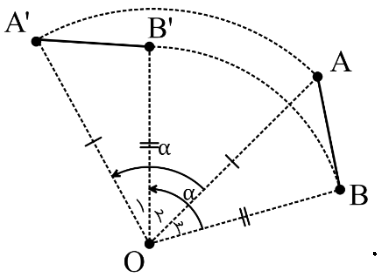
(جهت مثبت دوران در شکل نمایش داده شده است . در صورت منفی بودن زاویه ، جهت برعکس خواهد بود)

قضیه : دوران تبدیل طولپا است .

حکم را در حالت های مختلف ثابت می کنیم :

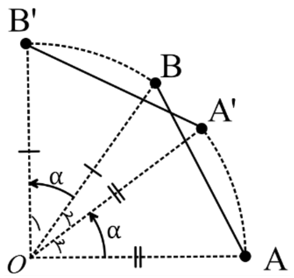
الف) مرکز دوران بر پاره خط AB واقع نباشد و زاویه دروان از زاویه AOB بیشتر باشد :

$$\left.\begin{aligned} AOA' &= BOB' = \alpha \\ AOB &= \alpha - O_2 \\ A'OB' &= \alpha - O_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow AOB = A'OB'$$



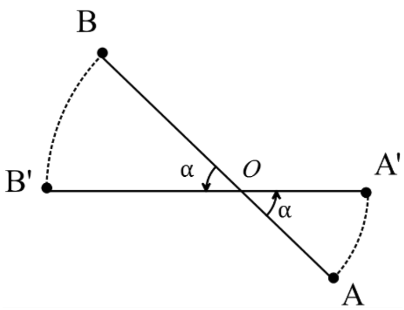
در نتیجه دو مثلث AOB و A'OB' بنا به حالت (ض ز ض) همنهشتند پس AB=A'B' .

ب) مرکز دوران بر پاره خط AB واقع نباشد و زاویه دروان از زاویه AOB کمتر باشد :



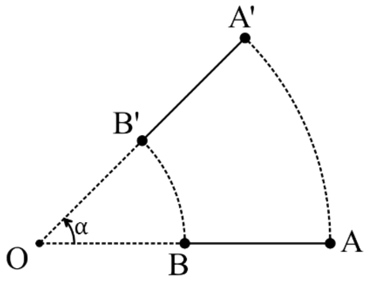
$$\left.\begin{aligned} AOA' &= BOB' = \alpha \\ AOB &= \alpha + O_2 \\ A'OB' &= \alpha + O_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow AOB = A'OB'$$

در نتیجه دو مثلث AOB و A'OB' بنا به حالت (ض ز ض) همنهشتند پس AB=A'B' .



پ) مرکز دوران روی پاره خط AB باشد :

بنا به تعریف دوران $OA=OA', OB=OB'$ و از مجموع طرفین تساوی داریم : $OA+OB=OA'+OB'$ پس $AB=A'B'$



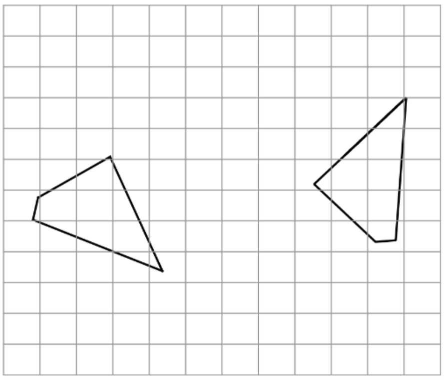
ت) مرکز دوران روی امتداد پاره خط AB باشد :

