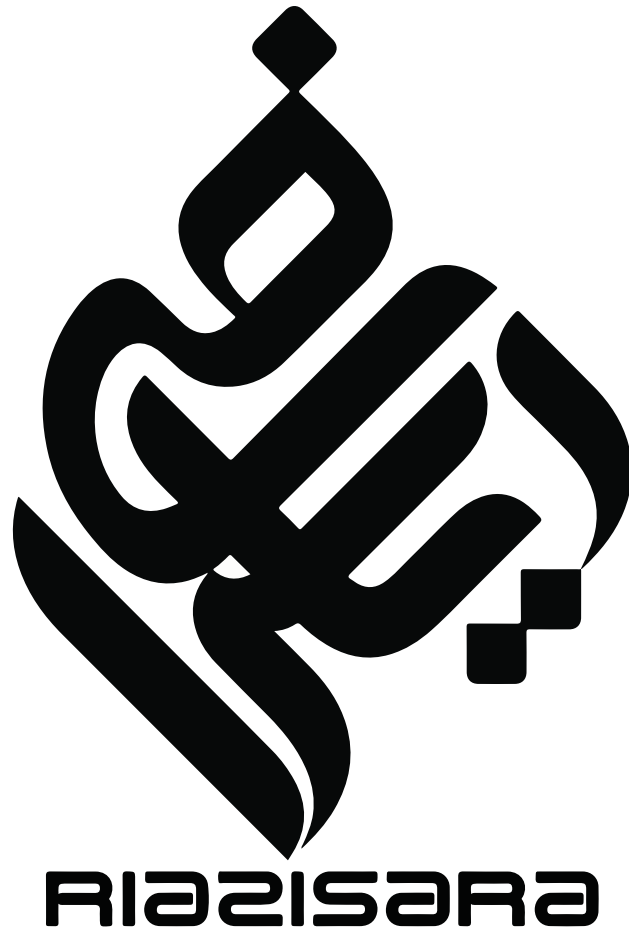




سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

<https://t.me/riazisara>



ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



یالطیف

ریاضیات گسسته

فرزانه بایمانی

سرشناسه :

بایمانی ، فرزانه ، ۱۳۵۵

عنوان و نام پدیدآورنده : ریاضیات گسسته / فرزانه بایمانی

مشخصات نشر :

رامهرمز - باغ تماشا، ۱۳۹۶

مشخصات ظاهری :

۲۲۸ص

شابک :

۹۷۸-۶۰۰-۷۸۸۹-۱۵-۲

وضعیت فهرست نویسی : فیپا

رده بندی دیویی :

۵۱۰/۷۶

شماره کتابشناسی ملی : ۴۹۲۷۰۷۵

ریاضیات گسسته



- تنظیم نهایی: سینا رحیمی
 - ناشر: باغ تماشا - رامهرمز - تلفن: ۰۶۱۴۳۵۲۳۹۱۹ - ۰۹۱۶۵۰۹۹۹۷۳
 - نوبت چاپ: اول
 - شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه
 - قیمت: 140000 ریال
- کلیه حقوق محفوظ و متعلق به «نویسنده» است

تقدیم به مادر مومهربانانی که زندگی را زیباتر کرده اند

فهرست مطالب

پیشگفتار	۵
قسمت اول آشنایی با گرافها	۶
فصل اول: گرافها و ویژگیهای آنها:	۷
فصل دوم: مرتبه، اندازه، درجه:	۱۱
فصل سوم: درخت و ماتریس	۲۹
حل چند سوال	۳۹
بیشتر بدانیم:	۴۰
حل سوالات حل نشده قسمت اول: آشنایی با گرافها و کاربردهای آن	۴۸
پاسخ تست های حل نشده قسمت اول: نظریه گرافها:	۵۰
قسمت دوم: نظریه اعداد:	۵۱
فصل چهارم: کلیات و تقسیم پذیری	۵۲
چند سوال از فصل کلیات و تقسیم پذیری	۶۵
نمایش اعداد صحیح:	۷۰
بیشتر بدانیم:	۷۳
حل تمرینات حل نشده قسمت دوم: نظریه اعداد فصل ۴: تقسیم پذیری	۷۶
حل سوالات حل نشده کلیات و تقسیم پذیری	۷۹
پاسخنامه تست های حل نشده نظریه اعداد فصل تقسیم پذیری	۸۲
فصل پنجم: اعداد اول	۸۳
بیشتر بدانیم:	۹۵
حل مثالهای حل نشده نظریه اعداد فصل پنجم: اعداد اول	۹۷
پاسخنامه تست های حل نشده نظریه اعداد فصل پنجم: اعداد اول	۹۸
فصل ششم: همنهشتی:	۹۹
بیشتر بدانیم:	۱۱۷
حل مثالهای حل نشده نظریه اعداد فصل ششم همنهشتی	۱۲۰
پاسخنامه تست های حل نشده نظریه اعداد فصل ششم: همنهشتی	۱۲۲

قسمت سوم: مباحثی دیگر از ترکیبیات	۱۲۳
فصل هفتم: مدل‌های شهودی و تجسمی در ترکیبیات	۱۲۴
بیشتر بدانیم:	۱۴۵
حل سوالات حل نشده فصل هفتم: مدل‌های شهودی و تجسمی در ترکیبیات	۱۴۸
پاسخنامه تست های حل نشده ترکیبیات فصل هفتم:	۱۵۲
قسمت چهارم: احتمال	۱۵۳
فصل هشتم: احتمال	۱۵۴
حل چند تمرین	۱۶۲
حل سوالات حل نشده احتمالات فصل هشتم: احتمال	۱۶۵
پاسخنامه تست های حل نشده فصل هشتم: احتمال	۱۶۶
فصل نهم: توزیع گسسته احتمال	۱۶۷
حل چند تمرین:	۱۷۴
بیشتر بدانیم:	۱۷۵
حل سوالات حل نشده فصل نهم: توزیعهای گسسته احتمال	۱۷۹
پاسخنامه تستهای قسمت بیشتر بدانیم فصل نهم	۱۸۰
۱۳ سال کنکور سراسری	۱۸۱
منابع:	۲۲۷

بخشهایی از ریاضیات که در آنها مفهوم پیوستگی وجود ندارد ریاضیات گسسته یا ریاضیات تصمیم نامیده میشوند، در واقع ریاضیات گسسته بیشتر مجموعه های شمارش پذیر را مورد بررسی قرار میدهد و از آنجایی که این نوع ریاضیات در زبانهای برنامه نویسی رایانه کاربرد زیادی دارد در چندین سال اخیر با پیشرفت علوم رایانه به صورت ناخواسته کاربردی تر شده است اگرچه متأسفانه کاربرد آن ملموس و قابل مشاهده نیست اما همانطور که لوبافسکی (ریاضیدان روس) میگوید: هیچ شاخه ای از ریاضیات نیست که روزی در جهان واقعی به کار نرود.

در این مجموعه سعی شده است کلیه مطالب مورد نیاز یک دانش آموز متوسطه گنجانده شود تا هم درک درستی از ریاضیات گسسته برایش ایجاد شود هم اشکالات احتمالی اش برطرف شود به همین دلیل مطالب به صورتهای مختلف توضیح درس، حل تمرین و سوالهای مختلف، نکات تستی تحت عنوان بیشتر بدانیم، تستهای حل شده و... در نهایت تستهای کنکور ۱۳ سال اخیر ارائه شده است.

ضمن آرزوی توفیق برای همه عزیزان در صورت مشاهده هر نوع اشکال تایپی یا خطایی کوتاهی حقیر را بخشیده و با آدرس: خوزستان - رامهرمز - خیابان شهید چراغزاده . جنب کلانتری ۱۱ دبیرستان فاطمه زهرا (س) یا تلفن: ۰۶۱-۴۳۵۲۲۲۰۷ نظریات خویش را برای بهبود مسائل آموزشی در اختیار اینجانب قرار دهند.

باتشکر

قسمت اول آشنایی با گرافها

ویژگیهای گرافها

درخت و ماتریس

فصل اول: گرافها و ویژگیهای آنها:

تعریف: گراف ساده $G=(V,E)$ ساختاری است مرکب از یک مجموعه متناهی و ناتهی مانند V و مجموعه ای شامل زیر مجموعه های دو عضوی از عناصر متمایز مجموعه V مانند E که عناصر V را رؤس و اعضای E را یال های گراف G می نامیم.

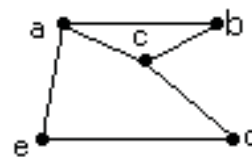
مثال: اگر $V=\{a,b,c,d\}$ و $E=\{\{a,b\},\{c,d\},\{b,d\}\}$ آنگاه $G=(V,E)$ گرافی است که چهار راس و سه یال دارد.

توجه: برای سادگی به جای $\{a,b\}$ می نویسیم ab و می گوئیم در گراف G دو راس a و b مجاورند و a و b را دو سر یال ab می گوئیم.

توجه: راس را نقطه و یال را خط هم می نامیم.

توجه: هر گراف را می توان با یک نمودار، موسوم به نمودار گراف نیز نمایش داد.

مثال: اگر $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{ab,ac,ae,bc,cd,de\}$ در این صورت نمودار گراف $G=(V,E)$ را رسم کنید.



تذکر: ممکن است با توجه به نحوه ترسیم نمودار یک گراف، یالها یکدیگر را در نقطه هایی به جز رؤس قطع نمایند، لذا در ترسیم یک گراف باید محل رؤس را واضح تر مشخص کنیم.

سوال ۱: نمودار متناظر با گراف های زیر را رسم کنید.

الف) $E=\{ab,ac,bd,ed\}$ ، $V=\{a,b,c,d,e\}$

ب) $E=\{ab:3 \mid a+b, a \neq b\}$ ، $V=\{1,2,3,4,5,6\}$

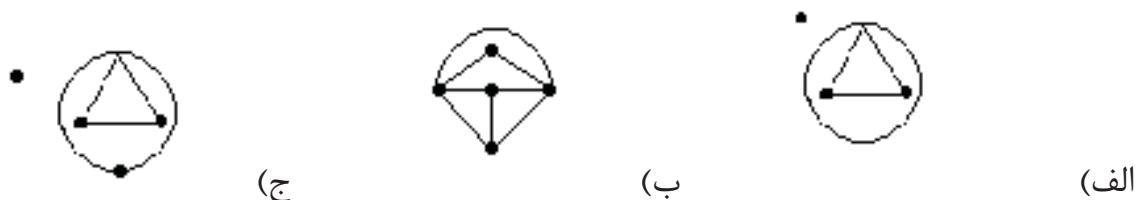
تعریف: یالی که یک راس گرافی را به خودش وصل می کند (یالی که ابتدا و انتهای آن برهم منطبق اند) را یک طوقه یا حلقه می نامیم.

شناخت گراف ساده از روی نمودار

نمودار گراف ساده G هیچکدام از موارد زیر را ندارد:

- (۱) یال جهت دار (۲) یال موازی (۳) طوقه

مثال: کدام یک از نمودارهای زیر نمودار گرافی ساده است؟



قسمت ب: یال موازی دارد پس گرافی ساده نیست.

قسمت ج: راس پایینی طوقه دارد پس گرافی ساده نیست. پس قسمت الف صحیح است.

گراف جهت دار:

تعریف: گرافی را که یال های آن دارای جهت باشد و هر یال آن به صورت زوج مرتبی از دو راس باشد را گراف جهت دار می گویند.

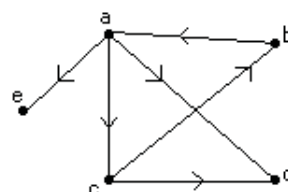
توجه: در گراف جهت دار، یال را بصورت (a,b) نشان می دهیم.

تذکر: در گراف جهت دار G به ازای هر $a, b \in V$ با شرط $a \neq b$ حداکثر دو به اصطلاح یال جهت دار یکی از a به b و دیگری از b به a وجود دارد.

