هُوَ العَلیم

جزوه فصل سوم هندسه دهم

چندضلعی‌ها

«ابوالفضل ایمان زاده»

«دانشجوی رشته‌ی آموزش ریاضی دانشگاه فرهنگیان»

شکر نعمت نعمتت افزون کند   کفر نعمت از کفت بیرون کند

خدا را شاکرم که این فرصت را به من داد تا با نوشتن این جزوه(هرچند مختصر) کمک کوچکی را به دانش آموزان عزیز در هرجای ایران عزیز کرده باشم.

قبل از شروع، چند کلام حرف دوستانه باهم بزنیم...

نکته بسیار مهمی که در کلاسام میگم اینه که درس ریاضی، درسی نیست که با حفظ کردن یاد بگیریم ریاضی به قول برخیا یعنی ریاضت یعنی ریاضت کشیدن(من زیاد باهاش موافق نیستم)، برای این که ریاضی رو یاد بگیریم باید زیاد تمرین کنیم باید با همه نوع سوالی رو حل کنیم چه سخت چه آسون.

در یادگیری درس ریاضی داشتن معلم خوب، تأثیر بسزایی در یادگیری ریاضی داره، اگه معلم خوبی در مدرسه داری خوش به حالت، اگه نداری از اینترنت کمک بگیر، الان جزوه های بسیار عالی و خوب اونم رایگان در همه جای وجود داره از اونا استفاده کن.

اما در مورد درس هندسه، هندسه درسی مفهومیه و اغلب بچه ها فرق نمیکنه ریاضی باشه یا تجربی ازش دوری می‌کنن چرا؟؟ بماند....

در هندسه هم اگر معلم خوبی داری خوش بع حالت ازش بهترین استفاده ممکن را بکن وای اگر معلم خوب نداری میشه با حل سوال و تست و تمرین و تکرار یاد گرفت، یه چیز دیگه این که یادگیری هندسه واقعاً زمان بره ولی شیرین هستش.باید از اول با تعاریف و قضایا شروع کرد بعد سوالات تشریحی و امتحانی بعد تست های ساده و بعد تست های کنکور و ...

بچه ها قبل از اینکه این فصل رو شروع کنید حتما به فصل ۲ مسلط بشین اگه فصل ۲ رو بلد نباشین در حل سوالات این فصل به مشکل خواهید خورد البته یه کمی.

هم چنین در نوشتن این جزوه سعی کرده‌ام جدیدترین سوالات از آزمون های قلم چی را انتخاب کنم و نیز از سوالات تألیفی اساتید بزرگ نیز برای غنی تر شدن این جزوه استفاده شده است.

استاد واعظین(کانال تلگرام vaezinhendese@)

استاد خواجه(پیج اینستاگرامpkhajetaghiv@)

استاد نخستین(کانال تلگرام Nakhostin_Math@)

و استاد بسیار خوبم جناب آقای دکتر حسین دهقان که توصیه ایشان باعث انگیزه برای نوشتن این جزوه بود.

در پایان، هر کتاب یا جزوه ممکن است اشتباهاتی داشته باشد، چه اشتباهات علمی، چه اشتباهات تایپی و چه خطاهای محاسباتی. امیدوارم دوستان و همکاران منت گذاشته و این اشتباهات را بررسی و برای رفع به آدرس زیر ارسال کنند.

Abolfazlimanzadeh887@gmail.com

تقدیم به ساحت مقدس

«حضرت فاطمه الزهرا(س)»

و

«بقیه‌الله الاعظم ارواحنا فداه»

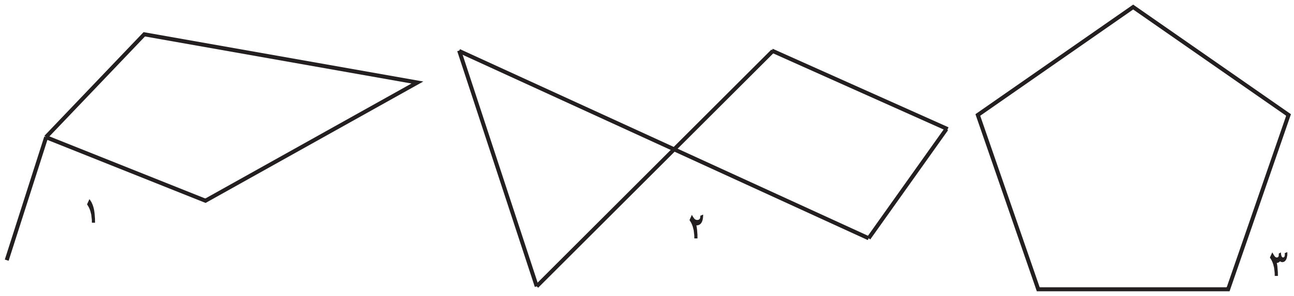
چندجمله‌ای ها و ویژگی‌های آنها

چندضلعی چیه؟؟

شکلی است دارای n $(n \geq ۳)$ پاره خط متوالی که:

۱) هر پاره‌خط، دقیقاً دو پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی خودش قطع کند

۲) هر دو پاره‌خط که در یک انتها مشترک‌اند، روی یک خط نباشند



چندضلعی است　　چندضلعی نیست　　چندضلعی نیست

شکل ۱ : پاره خطی وجود دارد که فقط در یک انتها، پاره خط دیگری را قطع کرده است.

شکل ۲ : دوپاره‌خط وجود دارد که همدیگر را در نقطه‌ای غیر از نقاط انتهایی قطع کرده اند.

شکل ۳ : چون ویژگی های بیان شده برای چندضلعی را دارد پس چندضلعی است.

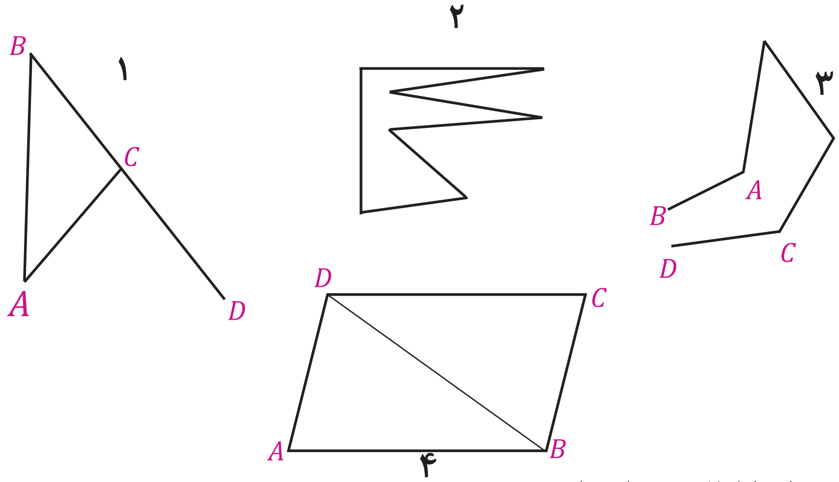
تست۱ : چه تعداد از شکل‌های زیر چندضلعی است؟

۱) ۳

۲) ۱

۳) صفر

۴) ۲



پاسخ: گزینه ۲ – با توجه به تعریف چندضلعی، تنها شکل۲ چندضلعی است.

بررسی سایر شکل‌ها

شکل ۱ : پاره خط AC در نقاط انتهایی بیش از دو پاره خط را قطع کرده است.

شکل۳ : پاره خط‌های AB و CD در نقاط انتهایی تنها یک پاره خط را قطع کرده‌اند.

شکل۴ : پاره خط BD در نقاط انتهایی بیش از دو پاره خط را قطع کرده است.

تست۲ : کدام گزینه درست است؟

۱) متوازی‌الاضلاع یک چندضلعی نیست زیرا اگر یکی از قطرهای آن را رسم کنیم پاره‌خطی وجود دارد که بیش از دو پاره خط را در نقاط انتهایی قطر کرده باشد.

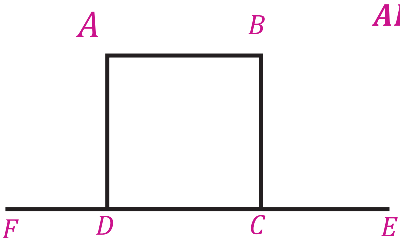
۲) در هر چند ضلعی هر پاره‌خط می‌تواند حداقل ۲ پاره‌خط دیگر را قطع کند.

۳) دوخط عمود برهم تشکیل چندضلعی می‌دهند زیرا تعداد پاره‌خط های تشکیل شده توسط این دو خط بیشتر از ۳ تا است.

۴) اگر یک ضلع یک مربع را به اندازه خودش از دو طرف امتداد دهیم شکل حاصل چندضلعی نخواهد بود.

پاسخ: گزینه ۴ – به شکل زیر توجه کنید:

با توجه به شکل اگر ضلع DC را از دوطرف به اندازه خودش امتداد دهیم، پاره‌خط‌های BC و AD بیش از دو پاره خط را در نقاط انتهایی قطع کرده‌اند.پس شکل حاصل چندضلعی نخواهد بود.



بررسی سایر گزینه‌ها

گزینه ۱ : در تعیین چندضلعی بودن یا نبودن شکل اولیه مهم است نه شکل ثانویه.

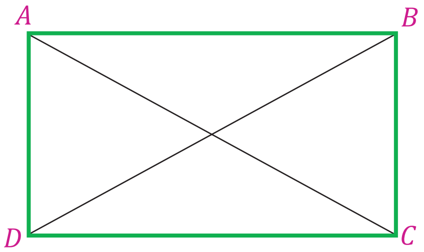
گزینه ۲ : طبق تعریف چندضلعی در هر چند ضلعی هر پاره‌خط می‌تواند حداکثر ۲ پاره‌خط دیگر را در نقاط انتهایی قطع کند.

گزینه ۳ : محورهای مختصات در فضای دو بعدی را در نظر بگیرید، که تشکیل چندضلعی نمی‌دهند.

قطر در چندضلعی‌ها

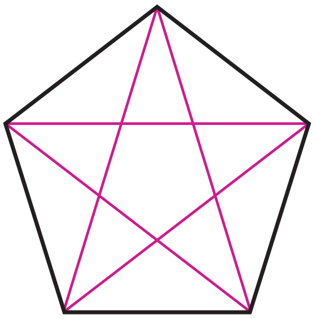
قطر چیست؟

«در هر چندضلعی، پاره‌خطی که دو انتهای آن، دو رأس غیرمجاور باشد را قطر می‌گویند.»



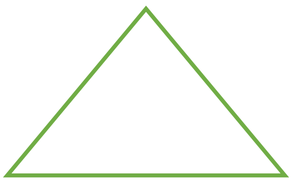
در شکل روبه‌رو پاره‌خط‌های AC و BD، قطرهای شکل هستند.

سوال۱ : قطرهای چندضلعی مقابل را رسم کنید



مطابق شکل پنج‌ضلعی، ۵تا قطر دارد.

سوال۲ : مثلث چندقطر دارد؟



چون در هر مثلث هر سه زاویه باهم مجاورند پس نمی‌توان قطر رسم کرد در نتیجه مثلث قطر ندارد

به دست آوردن تعداد قطرهای چندضلعی

$$\text{تعداد قطرهای } n\text{ضلعی} = \frac{n(n-۳)}{۲}$$

سوال۳ : تعداد قطرهای ۱۰ضلعی را محاسبه کنید؟

$$\text{تعداد قطرهای } n\text{ضلعی} = \frac{n(n-۳)}{۲}$$

$$\text{تعداد قطرهای ۱۰ضلعی} = \frac{۱۰(۱۰-۳)}{۲} = ۳۵$$

تست۳ : تعداد قطرهای یک چندضلعی برابر ۹تا است، تعداد اضلاع این چندضلعی کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۷

۳) ۶ ۴) ۹

$$\frac{n(n-۳)}{۲}=۹\Rightarrow n(n-۳)=۱۸\Rightarrow n=۶$$ گزینه ۳

تست۴ : تعداد قطرهای یک چندضلعی ۹ برابر تعداد اضلاعش است، مجموع زاویه های داخلی این چندضلعی کدام است؟

۱) ۳۴۲۰ ۲) ۲۴۲۰

۳) ۲۴۸۰ ۴) ۳۵۲۰

$$\frac{n(n-۳)}{۲}=۹n\Rightarrow (n-۳)=۱۸\Rightarrow n=۲۱$$

$$\text{مجموع زوایای داخلی}=(n-۲)۱۸۰^\circ$$

$$\xRightarrow{n=۲۱}(۲۱-۲)\times ۱۸۰^\circ=۳۴۲۰^\circ$$ گزینه ۱

تست۵ : تعداد قطرهای ۷ضلعی منتظم از تعداد قطرهای یک چندضلعی منتظم، ۱۳واحد کمتر است. تفاضل اندازه مجموع زاویه‌های داخلی این دو شکل منتظم کدام است؟

۱) ۳۶۰ ۲) ۹۰۰

۳) ۲۱۶۰ ۴) ۱۲۶۰

$$\text{تعداد قطرهای ۷ضلعی}=\frac{n(n-۳)}{۲}\Rightarrow\frac{۷(۷-۳)}{۲}=۱۴$$

$$\text{مجموع زوایای داخلی ۷ضلعی}=(۷-۲)۱۸۰^\circ=۹۰۰^\circ \quad \boxed{I}$$

حال چون تعداد قطرهای چندضلعی از تعداد قطرهای ۷ ضلعی منتظم ۱۳ تا بیشتر است پس تعداد قطرهای این چندضلعی منتظم برابر $۲۷=۱۴+۱۳$ تا خواهد بود. حال داریم:

$$\frac{n(n-۳)}{۲}=۲۷\Rightarrow n(n-۳)=۵۴\Rightarrow n=۹$$

$$\text{مجموع زوایای داخلی ۹ضلعی}=(۹-۲)۱۸۰^\circ=۱۲۶۰^\circ \quad \boxed{II}$$

$$\xRightarrow{II-I}۱۲۶۰-۹۰۰=۳۶۰$$ گزینه ۱

تست۶ : تعداد قطرهای یک چندضلعی از تعداد اضلاع آن، ۴۲واحد بیشتر است. تعداد قطرهای این چندضلعی کدام است؟

۱) ۴۵ ۲) ۴۸

۳) ۵۲ ۴) ۵۴

$$\frac{n(n-۳)}{۲}=n+۴۲\Rightarrow n(n-۳)=۲n+۸۴\Rightarrow n^۲-۵n-۸۴=۰$$

$$(n-۱۲)(n+۷)=۰\Rightarrow n=۱۲ \text{ یا } n=-۷\xRightarrow{n=۱۲}\frac{۱۲(۱۲-۳)}{۲}=۵۴$$ گزینه ۴

سوال۴ : چندضلعی هایی که تعداد قطرهای آنها از تعداد اضلاع آن کمتر یا مساوی با آن است را مشخص کنید.

تکمیلی تمرین ۱ صفحه ۶۳ کتاب درسی

روش اول:

$$\frac{n(n-۳)}{۲} \leq n \Rightarrow \frac{n(n-۳)}{۲} - n \leq ۰ \Rightarrow \frac{n^۲ - ۳n - ۲n}{۲} \leq ۰ \Rightarrow \frac{n^۲ - ۵n}{۲} \leq ۰$$

$$\Rightarrow n^۲ - ۵n \leq ۰ \Rightarrow n(n-۵) \leq ۰$$

		$n=۰$		$n=۵$	
$n(n-۵)$	$+$		$-$		$+$

چون قطر برای چندضلعی‌هایی با بیش از ۳ ضلع تعریف می‌شود پس جواب چهارضلعی و پنج ضلعی است.

روش دوم:

$$\frac{n(n-۳)}{۲} \leq n \Rightarrow (n-۳) \leq ۲ \Rightarrow n \leq ۵ \Rightarrow n = ۴\,,۵$$

چون در این نامعادله، n مقداری مثبت است و ساده کردن آن جهت نامساوی را عوض نمی‌کند و ریشه حاصل از آن مورد قبول نیست پس می‌توان آن را از طرفین ساده کرد.

تست۷: در یک چندضلعی، تعداد قطرها چهاربرابر تعداد اضلاع است.مجموع زاویه‌های داخلی این چندضلعی چقدر از مجموع زاویه های خارجی آن بیشتر است؟

۱) ۲۱۶۰ ۲) ۱۲۶۰

۳) ۱۶۲۰ ۴) ۳۶۰

$$\frac{n(n-۳)}{۲} = ۴n \Rightarrow (n-۳) = ۸ \Rightarrow n = ۱۱$$

$$\text{مجموع زوایای داخلی ۱۱ضلعی} = (۱۱-۲)۱۸۰^\circ = ۱۶۲۰^\circ$$

می‌دانیم مجموع زاویه‌های خارجی هر چندضلعی برابر ۳۶۰° است پس:

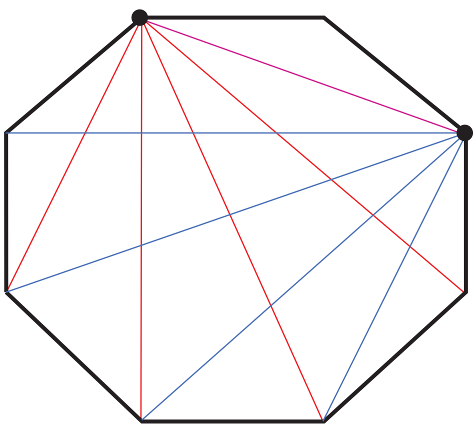
$$۱۶۲۰ - ۳۶۰ = ۱۲۶۰$$ گزینه ۲

تست۸: در یک چندضلعی، مجموع قطرها و اضلاع برابر ۲۸ است. از هر دو رأس غیر مجاور این چندضلعی چندقطر می‌گذرد؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۰

۳) ۸ ۴) ۹

$$\frac{n(n-۳)}{۲} + n = ۲۸ \Rightarrow \frac{n^۲ - ۳n + ۲n}{۲} = ۲۸ \Rightarrow n^۲ - n - ۵۶ = ۰ \Rightarrow (n-۸)(n+۷) = ۰ \begin{cases} n = ۸ & \text{ق ق} \\ n = -۷ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$



با توجه به شکل، از دو رأس E و G از هر کدام ۵ قطر رسم می‌شود ولی چون در قطر EG، مشترک هستند در کل از دو رأس غیرمجاور E و G در ۸ضلعی می‌توان ۹ قطر رسم کرد.

گزینه ۴

نکته: از هر رأس nضلعی، $(n-۳)$ قطر می‌گذرد.

تست۹ : مجموع قطرها و اضلاع در یک چندضلعی، برابر ۱۵ است. اگر ۴ضلع به اضلاع این چندضلعی اضافه شود، اختلاف تعداد قطرهای چند ضلعی جدید و اصلی کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۶

۳) ۳۵ ۴) ۹

$$\frac{n(n-۳)}{۲}+n=۱۵\Rightarrow\frac{n^۲-۳n+۲n}{۲}=۱۵\Rightarrow n^۲-n-۳۰=۰\Rightarrow(n-۶)(n+۵)=۰\Rightarrow\begin{cases}n=۶ & \text{ق ق}\\ n=-۵ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$\text{تعداد قطرهای ۶ضلعی}=\frac{n(n-۳)}{۲}=\frac{۶(۶-۳)}{۲}=۹$$

حال چون به این تعداد ضلع، ۴ضلع دیگر اضافه شده است، پس تعداد اضلاع شکل جدید ۱۰ خواهد بود.

$$\text{تعداد قطرهای ۱۰ضلعی}=\frac{۱۰(۱۰-۳)}{۲}=۳۵$$

$$\text{اختلاف تعداد قطرها}=۳۵-۹=۲۶$$ گزینه ۲

تست۱۰ : تعداد قطرهای یک n ضلعی، واسطه‌ی هندسی بین تعداد اضلاع و تعداد قطرهای گذرنده از یک رأس آن می‌باشد. n کدام است؟

«قلمچی ۲۸ بهمن ۱۴۰۰»

۱) ۷ ۲) ۴

۳) ۵ ۴) ۶

«روش اول»

$$\underbrace{\left(\frac{n(n-۳)}{۲}\right)^۲=n\times(n-۳)}_{\boxed{I}}\Rightarrow\frac{n(n-۳)}{۴}=۱\Rightarrow n(n-۳)=۴\Rightarrow n^۲-۳n-۴=۰\Rightarrow(n-۴)(n+۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n=۴ & \text{ق ق}\\ n=-۱ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$ گزینه ۲

«روش دوم» : امتحان گزینه‌ها

با قرار دادن گزینه‌ها در تساوی I تنها مقدار ۴ جواب خواهد بود.