بنا به تعریف دوران $OA = OA', OB = OB'$ و از تفاضل

طرفین تساوی داریم : $OA - OB = OA' - OB'$ پس $AB = A'B'$

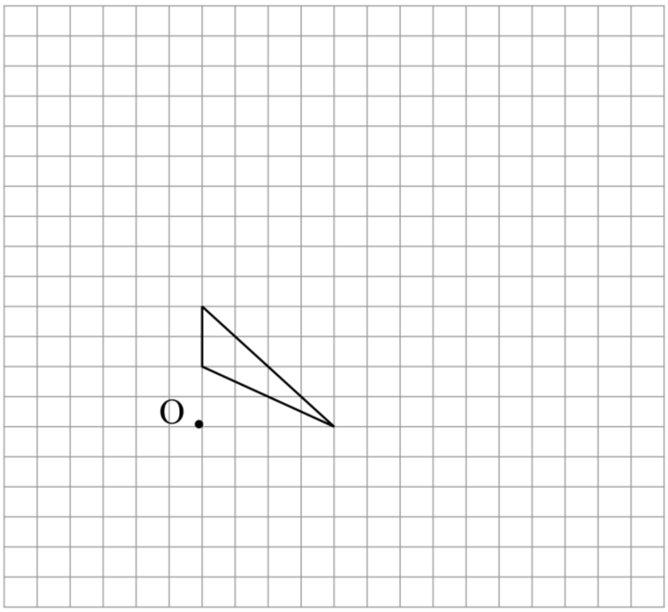
توجه : درست است که دوران لزوماً شیب خط را حفظ نمی کند ولی چون طول پا است، اندازه زوایه را حفظ می کند .

تمرین : مرکز دوران را بیابید .



تجانس : اگر $k \neq ۰$ یک عدد حقیقی و O نقطه ثابتی در صفحه باشد .نقطه A' را مجانس نقطه A در تجانس به مرکز O و نسبت K می گوییم هرگاه $\overrightarrow{OA'} = k\,\overrightarrow{OA}$.

تمرین : مجانس شکل زیر را نسبت به نقطه O با نسبت های $k = ۳, k = \frac{۱}{۳}, k = -\frac{۱}{۲}$ رسم کنید .



نکته : در تجانس به مرکز O و نسبت k :

الف) اگر $k > ۰$ تجانس را مستقیم می گوییم .

ب) اگر $k < ۰$ تجانس را معکوس می گوییم .

ج) اگر $|k| > ۱$ تجانس را انبساطی می گوییم .

د) اگر $|k| > ۱$ تجانس را انقباطی می گوییم .

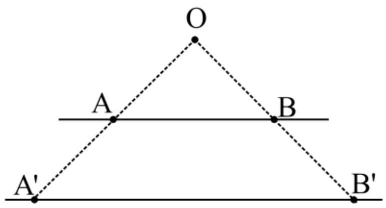
تمرین : با عبارات مناسب جاهای خالی را پر کنید .

الف) در تجانس در صورتی $|k| = ۱$ آنگاه تبدیل .... است .

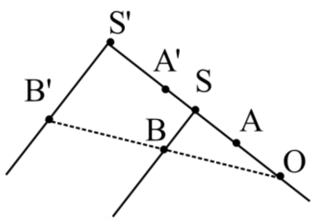
ب) کدام مورد از موارد « شیب خط، اندازه زاویه ، جهت شکل » در تجانس حفظ می شود ؟

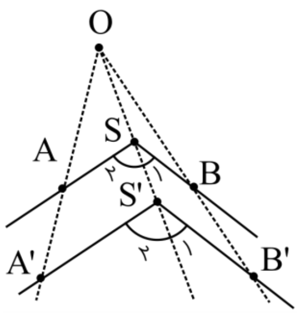
ج) در تجانس همواره خطوطی که نقاط و تصویرشان را به هم وصل می کنند .... هستند .

تمرین : ثابت کنید تجانس شیب خط را حفظ می کند . (راهنمایی : دو حالت : O روی خط ، و خارج خط)



تمرین : ثابت کنید تجانس زاویه را حفظ می کند . (راهنمایی : سه حالت : O روی یک ضلع، روی راس، خارج زاویه . از نتیجه تمرین قبل بهره ببرید)



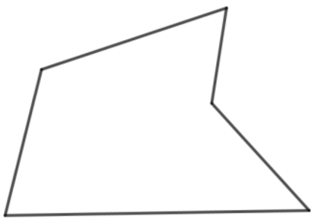


تمرین :ثابت کنید مجانس هر n ضلعی با خود آن متشابه است .(راهنمایی : نشان دهید در مورد اضلاع نسبت K برقرار است (با یک پار خط ثابت کنید) . در مورد زاویه ها چه می توان گفت ؟!)