تذکر: هریال بصورت (a, a) را طوقه می نامیم.

مثال: اگر $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{(a, d), (a, c), (a, e), (b, a), (c, d), (c, b)\}$ در این صورت نمودار گراف

(جهت دار) $G = (V, E)$ را رسم کنید.



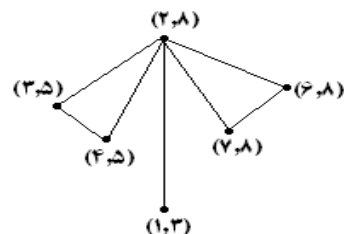
گراف چند گانه:

تعریف: گرافی که بین حداقل دو راس آن، بیش از یک یال وجود داشته باشد یا اینکه یک راس آن با خودش مرتبط باشد و یا به اصطلاح گره (طوقه) در یک راس خود داشته باشد گراف چند گانه گفته می شود.

گراف بازه ها:

تعریف: فرض کنیم $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$ بازه های باز از اعداد حقیقی باشند. با این بازه ها می توان گرافی چون G ساخت بطوریکه هر راس آن متناظر یک بازه باشد و دو راس G با این شرط مجاور باشند که بازه های متناظرشان متمایز بوده و دارای اشتراک ناتهی باشند. گراف G را گراف بازه ها می نامیم.

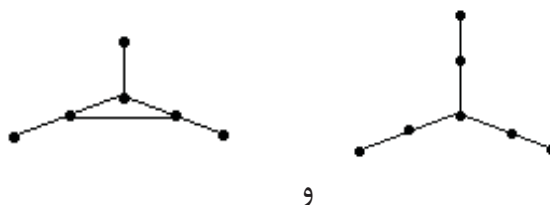
مثال: بازه های $(2,8)$ و $(3,5)$ و $(4,5)$ و $(7,8)$ و $(6,8)$ و $(1,3)$ از اعداد حقیقی داده شده اند نمودار گراف را رسم کنید.



نکته: اگر در نمودار گراف G یک چهار ضلعی بدون قطرهایش (یک حفره به طول چهار) وجود داشته باشد آن گراف نمی تواند یک گراف بازه ها باشد.

نکته: اگر گراف G یک گراف بازه ای باشد در نمودار گراف نباید به جز سه ضلعی (مثلث) چند ضلعی دیگری باشد.

نکته: اگر در گرافی شکل های زیر وجود داشته باشند آن گراف ، گراف بازه ها نخواهد بود:



گراف های یکریمخت: دو گراف را که دارای مجموعه رئوس و یال های یکسان باشند یکریمخت می نامیم

گرافهای یکریمخت ممکن است دارای شبکه های مختلف باشند ولی تنها ملاک یکسان بودن مجموعه رئوس و یالها میباشد.

فصل دوم: مرتبه، اندازه، درجه:

تعریف: تعداد راس های گراف G را مرتبه G می نامیم و آن را با $p(G)$ یا بطور خلاصه با p نشان می دهیم.

تعریف: تعداد یال های گراف G را اندازه G می نامیم و آن را با $q(G)$ یا بطور خلاصه با q نشان می دهیم.

تعریف: تعداد یالهایی از G که از یک راس می گذرند درجه آن راس نامیده می شود و آن را با $\deg v$ نشان می دهیم. اگر $\deg v$ یک عدد فرد باشد v را یک راس فرد و اگر یک عدد زوج باشد v را یک راس زوج می نامیم. (v نام راسی است که یال ها از آن می گذرند.)

قضیه: اگر $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه راس های گراف G با اندازه q باشد
 آنگاه: $\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$

اثبات: هر یال تنها دو سر دارد یعنی دقیقا از دو راس G می گذرد و لذا در سمت چپ فرمول بالا هر یال دو بار به حساب می آید.

نتیجه: تعداد راس های فرد هر گراف زوج است.

اثبات: A :مجموع راس های زوج و B :مجموع راس های فرد

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$$

$$\Rightarrow 2q = A + B \Rightarrow B = 2q - A$$

$$\sum_{i=1}^p \deg v_i = A + B \text{ از طرفی}$$

می دانیم A زوج است زیرا مجموع هر تعداد عدد زوج همواره زوج است. $2q$ نیز زوج است پس B نیز باید زوج باشد و مجموع عددهای فرد زمانی زوج است که تعداد آنها زوج باشد.

تعریف: بزرگترین عدد در بین درجه ی راس های گراف G را ماکسیمم درجه G می نامیم و آن را با $\Delta(G)$ یا بطور ساده با Δ نشان می دهیم و کوچکترین عدد در بین درجه ی راس های گراف G را مینیمم درجه G می نامیم و آن را با $\delta(G)$ نشان می دهیم.

نکته: اگر G گرافی ساده از مرتبه p و اندازه q باشد آنگاه: $0 \leq q \leq \frac{p(p-1)}{2}$

نکته: راس با درجه صفر را راس تنها یا منزوی می نامیم.

نکته: تعداد راس های فرد در هر گراف زوج است اما تعداد راس های زوج بستگی به مرتبه گراف دارد. اگر مرتبه گراف زوج باشد تعداد راس های زوج ، زوج است و اگر مرتبه فرد باشد تعداد آنها فرد است.

نکته: در گراف ساده G همواره داریم: $\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$

نکته: در گراف ساده G همواره داریم: $0 \leq \Delta \leq p-1$

تست: اگر اندازه گرافی برابر ۴۳ باشد ، این گراف حداقل چند راس دارد؟

۹(۱) ۱۰(۲)* ۱۱(۳) ۱۲(۴)

$$q \leq \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 43 \leq \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 86 \leq p(p-1) \xrightarrow{\text{حداقل}} p=10$$

تست ۱: اگر G گرافی ساده و غیر تهی باشد که تعداد یال های آن دو برابر تعداد راس هایش می باشد آنگاه G حداقل چند راس دارد؟

۴(۱) ۳(۲) ۵(۳) ۷(۴)

تست: در یک گراف با ۳۵ راس که درجه هر راس حداکثر ۵ باشد بیشترین تعداد یال برابر کدام است؟

۸۸(۴

۸۷(۳

۷۸(۲

۷۰(۱

$$2q = \sum_{i=1}^{35} \deg v_i \leq \sum_{i=1}^{35} 5 = 5 \times 35 = 175 \Rightarrow 2q \leq 175 \Rightarrow q \leq \frac{175}{2} \xrightarrow{q \in \mathbb{N}} q \leq 87$$

تست ۲: اگر G گرافی از مرتبه ۸ و اندازه ۱۱ باشد به طوریکه درجه هر راس آن ۲ یا ۳ باشد این گراف چند راس از درجه ۳ دارد؟

۲(۴

۷(۳

۶(۲

۵(۱

تست: در گراف ساده G با اندازه ۱۸ داریم $\Delta = 6$ و $\delta = 2$ مجموع بیشترین و کمترین عدد در مورد مرتبه این گراف برابر است با:

۲۴(۴

۲۲(۳

۲۰(۲

۱۸(۱

$$\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta \Rightarrow \delta = 2 \leq \frac{2 \times 18}{p} \leq 6 = \Delta \xRightarrow{\text{وارون}} \frac{1}{6} \leq \frac{p}{2 \times 18} \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 2} \frac{1}{3} \leq \frac{p}{18} \leq 1 \xrightarrow{\times 18} 6 \leq p \leq 18$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \max p = 18 \\ \min p = 6 \end{cases} \Rightarrow \max p + \min p = 24$$

گراف منتظم:

تعریف: گراف G را r -منتظم گوییم هرگاه درجه هر راس آن برابر عدد صحیح و نامنفی r باشد.

نکته: تعداد یال های هر گراف r -منتظم از مرتبه p برابر $\frac{pr}{2}$ است یعنی $2q = pr$

نکته: در هر گراف r -منتظم همواره داریم $\delta = \Delta = r$

گراف کامل:

تعریف: گراف G از مرتبه p را یک گراف کامل می گوئیم هرگاه درجه هر راس آن $p-1$ باشد و آن را با K_p نشان می دهیم.

توجه: هر گراف کامل از مرتبه p یک گراف $p-1$ منتظم است.

نکته: در گراف کامل داریم: $q = \frac{p(p-1)}{2}$

نکته: در گراف کامل داریم: $\delta = \Delta = p-1$

نکته: K_p گراف بازه هاست.

نکته: در گراف کامل ، هر دو راس باهم مجاورند.

سوال ۲: تعداد یال های گراف کامل مرتبه p از تعداد یال های گراف کامل مرتبه $p-2$ ، 13 واحد بیشتر است. p را پیدا کنید.

سوال ۳: گرافی 3-منتظم از مرتبه p با اندازه q مفروض است و داریم:

$$2q = 5p - 8$$

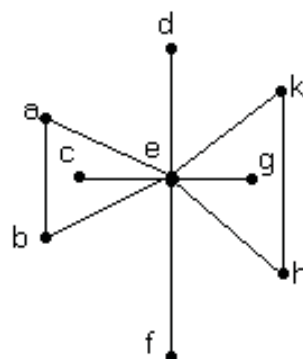
مقادیر p و q را بیابید.

سوال ۴: آیا گرافی 5- منتظم از مرتبه 17 وجود دارد؟

تست: به گراف شکل مقابل چند یال اضافه شود تا به گراف کامل تبدیل شود؟

- ۲۲(۱) ۲۳(۲) ۲۶(۳) ۲۸(۴)

$$q=10, p=9 \rightarrow q = \frac{p(p-1)}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$



پس $36 - 10 = 26$ یال کم دارد.

تست ۳: گراف کامل G دارای ۵۵ یال می باشد درجه هر راس برابر است با:

- ۹(۱) ۱۰(۲) ۱۱(۳) ۱۲(۴)

تست: مرتبه G، ۸ و اندازه آن ۲۷ می باشد. درجه چند راس آن ماکسیمم است؟

- ۵(۱) ۶(۲*) ۷(۳) ۸(۴)

در یک گراف از مرتبه ۸ حداکثر یال ها برابر $\frac{p(p-1)}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$ است و این حالت در مورد گراف کامل K_8 اتفاق می افتد ولی چون در گراف G تعداد یال ها برابر ۸ می باشد لذا گراف G همان گراف K_8 می باشد که یک یال آن حذف شده است پس دارای ۶ راس از درجه ۷ و دو راس از درجه ۶ می باشد در نتیجه دارای ۶ راس از درجه ماکسیمم است.

تست ۴: G گراف ۲-منتظم از مرتبه ۹ است. ۲ کدام عدد می تواند باشد؟

- ۵(۱) ۶(۲) ۷(۳) ۱۰(۴)

تست ۵: اگر در گراف G داشته باشیم $\delta = \Delta = 6$ و $\sum \deg v_i = 42$ ، مرتبه G کدام است؟

۳(۱) ۵(۲) ۶(۳) ۷(۴)

سوال ۵: اگر p و q به ترتیب مرتبه و اندازه گراف 6 -منتظم G باشند و داشته باشیم:

$$q - 2p = 16$$

تعداد یال های G را بدست آورید.

گراف تهی:

تعریف: گراف G از مرتبه p را یک گراف تهی گوئیم هر گاه هیچ یالی نداشته باشد و آن را با $\overline{K_p}$ نشان می دهیم و در آن داریم: $\delta = \Delta = 0$

نکته: گراف 0 - منتظم از مرتبه 1 ، هم کامل است و هم تهی

دنباله درجات رئوس یک گراف:

تعریف: اگر درجه ی راس های گراف G را بصورت یک دنباله ی نزولی بنویسیم دنباله بدست آمده را دنباله ی درجه راس های گراف G می نامیم.

توجه: در اکثر موارد از روی دنباله داده شده می توان با کنترل موارد زیر به گرافی بودن آن دنباله پی برد:

(۱) تعداد جمله های دنباله برابر مرتبه گراف است.