تست۱۱ : اگر به اضلاع یک nضلعی محدب یک واحد اضافه کنیم به قطرهای آن چندواحد افزوده می‌شود؟

۱) $n-۱$ ۲) ۱

۳) $n+۱$ ۴) ۲

$$\frac{(n+۱)(n-۲)}{۲}-\frac{n(n-۳)}{۲}=\frac{n^۲-n-۲-n^۲+۳n}{۲}=\frac{۲n-۲}{۲}\Rightarrow n-۱$$

یعنی تعداد قطر اضافه شده برابر $n-۱$ است. گزینه ۱

چندضلعی محدب و مقعر

چندضلعی محدب:

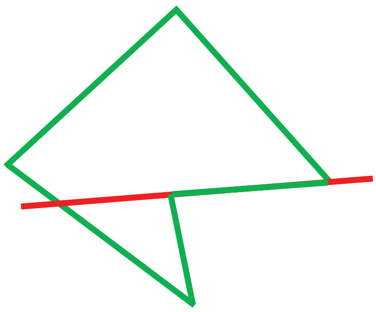
– چندضلعی محدب است هرگاه هر یک از اضلاع را از دو طرف امتداد دهیم چندضلعی در یک طرف آن قرار گیرد.

– چندضلعی محدب است اگر تمام زاویه‌هایش کمتر از ۱۸۰° باشد.

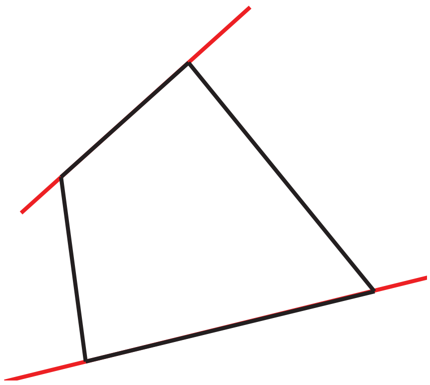
چندضلعی مقعر:

چندضلعی که محدب نباشد مقعر است

چندضلعی مقعر



چندضلعی محدب



چند ضلعی منتظم: چندضلعی که تمام اضلاع باهم و تمام زاویه ها باهم برابر باشند.

یادآوری: اندازه هر زاویه چندضلعی منتظم برابر $\frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n}$ است

سوال ۵ : اندازه زاویه های داخلی پنج ضلعی منتظم را محاسبه کنید.

$$\frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n} \Rightarrow \frac{(۵-۲)۱۸۰^\circ}{۵} = \frac{۳\times ۱۸۰^\circ}{۵} = ۱۰۸^\circ$$

تست ۱۲ : در یک چندضلعی منتظم اندازه زاویه داخلی برابر ۱۲۰° است تعداد قطرهای آن کدام است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۸

۳) ۹ ۴) ۶

$$\frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n} = ۱۲۰^\circ \Rightarrow (n-۲)\times ۳ = ۲n \Rightarrow n = ۶$$

تعداد قطرهای ۶ضلعی $= \frac{۶(۶-۳)}{۲} = ۹$

گزینه ۳

تست۱۳ : در یک چندضلعی منتظم اندازه هر زاویه داخلی ۱۲ برابر اندازه هر زاویه خارجی است. تعداد قطرهای این چندضلعی کدام است؟

۱) ۲۹۹   ۲) ۲۶۹

۳) نمی‌توان تعیین کرد   ۴) ۲۹۶

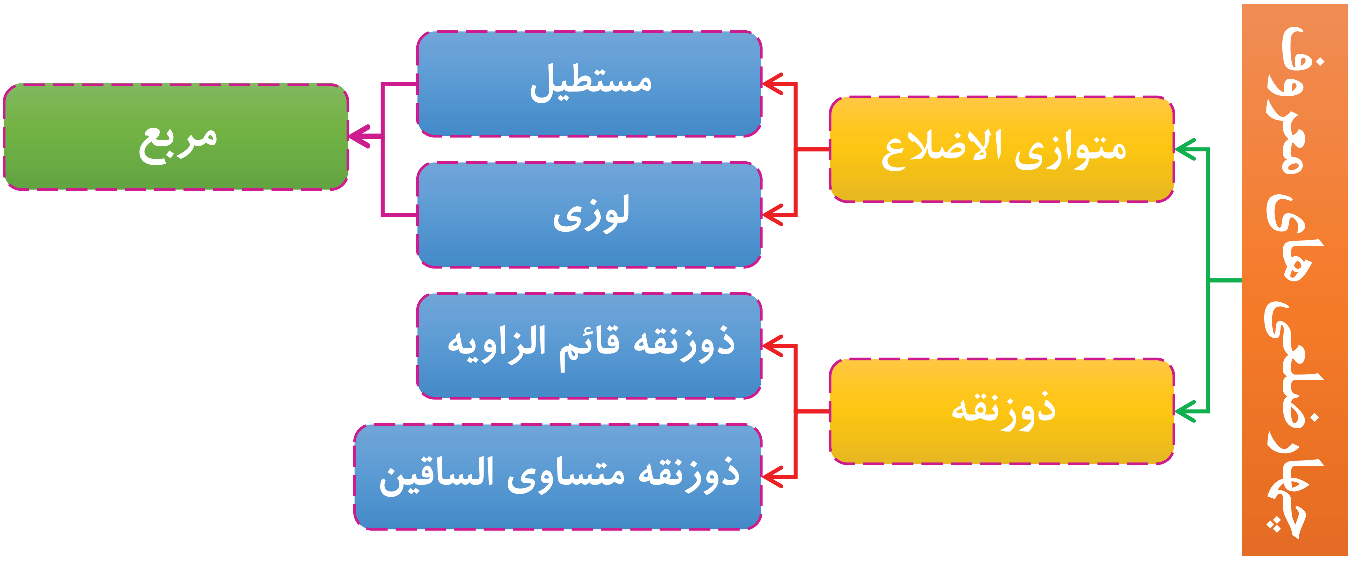
چون چندضلعی، منتظم است همه زاویه‌های داخلی باهم و همه زاویه‌های خارجی باهم برابرند و مجموع زاویه های خارجی هر چندضلعی محدب برابر ۳۶۰° است پس داریم:

$$\frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n} = ۱۲ \times \frac{۳۶۰^\circ}{n} \Rightarrow (n-۲) = ۲۴ \Rightarrow n = ۲۶$$

$$\text{تعداد قطرهای ۲۶ضلعی} = \frac{۲۶(۲۶-۳)}{۲} = ۲۹۹$$

گزینه ۱

چهارضلعی های معروف



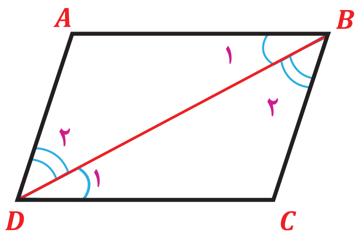
توجه : در ریاضی اگر علاوه بر قضیه، عکس آن نیز درست باشد، از عبارت اگر و تنها اگر استفاده می‌شود که هم خود قضیه و هم عکس قضیه باید ثابت شود.

متوازی الاضلاع و ویژگی‌های آن

متوازی‌الاضلاع چهارضلعی‌ای است که اضلاع مقابل آن باهم موازی هستند

سوال ۶ : قضیه: چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر هر دو ضلع مقابل هم اندازه باشند.

اثبات:



$AB \parallel CD$ و BD مورب $\Longrightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$

$AD \parallel BC$ و BD مورب $\Longrightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{D}_2$

BD مشترک

$\xRightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta ABD \cong \Delta BCD$

حال چون دو مثلث هم نهشت هستند پس تمام اجزای متناظر برابرند : $AD = BC$ و $AB = DC$

اثبات عکس:

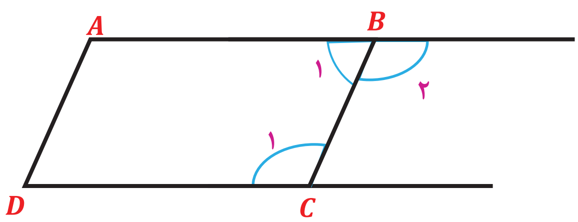
قطر BD را رسم می‌کنیم : $AB = DC$ و $AD = BC$ و BD مشترک پس دو مثلث ΔABD و ΔBCD بنا به حالت تساوی سه ضلع هم‌نهشت‌اند.

$\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 \Longrightarrow AB \parallel CD$

$\widehat{B}_2 = \widehat{D}_2 \Longrightarrow AD \parallel BC$

$\Longrightarrow$ چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است

سوال ۷ : قضیه: چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر زاویه های مجاور آن مکمل هم باشند.



اثبات:

$AB \parallel CD$ و BC مورب $\Longrightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{C}_1$

$\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$

$\Longrightarrow \widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 180^\circ$

اثبات عکس قضیه:

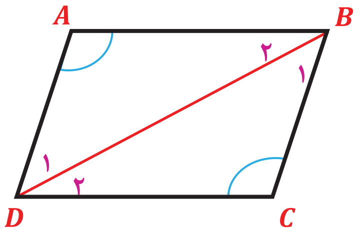
$\widehat{B}_1 + \widehat{C}_1 = 180^\circ \Longrightarrow AB \parallel CD$

$\widehat{B}_1 + \widehat{A} = 180^\circ \Longrightarrow AD \parallel BC$

$\Longrightarrow$ چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است

سوال۸ : قضیه: چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر زاویه های مقابل آن هم اندازه باشند.

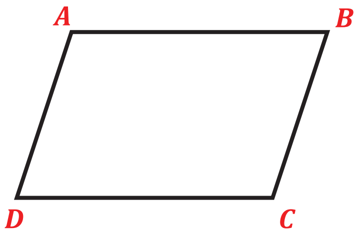
اثبات:



$$\left.\begin{array}{r} AB \parallel CD \text{ و } BD \text{ مورب} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 \\ AD \parallel BC \text{ و } BD \text{ مورب} \Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{D}_2 \\ BD \text{ مشترک} \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta ABD \cong \Delta BCD$$

حال چون دو مثلث هم نهشت هستند پس تمام اجزای متناظر برابرند : $\widehat{A} = \widehat{C}$ و اگر قطر AC را رسم کنیم به همین روش ثابت می‌شود که $\widehat{B} = \widehat{D}$.

اثبات عکس قضیه:

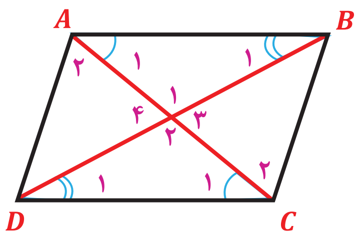


$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 360^\circ \xRightarrow{\widehat{A}=\widehat{C} \text{ و } \widehat{B}=\widehat{D}} 2\widehat{B} + 2\widehat{C} = 360^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \xRightarrow{\text{عکس قضیه ۲}}$ چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است

سوال۹ : قضیه: چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرها منصف همدیگر باشند.

اثبات: اگر محل تلاقی قطرها را O بنامیم، خواهیم داشت:



$$\left.\begin{array}{r} AB \parallel CD \text{ و } BD \text{ مورب} \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 \\ AB \parallel CD \text{ و } AC \text{ مورب} \Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{C}_1 \\ AB = CD \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta AOB \cong \Delta COD$$

حال چون دو مثلث هم نهشت هستند پس تمام اجزای متناظر برابرند : $AO = OC$ و $BO = OD$

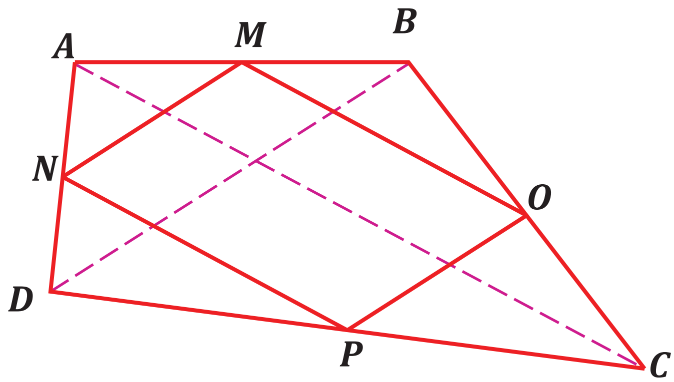
اثبات عکس قضیه:

$$\left.\begin{array}{r} AO = OC \\ BO = OD \\ \widehat{O}_1 = \widehat{O}_2 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta AOB \cong \Delta COD \xRightarrow{\text{برابری اجزای متناظر}} \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 \Rightarrow AB \parallel CD$$

$$\left.\begin{array}{r} AO = OC \\ BO = OD \\ \widehat{O}_3 = \widehat{O}_4 \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta AOD \cong \Delta BOC \xRightarrow{\text{برابری اجزای متناظر}} \widehat{A}_2 = \widehat{C}_2 \Rightarrow AD \parallel BC$$

پس چهارضلعی $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است.

سوال۱۰ : قضیه: اگر وسط اضلاع هر چهارضلعی را به طوری متوالی به هم وصل کنیم یک متوازی‌الاضلاع پدید می‌آید.

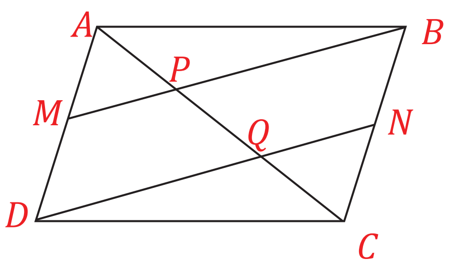


$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABD:\ \dfrac{AM}{MB}=\dfrac{AN}{ND}=1 \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} MN \parallel BD\\[2ex] \Delta BCD:\ \dfrac{CO}{OB}=\dfrac{CP}{PD}=1 \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PO \parallel BD\end{array}\right\} \Rightarrow MN \parallel PO \quad \boxed{I}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC:\ \dfrac{AM}{MB}=\dfrac{BO}{OC}=1 \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} MO \parallel AC\\[2ex] \Delta ADC:\ \dfrac{DN}{NA}=\dfrac{DP}{PC}=1 \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PN \parallel AC\end{array}\right\} \Rightarrow PN \parallel MO \quad \boxed{II}$$

از تساوی‌های I و II نتیجه می‌گیریم چهارضلعی $MNPO$ متوازی‌الاضلاع است.

سوال۱۱ : قضیه: در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ ، Mو N به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AD و BC می‌باشند. چرا خط‌های MB و DN موازی‌اند؟ به کمک آن ثابت کنید: $AP = PQ = QC$



$$AD = BC \Rightarrow \frac{AD}{2} = \frac{BC}{2} \Rightarrow AM = CN$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AM = CN\\ \hat{A} = \hat{C}\\ AB = CD\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ز ض ز}} \Delta ABM \cong \Delta CDN \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{N}_1\\[2ex] AD \parallel BC \text{ و } DN \text{ مورب} \Rightarrow \hat{N}_1 = \hat{D}_1\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{D}_1 \Rightarrow MB \parallel DN$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ADQ:\ \dfrac{AM}{MD} = \dfrac{AP}{PQ} \xrightarrow{AM=MD} AP = PQ\\[2ex] \Delta BCP:\ \dfrac{CN}{NB} = \dfrac{CQ}{PQ} \xrightarrow{CN=NB} CQ = PQ\end{array}\right\} \Rightarrow AP = PQ = QC$$

تست۱۴: کدام گزینه در مورد متوازی‌الاضلاع نادرست است؟

۱) چهارضلعی که قطرها منصف هم باشند.

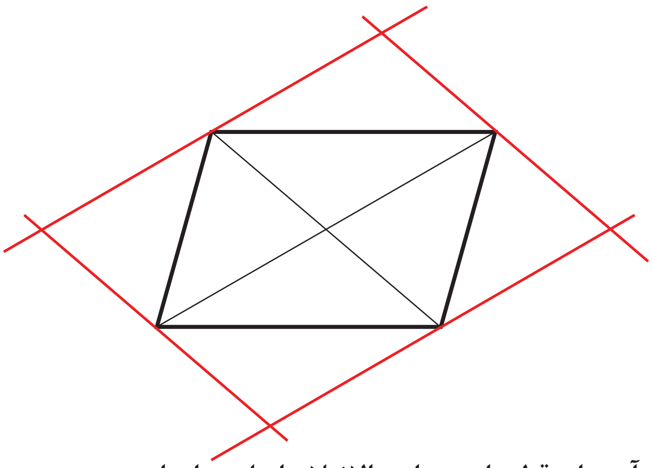
۲) چهارضلعی که زاویه های روبه‌روی آن مساوی باشند.

۳) چهارضلعی که دوضلع آن مساوی و دو ضلع آن موازی است.

۴) چهارضلعی که زاویه های مجاور در آن مکمل‌اند.

پاسخ : گزینه های ۱، ۲ و ۴ همگی از ویژگی های متوازی‌الاضلاع است. ولی در گزینه ۳ باید نوشته می‌شد که اضلاع مقابل آن موازی و مساوی اند.

تست۱۵: در یک متوازی‌الاضلاع که طول قطرهای آن برابر ۴ و ۷ است، از هر رأس خطی به موازات قطر مقابل آن رسم کرده‌ایم. محیط چهارضلعی حاصل از تقاطع این خطوط چقدر است؟



۱) ۲۲ ۲) ۱۱

۳) ۱۶ ۴) ۲۸

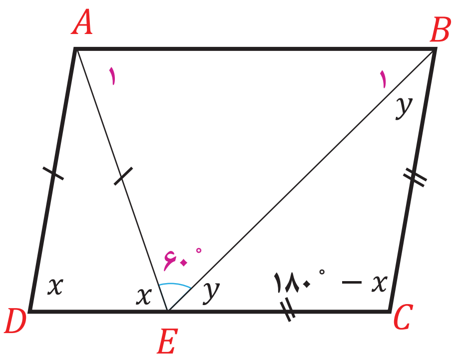
۱۱

پاسخ: با توجه به شکل، شکل حاصل، متوازی‌الاضلاع است و اندازه اضلاع آن برابر قطرهای متوازی الاضلاع اصلی برابر است پس :

$$\text{محیط} = 4 + 4 + 7 + 7 = 22$$

گزینه ۱

تست۱۶: در متوازی‌اضلاع زیر اختلاف بزرگترین و کوچکترین زاویه مثلث کدام است؟



۱) ۲۰ ۲) ۶۰

۳) ۴۰ ۴) صفر

پاسخ: با توجه به شکل داریم:

$$\left.\begin{aligned} &x + 60^\circ + y = 180^\circ \Rightarrow x + y = 120^\circ \\ &180^\circ - x + y + y = 180^\circ \Rightarrow -x + 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = 40^\circ \ , x = 80^\circ$$

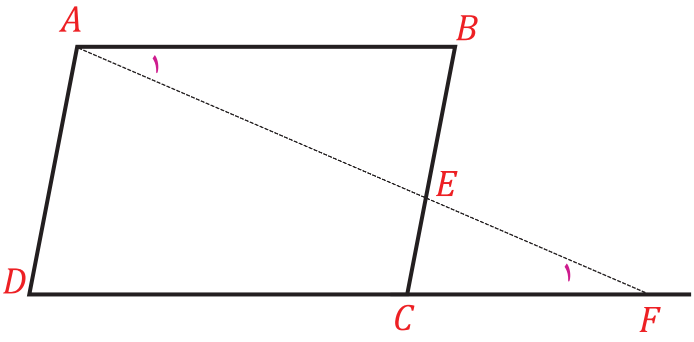
چون $ABCD$ متوازی‌الاضلاع است پس زاویه های روبه‌رو باهم برابرند پس:

$$\hat{A} = \hat{C} = 180^\circ - x = 100^\circ \qquad \hat{B} = \hat{D} = x = 80^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = 40^\circ \xrightarrow{\Delta ABE:\ \hat{A}_1 + 60^\circ + \hat{B}_1 = 180^\circ} \hat{A}_1 = 80^\circ \Rightarrow 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$$

گزینه ۳

تست۱۷: در متوازی‌اضلاع زیر حاصل $BE.DF$ کدام است؟

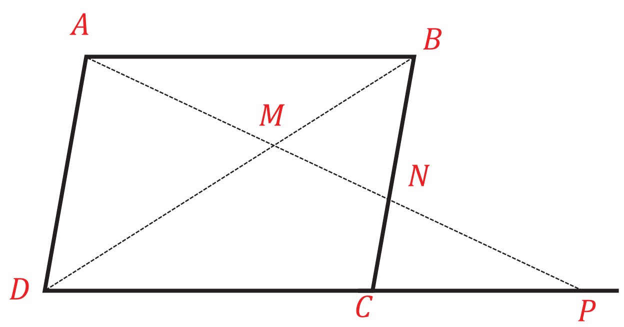


۱) AB^2 ۲) $AB.AD$

۳) MD^3 ۴) AM^2

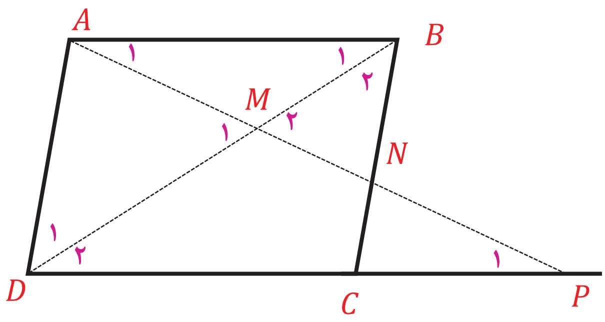
$\widehat{A}_1 = \widehat{F}_1$ و $\widehat{B} = \widehat{D} \Rightarrow \Delta ADF \sim \Delta ABE \Rightarrow \frac{BE}{AD} = \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{DF} \Rightarrow \frac{BE}{AD} = \frac{AB}{DF} \Rightarrow BE \times DF = AB \times AD$ گزینه ۲

تست۱۸: در متوازی‌اضلاع زیر حاصل $MN \times MP$ کدام است؟



۱) AB^2 ۲) AD^2

۳) MD^3 ۴) AM^2



$\widehat{B}_2 = \widehat{D}_1$ و $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 \Rightarrow \Delta AMD \sim \Delta BMN \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{AM}{MN}$

$\widehat{A}_1 = \widehat{P}_1$ و $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_2 \Rightarrow \Delta AMB \sim \Delta DMP \Rightarrow \frac{MD}{MB} = \frac{MP}{AM}$

$\Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{MP}{AM} \Rightarrow AM^2 = MN \times MP$ گزینه ۳

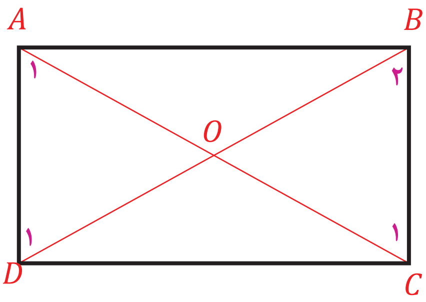
مستطیل و ویژگی های آن

چهارضلعی که همه زاویه‌های آن قائمه هستند.