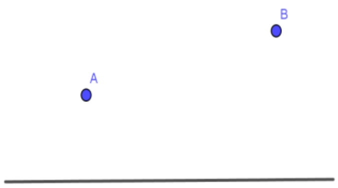
تمرین : اگر G مرکز ثقل مثلث ABC باشد و $A'B'C'$ مجانس آن نسبت به نقطه G و نسبت $K=-\frac{۱}{۲}$ باشد . جایگاه رئوس مثلث تصویر را مشخص کنید و بگویید مساحت آن چه کسری از مساحت مثلث اصلی است .

درس دوم : کاربرد تبدیل ها

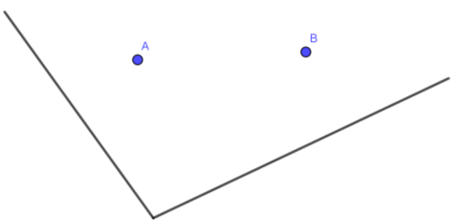
مساله (مساله هم محیطی) : شکل زیر را طوری تغییر دهید که تعداد اضلاع و محیط شکل تغییر نکند و شکل جدیدی حاصل شود .



مساله (مساله هرون) : کوتاهترین مسیری را بیابید که از نقطه A آغاز کرده و پس از برخورد با خط به نقطه B برسد . برای جواب خود دلیل بیاورید (با یک مسیر دلخواه مقایسه کنید) (در این مساله و دو مساله پایین در واقع به دنبال خط مستقیمی هستیم که تصویر یا تصویر های A را به نقطه B وصل کند ولی این کار را به کمک بازتاب انجام می دهیم تا مجموع طول خطوط شکسته ایجاد شده با طول خط مستقیم برابرشود)

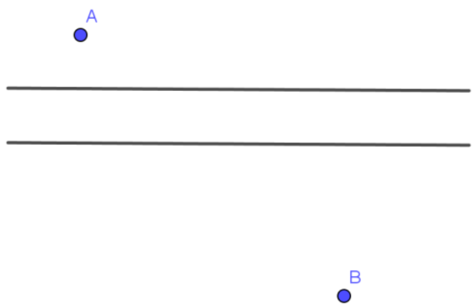


مساله : کوتاهترین مسیری را بیابید که از نقطه A آغاز کرده و پس از برخورد با دو خط به نقطه B برسد . برای جواب خود دلیل بیاورید . (با یک مسیر دلخواه مقایسه کنید)

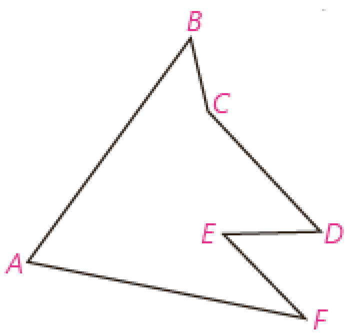


مساله : از نقطه A به B مسیری پیدا کنید که ۴ واحد آن روی خط d باشد .

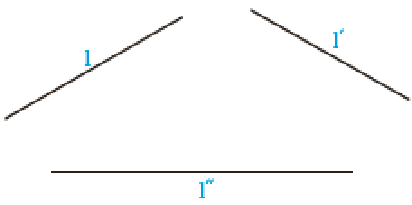
مساله : در دو طرف یک رودخانه دو شهر A و B قرار دارند می خواهیم در مکانی از رودخانه پلی عمود بر آن بزنیم مکان پل را مشخص کنید به طوری که فاصله دو سهر کمترین مقدار ممکن شود .



تمرین : بدون تغییر محیط شکل، مساحت زمین را افزایش دهید .



