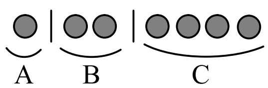
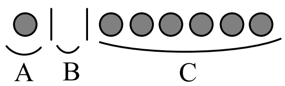
۳–۵: معادلات خطی با ضرایب واحد

مسأله‌ی ۱: به چند طریق می‌توان ۷ گوی یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد؟ (ممکن است به بعضی‌ها گوی نرسد.)

حل: برای تقسیم ۷ گوی یکسان می‌توانیم از $۳-۱=۲$ خط عمودی استفاده کنیم. به طور مثال، ۲ روش تقسیم به صورت زیر است:



یکی A، ۲ تا B و ۴ تا C



یکی A، هیچی B و ۶ تا C

همان‌طور که مشخص شد، نحوه‌ی قرارگیری گوی‌ها و خطوط در کنار هم، روش‌های توزیع ۷ گوی را بین ۳ نفر مشخص می‌کند. لذا برای شمارش روش‌های این توزیع، می‌توانیم از جایگشت با تکرار استفاده کنیم:

$$۳۶=\frac{۹!}{۷!\times ۲!}=$$ نحوه‌ی قرارگیری $۷+۲=۹$ شی (۷شی از نوع ۱ و ۲ شی از نوع ۲)

تذکر: فرض کنید تعداد گوی‌هایی که A، B و C دریافت می‌کنند، به ترتیب $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ باشد، در این‌صورت $x_۱+x_۲+x_۳=۷$. هم‌چنین متغیرها متعلق به مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی (یعنی مجموعه‌ی $\{۰,۱,۲,...\}$)، می‌باشند.

به هر معادله به‌صورت $x_۱+x_۲+...+x_k=n$ یک معادله‌ی خطی با ضرایب واحد گفته می‌شود (n و k دو عدد مثبت و معلوم هستند و x_iها مجهول‌های این معادله‌اند). علت این نام‌گذاری این است که در این معادله، همه‌ی مجهول‌ها (یعنی x_iها) به‌صورت خطی (عبارت درجه‌ی ۱) آمده‌اند و ضریب همه‌ی آن‌ها برابر واحد است.

یادداشت: با توجه به مسأله‌ی قبل، هر جواب این معادله را می‌توان با یک نحوه‌ی قرارگیری n گوی یکسان و $k-۱$ خط نشان داد، یا در واقع با یک جایگشت با تکرار از n شیء نوع ۱ و $k-۱$ شیء نوع ۲، تعداد چنین جایگشت‌هایی برابر است با: $\frac{(n+k-۱)!}{n!(k-۱)!}$، که آن را می‌توانیم با $\binom{n+k-۱}{k-۱}$ یا $\binom{n+k-۱}{n}$ نیز نشان دهیم.

قضیه‌ی ۱: **تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_۱+x_۲+...+x_k=n$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی برابر $\binom{n+k-۱}{k-۱}$ است.**

تست ۱: چند دسته‌ی ۷ شاخه‌ای از سه نوع گل موجود می‌توان تشکیل داد؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۱ ۳) ۲۸ ۴) ۳۶

حل: فرض کنید از سه نوع گل موجود به ترتیب $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ شاخه انتخاب کنیم. در این‌صورت $x_۱+x_۲+x_۳=۷$. با توجه به توضیحاتی که دادیم تعداد راه‌های انتخاب ۷ شاخه از سه نوع گل، برابر تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_۱+x_۲+x_۳=۷$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی است. این تعداد بنا بر قضیه‌ی قبل برابر $۳۶=\binom{۹}{۲}$ است. بنابراین گزینه‌ی ۴ درست است.

مسأله‌ی ۲: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x+y+z=15$ را در هر یک از حالت‌های زیر پیدا کنید:

الف) $x \ge 3$

ب) $x > 3$، $y > 4$ و $z \ge 2$

حل: الف) از تغییر متغیر $x' = x - 3$ استفاده می‌کنیم. اگر $x \ge 3$، در این صورت $x' \ge 0$، داریم:

$$x+y+z=15 \xrightarrow{x=x'+3} x'+y+z=12 \Rightarrow \text{تعداد جواب‌ها} = \binom{14}{2} = 91$$

ب) با استفاده از تغییر متغیر داریم:

$$x > 3 \Rightarrow x \ge 4 \xrightarrow{x'=x-4} x' \ge 0$$
$$y > 4 \Rightarrow y \ge 5 \xrightarrow{y'=y-5} y' \ge 0$$
$$z \ge 2 \xrightarrow{z'=z-2} z' \ge 0$$
$$x+y+z=15 \Rightarrow x'+4+y'+5+z'+2=15 \Rightarrow x'+y'+z'=4 \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{6}{2} = 15$$

قضیه‌ی ۲: فرض کنید عددهای صحیح c_1، c_2، ...، و c_k داده شده باشند. در این‌صورت تعداد جواب‌های معادلـه‌ی $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرایط $x_1 \ge c_1$، $x_2 \ge c_2$، ...، و $x_k \ge c_k$ برابر $\binom{n+k-1-(c_1+c_2+\ldots+c_k)}{k-1}$ است.

مسأله‌ی ۳: معادله‌ی $x+y+z=20$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح با شرایط $x \ge 0$، $y \ge -2$ و $z \ge 7$ چند جواب دارد؟

حل: با توجه به قضیه‌ی فوق پاسخ برابر $\binom{17}{2} = \binom{20+3-1-(0-2+7)}{2}$ است.