(۲) تعداد راس های فرد همواره زوج است و تعداد راس های زوج بستگی به مرتبه گراف دارد.

$$0 \leq \deg v_i \leq p-1 \quad (۳)$$

(۴) در هر دنباله گرافی، حداقل دو جمله یکسان وجود دارد.

(۵) در گراف ساده و غیر منتظم G از مرتبه p ، با k راس از درجه $p-1$ داریم: $\delta \leq k$

(۶) اگر دنباله داده شده دارای k جمله مساوی صفر باشد آنگاه: $\Delta \leq p-k-1$ یعنی اگر در دنباله k جمله صفر داشته باشیم بزرگترین جمله حداکثر $p-k-1$ می باشد.

(۷) بزرگترین جمله دنباله حداکثر می تواند $p-1$ باشد.

(۸) اگر یک جمله دنباله $p-1$ باشد هیچ کدام از جملات دنباله نباید صفر باشند.

(۹) اگر یک جمله برابر n باشد حداقل باید n جمله ناصفر در دنباله وجود داشته باشد.

(۱۰) هر دنباله به صورت $1, 1, 2, 2, \dots, n, n$ همیشه دنباله درجات رئوس یک گراف ساده است.

الگوریتم هول حکیمی برای تشخیص گرافی بودن دنباله ها

(۱) دنباله را به صورت نزولی مرتب می کنیم.

(۲) فرض کنیم a بزرگترین جمله این دنباله باشد آن را حذف کرده و از a جمله ی اول دنباله ی جدید هر کدام یک واحد کم می کنیم.

(۳) این دو مرحله را تا جایی ادامه می دهیم که به دنباله درجات 0 و 1 برسیم.

توجه: دنباله گرافی نیست اگر:

(۱) اگر عدد بزرگتر، از تعداد اعداد دیگر بیشتر باشد $(6,4,3,2,1)$

(۲) اگر تعداد رئوس فرد، فرد باشد $(5,4,2,2,1,1)$

(۳) اگر عدد -1 پیدا شود $(1,1,0,-1,1)$

(۴) نقص هر کدام از موارد توجه قبلی

مثال: آیا دنباله $s=3,3,2,2,1,1$ می تواند دنباله درجات رئوس یک گراف باشد.

یک راس با درجه 3 را حذف و از 3 راس دیگر هر کدام یک واحد کم می کنیم

2 حذف

پس دنباله درجات رئوس یک $2,1,1,1,1 \xrightarrow{\text{و از 2 راس دیگر 1 واحد کم}} 0,0,1,1$

گراف است.

سوال ۶: آیا دنباله $3,3,2,2,3,3$ و $3,3,2,2,3,3$ گرافیکال است؟

تست ۶: کدام یک از دنباله های زیر گرافیکال می باشد؟

(۱) $3,4,3,5,1$ (۲) $3,5,5,4,2,4,0$ (۳) $5,5,5,3,2,1$ (۴) $3,3,5,5,4,2,2$

تست ۷: کدام دنباله میتواند دنباله درجه های راس های یک گراف باشد؟

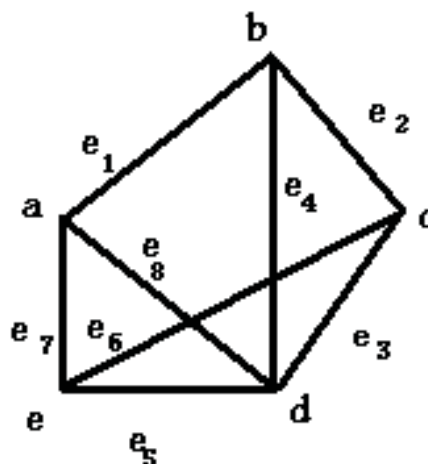
(۱) $5,4,3,2,0$ (۲) $3,3,2,2,3,3,0$ (۳) $4,3,2,2,0,3,4$ (۴) $5,3,2,3,0,3,4$

گردش و تعقیب و مسیر در گراف

تعریف: یک دنباله از رئوس و یالهای گراف را یک گردش (walk) می نامیم اگر یالها و

رئوس به دنبال هم واقع باشند و از یک راس شروع شده و به راس دیگر ختم شده باشند

مانند $ae_1 be_2 ce_3 de_4 be_1 ae_7 e$



تعریف: یک گردش که در آن هیچ یالی بیش از یک بار تکرار نشده باشد یک تعقیب (trail) می نامیم مانند :

$ae_1 be_2 ce_6 ee_7 ae_8 d$

تعریف: یک تعقیب که در آن هیچ راسی نیز تکرار نشود یک مسیر (path) نامیده میشود

مانند :

$ae_1 be_2 ce_3 d$

طول مسیر : برابر تعداد یال هایی است که از آن ها می گذریم تا از یک راس به راس

دیگر برسیم.

توجه : دنباله ی متشکل از تنها یک راس u یک مسیر با طول صفر از u به u از گراف G

می باشد.

تعریف: دور مسیری است که راس ابتدا و انتهای آن یکسان باشد .

تذکره: دو دور متفاوت باید حداقل یک یال متفاوت داشته باشند. یعنی دو دور که مجموعه

ی یال های آنها برابر باشند را یکسان در نظر میگیریم.

نکته: اگر در یک گراف $p \geq q$ باشد حتما دور خواهد داشت.

نکته: اگر G گرافی ساده باشد بطوریکه $\delta \geq 2$ آنگاه G دور دارد.

نکته: هر دور به طول n و $2n$ نمایش دنباله ای دارد.

توجه: کوتاهترین مسیر بین دو راس را فاصله دو راس می نامیم.

گراف همبند:

تعریف: گراف G را همبند می نامیم هرگاه بین دو راس آن مسیری وجود داشته باشد. در

غیر این صورت G را ناهمبند مینامیم.

توجه: در گراف های ناهمبند هر یک از قسمت های جدا افتاده را یک بخش یا مولفه از

آن گراف می نامیم.

تذکره: گراف های همبند فقط از یک بخش یا مولفه تشکیل شده اند.

نکته: هر نقطه منفرد به تنهایی خود یک بخش محسوب می شود.

نکته: اگر G گرافی ساده از مرتبه p باشد به طوریکه $\Delta = p-1$ آنگاه G همبند است.

نکته: اگر G گرافی ساده و همبند از مرتبه p و اندازه q آنگاه $q \geq p-1$

توجه: عکس نکته قبل همواره صحیح نیست.

نکته: اگر G گرافی از مرتبه p و اندازه q باشد بطوریکه $q < p-1$ آنگاه G ناهمبند است.

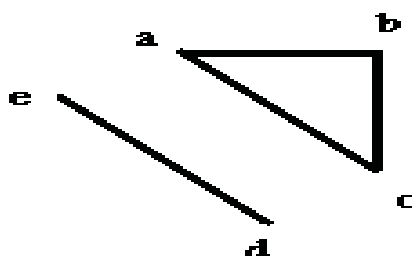
مثال: گراف $G=(V,E)$ که در آن $V=\{a,b,c,d,e\}$ و $E=\{ab,ac,bc,de\}$ مفروض است.

الف) نمودار گراف G را رسم کنید.

ب) آیا گراف همبند است؟

ج) گراف G چند بخش است؟

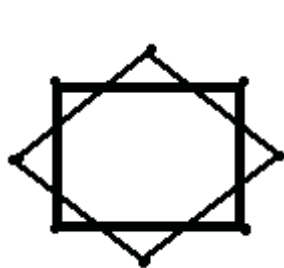
(الف)



ب) خیر این گراف همبند نیست زیرا برخی رئوس آن مانند رئوس a و d وجود ندارد.

ج) این گراف از دو بخش تشکیل شده است.

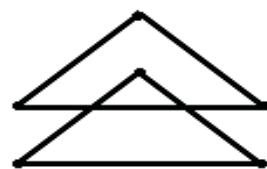
تست: کدام گراف همبند است؟



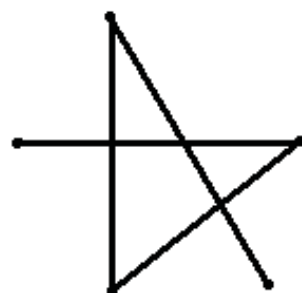
(۳)



(۲)



(۱)



(۴)

گزینه ۴ زیرا بنابه تعریف بین هر دو راس دلخواه حداقل یک

مسیر باید وجود داشته باشد

سوال ۷: گراف G , ۳-منتظم از مرتبه p است و $q+4=2p$ است. q و p را بدست آورید و

یک گراف همبند و یک گراف ناهمبند با این شرایط رسم کنید.

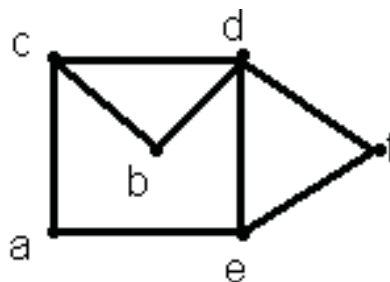
فاصله بین دو راس در گراف همبند:

فرض میکنیم $G=(V,E)$ یک گراف همبند باشد و $u, v \in V$. در این صورت طول

کوتاهترین مسیر از u به v را فاصله راس u از v می نامیم و آن را با $d(u,v)$ نشان

میدهیم.

مثال: در گراف شکل مقابل فاصله راس a از راس b را بیابید.



از راس a به b مسیرهای متفاوتی مانند $acdb, aedb, acdb, aefdb$ به طول های ۲ و ۳ و ۴

وجود دارد ولی چون کوتاهترین مسیر ۲ میباشد لذا $d(a,b)=2$

توجه: فاصله بین دو راس در گراف همبند دارای ویژگی های زیر است:

الف) $d(a,b)=0$ اگر فقط اگر $a=b$

ب) به ازای هر $a,b \in V$ داریم $d(a,b)=d(b,a)$

ج) به ازای هر $a,b \in V$ داریم $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$

تست: در گراف همبند $G=(V,E)$ داریم $a,b,c \in V$ $d(b,c)=x$

$d(a,b)=6$ و $d(a,c)=3$ در این صورت حداقل مقدار x کدام است؟

۲ (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) \rightarrow 6 \leq 3 + x \rightarrow x \geq 3$$

گراف همیلتنی:

تعریف: اگر گراف G از مرتبه P ($P \geq 3$) دوری از مرتبه P داشته باشد آنگاه G را گراف

همیلتنی می نامیم به عبارت دیگر G همیلتنی است. هرگاه دوری داشته باشد که از همه ی

راس های G بگذرد.

نکته: اگر G همیلتنی باشد آنگاه G همبند بوده و $\delta \geq 2$ می باشد.

نکته: گراف کامل K_P به ازای $(P \geq 3)$ همیلتنی است.

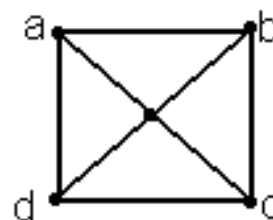
نکته: فرض کنیم G گرافی همیلتنی باشند، اگر K راس و یال های متصل به آنها را از G حذف

کنیم، گراف حاصل حداکثر از K بخش جدا از هم تشکیل خواهد شد.

توجه: یک دور همیلتنی از هر یال حداکثر یک بار عبور میکند یعنی ممکن است از برخی

یالها اصلا عبور نکند.

مثال: در گراف کامل (K_4) یال های ac و bd روی دور همیلتنی $abcd$ واقع نیستند.



سوال: گراف G "۳-منتظم" است و اندازه آن 3 واحد کمتر از دو برابر مرتبه آن است.

(الف) مرتبه و اندازه G را مشخص کنید.