تمرین : پاره خطی به طول ۵ سانتی متر رسم کنید که دو سر آن روی l, l' و موازی l'' باشد .



فصل سوم : روابط طولی در مثلث

درس اول : قضیه سینوس ها

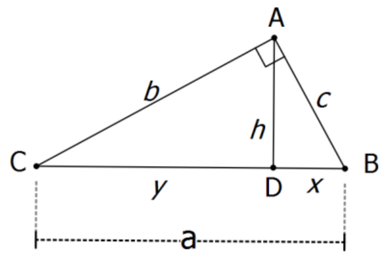
درس دوم : قضیه کسینوس ها

درس سوم : قضیه نیمساز ها

درس چهارم : قضیه هرون (محاسبه مساحت بدون داشتن ارتفاع)

درس اول : قضیه سینوس ها

در سال گذشته با برخی از روابط طولی در مثلث آشنا شدید . مانند : تشابه ، فیثاغورس ، تالس و قضیه زیر :



الف) $h^{۲} = x.y$

ب) $b^{۲} = y.a$

ج) $c^{۲} = x.a$

د) $b.c = h.a$

تمرین : ثابت کنید در هر مثلث قائم الزاویه ABC ($A = ۹۰$) با ارتفاع $AH = h_a$ داریم :

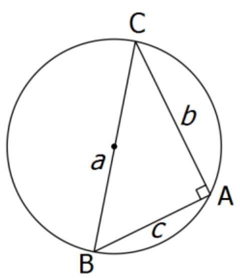
$$\frac{۱}{h_a^{۲}} = \frac{۱}{b^{۲}} + \frac{۱}{c^{۲}}$$

قضیه سینوس ها : در مثلث ABC که AB=c و AC=b و BC=a داریم :

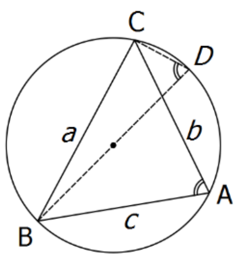
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = ۲R$$ شعاع دایره محیطی R

اثبات :

حالت اول : وقتی مثلث دارای زاویه قائمه باشد وتر از مرکز دایره محیطی عبورمی کند . (چرا ؟)



$$\left.\begin{array}{l} \sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = a \\ \sin C = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{\sin C} = a \\ \sin A = ۱ \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = a \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = a = ۲R$$



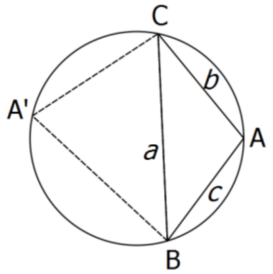
حالت دوم : وقتی زاویه های مثلث حاده باشند : قطر BD را رسم می کنیم و D را به C وصل می کنیم زاویه A و D مقابل به یک کمان هستند پس $A = D$.

مثلث BCD در راس C قائم الزاویه است بنابر این :

$$\frac{a}{\sin D}=۲R \xrightarrow{A=D} \frac{a}{\sin A}=۲R$$

و به طور مشابه اثبات می شود : $\frac{b}{\sin B}=۲R , \frac{c}{\sin C}=۲R$.

حالت سوم : وقتی مثلث دارای یک زاویه منفرجه باشد : نقطه دلخواه A' را روی کمان BC در نظر گرفته و به B و C وصل می کنیم



برای زاویه های B وC می توان مانند مرحله قبل نشان داد رابطه مد نظر برقرار است

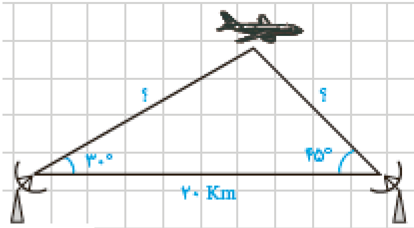
از طرفی زاویه A و A' مکمل هم هستند (چرا ؟) پس چون A منفرجه است

A' حاده خواهد بود و طبق قسمت قبل :

$$\frac{a}{\sin A'}=۲R \Rightarrow \frac{a}{\sin(۱۸۰-A)}=۲R \Rightarrow \frac{a}{\sin A}=۲R$$

تمرین : در مثلث ABC، $BC=۱۰$ و $A=۱۲۰^\circ$ و $AC=\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}$ مقدار شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زاویه های دیگر مثلث را بیابید .