تست ۲: تعداد جوابهای صحیح معادله $x_1+x_2+x_3=15$ به شرط $x_i \ge 2$ چند است؟ $(i=1,2,3)$

۱) ۴۵ ۲) ۵۵ ۳) ۹۱ ۴) ۱۳۶

حل: با توجه به قضیه‌ی فوق پاسخ برابر $\binom{11}{2} = \binom{15+3-1-(3\times 2)}{3-1}$ است. بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

تذکر: در حالت خاص قضیه‌ی قبل که $x_i \ge 1$، در واقع با جواب‌های طبیعی معادله مواجه‌ایم. بنابراین قضیه‌ی زیر قابل بیان است:

قضیه‌ی ۳: تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر $\binom{n-1}{k-1}$ است.

مثال: تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=10$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر $\binom{9}{2}$ است.

تست ۳: ۸ کبوتر یکسان به چند طریق می‌توانند در ۵ لانه‌ی متمایز قرار گیرند به‌طوری که هیچ لانه‌ای خالی نماند؟

۱) $\binom{12}{4}$ ۲) $\binom{7}{4}$ ۳) $\binom{8}{4}$ ۴) $\binom{8}{5}$

حل: فرض کنید در ۵ لانه به ترتیب x_1، ...، و x_5 کبوتر قرار گیرند، در این‌صورت $x_1+\ldots+x_5=8$. چون می‌خواهیم هیچ لانه‌ای خالی نمانـد، پس برای هر $1 \le i \le 5$، $x_i \ge 1$. نتیجه می‌گیریم پاسخ برابر تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1+\ldots+x_5=8$ در مجموعـه‌ی اعـداد طبیعـی یعنـی برابر $\binom{7}{4}$ است. بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

تست ۴: نامعادله‌ی $۱۰۰ < (x_۱ + x_۲ + x_۳)^۳ < ۳۰۰$، در مجموعه‌ی اعداد طبیعی چند جواب دارد؟ (آزاد- ۸٦)

۱) ٤۹ ۲) ۲۱ ۳) ۱٦ ٤) ٦

حل: از نامعادله‌ی داده شده نتیجه می‌گیریم $۵ \le x_۱ + x_۲ + x_۳ \le ۶$، پس $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵$ یا $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۶$. تعداد جواب‌های این دو معادله در مجموعه‌ی اعداد طبیعی به ترتیب برابر $\binom{۴}{۲}$ و $\binom{۵}{۲}$ است، لذا تعداد جواب‌های نامعادله‌ی داده شده در مجموعه‌ی اعداد طبیعی برابر $\binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۲} = ۶ + ۱۰ = ۱۶$ است. بنابراین گزینه‌ی ۳ درست است.

مسأله‌ی ۴: در بسط $(x + y + z + w)^۷$ چند جمله‌ی متمایز ظاهر می‌شود؟

حل: با توجه به تساوی $(x + y + z + w)^۷ = \underbrace{(x + y + z + w)...(x + y + z + w)}_{\text{هفت بار}}$ نتیجه می‌گیریم هر جمله از این بسط به‌صورت $x^a y^b z^c w^d$ است که a، b، c و d اعداد صحیح نامنفی‌اند و $a + b + c + d = ۷$ (زیرا هر جمله از حاصل‌ضرب فوق از ضرب ۷ متغیر تشکیل شده است که یکی از پرانتز اول، یکی از پرانتز دوم،... و یکی از پرانتز هفتم انتخاب شده است در واقع مفهوم جمله‌ی عمومی $x^a y^b z^c w^d$ این است که از a پرانتز x، از b پرانتز y، از c پرانتز z و از d پرانتز w انتخاب شده است). در این‌جا مقادیر a، b، c و d تعیین کننده‌ی جملات بسط‌اند، لذا تعداد جملات متمایز بسط، برابر تعداد جواب‌های معادله‌ی $a + b + c + d = ۷$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی، یعنی برابر $\binom{۱۰}{۳}$ است.

مسأله‌ی ۵: معادله‌ی $x_۱^۴ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۲$ در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی چند جواب دارد؟

حل: توجه کنید چنان‌چه $x_۱ \ge ۲$، در این‌صورت معادله‌ی فوق در مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی هیچ جوابی ندارد. پس جواب‌های این معادله را می‌توانیم به دو دسته‌ی مجزا تقسیم کنیم.

دسته‌ی اول: جواب‌هایی که $x_۱ = ۰$. اگر $x_۱ = ۰$، آن‌گاه معادله‌ی اصلی به $x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۲$ تبدیل می‌شود. تعداد جواب‌های این معادله در مجموعه‌ی اعداد صحیح و نامنفی برابر $\binom{۱۴}{۲}$ است.

دسته‌ی دوم: جواب‌هایی که $x_۱ = ۱$. اگر $x_۱ = ۱$، آن‌گاه معادله‌ی اصلی به $x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۱$ تبدیل می‌شود. تعداد جواب‌های این معادله در مجموعه‌ی اعداد صحیح و نامنفی برابر $\binom{۱۳}{۲}$ است.

به این ترتیب نتیجه می‌گیریم، پاسخ مسأله برابر $\binom{۱۳}{۲} + \binom{۱۴}{۲}$ است.