
بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضیات گسسته
ترکیبیات

عادل نقدی
دبیر دبیرستان های شهر
تهران

۲۱ اسفند ۱۳۹۸

فهرست ۱

فهرست ۲

فصل ۱ آشنایی با نظریه اعداد

فصل ۲ گراف و مدل‌سازی

فصل ۳ ترکیبیات

ترکیبات

مباحثی در ترکیبات

مباحثی در ترکیبیات ۱

یادآوری و تکمیل

مثال ۱

فرض کنید می‌خواهیم با سه حرف «چ » ، «پ » و « ژ» و ارقام ۲, ۳, ۴ و ۵ یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل دهیم ، مطلوب است:

الف) تعداد کل رمزهایی که می‌توان تشکیل داد.

ب) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره حروف ، کنار یکدیگرند.

پ) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام ، کنار یکدیگرند

ت) تعداد رمزهایی که در هر یک از آنها همواره ارقام ، کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

حل : الف) ۳ حرف و ۴ رقم روی هم ۷ شیء متمایزبوده و به !۷ طریق می‌توانند کنار هم قرار گیرند و رمز تولید کنند .

ب) ابتدا ۳ حرف را با هم بسته‌بندی می‌کنیم و یک شیء در نظر می‌گیریم و با آن ۴ رقم روی هم ۵ شیء فرض می‌کنیم . در این صورت !۵ جایگشت دارند ، در بسته حروف نیز ، خود جایگشت برابر !۳ است در نتیجه !۳ × !۵

مباحثی در ترکیبیات ۲

یادآوری و تکمیل

پ) ابتدا ۴ رقم را یک بسته در نظر می‌گیریم و با ۳ حرف داده شده روی هم ۴ شیء و خودجایگشت بسته نیز برابر ۴! است در نتیجه $۴! \times ۴!$

ت)حروف را بسته‌بندی کرده یک شیء و ارقام را نیز بسته‌بندی کرده یک شیء در نظر می‌گیریم که روی هم شده دو شیء که تعداد جایگشت‌های آن‌ها ۲! و خود جایگشت حروف ۳! و خود جایگشت ارقام نیز ۴! می‌باشد ، در نتیجه $۲! \times ۳! \times ۴!$

مثال ۲

۵ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۴ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم (در یک ردیف) قرار بگیرند اگر بخواهیم :

الف) همواره دانش‌آموزان هر پایه کنار هم باشند.

ب) به صورت یک در میان قرار بگیرند (هیچ دو دانش‌آموز هم پایه کنار هم نباشند)

پ) اگر دانش‌آموزان پایه یازدهم نیز ۵ نفر باشند ، به چند طریق می‌توان آنها را به صورت یک‌درمیان قرار داد؟

حل : الف) $۵! \times ۴! \times ۲!$

ب) $۴! \times ۵!$

پ) $۵! \times ۵! \times ۲!$

مثال ۳

با ارقام ۱, ۱, ۱ و ۲ چند رمز چهار رقمی می‌توان نوشت ؟ آنها را بنویسید.

حل: $\frac{۴!}{۳!} = ۴$ طریق می‌توان ۴ رقمی را ایجاد کرد که به صورت ۱۱۱۲, ۱۱۲۱, ۱۲۱۱, ۲۱۱۱ است .

نکته ۱ (جایگشت با تکرار)

اگر n شیء مفروض باشند، به طوری که n_1 تای آنها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آنها از نوع دوم و یکسان و ...و n_k تای آنها از نوع k ام و یکسان باشند در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

مثال ۴

با ارقام $1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4$ و ۵ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت ؟

حل: $$\frac{9!}{2! \times 3! \times 2!}$$

مثال ۵

۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲ نفره ، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند ؟

حل : $\binom{9}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{4}{4}$ یا $\binom{9}{4} \times \binom{5}{2} \times \binom{3}{3}$ و یا $\binom{9}{3} \times \binom{6}{4} \times \binom{2}{2}$

نکته ۲ (تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی)

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه n شاخه گل از بین k نوع گل یعنی برابر است با $\binom{n+k-1}{k-1}$

مثال ۶

به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل ، دسته گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟

حل : اگر ۴ نوع گل را x_1, x_2, x_3 و x_4 در نظر بگیریم مجموع انتخاب از این ۴ نوع گل برابر ۸ است .