تمرین : در شکل زیر فاصله هواپیما از دو رادار چقدر است ؟



درس دوم : قضیه کسینوس ها و محاسبه طول میانه

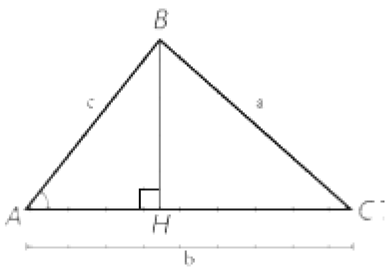
قضیه کسینوس ها : در مثلث ABC که AB=c و AC=b و BC=a داریم :

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \qquad b^2=a^2+c^2-2ac\cos B \qquad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

اثبات : می خواهیم ثابت کنیم $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

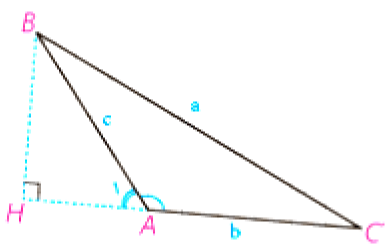
الف) اگر $A=90^\circ$ باشد مثلث قائم الزاویه است و طبق قضیه فیثاغورس داریم $a^2=b^2+c^2$ که در واقع همان رابطه بیان شده است که $2bc\cos 90=0$

ب) اگر $A<90^\circ$ باشد طبق شکل داریم :



$$\left.\begin{array}{l} AH=c\times\cos A \Rightarrow \boxed{CH=b-c\times\cos A} \\ \boxed{BH=c\times\sin A} \end{array}\right\} \Rightarrow a^2=BH^2+CH^2$$
$$=c^2\sin^2 A+b^2+c^2\cos^2 A-2bc\cos A$$
$$=b^2+c^2-2bc\cos A$$

ج) اگر $A>90^\circ$ باشد طبق شکل داریم :

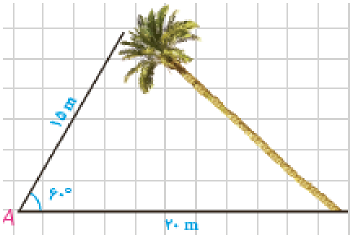


$$\left.\begin{array}{l} AH=c\times\cos A_1 \Rightarrow \boxed{CH=b+c\times\cos A} \\ \boxed{BH=c\times\sin A_1} \end{array}\right\} \Rightarrow a^2=BH^2+CH^2$$
$$=c^2\sin^2 A_1+b^2+c^2\cos^2 A_1+2bc\cos A_1$$
$$=b^2+c^2+2bc\cos(\pi-A)=b^2+c^2-2bc\cos A$$

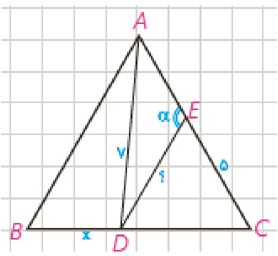
تمرین : در مثلث ABC اگر $A=60^\circ, AC=\sqrt{6}+\sqrt{2}, AB=2\sqrt{2}$ باشد اندازه ضلع BC و زاویه C را بیابید .