– چون در هر مستطیل اضلاع روبه‌رو باهم موازی‌اند پس مستطیل، متوازی‌الاضلاع نیز می‌باشد

– اگر متوازی‌الاضلاع، یک زاویه قائمه داشته باشد، مستطیل است.

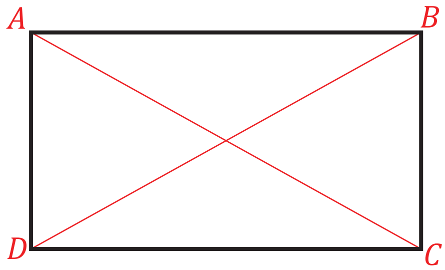
سوال۱۲ : قضیه: در مستطیل دو قطر باهم برابر و منصف یکدیگرند.



$$\left.\begin{array}{r}\hat{A}=\hat{C}=۹۰^\circ\\ DC=DC\\ AD=BC\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ز ض}}\Delta ADC\cong\Delta BDC\Rightarrow AD=BC$$

$$\left.\begin{array}{r}\hat{A}_۱=\hat{C}_۱\\ AD=BC\\ \hat{D}_۱=\hat{B}_۲\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ز ض ز}}\Delta AOD\cong\Delta BOC\Rightarrow AO=OC\,,BO=OD$$

سوال۱۳ : قضیه: متوازی‌الاضلاعی که دو قطر برابر دارد، مستطیل است.

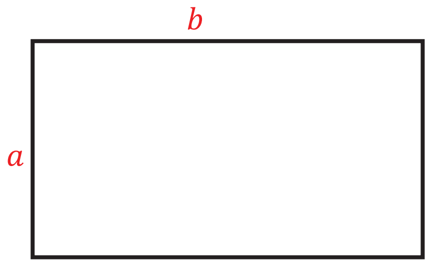


$$\left.\begin{array}{r}BD=AC\\ DC=DC\\ AD=BC\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{ض ض ض}}\Delta ADC\cong\Delta BDC\Rightarrow\hat{D}=\hat{C}\xrightarrow{\hat{D}+\hat{C}=۱۸۰^\circ}\hat{D}=\hat{C}=۹۰^\circ$$

تست۱۹: طول یک مستطیل ۲واحد کمتر از ۱/۵ برابر عرض آن است،اگر مساحت مستطیل برابر ۱۹۲ واحد مربع باشد،محیط آن کدام است؟ «ریاضی خارج ۱۳۹۹»

۱) ۵۲ ۲) ۵۶

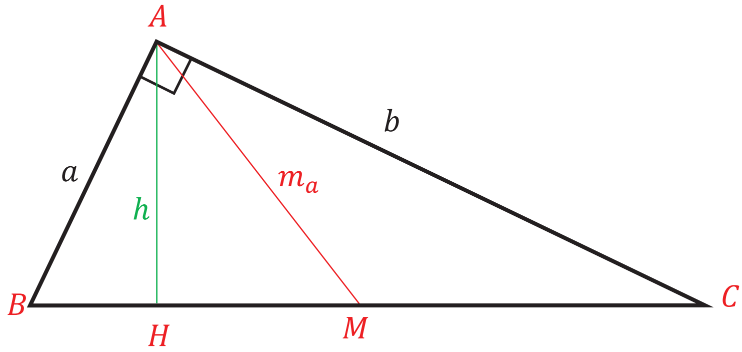
۳) ۶۰ ۴) ۶۴



$$b=۱/۵a-۲\qquad S=ab=a(۱/۵a-۲)=۱۹۲\Rightarrow\frac{۳}{۲}a^۲-۲a-۱۹۲=۰\Rightarrow۳a^۲-۴a-۳۸۴=۰$$

$$\Rightarrow a=\frac{۴\pm۶۸}{۶}=۱۲\,,-\frac{۳۲}{۳}\xrightarrow{a=۱۲}b=۱۶\Rightarrow P=۲(۱۲+۱۶)=۵۶$$ گزینه ۲

ویژگی‌های مثلث قائم‌الزاویه

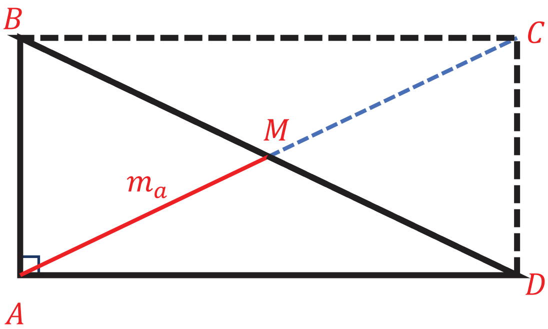


$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲}$$

$$a^{۲} = c^{۲} + b^{۲}$$

$$h = \frac{bc}{a} \qquad a^{۲} = HC \times a \qquad b^{۲} = BH \times a$$

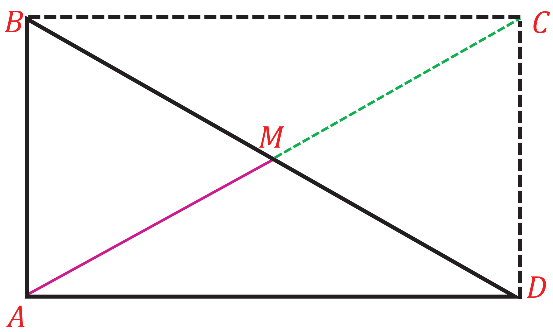
سوال۱۴ : نشان دهید در هر مثلث قائم الزاویه اندازه میانه وارد بر وتر نصف وتر است.



اثبات: مستطیل $ABCD$ را درنظر می‌گیریم. بدیهی است که مثلث ABD قائم الزاویه است. چون در مستطیل قطرها باهم برابر و منصف همدیگر هستند پس:

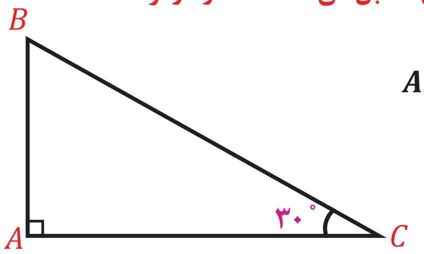
$$AC = BD\ , AM = \frac{AC}{۲} = \frac{BD}{۲} \Rightarrow AM = \frac{BD}{۲}$$

سوال۱۵ : نشان دهید اگر در مثلث میانه وارد بر وتر نصف وتر باشد آنگاه، مثلث، قائم الزاویه است.



میانه AM را از سمت M به اندازه‌ای امتداد می‌دهیم که $AM = MC$. حال با توجه به شکل، در چهارضلعی $ABCD$ قطرها همدیگر را نصف کرده‌اند پس چهارضلعی $ABCD$، متوازی‌الاضلاع است. و چون قطرها باهم برابرند پس چهارضلعی $ABCD$ مستطیل نیزمی‌باشد در نتیجه $\widehat{A} = ۹۰^{\circ}$ و مثلث ΔABD قائم الزاویه است.

سوال ۱۶ : نشان دهید در هر مثلث قائم الزاویه اگر اندازه یک زاویه ۳۰° باشد، اندازه ضلع مقابل آن نصف اندازه وتر است.



$$AB = \frac{BC}{۲}$$

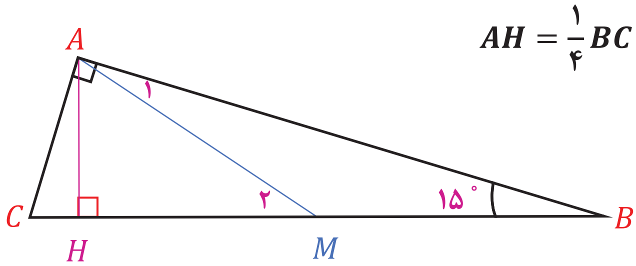
$$\Delta ABC:\ \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow AB = \frac{BC}{۲}$$

نکته : با استدلال مشابه می‌توان نتیجه گرفت که:

۱- در هر مثلث قائم الزاویه اگر اندازه یک زاویه ۶۰° باشد، اندازه ضلع مقابل آن $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ اندازه وتر است.

۲- در هر مثلث قائم الزاویه اگر اندازه یک زاویه ۴۵° باشد، اندازه ضلع مقابل آن $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ اندازه وتر است.

سوال ۱۷ : در مثلث قائم الزاویه ABC اگر اندازه یک زاویه $\widehat{B} = ۱۵^\circ$ باشد، نشان دهید اندازه ارتفاع وارد بر وتر، $\frac{۱}{۴}$ اندازه وتر است.



$$AH = \frac{۱}{۴}BC$$

اثبات: چون در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر نصف وتر است پس :

$$\Delta ABM:\ AM = \frac{BC}{۲} = MB \Rightarrow \Delta ABM \text{ متساوی الساقین} \Rightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{B} = ۱۵^\circ$$

زاویه $\widehat{M}_۲$ یک زاویه خارجی برای مثلث ΔABM است پس اندازه آن برابر مجموع دوزاویه غیرمجاور خواهد بود پس:

$$\widehat{M}_۲ = \widehat{B} + \widehat{A}_۱ = ۱۵^\circ + ۱۵^\circ = ۳۰^\circ$$

طبق سوال ۱۶ اندازه ضلع روبه‌رو به زاویه نصف وتر است. بنابراین :

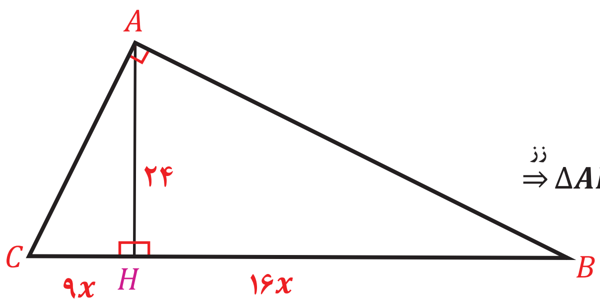
$$\Delta AHM:\ AH = \frac{AM}{۲} = \frac{MB}{۲} = \frac{\frac{BC}{۲}}{۲} \Rightarrow AH = \frac{BC}{۴}$$

تست ۱۹: در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازه ارتفاع وارد بر وتر ۲۴ و نسبت دوپاره‌خطی که ارتفاع روی وتر، پدید می‌آورد $\frac{۹}{۱۶}$ است،

طول وتر کدام است؟ «قلم‌چی ۱۰ بهمن ۱۴۰۰»

۱) ۴۰ ۲) ۴۵

۳) ۵۰ ۴) ۵۵



$$\overset{\text{زز}}{\Rightarrow} \Delta AHC \sim \Delta AHB \Rightarrow \frac{AH}{۱۶x} = \frac{۹x}{AH} \Rightarrow ۲۴^۲ = ۹x \times ۱۶x \Rightarrow x = ۲$$

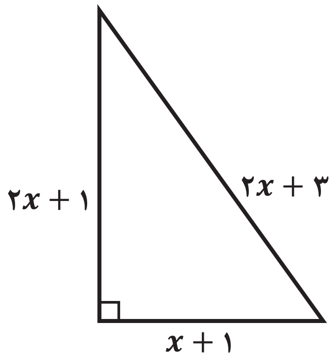
$$BC = ۹x + ۱۶x \overset{x=۲}{\Longrightarrow} BC = ۱۸ + ۳۲ = ۵۰$$ گزینه ۳

تست ۲۰: اندازه اضلاع در مثلث قائم‌الزاویه‌ای $x+۱$ ، $۲x+۱$ و $۲x+۳$ است. مساحت مثلث کدام است؟

«ریاضی داخل ۱۳۹۹»

۱) ۶۰ ‏ ۲) ۵۶

۳) ۴۵ ‏ ۴) ۳۹



پاسخ : ابتدا باید اندازه اضلاع را مشخص کنیم. چون در مثلث قائم الزاویه وتر بزرگترین ضلع است پس اندازه‌های داده شده به شکل روبه‌رو خواهد بود:

حال با استفاده از رابطه فیثاغورس داریم:

$$(۲x+۳)^۲ = (x+۱)^۲ + (۲x+۱)^۲ \Rightarrow ۴x^۲ + ۱۲x + ۹ = x^۲ + ۲x + ۱ + ۴x^۲ + ۴x + ۱$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۶x - ۷ = ۰ \Rightarrow (x-۷)(x-۱) = ۰ \Rightarrow x = ۷ \quad or \quad x = -۱ \quad \Rightarrow x = ۷$$

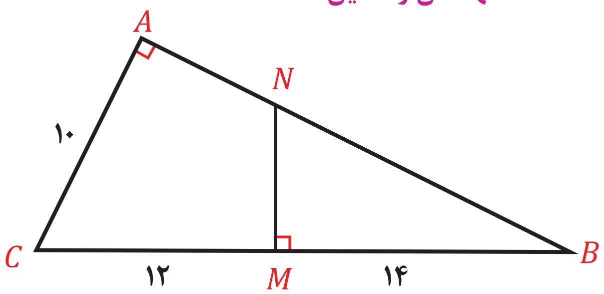
$$\Rightarrow S = \frac{(۲x+۱)(x+۱)}{۲} \xRightarrow{x=۷} S = \frac{۱۵\times۸}{۲} = ۶۰$$

گزینه ۱

تست ۲۱: در شکل زیر $CM = ۱۲$ ، $BM = ۱۴$ و $AC = ۱۰$. مقدار BN کدام است؟ « مهندس واعظین»

۱) ۱۶ ‏ ۲) ۱۴

۳) $\frac{۹۱}{۶}$ ‏ ۴) $\frac{۳۵}{۶}$



$$۲۶^۲ = ۱۰^۲ + AB^۲ \Rightarrow AB^۲ = ۵۷۶ \Rightarrow AB = ۲۴$$

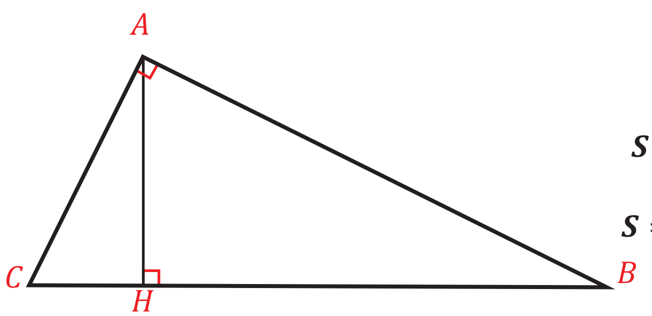
$$\xRightarrow{زز} \Delta ABC \sim \Delta MNB \Rightarrow \frac{AB}{BM} = \frac{AC}{MN} = \frac{BC}{BN} \Rightarrow \frac{AB}{BM} = \frac{BC}{BN} \Rightarrow \frac{۲۴}{۱۴} = \frac{۲۶}{BN} \Rightarrow BN = \frac{۹۱}{۶}$$

گزینه ۳

تست ۲۲: مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای $\frac{۱}{۸}$ مجذور وتر آن است. کوچک‌ترین زاویه این مثلث کدام است؟ «خارج تجربی ۱۳۹۳»

۱) ۱۵ ‏ ۲) ۲۲/۵

۳) ۳۰ ‏ ۴) ۱۷/۵

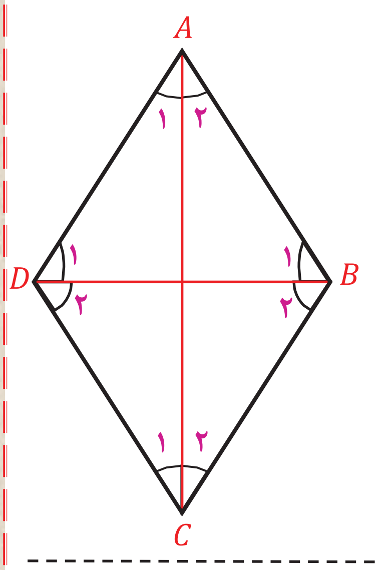


$$\left.\begin{array}{l} S = \frac{۱}{۸}BC^۲ \\ S = \frac{۱}{۲}AH\times BC \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{۸}BC^۲ = \frac{۱}{۲}AH\times BC \Rightarrow AH = \frac{۱}{۴}BC$$

طبق سوال ۱۶ اگر اندازه ارتفاع وارد بر وتر $\frac{۱}{۴}$ اندازه وتر باشد آنگاه یکی از زاویه ها، ۱۵° است. پس کوچک‌ترین زاویه ۱۵° است.

لوزی و ویژگی‌های آن

متوازی‌الاضلاعی که همه اضلاعش باهم برابرند.

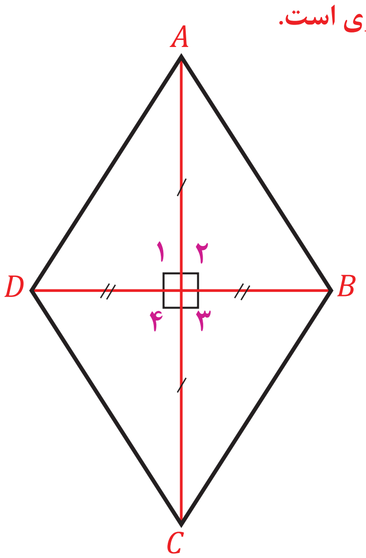


سوال۱۸ : قضیه: اگر قطرهای چهارضلعی محدب، نیمساز زاویه‌هایش باشند، چهارضلعی لوزی است.

$$\widehat{A}_۱=\widehat{A}_۲ \ \text{و}\ \widehat{C}_۱=\widehat{C}_۲ \ \text{و}\ AC=AC \xRightarrow{\text{ز ض ز}} ABC\cong ADC \Rightarrow AB=AD \ \text{و}\ CD=BC$$

$$\widehat{B}_۱=\widehat{B}_۲ \ \text{و}\ \widehat{D}_۱=\widehat{D}_۲ \ \text{و}\ BD=BD \xRightarrow{\text{ز ض ز}} ABD\cong BDC \Rightarrow AB=BD \ \text{و}\ CD=AD$$

پس همه اضلاع باهم برابرند در نتیجه چهارضلعی $ABCD$ لوزی است.