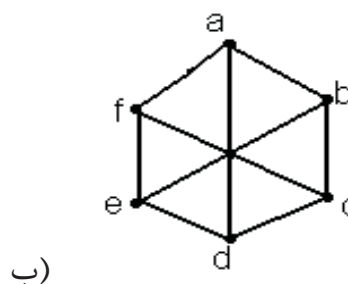
(ب) گراف G را رسم کنید.

(ج) آیا گراف G همیلتنی است؟

(الف)

$$2q = pr \rightarrow 2q = 3p$$

$$2p - 3 = q \xrightarrow{\times 2} 4p - 6 = 2q \rightarrow 4p - 6 = 3p \rightarrow p = 6 \rightarrow q = 9$$



(ب)

(ج) بله زیرا دور abcdefa در آن دوری از مرتبه ۶ است.

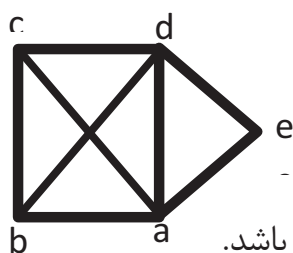
گراف اویلری و نیم اویلری

تعریف: گراف همبند G را یک گراف اویلری گوئیم هرگاه بتوان از یک راس آن شروع کرده و هریال را دقیقاً یکبار طی نمود و به راس آغازی بازگشت. (یعنی دارای گذرگاه اویلری باشد).

تعریف: گراف همبند G را یک گراف نیم اویلری می گوئیم هرگاه بتوان از یک راس آن شروع کرده و هریال را دقیقاً یکبار طی نمود. (یعنی دارای گذرگاه نیم اویلری باشد).

تذکر: در گراف نیم اویلری لازم نیست راس آغاز و پایان یکی باشد.

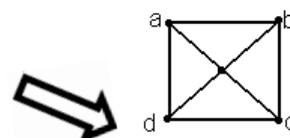
مثال: گراف زیر یک گراف نیم اویلری است زیرا دارای گذرگاه نیم اویلری cabcdaedb است است که هریال را دقیقاً یکبار طی میکند ولی این گراف اویلری نیست زیرا نمی توان از یک



راس شروع نمود و هریال را دقیق

یک بار طی نمود و به راس اولیه حرکت بازگشت.

مثال: گراف K_4 گرافی است که اویلری و نیم اویلری نمی باشد.



نکته: گراف همبند G اویلری است اگر و فقط اگر درجه هر راس آن زوج باشد. (قضیه)

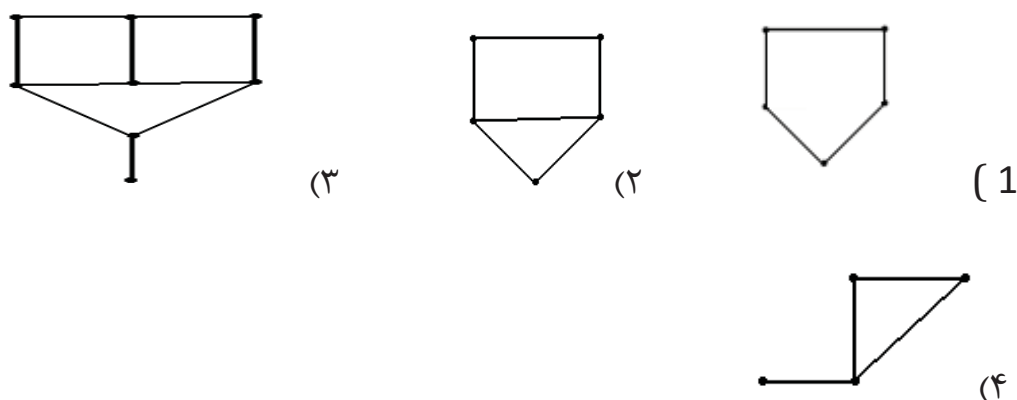
نکته: گراف همبند G نیم اویلری است اگر و فقط اگر 0 یا 2 راس از درجه فرد داشته باشد. (قضیه)

تذکر: گراف معمای پل های گونیگسبرگ نه اویلری است نه نیمه اویلری.

نکته: در گراف نیمه اویلری، گذر اویلری از یک راس فرد شروع و به یک راس فرد دیگر ختم می شود.

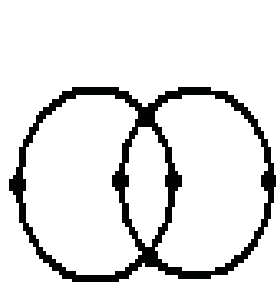
نکته: گراف کامل K_p به ازای مقادیر فرد P اویلری است.

تست: کدام گراف همیلتونی است و اویلری نیست؟

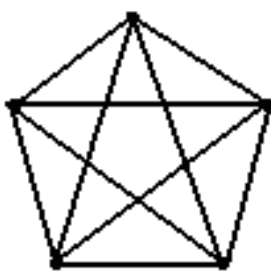


چون در گراف گزینه ۱ درجه همه رئوس زوج می باشد، پس این گراف اویلری است و بقیه گراف ها که دارای رئوس با درجه فرد هستند اویلری نمی باشند اما گراف گزینه ۲ همیلتنی است زیرا یک دور همیلتنی از هر راس به خودش وجود دارد پس گزینه ۲ صحیح است.

تست: کدام گراف اویلری است و همیلتونی نیست؟



(۳)



(۲)



(۱)



(۴)

گراف های ۱ و ۲ هر دو اویلری و همیلتونی هستند زیرا درجه همه رئوس آنها زوج و اویلری هستند و هردوی آنها دارای مسیر ساده ای از رئوس بدون تکرار از هر راس به خودش می باشند گراف گزینه ۴ نیز اویلری نمی باشد زیرا درجه ۴ راس آن ۳ می باشد پس پاسخ گزینه ۳ است.

تست:

درجه راس های گراف همبند G عبارت است از ۱ و ۲ و ۳ و ۴ بطوریکه دو راس با درجه های بزرگتر مجاور نیستند تعداد دور ها با طول ۳ در این گراف کدام است؟

۳(۴)

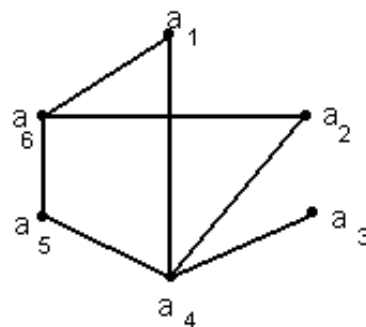
۲(۳)

۱(۲)

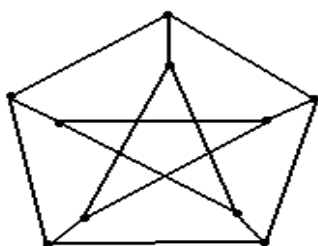
۰(۱)

گزینه ۱ زیرا: چون دو راس با درجات ۳ و ۴ مجاور نیستند پس

با دقت در شکلی که رسم میکنیم مشخص است که از هیچ راسی به خودش یک مسیر به طول ۳ وجود ندارد.



گراف پترسن: گراف شکل زیر را که $p=10$ و $q=15$ ، گراف پترسن می نامیم.



(۱) گراف پترسن دور هایی به طول ۳ و ۴ و ۷ و ۱۰ ندارد.

(۲) گراف پترسن همیلتونی نیست.

(۳) گراف پترسن اویلری نیست.

(۴) طول کوتاهترین مسیر موجود بین راس های غیر مجاور ۲ می باشد.

(۵) در این گراف دورهایی به طول ۵ و ۶ و ۸ و ۹ وجود دارد.

(۶) این گراف ۳-منتظم است.

(۷) ماگزیمم دورش ۹ است.

(۸) با افزودن یک یال گراف همیلتونی میشود

فصل سوم: درخت وماتریس

تعریف: گراف همبندی را که هیچ دور نداشته باشد درخت می نامیم.

قضیه: بین هر دو راس هر درخت مفروض دقیقا یک مسیر وجود دارد.

اثبات: اگر دو راس جدا ازهم نباشند و روی هم بیفتند که واضح است تنها یک مسیر به

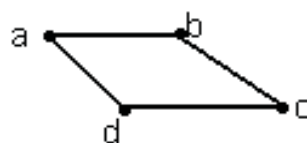
طول صفر وجود دارد. فرض کنیم u و v دو راس متمایز (جدا ازهم) درخت G باشند چون

هر درخت همبند است پس حداقل یک مسیر بین u و v وجود دارد اما اگر دو مسیر مختلف

وجود داشته باشد این دو مسیر مختلف یک دور در G ایجاد می کنند و این خلاف تعریف

درخت است که دور ندارد.

مثلا: شکل زیر درخت نیست چون بین هر دو راس بیش از یک مسیر وجود دارد و دور



بوجود آمده است.

قضیه: هر درختی که بیش از یک راس داشته باشد حداقل دو راس از درجه یک دارد.

بدیهی است که حکم برقرار است زیرا هر دو از درجه یک هستند. اگر $p=2$ 

فرض استقراء: $p=k$ دست کم دو راس از درجه یک دارد.

حکم استقراء: $p=k+1$ دست کم دو راس از درجه یک دارد؟

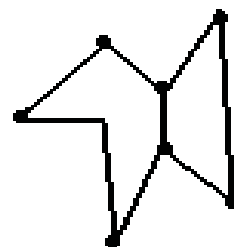
دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد برای این $k+1$ راس:

(۱) اگر راسی مثل u از درجه یک بین آنها باشد.

در اینصورت راس u ویالی را که از آن می گذرد حذف میکنیم. گرافی مثل G' بدست می آید که درخت است و k راس دارد پس طبق فرض استقرا حداقل دو راس از درجه یک دارد (در نتیجه G هم این خاصیت را دارد).

(۲) ممکن است درجه ی هیچ راسی از ۲ کمتر نباشد.

در این صورت یک راس از G را در نظر می گیریم و از آنجا مسیری را شروع به پیمودن می کنیم که هر بار به راسی تازه ویالی تازه برسیم (که آن یال از راس بگذرد) اینکار در جایی باید متوقف شود و چون طبق فرض شماره ۲ درجه کمتر از دو نداریم باید به یکی از راس های قبلی برسیم که در اینصورت در G دور بوجود می آید و این با تعریف درخت تناقض دارد پس فرض ۲ نیز غلط است و دست کم دو راس از درجه یک داریم.



مثلا در شکل بالا چون در آن دست کم دو راس از درجه یک وجود

ندارد پس درخت نیست.

قضیه: اگر G درختی با p راس و q یال باشد آنگاه : $p=q+1$

$$1=0+1 \Rightarrow q=0 \rightarrow p=1 \text{ رابطه برقرار است.}$$

$$p=q+1 \rightarrow q=k-1 \Rightarrow P=k \text{ فرض استقراء}$$

$$k+1=q+1 \rightarrow q=k \Rightarrow P=k+1 \text{ حکم استقراء}$$

میدانیم (طبق قضیه قبل) هر درخت که بیش از یک راس داشته باشد دست کم دو راس از درجه یک دارد پس یک راس به نام v را که درجه اش یک باشد در نظر می گیریم و آن را از $k+1$ راس حذف می کنیم گرافی که حاصل می شود k راس دارد که طبق فرض استقراء $k-1$ یال دارد و چون راسی که حذف می کنیم یالی را که از آن عبور می کند را نیز حذف می کنیم نتیجه می گیریم گراف اصلی یعنی G ، K یال داشته است که با حذف یک یال آن گرافی حاصل شده است که $k-1$ یال دارد پس درخت G دقیقاً K یال دارد.

توجه: گراف های K_1 و K_2 تنها درخت های با یک و دو راس هستند و گراف های مربوط به هیدروکربن های اشباع شده $(C_n H_{2n+2})$ نیز درخت هستند.

توجه: طبق قضیه $p=q+1$ پس p و q دو عدد متوالی بوده و یکی زوج و دیگری فرد است.