تمرین : دو قایق از یک نقطه با سرعت های ۶۰ و ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت با زاویه ۱۲۰ از هم دور می شوند . نیم ساعت بعد دو قایق در چه فاصله ای از هم قرار دارند ؟

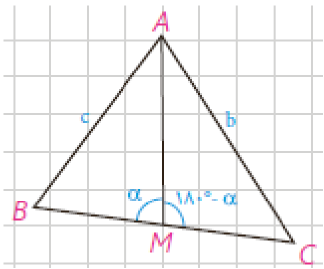
تمرین : در شکل زیر طول درخت چقدر است ؟



تمرین : در شکل زیر مثلث ABC متساوی الاضلاع به ضلع ۸ است . طول BD و CD و اندازه زاویه α را بیابید . (
راهنمایی: ابتدا طول BD را از مثلث ABD بدست آورید)



قضیه میانه ها : در مثلث ABC که AB=c و AC=b وBC=a طول میانه AM از رابطه زیر بدست می آید :



$$۲AM^۲ = b^۲ + c^۲ - \frac{a^۲}{۲}$$

اثبات : به کمک قضیه کسینوس ها مقدار $b^۲ , c^۲$ را می یابیم :

$$\left.\begin{array}{l} c^۲ = (\frac{a}{۲})^۲ + AM^۲ - a \times AM \cos\alpha \\ b^۲ = (\frac{a}{۲})^۲ + AM^۲ - a \times AM \underbrace{\cos(\pi - \alpha)}_{-\cos\alpha} \end{array}\right\} \Rightarrow b^۲ + c^۲ = \frac{a^۲}{۲} + ۲AM^۲$$

$$\Rightarrow ۲AM^۲ = b^۲ + c^۲ - \frac{a^۲}{۲}$$

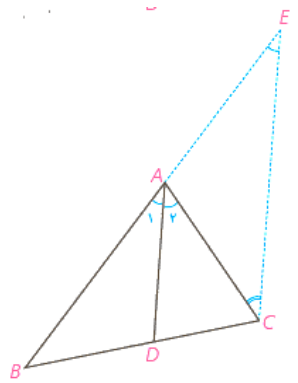
تمرین : در مثلث $AB = ۴, AC = ۶, BC = ۸$ طول میانه AM را بیابید .

درس سوم : قضیه نیمسازها ومحاسبه طول نیمساز

قضیه نیمسازها : در هر مثلث نیمساز هر زاویه داخلی ، ضلع روبرو به آن زاویه را به نسبت اندازه های ضلع های آن زاویه تقسیم می کند .

حکم : $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$

اثبات :



از نقطه C خطی موازی نیمساز AD رسم می کنیم تا امتداد AB را در E قطع کند

طبق قضیه تالس در مثلث BCE داریم : $\frac{AB}{AE}=\frac{BD}{CD}$

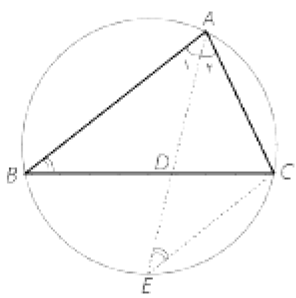
حال کافیست نشان دهیم AE=AC . بنا بر قضیه خطوط موازی $A_۱=E, C=A_۲$

در نتیجه $E=C$ و این یعنی مثلث AEC متساوی الساقین است و AE=AC .

تمرین : در مثلث ABC اگر $AB=۷, AC=۵, BC=۸$ باشد . طول قطعات ایجاد شده توسط نیمساز زاویه B بر روی ضلع مقابلش را بدست آورید .

قضیه طول نیمساز : در هر مثلث ، مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب دو قطعه ای که نیمساز روی ضلع مقابل خود ایجاد می کند .

اثبات :



نیمساز را امتداد می دهیم تا دایره محیطی را در E قطع کند سپس E را به C وصل می کنیم

در این صورت $B=E$. دو مثلث ABD و ACE متشابه اند و :

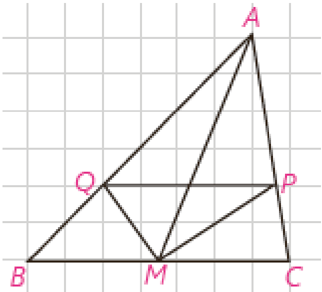
$$\frac{AD}{AC}=\frac{AB}{AE}\Rightarrow AB.AC=AD.AE\xrightarrow{AE=AD+DE}AB.AC=AD^۲+AD.DE$$

و به خاطر برخورد دو وتر BC و AE درون دایره داریم : $AD.DE=BD.DC$

از دو رابطه قبل نتیجه می شود : $AB.AC=AD^۲+BD.DC\Rightarrow \boxed{AD^۲=AB.AC-BD.DC}$

تمرین : در تمرین قبل طول نیمساز مذکور را بدست آورید .