سوال۱۹ :قضیه: نشان دهید اگر در یک چهارضلعی، قطرها عمودمنصف هم باشند آنگاه چهارضلعی لوزی است.

اثبات: اگر محل تلاقی قطرها را O بنامیم، خواهیم داشت:

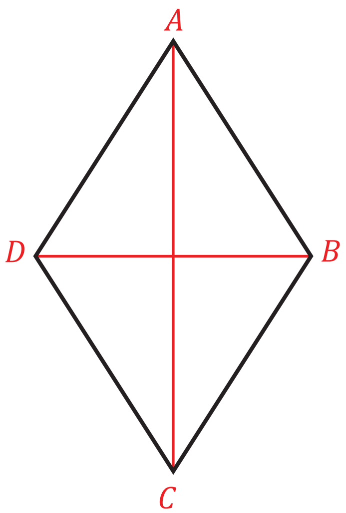
$$AO=AO \ \text{و}\ \widehat{O}_۱=\widehat{O}_۲=۹۰^\circ \ \text{و}\ DO=BO \xRightarrow{\text{ز ض ز}} ABO\cong ADO \Rightarrow AD=AB$$

$$AO=OC \ \text{و}\ \widehat{O}_۲=\widehat{O}_۳=۹۰^\circ \ \text{و}\ BO=BO \xRightarrow{\text{ز ض ز}} ABO\cong BOC \Rightarrow AB=BC$$

$$OC=OC \ \text{و}\ \widehat{O}_۳=\widehat{O}_۴=۹۰^\circ \ \text{و}\ BO=DO \xRightarrow{\text{ز ض ز}} BOC\cong COD \Rightarrow BC=CD$$

$$AO=OC \ \text{و}\ \widehat{O}_۴=\widehat{O}_۱=۹۰^\circ \ \text{و}\ DO=DO \xRightarrow{\text{ز ض ز}} ABO\cong ADO \Rightarrow AD=DC$$

پس همه اضلاع باهم برابرند در نتیجه چهارضلعی $ABCD$ لوزی است.



سوال۲۰ :قضیه: نشان دهید در لوزی قطرها، عمودمنصف هم هستند.

اثبات: طبق تعریف لوزی، چون لوزی، نوعی متوازی‌الاضلاع است و در متوازی الاضلاع قطرها، منصف یکدیگرند پس در لوزی نیز قطرها منصف همدیگرند پس: $AO=CO$ و $BO=DO$

حال مثلث‌های ΔABD و ΔBCD را در نظر بگیرید چون ساق‌های آنها باهم برابرند(به دلیل لوزی بودن شکل) پس هر دو متساوی الساقین هستند.چون AO منصف DB است پس در مثلث ΔABD میانه است. چون در مثلث متساوی‌اساقین میانه وارد بر قاعده همان ارتفاع است، پس: $AO\perp BD$

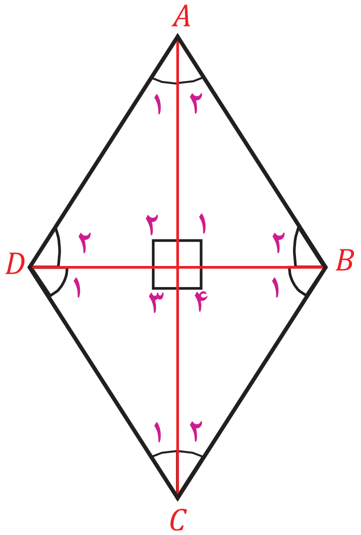
در نتیجه، AC عمود منصف BD است.

با استدلال مشابه نیز می‌توان ثابت کرد که BD عمود منصف AC است.

پس در لوزی قطرها عمود منصف همدیگرند.

سوال۲۱ :قضیه: نشان دهید در لوزی قطرها نیمساز زاویه‌های لوزی هستند.

اثبات: اگر محل تلاقی قطرها را O بنامیم، خواهیم داشت:



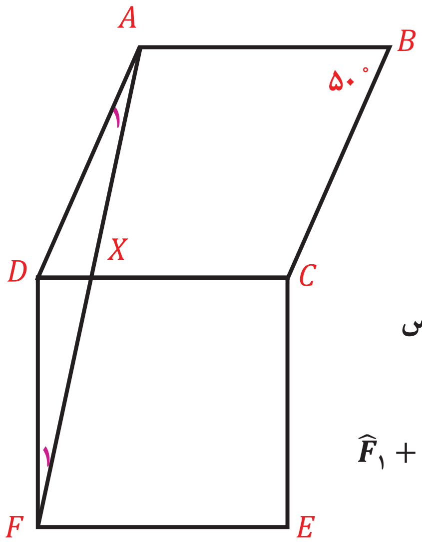
$$AO = AO \text{ و } \widehat{O}_۱ = \widehat{O}_۲ = ۹۰^\circ \text{ و } DO = BO \overset{\text{ض ز ض}}{\Longrightarrow} ABO \cong ADO \Longrightarrow \widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲$$

در لوزی زاویه‌های مقابل برابرند(چرا؟) پس AC نیمساز زاویه $\widehat{C}$ نیز می‌باشد، پس: $\widehat{C}_۱ = \widehat{C}_۲$

$$AO = OC \text{ و } \widehat{O}_۲ = \widehat{O}_۳ = ۹۰^\circ \text{ و } BO = BO \overset{\text{ض ز ض}}{\Longrightarrow} ABO \cong BOC \Longrightarrow \widehat{B}_۱ = \widehat{B}_۲$$

در لوزی زاویه‌های مقابل برابرند(چرا؟) پس BD نیمساز زاویه $\widehat{D}$ نیز می‌باشد، پس: $\widehat{D}_۱ = \widehat{D}_۲$

تست ۲۳: در شکل زیر $ABCD$ لوزی و $DCEF$ مربع است. اندازه زاویه $\widehat{X}$ کدام است؟



۱) ۴۰ ۲) ۵۰

۳) ۶۰ ۴) ۷۰

حل: چون در لوزی زاویه‌های مقابل برابرند پس: $\widehat{D}_۱ = \widehat{C} = ۵۰^\circ$

مثلث ΔADF را درنظر بگیرید، چون اضلاع مربع $DCEF$ و لوزی $ABCD$ باهم برابرند پس

مثلث ΔADF متساوی‌الساقین است، بنابراین :

$$\widehat{F}_۱ + \widehat{D} + A_۱ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{F}_۱ = \widehat{A}_۱} ۲\widehat{A}_۱ + ۵۰^\circ + ۹۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Longrightarrow \widehat{A}_۱ = ۲۰^\circ$$

در مثلث ΔADM، زاویه یک زاویه خارجی برای این مثلث می‌باشد پس:

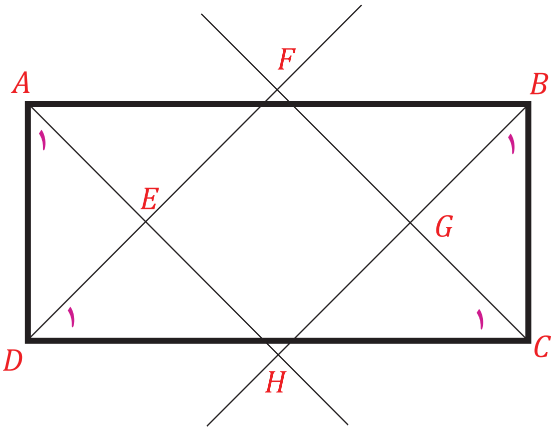
$$\widehat{X} = \widehat{D}_۱ + \ +A_۱ = ۵۰^\circ + ۲۰^\circ = ۷۰^\circ$$ گزینه ۴

مربع و ویژگی‌های آن

نوعی لوزی که همه زاویه هایش قائمه‌اند.

توجه: چون در مربع زاویه ها قائمه اند پس مربع نوعی مستطیل نیز می‌باشد که طول و عرض آن برابرند

سوال ۲۲ :قضیه: نشان دهید شکل حاصل از برخورد نیم‌سازهای داخلی مستطیل، مربع است، سپس اندازه ضلع مربع را محاسبه کنید.



حل: مثلث ΔDFC را درنظر بگیرید، چون $\widehat{D}_۱ = \widehat{C}_۱ = ۴۵^\circ$ پس :

$$\widehat{F} = ۱۸۰^\circ - \widehat{D}_۱ - \widehat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ - ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که زاویه های $\widehat{E}$ ، $\widehat{G}$ و $\widehat{H}$ نیز قائمه هستند پس چهارضلعی $EFGH$ مستطیل است. حال باید ثابت کنیم اضلاع مجاور باهم برابرند.

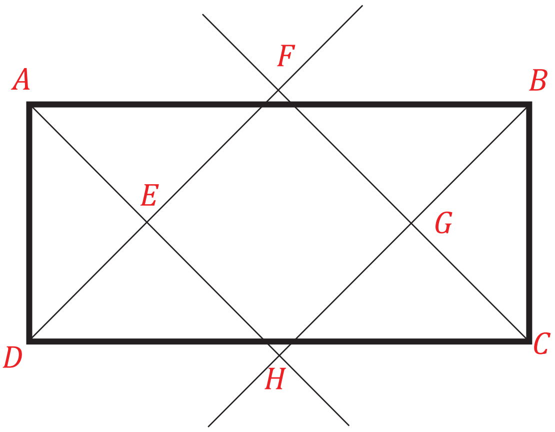
مثلث ΔDFC متساوی الساقین است ($\widehat{D}_۱ = \widehat{C}_۱ = ۴۵^\circ$)پس ساق‌ها برابرند یعنی: $DF = CF$

مثلث‌های ΔBGC و ΔAED مرا در نظر بگیرید. دو مثلث درحال دو زاویه و ضلع بین هم نهشت‌اند($\widehat{D}_۱ = \widehat{C}_۱ = ۴۵^\circ$ و $AD = BC$ و $\widehat{A}_۱ = \widehat{B}_۱ = ۴۵^\circ$ بنابراین : $DE = GC$

$$\begin{matrix} DF = CF \\ DE = GC \end{matrix} \xRightarrow{\text{تفریق}} DF - DE = CF - GC \Longrightarrow EF = FG$$

بنابراین چهارضلعی $EFGH$ مربع است.

حال اگر طول مستطیل b و عرض آن a باشند :



$$\Delta DFC: \cos ۴۵^\circ = \frac{DF}{DC} = \frac{DF}{b} \Longrightarrow DF = \frac{b\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Delta AED: \cos ۴۵^\circ = \frac{DE}{AD} = \frac{DE}{a} \Longrightarrow DE = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

$$DF - DE = \frac{b\sqrt{۲}}{۲} - \frac{a\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(b - a)$$

$$\boxed{EF = \frac{\sqrt{۲}}{۲}(b - a)}$$

نکته : محل تلاقی نیمسازهای داخلی مستطیل با توجه با اندازه‌ی طول و عرض آن (a عرض مستطیل و b طول مستطیل)

۱) اگر $b > ۲a$ آنگاه محل تقاطع خارج از مستطیل است

۲) اگر $b = ۲a$ آنگاه محل تقاطع روی طول مستطیل است

۳) اگر $a < b < ۲a$ آنگاه محل تقاطع درون مستطیل است

تست ۲۴: طول یک مستطیل ۵ برابر عرض آن است. نسبت محیط شکل حاصل ار برخورد نیمسازهای داخل این متسطیل به محیط مستطیل کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ ۲) $۳\sqrt{۲}$

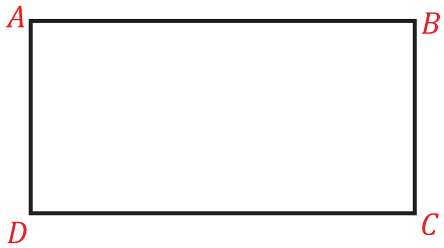
۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

حل : می‌دانیم شکل حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی مستطیل، مربع است و اندازه ضلع آن برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(b-a)$ است.

$$\frac{\text{محیط مربع}}{\text{محیط مستطیل}} = \frac{۴\left(\text{ضلع مربع}\right)}{۲\left(\text{عرض} + \text{طول}\right)} = \frac{۴\times(b-a)\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲(a+b)} = \frac{۴\times(۵a-a)\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۲(a+۵a)} = \frac{۴\sqrt{۲}a}{۶a} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

گزینه ۴

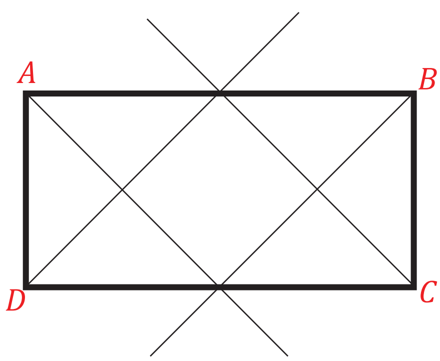
تست ۲۵: در مستطیل زیر رابطه $AB = ۲BC = ۶$ برقرار است. مساحت چهارضلعی حاصل از برخورد نیمسازهای داخل مستطیل چند درصد مساحت مستطیل را اشغال کرده محل تقاطع نیمسازها کدام است؟



۱) ۵۰ – دورن مستطیل ۲) ۲۵ – ضلع مستطیل

۳) ۲۰ – ضلع مستطیل ۴) ۲۰ – بیرون مستطیل

حل : می‌دانیم شکل حاصل از برخورد نیمسازهای داخلی مستطیل، مربع و اندازه ضلع آن برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}(b-a)$ است. واگر طول مستطیل، ۲ برابر عرض آن باشد محل تقاطع نیمسازها روی ضلع مستطیل خواهد بود.



$$AB = ۲BC = ۶ \Rightarrow AB = ۶\,, BC = ۳$$

$$\frac{\text{مساحت مربع}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{\left(\text{ضلع}\right)^۲}{\left(\text{عرض}\times\text{طول}\right)} = \frac{\left((b-a)\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲}{(b\times a)} = \frac{\left((۶-۳)\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲}{۶\times ۳} = \frac{۹\times\frac{۱}{۲}}{۱۸} = \frac{۱}{۴} = ٪۲۵$$

گزینه ۲

تست ۲۶: کدام گزینه یک مربع را مشخص می‌کند؟

۱) لوزی که یک قطرش با ضلعش برابر باشد.

۲) مستطیلی که قطرهایش بر هم عمود باشند.

۳) متوازی‌الاضلاعی که دوقطر مساوی داشته باشد.

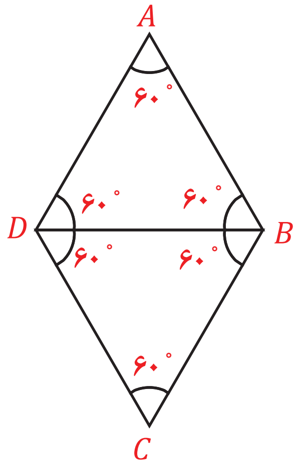
۴) ذوزنقه‌ای که دو زاویه قائمه داشته باشد.

پاسخ: گزینه ۲ : طبق تعریف، مربع، مستطیلی است که قطرهایش براهم عمودند. پس گزینه ۲ درست است.

تحلیل گزینه‌ها:

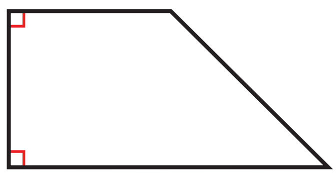
گزینه ۱ : برای این در لوزی یکی از قطرها با ضلع برابر باشد باید لوزی از دو مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده باشد . مطابق شکل زیر:

مطابق شکل قطر با اضلاع برابر است ولی زاویه ها، 120° و 60° هستند و قائمه نیستند پس مربع نیست.



گزینه ۳ : این شرط برای مستطیل است و مستطیل لزوماً مربع نیست.

گزینه ۴: شکل زیر را مشاهده کنید. این شکل نیز مربع نیست.



تست ۲۷: کدام گزینه همواره درست است؟ «آزمون ۲۱ بهمن ۱۴۰۰ قلم چی»

۱) اگر در یک چهارضلعی قطرها همدیگر را نصف کنند، چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

۲) اگر در یک چهارضلعی قطرها برابر باشند، چهارضلعی مستطیل است.

۳) اگر در یک چهارضلعی قطرها برهم عمود باشند، چهارضلعی مربع است.

۴) اگر در یک چهارضلعی اضلاع برابر باشند، چهارضلعی مربع است.

گزینه ۱ : درست است. از شرط‌های متوازی‌الاضلاع بودنِ چهارضلعی این است که قطرها همدیگر را نصف کنند

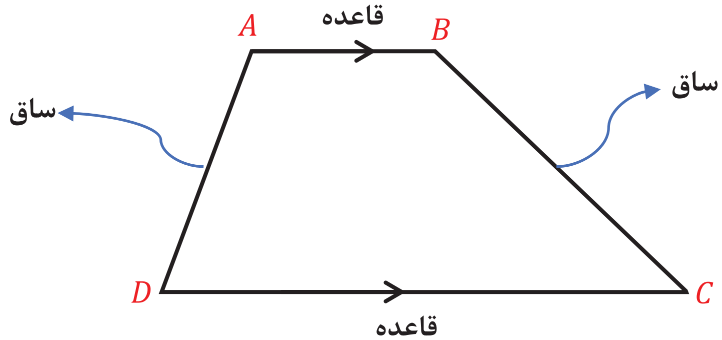
گزینه ۲ : لزوماً درست نیست. در ذوزنقه متساوی الساقین نیز قطرها باهم برابرند ولی ذوزنقه مستطیل نیست.

گزینه ۳ : لزوماً درست نیست چون در لوزی نیز قطرها برهم عمودند ولی لوزی مربع نیست.

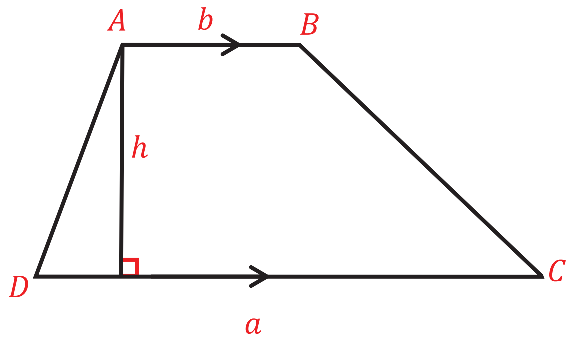
گزینه ۴: لزوماً درست نیست چون در لوزی نیز اضلاع باهم برابرند ولی لوزی مربع نیست.