نکته: در هر درخت $p+q$ فرد است و pq زوج است.

سوال ۸: اگر کشوری دارای p شهر باشد که از هر شهر بتوان به شهر دیگر رفت (هرجاده بین دو شهر کشیده شده است) حداقل تعداد جاده ها را بیابید.

تست ۸: گراف همبند G فاقد دور راست، مجموع مرتبه و اندازه آن کدام عدد می تواند باشد؟

۱۲(۱) ۱۵(۲) ۱۸(۳) ۲۰(۴)

تست ۹: بین هر راس از گراف G دقیقاً یک مسیر وجود دارد. اگر این گراف شامل ۷ راس

از درجه یک و ۵ راس از درجه ۲ و k راس از درجه ۳ باشد، k کدام است؟

- ۶(۱) ۵(۲) ۴(۳) ۳(۴)

تست ۱۰: تعداد مسیرهای متفاوت به طول حداقل یک، در یک درخت مرتبه ۱۰ برابر است

با:

- ۴۵(۱) ۵۵(۲) ۴۰(۳) ۵۰(۴)

تست ۱۱: گراف همبند G از مرتبه ۲۰ است. حداقل و حداکثر اندازه G برابر است با:

- ۱۸(۱) و ۱۹۰ ۱۸(۲) و ۱۹۲ ۱۹(۳) و ۱۹۰ ۱۹(۴) و ۱۹۲

سوال: دنباله نزولی $1, \dots, 2, 3, 3, 3, 3$: دنباله درجات راس های یک درخت است.

الف) تعداد رئوس درجه ۱ در این درخت را پیدا کنید؟

ب) نموداری از این درخت رسم کنید.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\text{اگر مرتبه درخت}} & \\ & p & \\ X & \xrightarrow{\text{تعداد رئوس به درجه ۱}} & p=5+x \quad (1) \end{array}$$

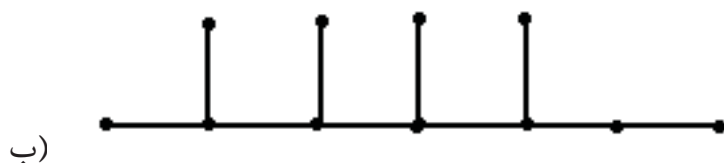
$$2q = \sum_{i=0}^p \deg v_i = 4(3) + 2 + x$$

$$\Rightarrow 2q = 14 + x \quad (2)$$

$$2q = 2p - 2 \Rightarrow q = p - 1 \quad (3) \quad \text{از طرفی دیگر در هر درخت}$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow 14 + x = 2p - 2 \Rightarrow 14 + x = 2(5 + x) - 2 \Rightarrow 14 + x = 10 + 2x - 2$$

$$\Rightarrow x = 6$$



سوال ۹: گراف G از مرتبه $p \geq 2$ است اگر درجه همه راس ها زوج باشد ثابت کنید G درخت نیست.

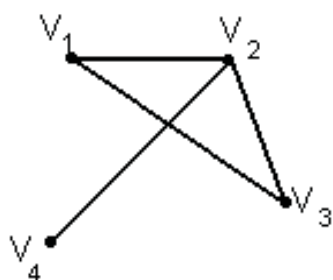
سوال ۱۰: درختی ۲ راس از درجه ۵ و ۳ راس از درجه ۳ دارد و راس از درجه ۴ ندارد و

ماکسیمم درجه آن ۵ است. اگر مرتبه این درخت ۲۵ باشد چند راس از درجه ۲ دارد؟

ماتریس مجاورت:

تعریف: برای گراف $G(V, E)$ ماتریس مربعی A را که بصورت یک جدول $n \times n$ رسم شده و اگر راس V_i با راس V_j مرتبط باشد، درایه a_{ij} مساوی یک و در غیر این صورت مساوی صفر می باشد. ماتریس مجاورت گراف G می نامیم.

مثال: ماتریس مجاورت گراف زیر را بنویسید.



$$\begin{matrix} & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

توجه: ماتریس مجاورت دارای ویژگی های زیر است:

(۱) درایه های روی قطر اصلی این ماتریس همگی صفر هستند، زیرا هیچ راسی با خودش مرتبط نمی باشد. (در گراف های چندگانه این ویژگی برقرار نیست زیرا ممکن است روی هر راس طوقه وجود داشته باشد).

(۲) ماتریس A متقارن است زیرا $a_{ij} = a_{ji}$ یعنی اگر راس V_i با راس V_j مرتبط باشد، راس V_j نیز با راس V_i مرتبط است (این ویژگی برای گراف های جهت دار برقرار نیست).

(۳) هر ماتریس با این ویژگی ها متناظر با یک و فقط یک گراف می باشد. (هر گراف دیگر که رسم شود، با این گراف یکرخت است).

قضیه: فرض کنید A ماتریس مجاورت گراف G با $V(G) = \{v_1, \dots, v_p\}$ باشد آنگاه درایه

واقع در سطر i ام و ستون j ام ماتریس A^2 برابر است با درجه راس V_i در گراف G

اثبات:

ستون i ام A $\times$ سطر j ام $A = a_{ji}$ درایه سطر i ام و ستون j ام A^2

و چون A ماتریسی متقارن است سطر و ستون آن باهم برابرند پس :

(در واقع ۱ها در هم ضرب می شوند، بقیه صفراند) سطر i ام $A \times$ سطر j ام $A = a_{ij}$

از آنجا که تعداد "یک" های سطر i ام برابر $\deg V_i$ است لذا برای بدست آوردن a_{ij} به

تعداد $\deg V_i$ اعداد $1=1 \times 1$ را باهم جمع میکنیم پس:

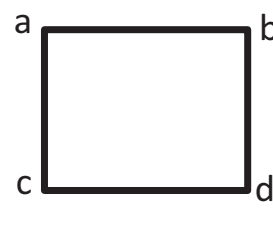
$$a_{ij} = \deg V_i$$

سوال: اولاً ماتریس مجاورت گراف "۲- منتظم" از مرتبه ۴ را بنویسید.

ثانیا: اگر A ماتریس مجاورت گراف فوق باشد رابطه بین مجموع درایه های قطر اصلی A^2 و

اندازه گراف متناظر را مشخص کنید.

$$\begin{matrix} & a & c & d & b \\ \begin{matrix} a \\ c \\ d \\ b \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



اولاً:

$\Leftarrow$

گراف "۲- منتظم" از مرتبه ۴

ثانیا: مجموع درایه های قطر اصلی A^2 مساوی مجموع درجات رئوس گراف متناظر و در

نتیجه مساوی دو برابر تعداد یال هاست (طبق قضیه فصل ۱: $\sum \deg v_i = 2q$)

یعنی اگر $A^2 = [a_{ij}]$ در این صورت $\sum_{i=1}^4 a_{ij} = 2q$

سوال 11: A ماتریس مجاورت گراف G است و A^2 بصورت زیر می باشد.

(الف) دنباله درجه راس ها را به ترتیب نزولی بنویسید.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(ب) مرتبه و اندازه گراف را مشخص کنید.

تست: ماتریس مجاورت گراف کامل K_n شامل چند ۱ است؟

$$(۱) \quad \frac{n^2-n}{2} \quad (۲) \quad \frac{n^2+n}{2} \quad (۳) \quad n^2 - n \quad (۴) \quad n^2 + n$$

گزینه ۳: میدانیم تعداد یک های ماتریس مجاورت مساوی مجموع درجات تمام رئوس گراف می باشد و چون مجموع درجات رئوس، دو برابر اندازه آن است و اندازه گراف کامل K_n برابر

$\frac{n(n-1)}{2}$ است. پس مجموع درجات رئوس و تعداد یک های ماتریس مجاورت مساوی

$2 \times \frac{n(n-1)}{2}$ یعنی $n(n-1)$ یا n^2-n می باشد

تست: گراف مرتبه ۶ G که درجه تمام رئوس آن مساوی ۳ می باشد، مفروض است. اگر

ماتریس مجاورت این گراف A باشد. مجموع درایه های قطر اصلی ماتریس A^2 کدام است؟

$$(۱) ۱۸ \quad (۲) ۹ \quad (۳) ۳۶ \quad (۴) ۲۴$$

چون درایه های واقع بر قطر اصلی A^2 طبق قضیه همان درجات رئوس گراف می باشند

پس مجموع آنها مساوی مجموع درجات رئوس گراف است که مساوی است با $18 = 3 \times 6$

پس گزینه ۱ صحیح است.

نکته: درجه راس v_i از گراف $G(V,E)$ برابر است با درایه واقع در سطر i ام و ستون i ام از

ماتریس A^2

نکته: تعداد یک های ماتریس مجاورت هر گراف $2q$ (اندازه گراف است) و تعداد صفرهای

آن $p^2 - 2q$ می باشد.

نکته: بنا به نکته قبل و رابطه $q = p - 1$ در هر درخت، اگر درختی با مرتبه p و اندازه q با

ماتریس مجاورت m در نظر بگیریم داریم: $2q = 2p - 2 =$ تعداد یک های

ماتریس مجاورت درخت

$$q^2 + 1 = \text{تعداد صفرهای ماتریس مجاورت درخت}$$

نکته: اگر A ماتریس مجاورت K_p باشد در این صورت: $|A| = \begin{cases} p - 1 & \text{فرد است } p \\ -(p - 1) & \text{زوج است } p \end{cases}$

تست: اگر A ماتریس مجاورت K_{12} باشد در این صورت $|A|$ کدام است؟

$$11(1) \quad -11(2) \quad 10(3) \quad -10(4)$$

$$p=12 \rightarrow |A| = -(p-1) = -(12-1) = -11 \quad K_{12} \quad \text{پس گزینه ۲ صحیح}$$

است.

تست: تعداد صفرهای موجود در ماتریس مجاورت درخت از اندازه ۷ برابر کدام است؟

$$q^2 + 1 = 49 + 1 = 50 \quad 35(4) \quad 50(3) \quad 49(2) \quad 28(1)$$

گزینه ۳

تست: تعداد "یک" های سطر سوم از ماتریس مجاورت گراف ۹- منتظم G کدام است؟

$$1(1) \quad 3(2) \quad 9(3) \quad 8(4)$$

گزینه ۳ زیرا:

تعداد "یک" های هر سطر ماتریس مجاورت گراف G با درجه راس نظیر آن برابر است پس در ماتریس مجاورت گراف r -منتظم تعداد "یک" های هر سطر r تا است.

نکته: در هر ماتریس مجاورت گراف کامل همه درایه ها به جز قطر اصلی یک هستند.

..... رابطه هم ارزی

اگر $V(G)$ مجموعه راس های G و a و b دو راس از آن باشند. آنگاه رابطه R را بصورت : aRb اگر و فقط اگر از a به b مسیری در G وجود داشته باشد در نظر میگیریم و می گوئیم R رابطه ای هم ارزی روی $V(G)$ است.

کلاس های هم ارزی

کلاس هم ارزی عضوی از $V(G)$ مانند X مجموعه $[x] = \{y \in V(G) : xRy\}$ می باشد و با توجه به این تعریف $[x]$ شامل راس هایی از G است که از x به آنها در G مسیری وجود داشته باشد.

مکمل گراف: مکمل گراف ساده G که آنرا با $\bar{G}$ نشان می دهیم گرافی ساده است که مجموعه راس های آن همان مجموعه راس های G می باشد و دو راس در $\bar{G}$ مجاورند اگر و فقط اگر در G مجاور نباشند.

نکته: از روی هم قرار دادن گرافهای G و $\bar{G}$ گراف کامل بدست می آید.

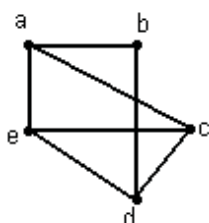
$$\underline{\text{نکته:}} \deg_G^u + \deg_{\bar{G}}^u = p-1$$

$$q(G) + q(\bar{G}) = \binom{p}{2}$$

حل چند سوال:

۱) گراف $G(V, E)$ و $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{ab, ac, ae, bd, ce, cd, de\}$ مفروض است:

الف) گراف G را رسم کنید.