تمرین : در مثلث زیر **M** وسط **BC** و **MP** و **MQ** نیمساز هستند. ثابت کنید $PQ \parallel BC$.

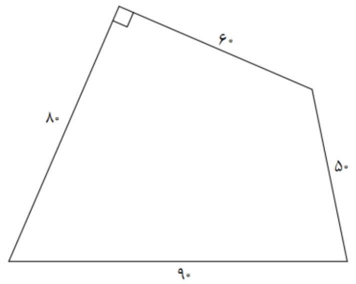


درس چهارم : قضیه هرون و محاسبه طول ارتفاع

قضیه هرون : برای هر مثلث با طول اضلاع a,b,c داریم : $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. (اثبات نیاز نیست) .

تمرین : مساحت مثلث با طول اضلاع ۱۳و ۱۴ و۱۵ را بیابید . و طول ارتفاع های مثلث را مشخص کنید . ($h_a=\frac{۲s}{a}$)

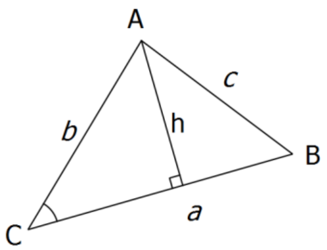
تمرین : مساحت زمین کشاورزی زیر را بدست آورید .



تمرین : مثلثی دارای اضلاع به طول ۵و۶و ۷ است . نقطه ای که از اضلاع ۵و۶ واحدی به فاصله ۲ و ۳ است از ضلع بزرگ تر چه فاصله ای دارد ؟

قضیه : مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها .

$$S=\frac{۱}{۲}ab\sin C=\frac{۱}{۲}ac\sin B=\frac{۱}{۲}bc\sin A$$



اثبات :

ارتفاع وارد بر BC را رسم می کنیم در این صورت $h=b\sin C$

پس : $S=\frac{۱}{۲}ha=\frac{۱}{۲}ab\sin C$

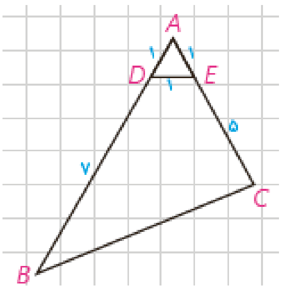
تمرین : در مثلث ABC، $A=۶۰, AC=۶, AB=۱۰$.

الف) طول BC

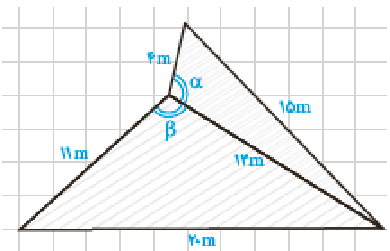
ب) مساحت مثلث

ج) مقدار $\sin B$

تمرین : در شکل زیر مساحت چهار ضلعی DECB را بدست آورید .



تمرین : نشان دهید زاویه α, β با هم برابرند .



تمرین : به کمک قضیه کسینوس ها ثابت کنید در مثلث ABC :

الف) $\hat{A} > 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$

ب) $\hat{A} < 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$

پ) $\hat{A} = 90^\circ$ اگر و تنها اگر $a^2 = b^2 + c^2$

تمرین : حاده ، قائمه و منفجره بودن زاویه A در هر یک از مثلث های زیر را مشخص کنید .

الف) $AB=10$, $AC=6$, $BC=9$

ب) $AB=8$, $AC=4$, $BC=9$

پ) $AB=8$, $AC=15$, $BC=17$

پایان