ذوزنقه و ویژگی‌های آن

چهارضلعی که فقط دو ضلع آن موازی هستند



$$\widehat{A}+\widehat{D}=\widehat{B}+\widehat{C}=۱۸۰^{\circ}$$

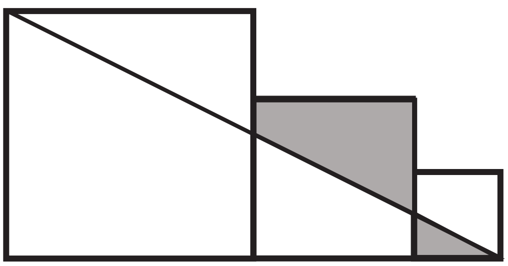


$$S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{(a+b)\times h}{۲}$$

تست ۲۸: در شکل زیر سه مربع به اضلاع ۴، ۲ و ۱ واحد در کنار یکدیگر قرار دارند. مساحت قسمت های رنگی کدام است؟

۱) ۲   ۲) ۳

۳) ۴   ۴) ۱



طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{۱+۲+۴}{۴}=\frac{۱+۲}{a}=\frac{۱}{b}\Rightarrow a=\frac{۱۲}{۷}\,,b=\frac{۴}{۷}$$

$$S_۲=S_{\text{مربع}}-S_۳=۴-\frac{\left(\frac{۱۲}{۷}+\frac{۴}{۷}\right)\times ۲}{۲}=۴-\frac{۱۶}{۷}=\frac{۱۲}{۷}$$

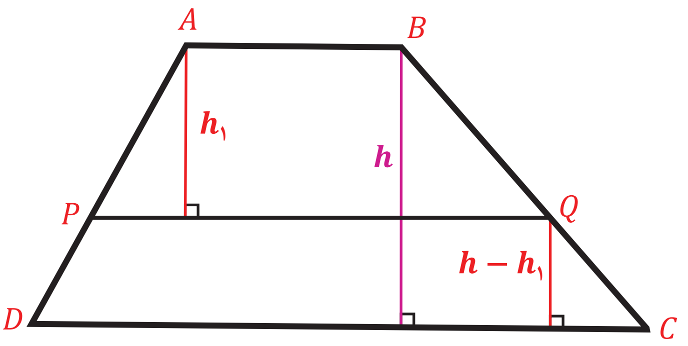
$$S_۱=\frac{\frac{۴}{۷}\times ۱}{۲}=\frac{۲}{۷}$$

$$\Rightarrow S_{\text{هاشور زده}}=S_۱+S_۲=\frac{۱۲}{۷}+\frac{۲}{۷}=\frac{۱۴}{۷}=۲$$ گزینه ۱

تست ۲۹: اندازه قاعده‌های ذوزنقه‌ای ۵ و ۹ واحد است، پاره خطی موازی قاعده‌های ذوزنقه چنان رسم می‌کنیم که ذوزنقه را به دو قسمت با مساحت مساوی تقسیم کنید اندازه پاره خط کدام است؟ «ریاضی داخل ۱۳۹۹»

۱) ۷　　　۲) $۴\sqrt{۳}$

۳) $\sqrt{۵۳}$　　　۴) $\sqrt{۵۷}$



«روش اول»

اگر ارتفاع ذوزنقه اصلی برابر h و ارتفاع ذوزنقه بالایی $h_۱$ باشد در این صورت ارتفاع ذورنقه پایینی $h-h_۱$ خواهد بود.

فرض کنیم $PQ = x$

$$S_{PQDC} = \frac{(x+۹)\times(h-h_۱)}{۲} \qquad S_{ABPQ} = \frac{(5+x)\times h_1}{2}$$

حال طبق فرض داریم:

$$S_{ABPQ} = S_{PQDC} \Rightarrow \frac{(۵+x)\times h_۱}{۲} = \frac{(x+۹)\times(h-h_۱)}{۲} \Rightarrow \frac{h-h_۱}{h_۱} = \frac{۵+x}{x+۹} \Rightarrow \frac{h}{h_۱} - ۱ = \frac{۵+x}{x+۹}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{h}{h_۱} = \frac{۲x+۱۴}{x+۹}}$$

$$S_{ABCD} = ۲S_{ABPQ} \Rightarrow \frac{(۵+۹)\times h}{۲} = ۲\times\frac{(x+۵)\times h_۱}{۲} \Rightarrow ۷h = (x+۵)h_۱ \quad \boxed{\Rightarrow \frac{h}{h_۱} = \frac{x+۵}{۷}}$$

$$\Rightarrow \frac{x+۵}{۷} = \frac{۲x+۱۴}{x+۹} \Rightarrow x^۲ + ۱۴x + ۴۵ = ۱۴x + ۹۸ \Rightarrow x^۲ = ۵۳ \Rightarrow x = \sqrt{۵۳}$$

گزینه ۳

«روش دوم»

نکته: اندازه پاره خطی که موازی دو قاعده‌ی یک ذوزنقه با قاعده‌های a و b رسم می‌شود و دو ذوزنقه هم مساحت ایجاد می‌کند (مساحت ذوزنقه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند) برابر است با :

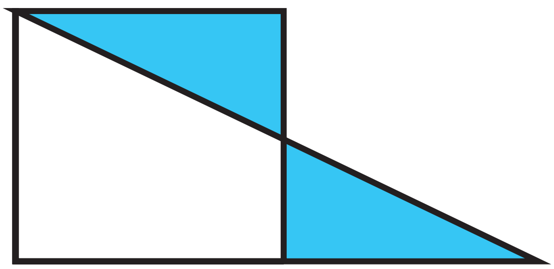
$$\boxed{\Rightarrow x = \sqrt{\frac{a^۲+b^۲}{۲}}}$$

حال با توجه به این نکته داریم:

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{۵^۲+۹^۲}{۲}} = \sqrt{\frac{۱۰۶}{۲}} = \sqrt{۵۳}$$

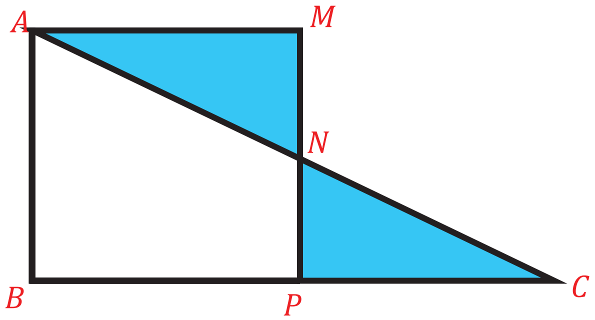
گزینه ۳

تست ۳۰: در مثلث قائم الزاویه ABC بر روی ضلع AB مربعی ساخته شده است. اگر دو مثلث رنگ شده هم نهشت باشند مساحت ذوزنقه چند برابر مساحت مربع است؟ «تجربی داخل ۱۳۹۲»



۱) $\frac{۵}{۹}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$

۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$



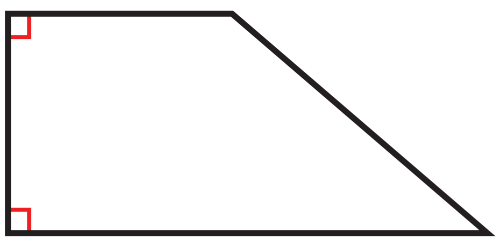
چون دو مثلث و هم‌نهشت هستند داریم: $MN = NP = \frac{MP}{۲} = \frac{AB}{۲}$

$$\frac{S_{\text{ذوزنقه}}}{S_{\text{مربع}}} = \frac{\frac{(NP+AB)\times BP}{۲}}{(AB)^۲} = \frac{\frac{\frac{۳}{۲}AB}{۲}}{AB} = \frac{۳}{۴}$$

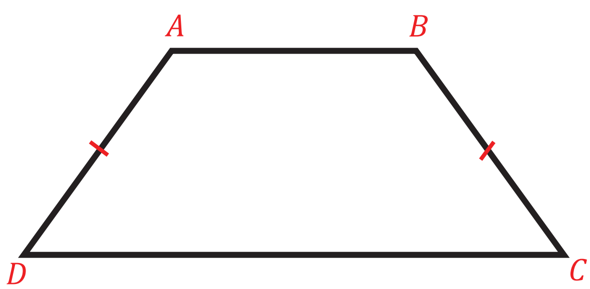
گزینه ۳

ذوزنقه قائم الزاویه و ذوزنقه متساوی الساقین

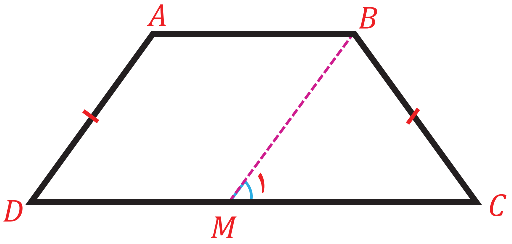
اگر یک ساق ذوزنقه بر دو قاعده‌ی آن عمود باشند آن را ذوزنقه قائم‌الزاویه می‌گوییم.



اگر ساق‌های یک ذوزنقه برابر باشند آن را ذوزنقه متساوی‌الساقین می‌گوییم.



سوال ۲۳ :قضیه: در ذوزنقه متساوی‌الساقین زاویه های مجاور به یک قاعده هم اندازه‌اند.



اثبات: از رأس B خطی موازی ساق رسم می‌کنیم تا ضلع را در نقطه قطع کند.

در این صورت چهارضلعی $ABMD$ متوازی‌الاضلاع خواهد بود.

$$AD = BM\ , AD = BC\ \Rightarrow BM = BC$$

پس مثلث ΔBMC ،متساوی‌الساقین است در نتیجه $\widehat{M}_1 = \widehat{C}$

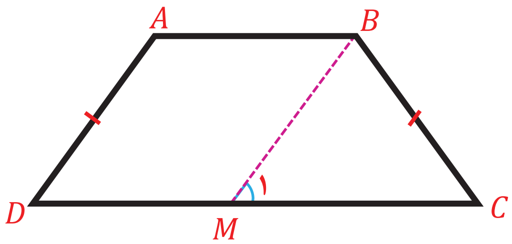
حال طبق قضیه خطوط موازی و مورب داریم:

$$AD \parallel BM\ , DM\ \text{مورب}\ \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{M}_1$$

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{D} = \widehat{M}_1\\ \widehat{M}_1 = \widehat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{D} = \widehat{C}$$

توجه : توجه داشته باشیم که چون $\widehat{D} = \widehat{C}$ پس $\widehat{A} = \widehat{B}$ (چون این دو زاویه مکمل زاویه های $\widehat{C}$ و $\widehat{D}$ هستند)

سوال ۲۴ :قضیه: اگر در یک ذوزنقه زاویه های مجاور به یک قاعده باهم برابر باشند، ذوزنقه متساوی‌الساقین است.



اثبات: از رأس B خطی موازی ساق رسم می‌کنیم تا ضلع را در نقطه M قطع کند. در این صورت چهارضلعی $ABMD$ متوازی‌الاضلاع خواهد بود.

$$AD = BM\ , AD = BC\ \Rightarrow BM = BC$$

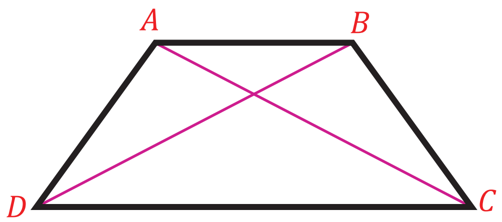
حال طبق قضیه خطوط موازی و مورب داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{D} = \widehat{M}_1\\ \widehat{D} = \widehat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{C}$$

پس مثلث ΔBMC ،متساوی‌الساقین است پس $BM = BC$ درنتیجه $AD = BM = BC$

سوال ۲۵ :قضیه: در ذوزنقه متساوی‌الساقین، قطرها باهم برابرند.

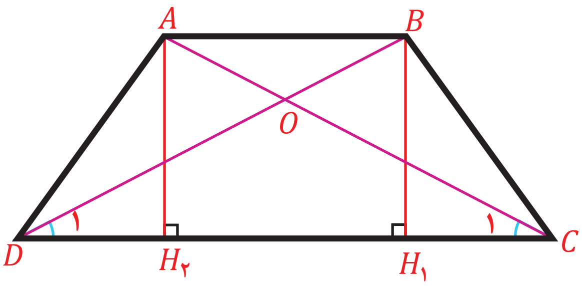
اثبات: در ذوزنقه مقابل مثلث‌های ΔABC و ΔABD را در نظر بگیرید.



$$\left.\begin{array}{l}AD = BC\\ \widehat{A} = \widehat{B}\\ AB = AB\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta ABC \cong \Delta ABD \Rightarrow AC = BD$$

سوال ۲۶ :قضیه: ذوزنقه‌ای که قطرهایش برابرند، متساوی‌الساقین است.

اثبات: در ذوزنقه مقابل مثلث‌های ABC و ABD را در نظر بگیرید.

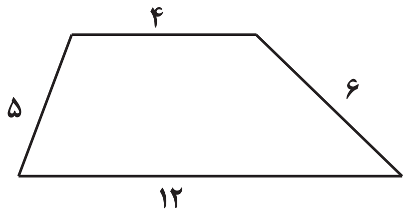


$$\left.\begin{array}{l} AH_۱ = BH_۲ \\ AD = BC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{و ض}} \Delta AH_۱C \cong \Delta BH_۲D \Rightarrow \widehat{D}_۱ = \widehat{C}_۱$$

$$\left.\begin{array}{l} AC = BD \\ \widehat{D}_۱ = \widehat{C}_۱ \\ DC = DC \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta ACD \cong \Delta BCD \Rightarrow AD = BC$$

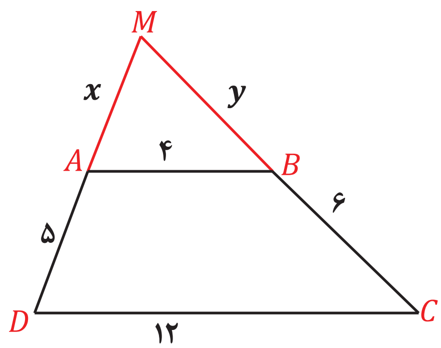
در نتیجه ذوزنقه $ABCD$، متساوی الساقین است.

تست ۳۱: در ذوزنقه زیر، امتداد ساق‌ها همدیگر را در نقطه M قطع کرده‌اند محیط مثلث ΔABM کدام است؟



۱) ۱۱/۸ ۲) ۸/۸

۳) ۱۰ ۴) ۱۲/۸



حل: با توجه به قضیه تالس در مثلث داریم:

$$\frac{۴}{۹} = \frac{x}{۵ + x} = \frac{y}{۶ + y} \Rightarrow x = ۴ \,, y = ۴/۸ \qquad \text{محیط}_{\Delta} = ۴ + ۴ + ۴/۸ = ۱۲/۸$$

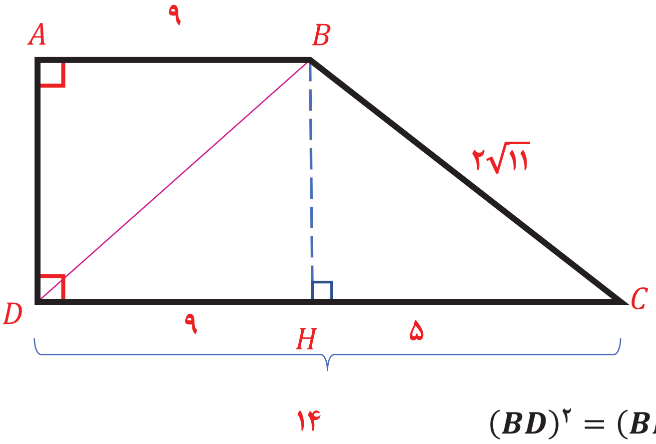
گزینه ۴

تست ۳۲: در یک ذوزنقه قائم‌الزاویه، اندازه قاعده‌ها، ۱۴ و ۹ و اندازه ساق مایل $۲\sqrt{۱۱}$ واحد است. اندازه قطر کوچک ذوزنقه، کدام است؟

«ریاضی خارج ۱۳۹۶»

۱) ۱۱ ۲) ۸

۳) $۷\sqrt{۲}$ ۴) ۱۰



حل: با توجه به اندازه‌های داده شده و رسم ارتفاع ذوزنقه داریم:

$$(BH)^۲ = (BC)^۲ - (CH)^۲ = ۴۴ - ۲۵ = ۱۹$$

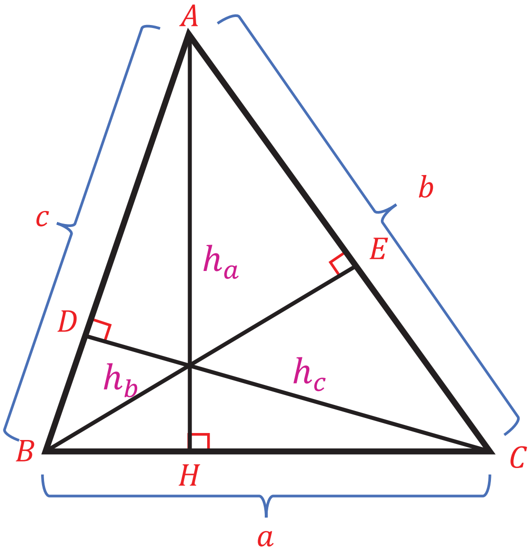
هم چنین در مثلث قائم الزاویه ΔBHD داریم :

$$(BD)^۲ = (BH)^۲ + (DH)^۲ = ۱۹ + ۸۱ = ۱۰۰ \Rightarrow BD = ۱۰$$

گزینه ۴

مساحت و کاربردهای آن

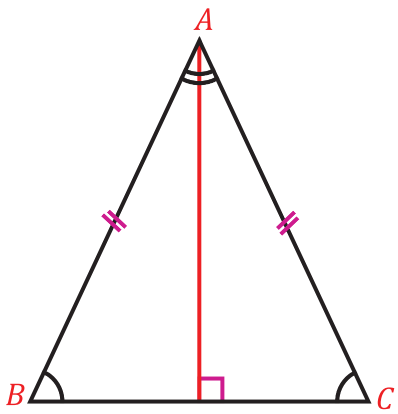
مساحت مثلث:



$$۲S_{\Delta} = ah_a = bh_b = ch_c$$

$$\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$$

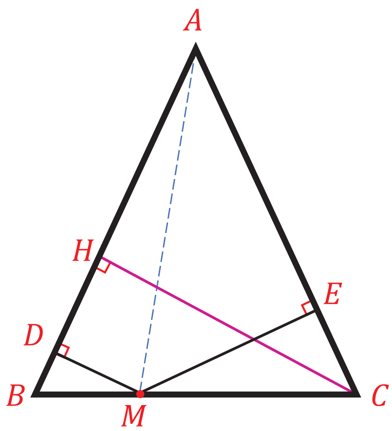
روابط در مثلث متساوی الساقین



$$AB = AC \qquad \widehat{B} = \widehat{C}$$

ارتفاع وارد بر قاعده، نیمساز، میانه و عمود منصف قاعده نیز می‌باشد.

سوال ۲۷ : نشان دهید مجموع فواصل هر نقطه روی قاعده مثلث متساوی‌الساقین از ساق‌ها، برابر مقدار ثابتی است و آن مقدار ثابت را به دست آورید.



حل:

$$S_{\Delta} = \frac{۱}{۲} CH \times AB$$

$$S_{\Delta} = S_{AMB} + S_{AMC} = \frac{۱}{۲} AB \times MD + \frac{۱}{۲} ME \times AC$$

$$\xRightarrow{AB=AC} S_{\Delta} = \frac{۱}{۲} AB(MD + ME)$$

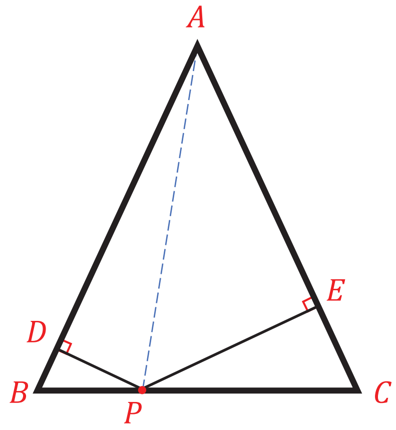
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} CH \times AB = \frac{۱}{۲} AB(MD + ME) \Rightarrow CH = MD + ME$$

یعنی مجموع فواصل هر نقطه روی قاعده مثلث متساوی الساقین از ساق‌ها برابر ارتفاع وارد بر ساق است.