ب) یک دور به طول ۴ و یک دور به طول ۵ بنویسید.

ج) چه یال هایی به G اضافه کنیم تا کامل شود؟

ب) $abdea$ دوری به طول ۴ و $abdcea$ دوری به طول ۵ می باشد

ج) برای اینکه گراف G کامل شود باید تعداد یال های آن $q = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ باشد پس be و

ad و bc باید اضافه شوند.

۲) آیا گرافی ۵-منتظم از مرتبه ۱۱ وجود دارد چرا؟

خیر زیرا اگر چنین گرافی وجود داشته باشد و تعداد یال های آن برابر q باشد باید داشته

باشیم $2q = 11 \times 5$ و چون $2q$ زوج است این تساوی غیر ممکن است.

۳) فرض کنید G گرافی ساده از مرتبه P و اندازه ۱۲ باشد. اگر G یک گراف r -منتظم باشد و

داشته باشیم $2r - p = 2$ مقادیر r و p را بدست آورید؟

$$pr = 24$$

چون G گرافی r -منتظم از مرتبه p و اندازه ۱۲ است:

$$2r - p = 2 \rightarrow p = 2r - 2 \Rightarrow (2r - 2)r = 24 \Rightarrow 2r^2 - 2r - 24 = 0 \rightarrow \div 2$$

$$r^2 - r - 12 = 0 \Rightarrow (r - 4)(r + 3) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} r = 4 & \xrightarrow{(1)} & p = 6 \\ & & r = -3 \end{matrix}$$

غ ق ق

بیشتر بدانیم:

(۱) در گراف جهت دار G از مرتبه p و اندازه q داریم: $q \leq p^2$

(۲) تعداد گراف های ساده که با p راس ساخته می شوند: $2^{\frac{p(p-1)}{2}}$

(۳) تعداد گراف های جهت دار با p راس: 2^{p^2}

(۴) تعداد گراف های جهت دار با p راس و بدون طوقه: 2^{p^2-p}

(۵) تعداد گراف های جهت دار از مرتبه p و اندازه q : $\binom{p^2}{q}$

(۶) میانگین درجه های رئوس G با مرتبه p و اندازه q : $\frac{2q}{p}$

(۷) در گراف ساده G همواره داریم: $\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$

(۸) در گراف ساده G همواره داریم: $0 \leq \Delta \leq p-1$

(۹) در گراف ساده و غیر منتظم G از مرتبه p ، با K راس از درجه $p-1$ داریم: $\delta \leq k$

(۱۰) در گراف r منتظم داریم: $\delta = \Delta = r$

(۱۱) گراف $\overline{kp}$ گراف بازه هاست (گراف $\overline{kp}$ تهی است)

(۱۲) گراف k_p گراف بازه هاست.

(۱۳) تعداد مسیرهای به طول k بین a و b در گراف کامل: $\frac{(p-2)!}{(p-k-1)!}$

(۱۴) تعداد مسیرهای بین دو راس a و b برابر است با $\sum_{k=0}^{p-2} \frac{1}{k!}$ (گراف کامل)

(۱۵) تعداد مسیرهای به طول k شامل یال ab : $k! \binom{p-2}{k-1}$ (گراف کامل)

(۱۶) تعداد مسیرهای به طول k شامل هر دو راس a و b : $\frac{(k+1)!}{2} \binom{p-2}{k-1}$ (گراف کامل)

(۱۷) اگر G گرافی همبند از مرتبه p و اندازه q باشد آنگاه: $p-1 \leq q \leq \binom{p}{2}$

(۱۸) اگر G گرافی ناهمبند از مرتبه p و اندازه q باشد آنگاه: $0 \leq q \leq \binom{p-1}{2}$

(۱۹) وقتی $q=0$ و $p=1$ گراف همبند است پس گراف های تهی بجز $\overline{k_1}$ ناهمبند هستند.

(۲۰) وقتی $q=p-1$ یا $q=\binom{p-1}{2}$ گراف میتواند همبند یا ناهمبند باشد.

(۲۱) اگر G گرافی از مرتبه p و اندازه q باشد بطوریکه $q < p-1$ آنگاه G ناهمبند است.

(۲۲) در گراف های کامل K_p فاصله بین هر دو راس متمایز برابر یک است.

(۲۳) اگر G گرافی ساده از مرتبه p باشد آنگاه $p \in [3, p]$ طول دور.

(۲۴) تعداد دورهای به طول $k, k \geq 3$ در گراف کامل: $\frac{(k-1)!}{2} \binom{p}{k}$

(۲۵) اگر در یک گراف $q \geq p$ باشد حتما دور خواهد داشت.

(۲۶) اگر G گرافی ساده باشد بطوریکه $\delta \geq 2$ آنگاه G دور دارد.

(۲۷) هر دور به طول $n, 2n$ نمایش دنباله ای دارد.

(۲۸) گراف کامل K_p به ازای $p \geq 3$ همیلتونی است.

(۲۹) گراف کامل K_p دارای $\frac{(p-1)!}{2}$ دور به p طول می باشد. (دورهای همیلتونی)

(۳۰) در هر درخت از مرتبه p ، تعداد مسیرهای متفاوت به طول حداقل یک: $\binom{p}{2}$ میباشد

(۳۱) در درخت از مرتبه p ، $\binom{p+1}{2}$ مسیر وجود دارد.

(۳۲) در گراف ساده p ، اگر درجه یکی از راس ها $p-1$ باشد این گراف همبند است.

(۳۳) ماتریس مجاورت گراف همبند از مرتبه p حداقل $2p-2$ داریه یک دارد.

(۳۴) اگر A ماتریس مجاورت گراف کامل K_p باشد آنگاه حداکثر مقدار درایه های قطر اصلی

A^2 برابر با $p-1$ و خارج قطر اصلی برابر $p-2$ می باشند.

۳۵) ماتریس مجاورت برای گرافی جهت دار نیز قابل تعریف است، بدین صورت که اگر G

گرافی جهت دار با مجموعه راس های $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ باشد ماتریس مجاورت G ماتریس

$p \times p$ مانند $A = [a_{ij}]$ با درایه های صفر و یک است، که درایه a_{ij} در صورتی برابر یک

است که از v_i به v_j یال جهت دار وجود داشته باشد.

۳۶) حداقل تعداد رئوس ایزوله (منفرد) $= p - 2q$

۳۷) در هر گراف کامل تعداد کل مسیرها به طول m : $\frac{p!}{2(p-m-1)!}$

۳۸) در هر گراف کامل تعداد دورها به طول m : $\frac{(m-1)!}{2} \binom{p}{m}$

۳۹) اگر $\Delta = P - 1$ باشد گراف حتما همبند است.

۴۰) اگر $q < p - 1$ باشد گراف ناهمبند است.

۴۱) درجه هر راس گراف همیلتنی حداقل ۲ است.

۴۲) اگر $\delta \geq \frac{p}{2}$ باشد گراف حتما همیلتنی است.

۴۳) تعداد گراف های همیلتنی که با p راس می توان ساخت: $1 + \frac{p(p-3)}{2}$

۴۴) حداکثر طول مسیر در هر درخت: $p - 1$

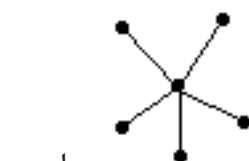
۴۵) ۲ درخت از مرتبه ۴ وجود دارد.

۴۶) ۳ درخت از مرتبه ۵ وجود دارد.

۴۷) ۶ درخت از مرتبه ۶ وجود دارد.

۴۸) ۱۱ درخت از مرتبه ۷ وجود دارد.

۴۹) ۲۴ درخت از مرتبه ۸ وجود دارد.



داریم:

(۵۰) در هر درخت ستاره ای

الف) یک راس از درجه $p-1$ دارد.

ب) $p-1$ راس از درجه یک دارد

ج) ماگزیمم طول مسیر ممکن ۲ است.

(۵۱) اگر A ماتریس مجاورت گراف کامل K_p باشد آنگاه: (در A^2) مجموع درایه های

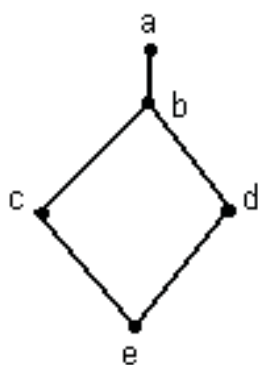
روی قطر اصلی برابر است با: $p(p-1)$

و مجموع کامل درایه ها برابر است با $p(p-1)^2$

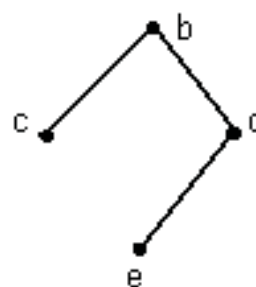
(۵۲) زیر گراف های یک گراف:

گراف $G'(V', E')$ را زیر گراف، گراف $G(V, E)$ می نامیم اگر و تنها اگر:

$V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$ باشد:



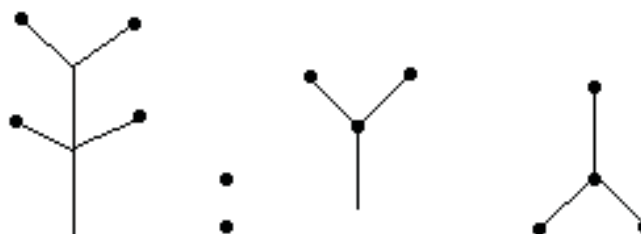
(G)



(G')

(۵۳) تعریف جنگل: گرافی را که الزاما همبند نبوده و دارای هیچ دور نباشد یک جنگل می

نامیم.



جنگل

(۵۴) اگر مسیرهای به طول صفر را هم در نظر بگیریم تعداد کل مسیرها در هر درخت از

مرتبه p برابر است: $\binom{p}{2} + p$

(۵۵) اگر یک یال از درخت G را حذف نماییم گرافی ناهمبند ایجاد می شود که هرکدام از دو

بخش آن یک درخت است.

(۵۶) هر گراف ساده از مرتبه P با بیش از $\binom{P-1}{2}$ یال حتما همبند است.

(۵۷) اگر A ماتریس مجاورت نظیر k_p باشد داریم:

مجموع درایه های هر سطر A^2 برابر است با: $(p-1)^2$

(۵۸) نکته شماره ۱۴ را میتوان با این فرمول نیز بیان کرد: $\sum_{k=0}^{p-2} (p-2, k)$

که در آن $p \geq 3$, $(p-2, k) = \frac{(p-2)!}{(p-2-k)!}$

(۵۹) نکته شماره ۱۴ را می توان اینگونه نیز محاسبه کرد:

به از $p \geq 3$ تعداد مسیرهای متفاوت بین دو راس متمایز k_p برابر است با: $[(p-2)!e]$

که در آن $[]$ نماد جز صحیح است و $e \cong 2/72$ عدد نپر می باشد.