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \Rightarrow \binom{8+4-1}{4-1} = \binom{11}{3}$$

مثال ۷

به چند طریق می‌توان دسته‌گلی شامل ۹ شاخه‌گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد ، به شرط آن‌که از هر نوع گل حداقل یک شاخه انتخاب شود ؟

حل: اگر ۴ نوع گل را x_1, x_2, x_3 و x_4 در نظر بگیریم مجموع انتخاب از این ۴ نوع گل برابر ۹ است . چون حداقل از هر نوع گل ۱ شاخه باید برداریم ، از هر کدام ۱ شاخه برداشته و $(9 - 4 = 5)$ شاخه می‌ماند که

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \Rightarrow \binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3}$$

مثال ۸

معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۷$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

حل: تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادل این است که حداقل ۱ جواب برای هر کدام از مجهولات وجود داشته باشد (جواب‌ها عدد طبیعی باشند .)
ابتدا حداقل یک جواب صحیح و مثبت برای مجهولات وجود داشته باشد. $(۷ - ۳ = ۴)$ و معادله به‌صورت زیر در می‌آید.

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۴ \Rightarrow \binom{۴ + ۳ - ۱}{۳ - ۱} = \binom{۶}{۲}$$

مثال ۹

نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n-۱}{k-۱}$

حل: ابتدا فرض می‌کنیم هر یک از مجهولات حداقل یک جواب داشته باشد، در واقع از n، k تا کم می‌شود، در نتیجه

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n - k \Rightarrow \binom{(n-k)+(k-۱)}{k-۱} = \binom{n-۱}{k-۱}$$

مثال ۱۰

معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_1 > 1$ و $x_3 > 3$ باشد؟

حل: روش اول :

$x_1 > 1 \Rightarrow x_1 \geq 2 \;,\; x_3 > 3 \Rightarrow x_3 \geq 4$ یعنی حداقل ۲ تا جواب برای x_1 و ۴ تا جواب x_3 وجود داشته باشد، ۶ تا جواب‌ها از $(14 - 6 = 8)$ کم می‌شود و معادله به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_5 = 8 \Rightarrow \binom{8+5-1}{5-1} = \binom{12}{4}$$

روش دوم:

$$x_۱ > ۱ \Rightarrow x_۱ \geq ۲ \Rightarrow x_۱ - ۲ = y_۱ \geq ۰ \Rightarrow x_۱ = y_۱ + ۲$$

$$x_۳ > ۳ \Rightarrow x_۳ \geq ۴ \Rightarrow x_۳ - ۴ = y_۴ \geq ۰ \Rightarrow x_۳ = y_۳ + ۴$$

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵ = ۱۴ \Rightarrow (y_۱ + ۲) + x_۲ + (y_۳ + ۴) + x_۴ + x_۵ = ۱۴$$

$$y_۱ + x_۲ + y_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۴ - ۲ - ۴ \Rightarrow \binom{۸ + ۵ - ۱}{۵ - ۱} = \binom{۱۲}{۴}$$

مثال ۱۱

معادلهٔ $x_{۱} + x_{۲} + \cdots + x_{۵} = ۱۱$ چند جواب صحیح و مثبت دارد ؟ $(x_i \geq ۱ \ , \ ۱ \leq i \leq ۵)$

حل:

$x_i \geq ۱$ یعنی جواب‌های طبیعی ، پس

$$\binom{n-۱}{k-۱} = \binom{۱۰}{۴}$$

روش دوم:

$$x_i \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 \geq 1 \to x_1 - 1 = y_1 \geq 0 \to x_1 = y_1 + 1 \\ x_2 \geq 1 \to x_2 - 1 = y_2 \geq 0 \to x_2 = y_2 + 1 \\ x_3 \geq 1 \to x_3 - 1 = y_3 \geq 0 \to x_3 = y_3 + 1 \\ x_4 \geq 1 \to x_4 - 1 = y_4 \geq 0 \to x_4 = y_4 + 1 \\ x_5 \geq 1 \to x_5 - 1 = y_5 \geq 0 \to x_5 = y_5 + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (y_1 + 1) + (y_2 + 1) + (y_3 + 1) + (y_4 + 1) + (y_5 + 1) = 11$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 11 - (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 6 \Rightarrow \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

مثال ۱۲

معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۶ = ۱۲$ چند جواب صحیح و مثبت دارد به شرط آن‌که $x_۳ = ۴$ و $x_۵ > ۲$ باشد؟

حل: روش اول :