تست ۳۳: در شکل زیر اگر $AB = AC = ۵$، $S_{ABC} = ۱۰$ و $S_{APC} - S_{APB} = ۲$ باشد آنگاه S_{APC} کدام است؟

۱) ۶　　۲) ۱۴

۳) ۷　　۴) ۱۲



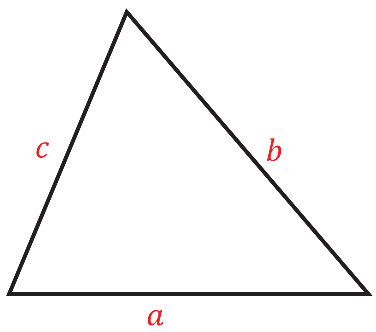
$$S_{ABC} = S_{APB} + S_{APC} = \frac{۱}{۲}AB \times PD + \frac{۱}{۲}PE \times AC = \frac{۱}{۲}AB(PD + PE) = ۱۰ \xrightarrow{AB=۵} PD + PE = ۴$$

$$S_{APC} - S_{APB} = \frac{۱}{۲}AC \times PD - \frac{۱}{۲}PE \times AB = \frac{۱}{۲}AB(PE - PD) = ۴ \xrightarrow{AB=۵} PE - PD = \frac{۸}{۵}$$

$$\begin{cases} PD + PE = ۴ \\ PE - PD = \frac{۸}{۵} \end{cases}$$

$$۲PE = ۴ + \frac{۸}{۵} \Rightarrow PE = \frac{۱۴}{۵} \Rightarrow S_{APC} = \frac{۱}{۲}PE \times AC = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱۴}{۵} \times ۵ = ۷$$ گزینه ۳

رابطه هرون(مساحت مثلث با داشتن اندازه اضلاع آن):



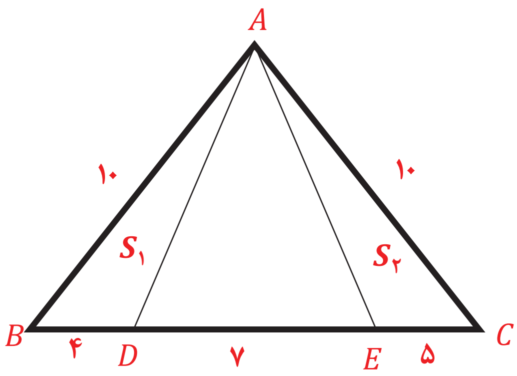
$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

$$P = \frac{\text{محیط مثلث}}{۲}$$

تست ۳۴: در شکل زیر $S_۱ + S_۲$ کدام است؟　«قلم چی ۱۳۹۷»

۱) ۲۷　　۲) ۳۳

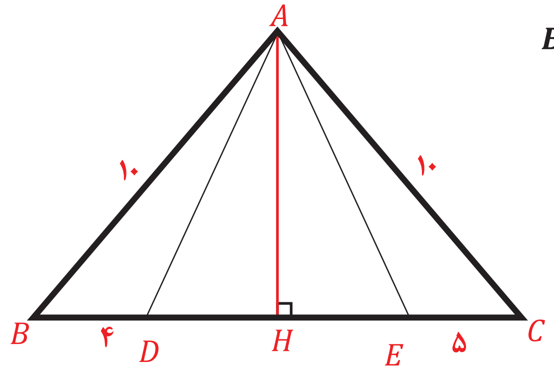
۳) ۳۰　　۴) ۳۶



$$P = \frac{\text{محیط } \Delta ABC}{۲} = \frac{۱۰ + ۱۰ + ۱۶}{۲} = \frac{۳۶}{۲} = ۱۸$$

$$S_{ABC} = \sqrt{۱۸(۱۸-۱۶)(۱۸-۱۰)(۱۸-۱۰)} = ۴۸$$

ارتفاع AH را رسم می‌کنیم، می‌دانیم در مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، میانه نیز می‌باشد.



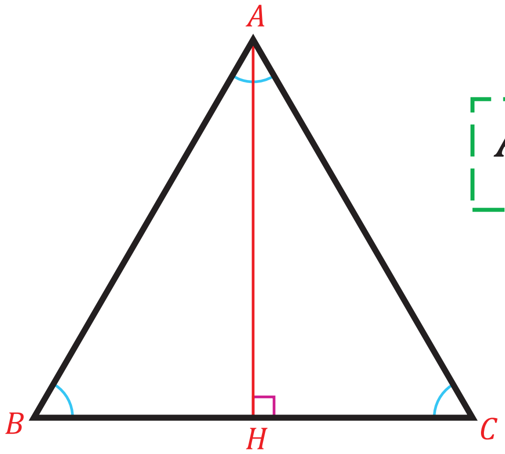
$$BH = CH = ۸$$

$$AH = \frac{S_{ABC}}{\frac{۱}{۲}BC} = \frac{۴۸}{۸} = ۶$$

$$S_{ADE} = \frac{۱}{۲}AH \times DE = \frac{۱}{۲} \times ۶ \times ۷ = ۲۱$$

$$S_۱ + S_۲ = S_{ABC} - S_{ADE} = ۴۸ - ۲۱ = ۲۷$$

روابط در مثلث متساوی الاضلاع



$$AB = AC = BC = a$$

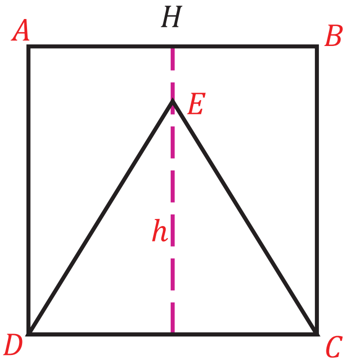
$$\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ$$

$$h = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

$$S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

ارتفاع وارد بر هر یک از اضلاع ، نیمساز، میانه و عمود منصف قاعده نیز می‌باشد.

تست ۳۵: در شکل زیر $ABCD$ مربعی به ضلع a و DCE مثلث متساوی الاضلاع است فاصله E تا AB چقدر است؟



«تجربی داخل ۱۳۹۴»

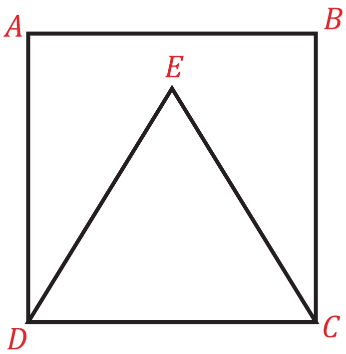
۱) $a\left(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$ ۲) $a\left(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$

۳) $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ ۴) $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$

حل: با توجه به شکل اگر ارتفاع مثلث را از طول ضلع مربع کم کنیم فاصله از به دست می‌آید.

$$EH = AD - h = a - \frac{\sqrt{۳}}{۲}a = a\left(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$$ گزینه ۱

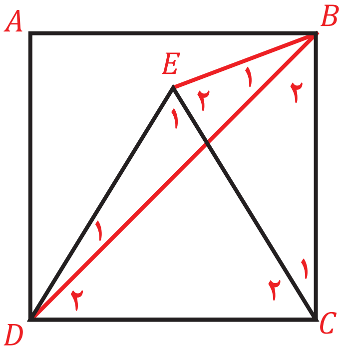
تست ۳۶: در شکل زیر $ABCD$ مربع و DCE مثلث متساوی الاضلاع است. نسبت بزرگترین زاویه به کوچکترین زاویه در مثلثی که یک ضلع آن قطر مربع و یک ضلع آن ضلع مثلث ΔEDC می‌باشد،چقدر است؟



۱) ۲ ۲) $\frac{۸}{۳}$

۲) $\frac{۷}{۳}$ ۴) ۹

حل: با استفاده از اطلاعات داده شده مثلث را رسم می‌کنیم.



چون در مربع قطرها نیمساز زاویه ها هستند پس: $\widehat{B}_۲ = \widehat{D}_۲ = ۴۵^\circ$

از طرفی:

$$\widehat{C} = \widehat{C}_۱ + \widehat{C}_۲ = \widehat{C}_۱ + ۶۰^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \widehat{C}_۱ = ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \Delta BCE: \widehat{B}_۱ + B_۲ + \widehat{E}_۲ = ۱۵۰^\circ$$

چون مثلث BCE متساوی الساقین است پس: $\widehat{E}_۲ = \widehat{B}_۱ + \widehat{B}_۲$ پس:

$$\left.\begin{matrix} \widehat{B}_۱ + \widehat{B}_۲ + \widehat{E}_۲ = ۱۵۰^\circ \\ \widehat{B}_۱ + \widehat{B}_۲ = \widehat{E}_۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \widehat{B}_۱ + \widehat{B}_۲ = \widehat{E}_۲ = ۷۵^\circ \\ \widehat{B}_۲ = ۴۵^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \widehat{B}_۱ = ۳۰^\circ$$

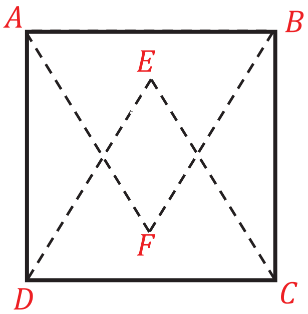
$$\widehat{E} = \widehat{E}_۱ + \widehat{E}_۲ = ۶۰^\circ + ۷۵^\circ = ۱۳۵^\circ$$

$$\Delta BCE: \ \widehat{E} + \widehat{B}_۱ + \widehat{D}_۱ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\widehat{B}_۱ = ۳۰^\circ ,\, \widehat{E} = ۱۳۵^\circ} \widehat{D}_۱ = ۱۵^\circ$$

حال نسبت بزرگترین زاویه به کوچکترین زاویه در مثلث برابر است با : $\frac{۱۳۵^\circ}{۱۵^\circ} = ۹$ گزینه ۲

تست ۳۷: در شکل زیر روی دوضلع مقابل مربع، مثلث‌های متساوی الاضلاع ساخته شده است. قطر بزرگ‌تر لوزی حاصل چند برابر ضلع مربع اصلی است؟

«ریاضی خارج ۱۳۹۶»



۱) $۲-\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

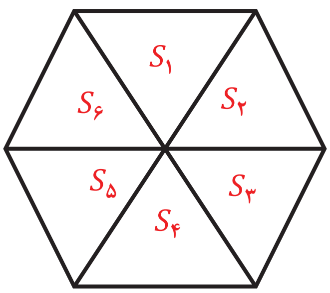
۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\sqrt{۳}-۱$

حل: با توجه به تست ۳۵ فاصله نقاط E و F از اضلاع AB و DC برابر $a\left(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)$ است پس:

$$EF = a - \left(a\left(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) + a\left(۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)\right) = a - a(۲-\sqrt{۳}) = a(\sqrt{۳}-۱) \Rightarrow \frac{a(\sqrt{۳}-۱)}{a} = \sqrt{۳}-۱$$

گزینه ۴

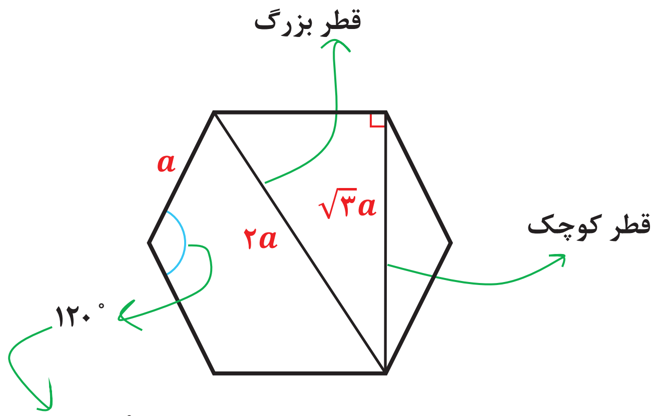
روابط در شش ضلعی منتظم



۶تا مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a

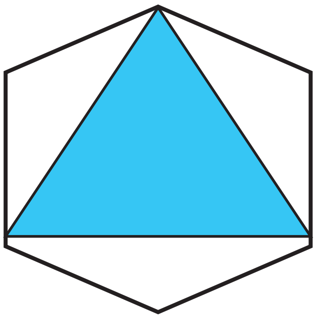
$$S_{کل} = ۶\left(\frac{\sqrt{۳}a^۲}{۴}\right)$$

$$S_۱ = S_۲ = S_۳ = S_۴ = S_۵ = S_۶ = \frac{۱}{۶}S_{کل}$$



اندازه همه زاویه های ۶ضلعی منتظم ۱۲۰° است

تست ۳۸: اگر در ۶ضلعی منتظم زیر ، طول ضلع ۴ واحد باشد مساحت قسمت رنگی چقدر است؟



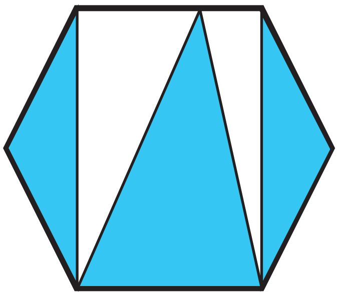
۱) $۱۲\sqrt{۳}$ ۲) $۱۲\sqrt{۲}$

۳) $۱۶\sqrt{۳}$ ۴) $۱۶\sqrt{۲}$

حل: با توجه به شکل اندازه اضلاع مثلث برابر اندازه قطر کوچک شش ضلعی می‌باشد، پس مثلث، متساوی الاضلاع با ضلع $\sqrt{۳}a = ۴\sqrt{۳}$ است.

$$S_{\text{مثلث}} = \left(\frac{\sqrt{۳}a^{۲}}{۴}\right) = \left(\frac{\sqrt{۳}\left(۴\sqrt{۳}\right)^{۲}}{۴}\right) = ۱۲\sqrt{۳}$$ گزینه ۱

تست ۳۹: اگر در ۶ضلعی منتظم زیر ، اگر مساحت قسمت رنگی برابر $۴\sqrt{۳}$ باشد مساحت قسمت سفید رنگ چقدر است؟



۱) $۲\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۳}$

حل: با توجه به شکل مساحت قسمت رنگی برابر است با مساحت دو مثلث با قاعده $\sqrt{۳}a$ و ارتفاع $\frac{a}{۲}$ و یک مثلث به ارتفاع $\sqrt{۳}a$ و قاعده a .

$$S_{\text{رنگی}} = ۲\left(\frac{۱}{۲}\times\frac{a}{۲}\times\sqrt{۳}a\right) + \left(\frac{۱}{۲}\times\frac{a}{۲}\times\sqrt{۳}a\right) = ۲\left(\frac{\sqrt{۳}a^{۲}}{۲}\right) = a^{۲}\sqrt{۳} = ۴\sqrt{۳} \Rightarrow a^{۲} = ۴$$

$$S_{\text{سفید}} = S_{\text{کل}} - S_{\text{رنگی}} = ۶\left(\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}\right) - ۴\sqrt{۳} = ۶\sqrt{۳} - ۴\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}$$ گزینه ۱

تست ۴۰: محیط یک ۶ضلعی منتظم و یک مثلث متساوی‌الاضلاع باهم برابرند اگر مساحت مثلث برابر ۲ باشد آنگاه مساحت ۶ضلعی منتظم کدام است؟

۱) ۱۲   ۲) ۳

۳) ۴   ۴) ۶

حل: فرض کنیم طول ضلع مثلث برابر a و طول ضلع شش ضلعی برابر b باشد :

$$۳a = ۶b \Rightarrow a = ۲b \xRightarrow{\text{توان ۲}} a^{۲} = ۴b^{۲}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{\sqrt{۳}a^{۲}}{۴} = ۲ \Rightarrow a^{۲} = \frac{۸}{\sqrt{۳}}$$

$$S_{\text{شش ضلعی}} = ۶\left(\frac{\sqrt{۳}b^{۲}}{۴}\right) = ۶\left(\frac{\sqrt{۳}\left(\frac{a^{۲}}{۴}\right)}{۴}\right) = ۶\left(\frac{\sqrt{۳}\left(\frac{\frac{۸}{\sqrt{۳}}}{۴}\right)}{۴}\right) = ۳$$ گزینه ۲

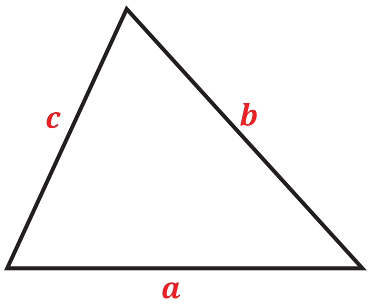
مساحت مثلث نا مشخص

نکته : در مثلث‌هایی که نوع آنها مشخص نیست و سوال در مورد ارتفاع است، معمولاً اطلاعاتی از مساحت نیز داده می‌شود یا ابتدا باید مساحت را به دست آورد.

سوال۲۸ : نشان دهید در هر مثلثی به ارتفاع‌های h_a ، h_b و h_c رابطه زیر برقرار است.

$$\boxed{\left|\frac{۱}{h_b}-\frac{۱}{h_c}\right| \le \frac{۱}{h_a} \le \frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}}$$

اثبات: می‌دانیم در هر مثلث رابطه زیر برقرار است :



$$|b-c| \le a \le b+c$$

همچنین در هر مثلث داریم:

$$a=\frac{۲S}{h_a} \qquad b=\frac{۲S}{h_b} \qquad c=\frac{۲S}{h_c}$$

$$\left|\frac{۲S}{h_b}-\frac{۲S}{h_c}\right| \le \frac{۲S}{h_a} \le \frac{۲S}{h_b}+\frac{۲S}{h_c} \xrightarrow{\div ۲S} \left|\frac{۱}{h_b}-\frac{۱}{h_c}\right| \le \frac{۱}{h_a} \le \frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}$$

نکته: در مثلث، کوچک‌ترین ارتفاع بر بزرگ‌ترین ضلع وارد می‌شود و بزرگ‌ترین ارتفاع بر کوچک‌ترین ضلع وارد می‌شود.

تست ۴۱: در مثلثی به ارتفاع‌های h_a ، h_b و h_c ، اگر $h_a=۳$ و $h_b=۶$ باشند، h_c چند مقدار صحیح می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۴   ۲) ۱

۳) ۵   ۴) ۶

گزینه ۳

$$\left|\frac{۱}{h_a}-\frac{۱}{h_b}\right| \le \frac{۱}{h_c} \le \frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b} \Rightarrow \left|\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۶}\right| \le \frac{۱}{h_c} \le \frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{۶} \le \frac{۱}{h_c} \le \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲ \le h_c \le ۶$$

تست ۴۲: در مثلثی به به طول اضلاع $a=۴$ ، $b=۶$ و $c=۸$ ، حاصل $\left(\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}\right)\left(\frac{h_a}{h_c}\right)$ کدام است؟

۱) $\frac{۶}{۱۷}$ ۲) $\frac{۱۷}{۳}$

۳) $\frac{۱۷}{۶}$ ۴) $\frac{۳}{۱۷}$

$$h_a=\frac{۲S}{a}=\frac{S}{۲} \qquad h_b=\frac{۲S}{b}=\frac{S}{۳} \qquad h_c=\frac{۲S}{c}=\frac{S}{۴}$$

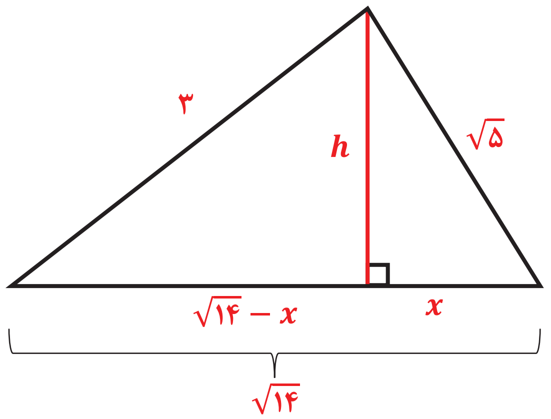
گزینه ۲

$$\left(\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}\right)\left(\frac{h_a}{h_c}\right)=\left(\frac{\frac{S}{۲}}{\frac{S}{۳}}+\frac{\frac{S}{۳}}{\frac{S}{۴}}\right)\left(\frac{\frac{S}{۲}}{\frac{S}{۴}}\right)=\left(\frac{۳}{۲}+\frac{۴}{۳}\right)\left(\frac{۴}{۲}\right)=\frac{۱۷}{۶}\times ۲=\frac{۱۷}{۳}$$

تست ۴۳: در مثلثی به طول اضلاع $\sqrt{۵}$ ، ۳ و $\sqrt{۱۴}$ طول کوچک‌ترین ارتفاع کدام است؟ «قلم چی ۷ فروردین ۱۴۰۱»

۱) $\frac{\sqrt{۷۰}}{۲۸}$ ۲) $\sqrt{۵}$

۳) $\frac{۳\sqrt{۷۰}}{۱۴}$ ۴) ۲



«روش اول»

حل: با توجه به شکل و با استفاده از قضیه فیثاغورس داریم:

$$h^۲ = \left(\sqrt{۵}\right)^۲ - x^۲ = ۵ - x^۲$$

$$h^۲ = ۹ - \left(\sqrt{۱۴} - x\right)^۲ = ۹ - \left(۱۴ - ۲\sqrt{۱۴}x + x^۲\right) = -۵ + ۲\sqrt{۱۴}x - x^۲$$

$$\Rightarrow -۵ + ۲\sqrt{۱۴}x - x^۲ = ۵ - x^۲ \Rightarrow ۲\sqrt{۱۴}x = ۱۰ \Rightarrow x = \frac{۵}{\sqrt{۱۴}} \Rightarrow h^۲ = ۵ - x^۲ = ۵ - \frac{۲۵}{۱۴} = \frac{۴۵}{۱۴}$$

$$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{۴۵}}{\sqrt{۱۴}} = \frac{\sqrt{۴۵ \times ۱۴}}{۱۴} = \frac{۳\sqrt{۷۰}}{۱۴}$$ گزینه ۳

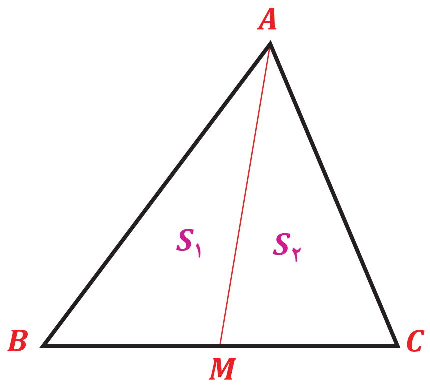
«روش دوم»

با توجه به اندازه های داده شده مشخص می‌شود که مثلث قائم الزاویه است: $\left(\sqrt{۱۴}\right)^۲ = \left(\sqrt{۵}\right)^۲ + ۳^۲$

$$h = \frac{ab}{c} = \frac{۳ \times \sqrt{۵}}{\sqrt{۱۴}} = \frac{۳\sqrt{۷۰}}{۱۴}$$

میانه در مثلث

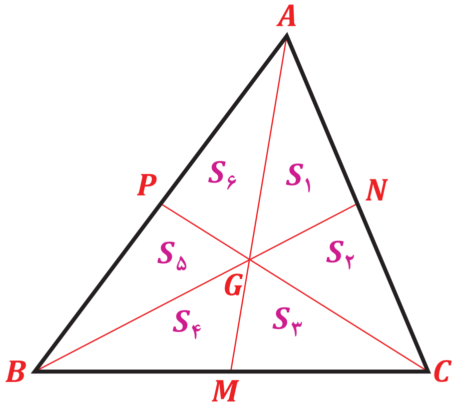
با توجه به اندازه های داده شده مشخص می‌شود که مثلث قائم الزاویه است:



$$AM \text{ میانه } \Rightarrow BM = MC \Rightarrow S_۱ = S_۲$$

$$AM \text{ میانه } \Rightarrow \left|\frac{AB - AC}{۲}\right| \le AM \le \frac{AB + AC}{۲}$$

نکته: میانه های مثلث در یک نقطه درون آن همرسند و این نقطه مثل ثقل مثلث است که با G نشان می‌دهند.