۶۰) تعداد گراف ساده از مرتبه p و با مجموعه راس های V و اندازه q برابر است با: $\binom{p}{q}$

۶۱) در گراف کامل اگر ماتریس مجاورتش را A در نظر بگیریم داریم:

الف) مجموع درایه های غیر واقع بر قطر اصلی در یک سطر A^2 مساوی است با

$$(p-1)(p-2)$$

ب) مجموع تمام درایه های غیر واقع بر قطر اصلی در A^2 مساوی است با:

$$p(p-1)(p-2)$$

۶۲) در ماتریس مجاورت هر گراف r - منتظم از مرتبه P داریم:

۱) تعداد یک ها در هر سطر برابر r و تعداد صفرها در هر سطر برابر است با: $p-r$

۲) تعداد صفرهای غیر واقع بر قطر اصلی در هر سطر برابر است با: $p-r-1$

۳) تعداد کل یک ها در ماتریس مجاورت به ترتیب برابر است با: pr

۴) تعداد کل صفرها در ماتریس مجاورت برابر است با: $p(p-r)$

۵) تعداد صفرهای غیر واقع بر قطر اصلی در ماتریس مجاورت برابر است با: $p(p-r-1)$

۶۳) اگر A ماتریس مجاورت گراف r -منتظم از مرتبه p باشد آنگاه مجموع درایه های هر

سطر ماتریس A^2 برابر است با: $r+(p-1)(r-1)$

۶۴) قضیه: اگر از تمام رئوس درجات، یک درخت که بزرگتر از ۲ هستند، ۲ واحد کم کنیم و

به حاصل جمع بدست آمده ۲ واحد اضافه کنیم تعداد رئوس درجه ۱ درخت بدست می آید.

۶۵) قضیه: اگر G یک درخت از مرتبه P و دارای K راس ماگزیمم باشد آنگاه به تعداد

حداقل $2 + [(\Delta - 2) \times K]$ راس درجه ۱ در درخت وجود دارد

(۶۶) قضیه: در یک درخت مرتبه p تعداد مسیرهای متفاوت با طول حداقل ۲ برابر است با:

$$\binom{p-1}{2}$$

(۶۷) قضیه: اگر G یک گراف ساده و ناهمبند از مرتبه p و مینیمم درجه δ باشد آنگاه:

$$\delta < \frac{p-1}{2}$$

(۶۸) قضیه: اگر G یک گراف ساده از مرتبه p و مینیمم درجه آن δ باشد و داشته باشیم:

$$\delta \geq \frac{p-1}{2}$$

G همبند است.

(۶۹) قضیه: اگر G یک گراف ساده ای از مرتبه p باشد و مینیمم و ماگزیمم درجه در گراف

به ترتیب δ و Δ باشند آنگاه اگر $\delta + \Delta \geq p-1$ گراف G همبند است.

(۷۰) کمترین تعداد یال های ممکن در گراف همبند G از مرتبه p برابر است با: $q \geq p-1$

(۷۱) تعداد کل مسیر ها در گراف p : $\binom{p}{2} [(p-2)!e]$

و اگر p مسیر به طول صفر برای p راس را هم در نظر بگیریم تعداد کل مسیرها برابر است با:

$$\binom{p}{2} [(p-2)!e] + p$$

(۷۲) نکته شماره ۵۹ تعداد مسیرها بین دو راس متمایز است ولی نکته ۷۱ همه مسیرهاست.

(۷۳) در یک مسیر تعداد یال های طی شده بین دو راس u و v را طول مسیر می گویند و

کوتاهترین طول مسیر بین دو راس را فاصله دو راس می گویند.

(۷۴) تعداد گراف های ساده که با p راس و شامل k یال: $\binom{\frac{p(p-1)}{2}}{k}$

(۷۵) در فرمول ۷۴ اگر خواستیم گراف شامل یالی نباشد یک واحد از بالا کم می کنیم:

$$\binom{\frac{p(p-1)}{2}-1}{k}$$

(۷۶) در فرمول ۷۴ اگر خواستیم گراف شامل یالی باشد یک واحد از بالا و پایین کم

$$\text{میکنیم: } \left(\frac{p(p-1)}{2} - 1 \right)$$

(۷۷) تعداد گراف های r -منتظم از مرتبه p :

(اعدادی که جمعشان p می شود و از r بزرگترند) $+1$

(۷۸) حداقل تعداد یال برای اینکه گرافی از مرتبه p همبند باشد: $q_{\min} = p-1$

(۷۹) حداقل تعداد یال برای اینکه گرافی از مرتبه همبند و شامل دور باشد: $q_{\min} = p$

(۸۰) بیشترین تعداد یالی که گرافی ناهمبند باشد: $q_{\min} = \binom{p-1}{2}$

(۸۱) گراف های همواره بازه ای: (۱) گراف های کامل K_p

(۲) گراف هایی که یک یال از گراف های کامل کمتر دارند.

(۳) گراف های تهی

(۸۲) مکمل گراف کامل تهی است و برعکس.

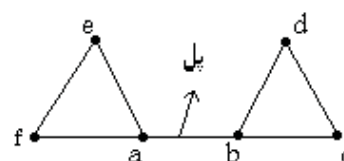
(۸۳) در درخت اگر $\Delta = k$ باشد آنگاه حداقل k راس درجه یک داریم.

(۸۴) دترمینان ماتریس مجاورت یک درخت برابر $1, 1, 0$ -می باشد.

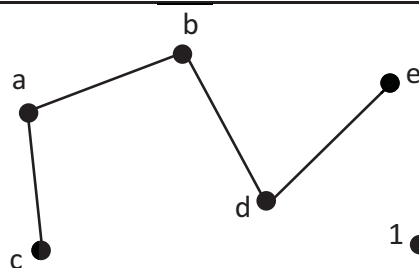
(۸۵) دترمینان ماتریس مجاورت گراف کامل K_p ($p \geq 2$) برابر است با: $(-1)^{p-1}(p-1)$

(۸۶) در یک گراف همبند، یک یال را پل می نامند هرگاه با حذف آن یال (بدون حذف

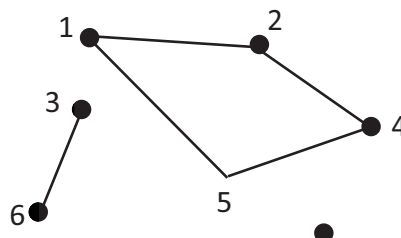
رئوس انتهایی آن) گراف مفروض ناهمبند شود مثل:



حل سوالات حل نشده قسمت اول: آشنایی باگرافها و کاربردهای آن



حل سوال ۱: حل الف:



حل ب:

حل سوال ۲: چون تعداد یال های گراف کامل مرتبه p برابر $\frac{p(p-1)}{2}$ است بنابراین:

$$\frac{p(p-1)}{2} = \frac{(p-2)(p-3)}{2} + 13 \Rightarrow p^2 - p = p^2 - 5p + 6 + 26 \Rightarrow 4p = 32 \Rightarrow p = 8$$

حل سوال ۳:

$$\begin{cases} 2q = 3p \\ 2q = 5p - 8 \end{cases} \Rightarrow 3p = 5p - 8 \Rightarrow 3p - 5p = -8 \Rightarrow -2p = -8 \Rightarrow p = \frac{-8}{-2} = 4$$

$$2q = 3p \Rightarrow q = \frac{3p}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

حل سوال ۴: خیر ؛ زیرا اگر اندازه چنین گرافی برابر p باشد باید داشته باشیم $5 \times 17 = 2q$ که امکان پذیر نیست زیرا $2q$ زوج است ولی $5 \times 17 = 85$ فرد می باشد.

.....

$$2q = pr \Rightarrow 2q = 6p \Rightarrow q = 3p$$

حل سوال ۵:

$$q - 2p = 16 \Rightarrow 3p - 2p = 16 \Rightarrow p = 16 \rightarrow q = 3 \times 16 = 48$$

حل سوال ۶: ابتدا دنباله را مرتب می کنیم سپس عدداول را حذف میکنیم آنگاه عدد یک را ازهمین تعداد اعداد بعد کم میکنیم وبه همین ترتیب ادامه میدهیم:

$$3,3,3,3,2,2 \xrightarrow[\text{1 واحد کم می کنیم}]{\text{از 3 تا 1 بعد}} 2,2,2,2,2 \xrightarrow[\text{1 واحد کم می کنیم}]{\text{از 2 تا 1 بعد}} 1,1,2,2$$

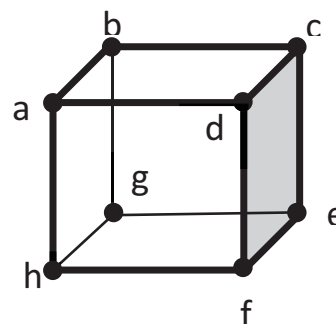
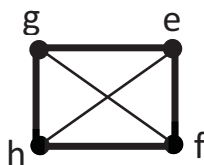
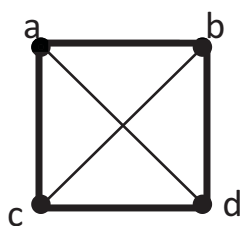
$$\text{مرتب} \rightarrow 2,2,1,1 \xrightarrow[\text{1 واحد کم می کنیم}]{\text{از 2 تا 1 بعد}} 1,0,1 \text{ پس دنباله دنباله گرافیکال است}$$

حل سوال ۷: چون G ، ۳- منتظم است پس $2q = 3p$ از طرفی $q+4=2p$ در نتیجه:

$$q=2p-4, 2(2p-4)=3p \Rightarrow 4p-8=3p \Rightarrow p=8, q=12$$

و گراف ناهمبند:

گراف همبند:



حل سوال ۸: هر شهر را یک راس و هر جاده را یک یال در نظر می گیریم در این صورت گراف مزبور باید گرافی همبند با حداقل یال باشد و لذا گراف نظیر باید یک درخت باشد یعنی حداقل جاده ها برابر $p-1$ است.

حل سوال ۹: چون در گراف G داریم: $p \geq 2$ پس این گراف اگر درخت باشد طبق قضیه باید حداقل دو راس از درجه یک داشته باشد ولی چون تمام راس های آن زوج هستند لذا G درخت نیست.

سوال ۱۰: فرض کنیم این درخت x راس درجه ۲ و y راس درجه یک داشته باشد چون مرتبه این درخت $p=25$ است پس: $q=24 \Rightarrow q=p-1$ از طرفی:

$$\sum_{i=1}^p \deg V_i = 2q \Rightarrow 2(5)+3(3)+2x+y(1)=2q \Rightarrow 10+9+2x+y=48 \Rightarrow 2x+y=29$$

$$2+3+x+y=25 \Rightarrow x+y=20 \Rightarrow x=9, y=11$$

تعداد رئوس درخت

حل سوال ۱۱: بنا به قضیه درایه های روی قطر اصلی A^2 نشان دهنده درجات راس های گراف G می باشند پس: $3,2,2,1$ دنباله درجه راسها میباشد

ب) چون A یک ماتریس 4×4 است پس مرتبه G برابر ۴ می باشد یعنی $p=4$ از طرفی:

$$3+2+2+1=2q \Rightarrow q=4$$

پاسخ تست های حل نشده قسمت اول: نظریه گرافها:

شماره تست	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
گزینه پاسخ	۳	۲	۲	۲	۴	۴	۲	۲	۲	۱	۳

قسمت دوم: نظریه اعداد:

کلیات و تقسیم پذیری

اعداد اول

همنهشتی

فصل چهارم: کلیات و تقسیم پذیری

تعریف: هرگاه $A \subset \mathbb{Z}$ در این صورت عضو $\alpha \in A$ را عضو ابتدای A می نامیم هرگاه به

ازای هر $X \in A$ داشته باشیم $\alpha \leq X$

تذکره: عضو ابتدای مجموعه A را با $\alpha = \min A$ نشان می دهیم و آن را کوچکترین

عضو A می نامیم.

تعریف: اگر $A \subset \mathbb{Z}$ در این صورت $\beta \in A$ را عضو انتهای A می نامیم هرگاه به ازای هر

$X \in A$ داشته باشیم: $X \leq \beta$

تذکره: عضو انتهای مجموعه A را با $\beta = \max A$ نشان می دهیم و آنرا بزرگترین عضو

A می نامیم.

توجه: تعریف های فوق در $A \subset \mathbb{R}$ برقرار است.