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۶ = ۱۲\ ,\ \ x_i > ۰ \Rightarrow x_i \geq ۱, x_۳ = ۴, x_۵ > ۲ \Rightarrow x_۵ \geq ۳$$

$$x_۱ + x_۲ + ۴ + x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۱۲ \Rightarrow (x_۱ - ۱) + (x_۲ - ۱) + ۴ + (x_۴ - ۱) + (x_۵ -$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۱۲ - ۴ - ۷ = ۱ \Rightarrow \binom{۱ + ۵ - ۱}{۵ - ۱} = \binom{۵}{۴}$$

روش دوم :

$$\begin{cases} x_۳ = ۴ \\ x_۵ > ۲ \Rightarrow x_۵ - ۲ > ۰ \xrightarrow{y_۵ = x_۵ - ۲} y_۵ > ۰ \Rightarrow x_۵ = y_۵ + ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_۱ + x_۲ + ۴ + x_۴ + y_۵ + ۲ + x_۶ = ۱۲$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۴ + y_۵ + x_۶ = ۶ \Rightarrow \binom{۶-۱}{۵-۱} = \binom{۵}{۴} = ۵$$

مثال ۱۳

به چند طریق می‌توان ۵ سیب یکسان را در ۳ جعبه مختلف قرار داد ؟

حل: $x_1 + x_2 + x_3 = 5 \Rightarrow \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$

نکته ۳

اگر $c_1, c_2, \cdots, c_k$ اعداد صحیح باشند ، تعداد جواب‌های صحیح معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ به‌طوری‌که $x_1 \geq c_1, x_2 \geq c_2, \cdots, x_k \geq c_k$ باشد ، برابر $\binom{n+k-1-(c_1+c_2+\cdots+c_k)}{k-1}$ است .

مثال ۱۴

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به طوری که $x_1 \geq 2$ باشد ؟

حل:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 \geq 2 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ x_3 \geq 0 \ , \ x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ x_3 \geq 0 \ , \ x_4 \geq 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \binom{8}{3}$$

مثال ۱۵

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 13$ چند جواب صحیح دارد به طوری که $x_i \geq 2$ باشد ؟

حل: $x_i \geq 2$ یعنی هر مجهول حداقل ۲ جواب دارد که $(13 - 10 = 3)$ در نتیجه

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \Rightarrow \binom{3+5-1}{5-1} = \binom{7}{4} = 35$$

نکته ۴

تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ برابر $\binom{n+k-1-(k \times 1)}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ است.

مثال ۱۶

معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد ؟

حل: می‌دانیم تعداد جواب‌های صحیح و مثبت برابر $\binom{n-1}{k-1}$ است پس :

$$\binom{7-1}{4-1} = \binom{6}{3} = 20$$

مثال ۱۷

معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 9$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به طوری که $2 \leq x_1 \leq 5$ باشد ؟

حل:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ 2 \leq x_1 \leq 5 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ x_3 \geq 0 \end{cases} =$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 \geq 2 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ x_3 \geq 0 \end{cases} - \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 \geq 6 \ , \ x_2 \geq 0 \ , \ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \binom{7+3-1}{3-1} - \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} - \binom{5}{2} = 26$$

مثال ۱۸

به چند طریق می‌توان یک دسته گل ۸ شاخه‌ای از سه نوع گل ساخت به طوری که از هر نوع گل حداقل یک شاخه موجود باشد ؟

حل: اگر تعداد این سه نوع گل را x_1, x_2 و x_3 در نظر بگیریم ، باید تعداد جواب‌های معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ را بیابیم به‌طوری‌که $x_i \geq 1$ باشد $21 = \binom{7}{2}$

مثال ۱۹

معادله $x_1^3 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد ؟

حل: اگر $x_1 \geq 2$ باشد این معادله جواب صحیح و نامنفی ندارد . پس $x_1 = 0, 1$ است.
اگر $x_1 = 0$ باشد معادله $x_2 + x_3 + x_4 = 7$ می شود که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی آن برابر $\binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$ است .
اگر $x_1 = 1$ باشد معادله $x_2 + x_3 + x_4 = 6$ می شود که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی آن برابر $\binom{6+3-1}{3-1} = \binom{8}{2} = 28$
در کل تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی $36 + 28 = 64$ است .

مثال ۲۰

نامعادله $x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد ؟

حل: چون تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی را باید بدست آوریم ، می‌دانیم $0 \leq x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$ است .

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{2}{2} = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{3}{2} = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{4}{2} = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{5}{2} = 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = 1 + 3 + 6 + 10 = 20$$


با آرزوی موفقیت
۲۶