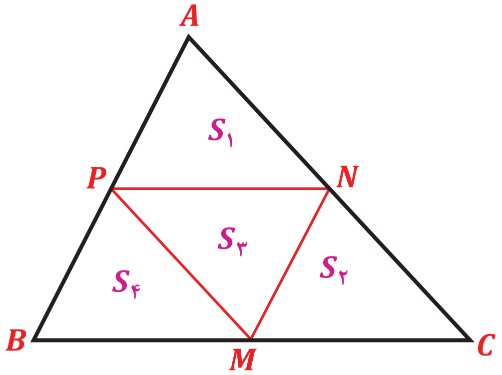
$$S_۱ = S_۲ = S_۳ = S_۴ = S_۵ = S_۶ = \frac{۱}{۶} S_{\text{کل}}$$

$$\boxed{\frac{GM}{AG} = \frac{GN}{BG} = \frac{GP}{CG} = \frac{۱}{۲}}$$

نکته: برای میانه های مثلث می‌توان نوشت.

$$\frac{۳}{۴}(\text{محیط}) \le AM + BM + CM \le \text{محیط}$$

سوال۲۹ : نشان دهید در هر مثلثی اگر وسط اضلاع را به هم وصل کنیم چهار مثلث با مساحت های برابر پدید می‌آید.



$$S_۱ = S_۲ = S_۳ = S_۴ = \frac{۱}{۴} S_{\text{کل}}$$

اثبات: با استفاده از قضیه خطوط موازی و مورب و قضیه تالس می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AN}{NC} = ۱ \Rightarrow PN \parallel BC \\ \dfrac{BP}{PA} = \dfrac{BM}{MC} = ۱ \Rightarrow PM \parallel AC \end{array}\right\} \Rightarrow PNCM \ \text{متوازی الاضلاع} \Rightarrow PN = MC \,, PM = NC$$

$$\Rightarrow PN = MC = BM \,, PM = NC = AN$$

به روش مشابه نیز ثابت می‌شود چهارضلعی های $ANMP$ و $PNMB$ متوازی الاضلاع هستند.

در متوازی الاضلاع $ANMP$ قطر PN این متوازی‌الاضلاع را به دو قسمت هم نهشت تقسیم کرده است پس مساحت دو شکل باهم برابر است یعنی: $S_۱ = S_۳$

در متوازی الاضلاع $PNCM$ قطر NM این متوازی‌الاضلاع را به دو قسمت هم نهشت تقسیم کرده است پس مساحت دو شکل باهم برابر است یعنی: $S_۲ = S_۳$

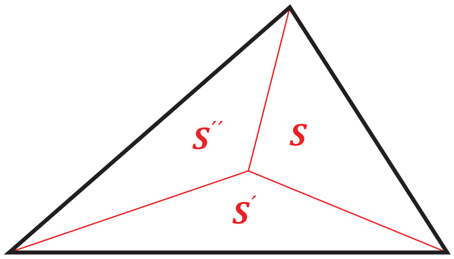
در متوازی الاضلاع $PNMB$ قطر PM این متوازی‌الاضلاع را به دو قسمت هم نهشت تقسیم کرده است پس مساحت دو شکل باهم برابر است یعنی: $S_۴ = S_۳$

پس مساحت چهار شکل برابر است : $S_۱ = S_۲ = S_۳ = S_۴$

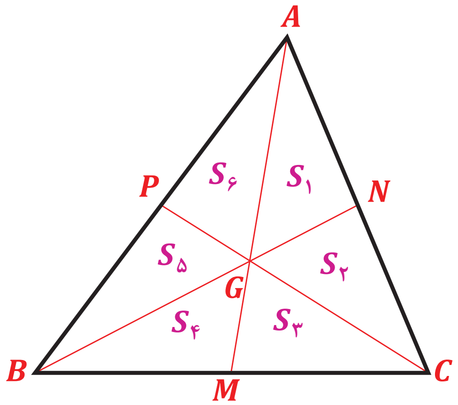
از طرفی :

$$S_{\text{کل}} = S_۱ + S_۲ + S_۳ + S_۴ \xRightarrow{S_۱=S_۲=S_۳=S_۴} \frac{۱}{۴} S_{\text{کل}} = S_۱ = S_۲ = S_۳ = S_۴$$

سوال۳۰ : نشان دهید از از محل تقاطع میانه‌های مثلث به رأس های آن وصل کنیم سه مثلث با مساحت های برابر پدید می‌آید.



اثبات:



$$\Delta GAC:\ GN \text{ میانه } \Longrightarrow AN = NC \Longrightarrow S_۱ = S_۲$$

$$\Delta GBC:\ GM \text{ میانه } \Longrightarrow BM = MC \Longrightarrow S_۳ = S_۴$$

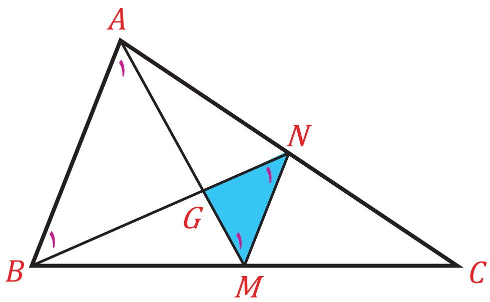
$$\Delta GAB:\ GP \text{ میانه } \Longrightarrow AP = PB \Longrightarrow S_۵ = S_۶$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ABC:\ AM \text{ میانه } \Longrightarrow BM = MC \Longrightarrow S_۱ + S_۲ + S_۳ = S_۴ + S_۵ + S_۶ \Longrightarrow ۲S_۱ = ۲S_۵\\ \Delta ABC:\ BN \text{ میانه } \Longrightarrow AN = NC \Longrightarrow S_۲ + S_۳ + S_۴ = S_۵ + S_۶ + S_۱ \Longrightarrow ۲S_۳ = ۲S_۵\end{array}\right\} \Longrightarrow ۲S_۱ = ۲S_۳$$

با توجه به شکل ها داریم :

$$\left.\begin{array}{l}S = S_۱ + S_۲ = ۲S_۱\\ S' = S_۳ + S_۴ = ۲S_۳\\ S'' = S_۵ + S_۶ = ۲S_۵\end{array}\right\} \xrightarrow{۲S_۱=۲S_۳=۲S_۵} S = S' = S''$$

تست ۴۴: در شکل زیر AM و BN میانه هستند مساحت قسمت سایه خورده چه کسری از مساحت مثلث ΔABC است؟



۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۹}$

۳) $\frac{۱}{۱۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

«روش اول»

$$\frac{CN}{NA} = \frac{CM}{MB} = ۱ \Longrightarrow NM \parallel AB \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}AM \text{ مورب } \Longrightarrow \hat{A}_۱ = \hat{M}_۱\\ BN \text{ مورب } \Longrightarrow \hat{B}_۱ = \hat{N}_۱\end{array}\right. \Longrightarrow \Delta AGB \sim \Delta NGM \Longrightarrow \frac{S_{NGM}}{S_{AGB}} = \left(\frac{x}{۲x}\right)^۲ = \frac{۱}{۴}$$

از طرفی می‌دانیم $\frac{S_{AGB}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۳}$ بنابراین:

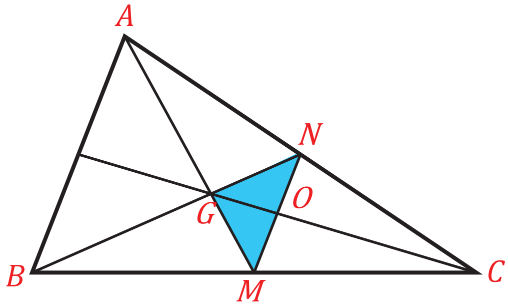
$$\Longrightarrow \frac{S_{NGM}}{S_{AGB}} = \frac{۱}{۴} \xrightarrow{\frac{S_{AGB}}{S_{ABC}}=\frac{۱}{۳}} \frac{S_{NGM}}{\frac{۱}{۳}S_{ABC}} = \frac{۱}{۴} \Longrightarrow \frac{S_{NGM}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۱۲}$$

گزینه ۳

«روش دوم»

می‌دانیم اگر وسط اضلاع مثلث را به هم وصل کنیم نسبت مساحت مثلث‌های ایجاد شده به مساحت مثلث اصلی برابر $\frac{۱}{۴}$ است

یعنی $S_{NMC}=\frac{۱}{۴}S_{ABC}$



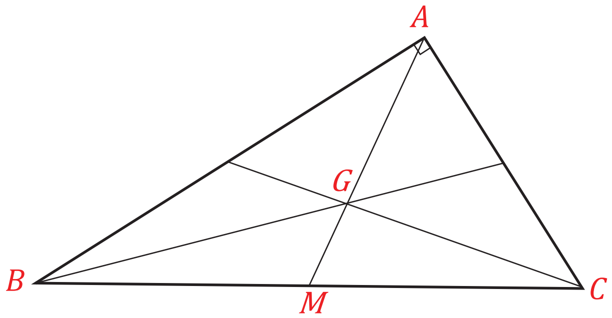
$$S_{NGM}=S_{NGC}+S_{GMC}-S_{NMC}=\frac{S_{ABC}}{۶}+\frac{S_{ABC}}{۶}-\frac{S_{ABC}}{۴}=\frac{S_{ABC}}{۱۲}\Rightarrow S_{NGM}=\frac{S_{ABC}}{۱۲}$$ گزینه ۳

نکته: رابطه بین اضلاع و میانه ها به شکل زیر است:

$$\boxed{۲{m_a}^۲=b^۲+c^۲-\frac{a^۲}{۲}}$$

تست ۴۵: در مثلث قائم الزاویه با اضلاع قائمه $۳\sqrt{۵}$ و $۴\sqrt{۵}$ فاصله نقطه همرسی میانه‌ها از وسط وتر چند برابر $\sqrt{۵}$است؟

«گزینه دو ۷ فروردین ۱۴۰۱ »



۱) $\frac{۴}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۶}$

۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

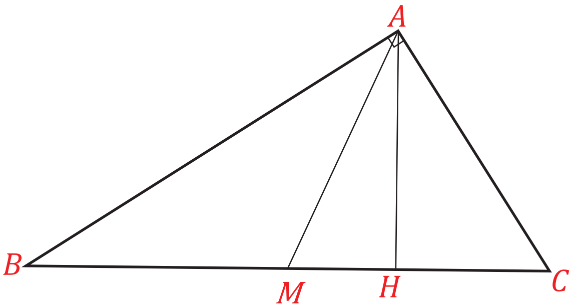
$$a^۲=b^۲+c^۲=(۳\sqrt{۵})^۲+(۴\sqrt{۵})^۲\Rightarrow a=۵\sqrt{۵}$$

$$۲{m_a}^۲=b^۲+c^۲-\frac{a^۲}{۲}=(۳\sqrt{۵})^۲+(۴\sqrt{۵})^۲-\frac{(۵\sqrt{۵})^۲}{۲}=\frac{۱۲۵}{۲}\Rightarrow m_a=\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$$

می‌دانیم $GM=\frac{۱}{۳}m_a$ پس:

$$GM=\frac{۱}{۳}\left(\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}\right)=\frac{۵}{۶}\sqrt{۵}$$ گزینه ۲

تست ۴۶: در مثلث قائم الزاویه زیر با اضلاع قائمه ۶ و ۸ ، MH چقدر است؟(AM میانه و AHارتفاع است)



۱) $\frac{۷}{۵}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$

۳) $\frac{۲۴}{۵}$ ۴) $\frac{۴۹}{۲۵}$

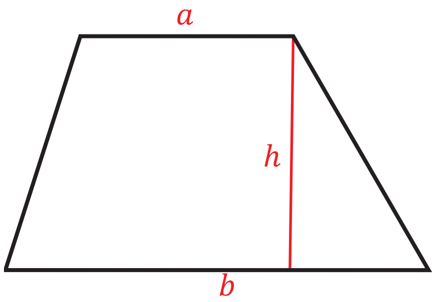
حل: با استفاده از قضیه فیثاغورس اندازه BC برابر ۱۰ خواهد بودپس $MC = ۵$ است. چون میانه وارد وتر نصفف وتر است پس خواهیم داشت: $AM = ۵$

$$AH = \frac{AB \times AC}{BC} = \frac{۸ \times ۶}{۱۰} = \frac{۲۴}{۵}$$

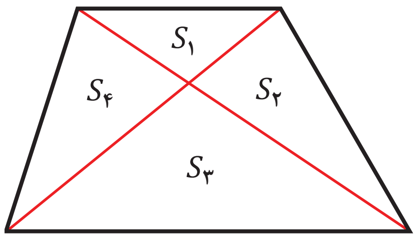
با استفاده از قضیه قضیه فیثاغورس در مثلث ΔAHM داریم:

$$(MH)^۲ = (AM)^۲ - (AH)^۲ = ۲۵ - \frac{۵۷۶}{۲۵} = \frac{۴۹}{۲۵} \Longrightarrow MH = \frac{۷}{۵}$$ گزینه ۱

مساحت ذوزنقه



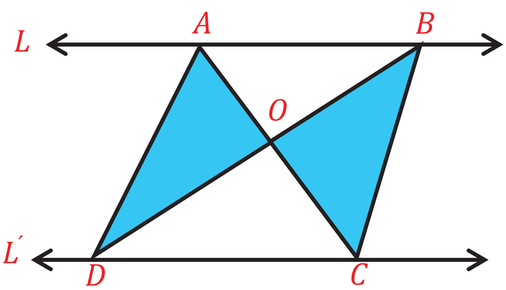
$$S = \frac{(a+b) \times h}{۲}$$



$$S_۱ \times S_۳ = S_۲ \times S_۴$$

$$\xrightarrow{\text{شبه پروانه} \Rightarrow S_۱ = S_۳} S_۱^{\,۲} = S_۲ \times S_۴$$

سوال۳۱: در شکل زیر دو خط L و L موازی هستند نشان دهید $S_{AOD} = S_{BOC}$.(شبه پروانه)



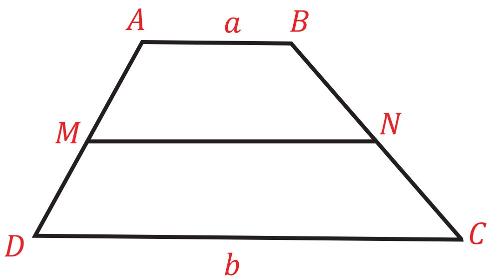
اثبات: چون ارتفاع و قاعده دو مثلث ΔBDC و ΔADC باهم برابرند پس مساحت این دو مثلث باهم برابر است.

$$S_{ADC} = S_{BDC} \Longrightarrow S_{ADC} - S_{ODC} = S_{BDC} - S_{ODC}$$

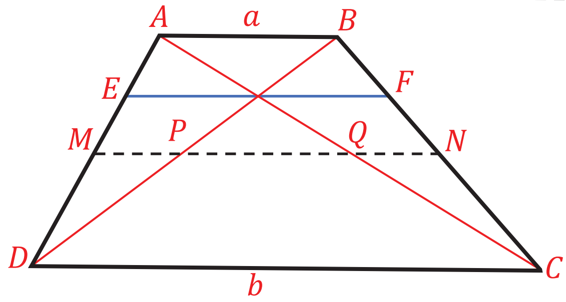
$$\Longrightarrow S_{AOD} = S_{BOC}$$

قاعده متوسط ذوزنقه

پاره خطی که وسط ساق‌های ذوزنقه را به هم وصل می‌کند.



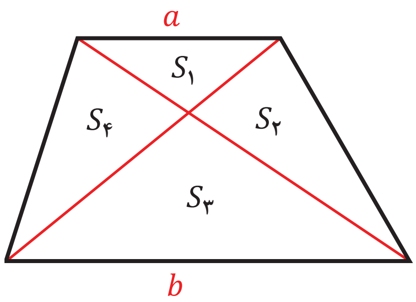
$$MN = \frac{a+b}{۲}$$



$$MP = \frac{a}{۲} \qquad PN = \frac{b}{۲}$$

$$PQ = \frac{b-a}{۲} \qquad EF = \frac{۲ab}{a+b}$$

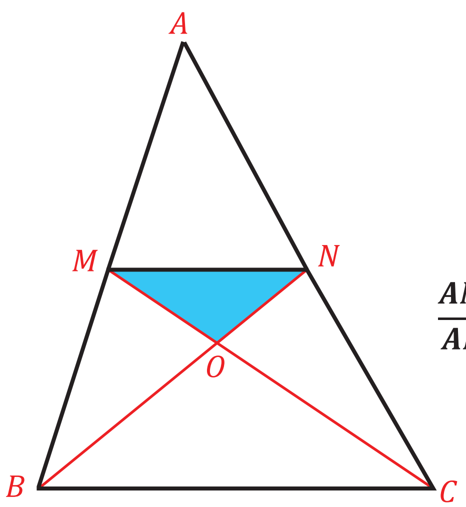
اگر مساحت ذوزنقه برابر S باشد آنگاه:



$$S_۱ = \left(\frac{a}{a+b}\right)^۲ S \qquad S_۳ = \left(\frac{b}{a+b}\right)^۲ S$$

$$S_۲ = S_۴ = \frac{ab}{(a+b)^۲} S$$

تست ۴۷: در شکل زیر M و N وسط اضلاع هستند نسبت مساحت ABC به مساحت مثلث رنگی کدام است؟



۱) ۹ ۲) ۶

۳) ۱۲ ۴) ۸

حل:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{AMN}+S_{MNCD}} = \frac{۱}{۴}$$

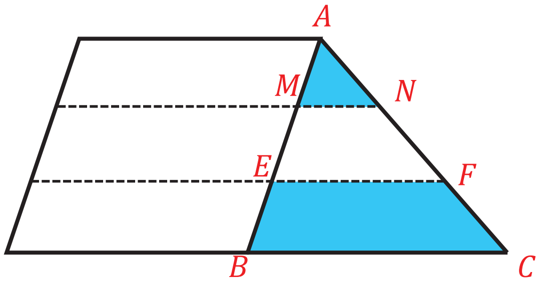
$$\xRightarrow{\text{تفضیل نسبت در مخرج}} \frac{S_{AMN}}{S_{MNCD}} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{S_{MNCD}}{S_{ABC}} = \frac{۳}{۴}$$

اگر مساحت ذوزنقه $MNCD$ برابر S و $MN = a$ و $BC = b$ باشد در این صورت مساحت قسمت رنگی برابر $S \left(\frac{a}{a+b}\right)^۲$ خواهد بود

$$\frac{S_{MNO}}{S_{MNCD}} = \frac{\left(\frac{a}{a+b}\right)^۲ S}{S} \xRightarrow{b=۲a} \frac{S_{MNO}}{S_{MNCD}} = \frac{۱}{۹} \xRightarrow{\frac{S_{MNCD}}{S_{ABC}}=\frac{۳}{۴}} \frac{S_{MNO}}{\frac{۳}{۴}S_{ABC}} = \frac{۱}{۹} \Rightarrow \frac{S_{MNO}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۱۲} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{MNO}} = ۱۲$$ گزینه ۳

تست ۴۸: یک ساق ذوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. نسبت مساحت دو ناحیه سازه زده شده، کدام است؟

«تجربی خارجی ۱۳۹۸»



۱) $\frac{۱}{۵}$ ۲) $\frac{۱۰}{۶}$

۳) $\frac{۲}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

«روش اول»

$$\left.\begin{aligned}\frac{AM}{AC}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۲}=\frac{۱}{۹}\\ \frac{AM}{AE}=\frac{AN}{AF}=\frac{EF}{BC}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{S_{AMN}}{S_{AEF}}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۲}=\frac{۱}{۴}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}}{\frac{S_{AMN}}{S_{AEF}}}=\frac{\frac{۱}{۹}}{\frac{۱}{۴}}\Rightarrow\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=\frac{۴}{۹}\Rightarrow\frac{S_{MNFE}}{S_{ABC}}=\frac{۳}{۹}$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}}{\frac{S_{FECB}}{S_{ABC}}}=\frac{\frac{۱}{۹}}{\frac{۵}{۹}}\Rightarrow\frac{S_{AMN}}{S_{FECB}}=\frac{۱}{۵}$$ گزینه ۱

«روش دوم»

نکته : اگر در یک مثلث خطوطی به موازات قاعده رسم کنیم که ساق ها را به چند قسمت مساوی تقسیم کنند آنگاه طول پاره‌خط‌های ایجاد شده به صورت x ، $۲x$ ، $۳x$و... و مساحت شکل های حاصل به صورت s ، $۳s$ ، $۵s$ و... خواهد بود.

حال با توجه به نکته بالا داریم

$$\frac{S_{AMN}}{S_{FECB}}=\frac{S}{۵S}=\frac{۱}{۵}$$ گزینه ۱

تست ۴۹: در یک ذوزنقه متساوی الساقین با زاویه ۶۰° ، قاعده کوچکتر برابر ساق است اگر محیط ذوزنقه برابر ۳۰ واحد باشد، مساحت آن کدام است؟

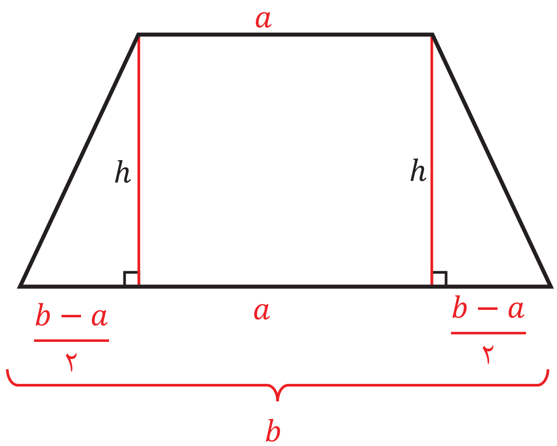
«تجربی داخل ۱۳۹۵»

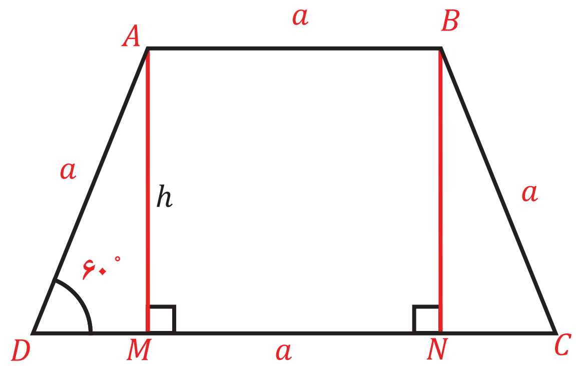
۱) $۲۴\sqrt{۳}$ ۲) $۲۷\sqrt{۳}$

۳) ۴۸ ۴) ۵۴

حل:

نکته : در ذوزنقه متساوی الساقین اندازه به شکل زیر است.





$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{a} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

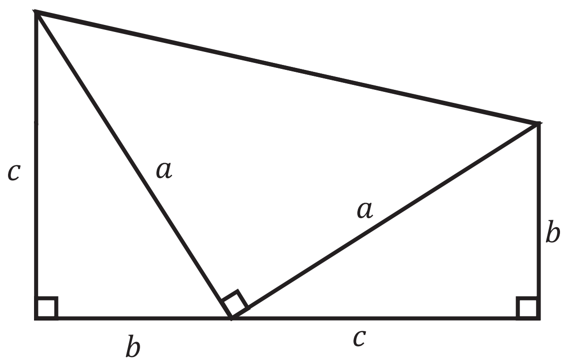
$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{DM}{a} \Rightarrow DM = \frac{a}{2} \xRightarrow{DM=NC} NC = DM = \frac{a}{2}$$

$$a + a + a + \frac{a}{2} + a + \frac{a}{2} = 30 \Rightarrow 5a = 30 \Rightarrow a = 6$$

$$S = \frac{(a+b)\times h}{2} = \frac{\left(a + a + \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) \times \frac{\sqrt{3}a}{2}}{2} = \frac{(18)\times 6\sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}$$ گزینه ۱

سوال۳۲ : مساحت ذوزنقه مقابل را به دو طریق به دست آورید. از مساوی قراردادن آنها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

«تمرین صفحه ۷۲ کتاب درسی»



حل: مساحت این ذوزنقه برابر است با:

$$S = \frac{(c+b)\times(c+b)}{2} = \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} + cb$$

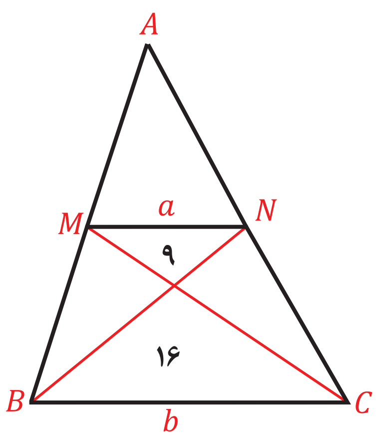
و نیز مساحت این ذوزنقه برابر است با مساحت سه مثلث قائم الزاویه:

$$S = \frac{(c\times b)}{2} + \frac{(c\times b)}{2} + \frac{(a\times a)}{2} = cb + \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow cb + \frac{a^2}{2} = \frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} + cb \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

تست ۵۰: در شکل زیر $EF \parallel AC$ مساحت ΔABC کدام است؟

«استاد تقی خواجه»



۱) ۱۰۵ ۲) ۱۱۲

۳) ۱۱۸ ۴) ۱۲۰

حل: فرض کنیم $S_{MNCB} = S$ با استفاده از روابط گفته شده برای مساحت ذوزنقه، داریم:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\left(\frac{a}{a+b}\right)^2 S}{\left(\frac{b}{a+b}\right)^2 S} = \frac{9}{16} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{a+b}=\frac{۳}{۷}\Rightarrow \left(\frac{a}{a+b}\right)^۲ S=۹\Rightarrow \frac{۹}{۴۹}S=۹\Rightarrow S_{MNCB}=۴۹$$

$$\text{تالس} \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^۲=\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=\frac{۹}{۱۶}\Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{AMN}+S_{MNCB}}=\frac{۹}{۱۶}\Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{MNCB}}=\frac{۹}{۷}\xrightarrow{S_{MNCB}=۴۹} S_{AMN}=۶۳$$

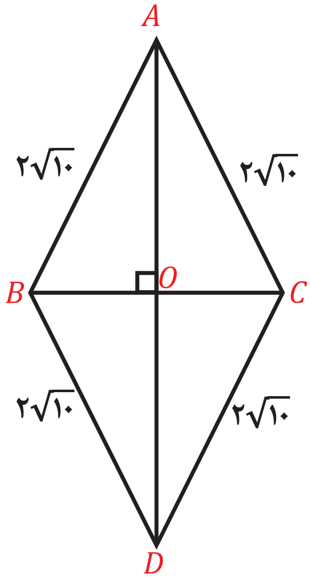
$$\Rightarrow S_{ABC}=S_{AMN}+S_{MNCB}=۴۹+۶۳=۱۱۲$$ گزینه ۱

تست ۵۱: در یک لوزی اگر اندازه اضلاع برابر $۲\sqrt{۱۰}$ و نسبت اندازه‌های دوقطر برابر $\frac{۱}{۳}$ باشد. مساحت لوزی کدام است؟

«تمرین صفحه ۷۲ کتاب درسی»

۱) ۱۲ ۲) ۴۸

۳) ۹۶ ۴) ۲۴



حل:

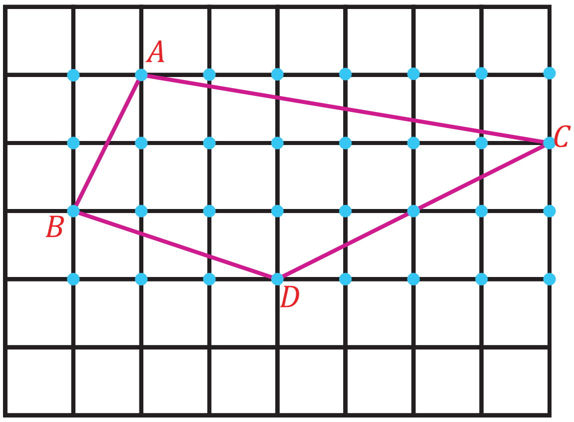
$$AD=۳BC \overset{\div ۲}{\Rightarrow} OA=۳OC \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OA^۲+OC^۲=\left(۲\sqrt{۱۰}\right)^۲$$

$$\xrightarrow{OA=۳OC} (۳OC)^۲+OC^۲=\left(۲\sqrt{۱۰}\right)^۲\Rightarrow ۱۰(OC)^۲=۴\times ۱۰\Rightarrow OC=۲\Rightarrow OA=۶$$

$$\Rightarrow S_{\text{لوزی}}=\frac{AD\times BC}{۲}=\frac{۲OA\times ۲OC}{۲}=۶\times ۴=۲۴$$ گزینه ۴

نقاط شبکه‌ای و مساحت

نقاط و چندضلعی شبکه‌ای :



اگر نقطه‌ها روی خط‌های افقی و عمودی واقع باشند(مطابق شکل)؛ به طوری که فاصله هر دو نقطه متوالی روی یک خط افقی (عمودی) برابر واحد باشد. چنین نقاطی را نقاط شبکه‌ای و چندضلعی‌هایی مانند $ABCD$ را که تمام رأس‌های آنها روی نقاط شبکه‌ای واقع‌اند، چندضلعی‌های شبکه‌ای می‌نامند

نقاط مرزی: نقاط شبکه‌ای روی رأس‌ها و ضلع‌های چندضلعی

نقاط درونی: نقاط شبکه‌ای درون چندضلعی‌ها

تعداد نقاط مرزی چهارضلعی شبکه‌ای $ABCD$ برابر ۵ است.

تعداد نقاط درونی چهارضلعی شبکه‌ای $ABCD$ برابر ۱۰ است.

محاسبه مساحت چندضلعی‌های شبکه‌ای

۱- تبدیل چندضلعی شبکه‌ای به چند مثلث قائم الزاویه و سپس جمع آنها

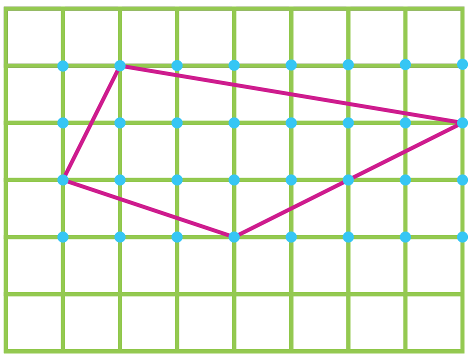
۲- فرمول پیک(جرج الکساندر پیک):

تعداد نقاط مرزی

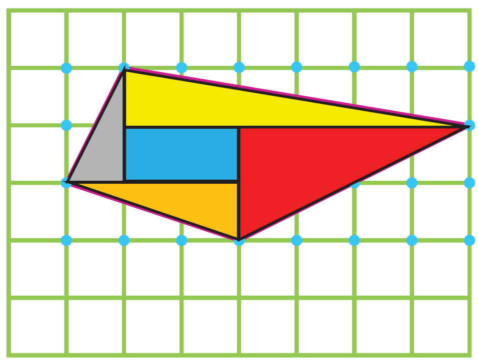
$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱$$

تعداد نقاط درونی

سوال ۳۳ : مساحت چهارضلعی شبکه‌ای مقابل را به دو روش گفته شده به دست آورید.



«روش اول»



$$S_{\text{شکل}} = S_{\text{خاکستری}} + S_{\text{زرد}} + S_{\text{قرمز}} + S_{\text{نارنجی}} + S_{\text{آبی}}$$

$$S_{\text{شکل}} = \frac{۱ \times ۲}{۲} + \frac{۱ \times ۶}{۲} + \frac{۲ \times ۴}{۲} + \frac{۱ \times ۳}{۲} + ۲ \times ۱ = ۱ + ۳ + ۴ + ۱/۵ + ۲ = ۱۱/۵$$

«روش دوم» : فرمول پیک

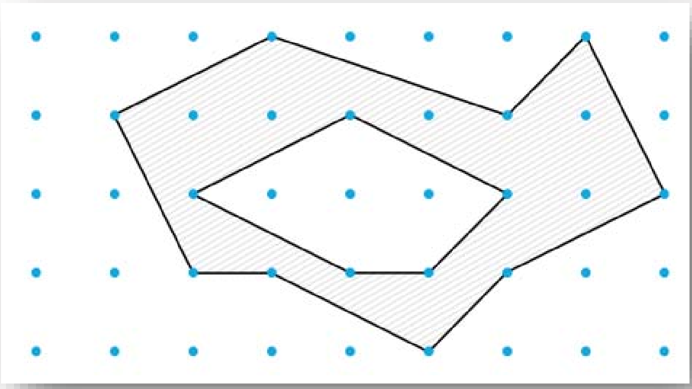
$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ = \frac{۵}{۲} + ۱۰ - ۱ = ۱۱/۵$$

تست ۵۲: مساحت قسمت سایه زده شده ، کدام است.

«تمرین صفحه ۷۲ کتاب درسی»

۱) ۱۰   ۲) ۱۱

۳) ۱۵/۵   ۴) ۱۴



«روش اول»

حل: اگر مساحت چندضلعی شبکه‌ای داخلی را از مساحت چندضلعی بیرونی کم کنیم مساحت قسمت سایه زده شده به دست می‌آید.

$$S_{\text{داخلی}} = \frac{b}{۲} + i - ۱ = \frac{۵}{۲} + ۳ - ۱ = ۵/۵$$

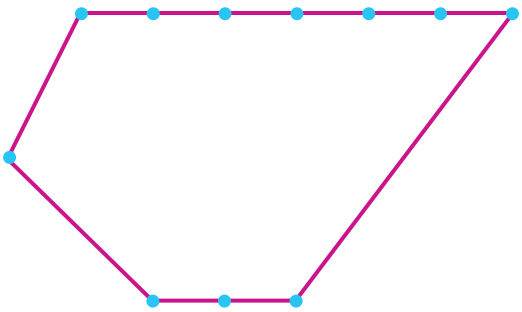
$$S_{\text{بیرونی}} = \frac{b}{۲} + i - ۱ = \frac{۹}{۲} + ۱۳ - ۱ = ۱۶/۵$$

$$\Rightarrow S_{\text{بیرونی}} - S_{\text{داخلی}} = ۱۶/۵ - ۵/۵ = ۱۱$$ گزینه ۲

«روش دوم» : کل شکل سایه زده شده ۱۴ نقطه مرزی و ۵ نقطه درونی دارد پس:

$$S_{\text{بیرونی}} = \frac{b}{۲} + i - ۱ = \frac{۱۴}{۲} + ۵ - ۱ = ۱۱$$ گزینه ۲

تست ۵۲: مساحت چندضلعی شبکه‌ای زیر برابر $\frac{۲۵}{۲}$ است. نسبت تعداد نقاط درونی به نقاط مرزی کدام است؟



۱) ۱۱   ۲) ۱۳

۳) $\frac{۱۳}{۱۱}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۱}$

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ = \frac{۱۱}{۲} + i - ۱ = \frac{۲۵}{۲} \Rightarrow i = ۱۳ \Rightarrow \frac{i}{b} = \frac{۱۳}{۱۱}$$ گزینه ۴

تست ۵۳: مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای برابر ۱۱ است، اختلاف بیشترین مقدار برای نقاط درونی و کمترین مقدار برای نقاط مرزی کدام است؟

۱) ۵   ۲) ۱۰

۳) ۶   ۴) ۹

نکته: تعداد نقاط مرزی یک چندضلعی شبکه‌ای حداقل ۳ تا است، چون چندضلعی حداقل از ۳ ضلع تشکیل شده است.($b \geq ۳$)

نکته: یک چندضلعی شبکه‌ای می‌تواند نقطه درونی نداشته باشد.($i \geq ۰$)

حل: با توجه به مقدار مساحت، تعداد نقاط مرزی(b) نمی‌تواند عددی فرد باشد زیرا اگر فرد باشد مقدار مساحت عددی صحیح نخواهد بود

باید برای نقاط مرزی و نقاط درونی با توجه به شرایط گفته شده، اعدادی را انتخاب کنیم که تساوی زیر برقرار باشد.

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ = ۱۱ \Rightarrow \frac{b}{۲} + i = ۱۲$$

b	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	۲۲	۲۴
i	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰
$\frac{b}{۲} + i$	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲	۱۲

با توجه به جدل فوق بیشترین تعداد نقاط درونی برابر ۱۰ و کمترین تعداد نقاط مرزی برابر ۴ است پس:

$$i_{max} - b_{min} = ۱۰ - ۴ = ۶$$ گزینه ۳

تست ۵۴: مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای که تعداد نقاط مرزی آن ۴ برابر تعداد نقاط رونی آن می‌باشد، کدام می‌تواند باشد؟

«قلم چی ۱۹ فروردین ۱۴۰۱»

۱) ۵ ۲) ۱۰

۳) ۴ ۴) ۷

حل: با توجه به فرمول پیک و داده‌های تست، داریم:

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ = \frac{۴i}{۲} + i - ۱ = ۳i - ۱$$

چون تعداد نقاط درونی عددی طبیعی است، باید در گزینه‌ها دنبال عددی باشیم که به صورت $۳i - ۱$ تولید شود که تنها عدد ۵ به این صورت تولید می‌شود:

$$\Rightarrow ۳i - ۱ \overset{i=۲}{\Rightarrow} ۳(۲) - ۱ = ۵$$ گزینه ۱

تست ۵۵: اگر مساحت یک چندضلعی شبکه‌ای برابر ۱۰ و تفاضل تعداد نقاط درونی آن از تعداد نقاط مرزی آن برابر ۱ باشد، حاصل جمع تعداد نقاط مرزی و درونی کدام است؟

«قلم چی ۱۹ فروردین ۱۴۰۱»

۱) ۱۰ ۲) ۱۵

۳) ۱۲ ۴) ۱۷

حل: با توجه به فرمول پیک و داده‌های تست، داریم:

$$S = \frac{b}{۲} + i - ۱ = ۱۰ \Rightarrow \frac{b}{۲} + i = ۱۱$$

$$b - i = ۱$$

$$\frac{۳}{۲}b = ۱۲ \Rightarrow b = ۸ \Rightarrow i = ۷ \Rightarrow b + i = ۸ + ۷ = ۱۵$$ گزینه ۲

«به پایان آمد این دفتر حکایت همچنان باقیست»