مثال ۱: عضو ابتدا و انتهای هر یک از مجموعه های زیر را مشخص کنید.

$$1) A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\} \Rightarrow$$

$$2) A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x \leq 5\} \Rightarrow$$

$$3) A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 4\} \Rightarrow$$

$$4) A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 2\} \Rightarrow$$

تعریف: اگر $A \subset \mathbb{Z}$ ، عضو $n \in \mathbb{Z}$ را یک کران بالای A گوئیم هرگاه به ازای هر A

$$\alpha \in \mathbb{Z} \text{ داشته باشیم: } \alpha \leq n$$

اگر $A \subset \mathbb{Z}$ دارای کران بالا باشد آنگاه مجموعه A را از بالا کراندار گوئیم.

تعریف: اگر $A \subset \mathbb{Z}$ ، عضو $n \in \mathbb{Z}$ را یک کران پایین A گوئیم هرگاه به ازای هر $\alpha \in A$

$$n \leq \alpha \text{ داشته باشیم:}$$

اگر $A \subset \mathbb{Z}$ ، دارای کران پایین باشد آنگاه مجموعه A را از پایین کراندار گوئیم.

تعریف: مجموعه $A \subset \mathbb{Z}$ را کراندار گوئیم هرگاه هم دارای کران بالا و هم دارای کران

پایین باشد.

نکته: عضو ابتدا و عضو انتها مجموعه $A \subset \mathbb{Z}$ منحصر بفرد هستند و عضو مجموعه A

نیز می باشند ولی کران بالا و کران پایین مجموعه $A \subset \mathbb{Z}$ منحصر بفرد نیستند و از

مجموعه $\mathbb{Z}$ انتخاب می شوند و لزوماً عضو مجموعه A نیستند.

نکته: عضو ابتدای یک مجموعه در صورت وجود، بزرگترین کران پایین آن مجموعه است و

عضو انتهای یک مجموعه در صورت وجود، کوچکترین کران بالای آن مجموعه است.

نکته: مجموعه دلخواه A از اعداد حقیقی یا کران پایین (بالا) ندارد یا بیشمار کران پایین

(بالا) دارد.

مثال ۲: هرگاه $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 3\}$ مجموعه کران های بالا و پایین A را بنویسید.

مثال ۳: هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 < x \leq 2\}$ مجموعه کران های بالا و پایین A را

بنویسید.

نکته: مجموعه تهی کراندار است.

نکته: مجموعه اعداد طبیعی از پایین کراندار است ولی کران بالا ندارد.

نکته: مجموعه اعداد صحیح کراندار نیست (زیرا کران بالا و کران پایین ندارد).

تعریف: مجموعه $A \subset \mathbb{Z}$ را خوش ترتیب می گوئیم، هرگاه هر زیر مجموعه ناتهی از آن

عضو ابتدا داشته باشد. به عنوان مثال: مجموعه اعداد حسابی خوش ترتیب است زیرا هر

زیر مجموعه ناتهی از آن دارای عضو

ابتداست.

مثال: کدام یک از مجموعه های زیر خوش ترتیب است؟

الف) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 1\}$

این مجموعه خوش ترتیب نیست زیرا مجموعه ی $\{-1, -2, -3, \dots\}$

$\{3, \dots\}$ زیر مجموعه ناتهی از آن است ولی عضو ابتدا ندارد.

ب) $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 2\}$

این مجموعه خوش ترتیب است، زیرا هر زیر مجموعه ناتهی از

آن دارای عضو ابتداست.

تست ۱: کدام زیر مجموعه از اعداد حقیقی خوش ترتیب است؟

$$(۱) \{x: x \in \mathbb{Q}, 1 \leq x\}$$

$$(۲) \{x: x \in \mathbb{Z}, x \leq 1\}$$

$$(۳) \{x: x \in \mathbb{Q}, x \leq 1\}$$

$$(۴) \{x: x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x\}$$

تست ۲: کدام مجموعه خوش ترتیب است؟

$$(۱) (\mathbb{N}, \leq) \quad (۲) (\mathbb{Z}, \leq) \quad (۳) (\mathbb{Q}, \leq) \quad (۴) (\mathbb{R}, \leq)$$

اصل خوش ترتیبی:

مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ خوش ترتیب است یعنی هر زیر مجموعه ناتهی از اعداد طبیعی، عضو ابتدا دارد.

اصل استقرای ریاضی:

اگر $S \subseteq \mathbb{N}$ و دو شرط زیر را داشته باشد آنگاه $S = \mathbb{N}$

$$(۱) 1 \in S \quad (۲) \forall K, K \in S \Rightarrow (K+1) \in S$$

اثبات: فرض میکنیم: $N-S=S'$ اگر ثابت کنیم $S'=\emptyset$ حکم ثابت است:

فرض خلاف): $S' \neq \emptyset$

طبق آنچه که $N-S=S'$ پس $S' \subset N$ پس طبق اصل خوش ترتیبی دارای عضو

ابتداست. این عضو را x می نامیم (*) $x \in S'$ و چون طبق فرض $1 \in S$ پس $1 \notin S'$

پس $x-1 > 0 \iff x > 1$

از طرفی: $x-1 < x$ و طبق تعریف عضو ابتدا چون $x \in S'$ در نتیجه $x-1 \notin S'$

$X-1 \in S \iff$ پس طبق شرط ۲ باید: $X-1+1 \in S \implies X \in S$ و این تناقض دارد (با*)

پس فرض خلف باطل است و $S' = \emptyset$ یا $N=S$.

اصل استقرای قوی:

هرگاه S زیر مجموعه N و دو شرط زیر را دارا باشد. در این صورت $S=N$ خواهد بود:

$$\forall m < n, m \in S \rightarrow n \in S \quad (۲) \quad 1 \in S \quad (1)$$

صورتی دیگر اصل استقرای قوی:

فرض کنیم p خاصیتی در مورد اعداد طبیعی باشد و

الف) $p(1)$ درست باشد

ب) به ازای هر عدد طبیعی n اگر تمام اعداد طبیعی کوچکتر از n خاصیت p را داشته

باشند آنگاه $p(n)$ نیز درست باشد. در این صورت هر عدد طبیعی خاصیت P را دارد

اصل استقرای تعمیم یافته:

فرض کنیم p خاصیتی در مورد اعداد صحیح باشد و

الف) به ازای یک $m \in \mathbb{Z}$ و $p(m)$ درست باشد.

ب) به ازای هر عدد صحیح $n \geq m$ از درستی $p(n)$ درستی $p(n+1)$ نتیجه شود.

در این صورت $p(n)$ به ازای هر عدد صحیح $n \geq m$ درست است.

توجه: در اصل استقرای قوی برای اثبات $p(n)$ از درستی $p(1), p(2), \dots, p(n-1)$

استفاده می کنیم در حالیکه در اصل استقرا با فرض درستی $p(1)$ ، از درستی $p(n-1)$

به درستی $p(n)$ می رسیم. لذا اصل استقرای قوی توانایی بیشتری دارد و به همین دلیل

آن را "استقرای قوی" یا "استقرای کامل" می نامند.

مثال: اگر n یک عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد به کمک اصل استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$$

$$n=2 \rightarrow \binom{2}{2} = \binom{3}{2} \rightarrow 1=1$$

$$n=k \Rightarrow \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{k}{2} = \binom{k+1}{2}$$

$$n=k+1 \Rightarrow \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \dots + \binom{k}{2} + \binom{k+1}{2} = \binom{k+2}{2}$$

$$\underbrace{\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \dots + \binom{k}{2}}_{\substack{\text{طبق فرض استقرا} \\ \binom{k+1}{2}}} + \binom{k+1}{2} \rightarrow$$

$$\binom{k+1}{3} + \binom{k+1}{2} = \frac{(k+1)!}{3! \cdot (k-2)!} + \frac{(k+1)!}{2! \cdot (k-1)!} = \frac{(k-1)(k+1)! + 3(k+1)!}{3!(k-1)!} =$$

$$\frac{(k+1)!(k-1+3)}{3!(k-1)!} = \frac{(k+1)!(k+2)}{3!(k-1)!} = \frac{(k+2)!}{3!(k-1)!} = \binom{k+2}{3}$$

مثال ۴: اگر n یک عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد، در این صورت ثابت کنید:

$$2\binom{n}{2} + n = n^2$$

مثال ۵: برای هر عدد طبیعی n ، ثابت کنید که:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

مثال: با استفاده از اصل استقرای قوی، ثابت کنید هر عدد از دنباله بازگشتی لوکاکه به

صورت $1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots$ معرفی می شود در رابطه $l_n < (\frac{7}{4})^n$ صدق می کند $(l_n = l_{n-1} + l_{n-2})$

مجموعه $S = \{n \in \mathbb{N} \mid l_n < (\frac{7}{4})^n\}$ را در نظر میگیریم ثابت می کنیم $S = \mathbb{N}$

$$L_1 = 1 < (\frac{7}{4})^1 \Rightarrow 1 \in S$$

حال فرض کنیم به ازای هر k که $k \in S$ ، $k < n$ باشد ثابت می کنیم $n \in S$

$$n-1 < n \Rightarrow (n-1) \in S \Rightarrow L_{n-1} < (\frac{7}{4})^{n-1} \quad (1)$$

$$n-2 < n \Rightarrow (n-2) \in S \Rightarrow L_{n-2} < (\frac{7}{4})^{n-2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow L_{n-1} + L_{n-2} = L_n < (\frac{7}{4})^{n-1} + (\frac{7}{4})^{n-2} \Rightarrow$$

$$L_n < (\frac{7}{4})^{n-2} \left[\frac{7}{4} + 1 \right] < (\frac{7}{4})^{n-2} \times (\frac{7}{4})^2 = (\frac{7}{4})^n \Rightarrow$$

$$\underline{L}_n < \left(\frac{7}{4}\right)^n \Rightarrow n \in S \rightarrow S = N$$

$$\text{توجه: } \frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4} = \frac{44}{16}$$

$$\left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{4} + 1 < \left(\frac{7}{4}\right)^2$$

توجه (قضیه): هر زیر مجموعه از اعداد صحیح که ناتهی باشد و از پایین کراندار باشد عضو

ابتدا دارد.

توجه (قضیه): هر زیر مجموعه ناتهی Z که از بالا کراندار باشد عضو انتها دارد.

تقسیم پذیری:

تعریف: اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $b \neq 0$ گوئیم a بر b بخش پذیر (یا تقسیم پذیر)

است هرگاه عدد صحیحی مانند q موجود باشد به قسمی که $a = bq$ در این صورت می

نویسیم $b|a$ و اینگونه می خوانیم: b عدد a را عاد می کند یا b یک عامل a است یا b بر a

بخش پذیر است و یا a یک مضرب b است.

توجه: هرگاه a بر b بخش پذیر نباشد می نویسیم $b \nmid a$

نکته: $a|a$ ، $1|a$ ، $\pm 1|a$ ، $a|0$

قضیه: به ازای اعداد صحیح a و b اگر $a|b$ آنگاه:

الف) $a|b$ - ب) $a|-b$ پ) $a|-b$

ت) به ازای هر عدد صحیح m ، $a|mb$ ث) اگر $b \neq 0$ آنگاه $|a| \leq |b|$

$$\underline{a|b} \Rightarrow b=aq \Rightarrow \underbrace{b = (-a)(-q)}_1 \xRightarrow{3} \underbrace{-b = a(-q)}_2 = (-a)q$$

$$\begin{cases} 1) -a|b \\ 2) a|-b \\ 3) -a|-b \end{cases}$$

$$\text{ت) } b=aq \xrightarrow{\times m} mb=maq \Rightarrow mb=a(\overbrace{mq}^{q'}) \rightarrow a|mb$$

$$\text{ث) } b=aq \Rightarrow |b|=|a||q| \xrightarrow[\substack{b \neq 0 \\ q \neq 0}]{|q| \geq 1} |q| \geq 1$$

(چون $b \neq 0$ پس q نمی تواند صفر باشد، زیرا b را صفر می کند)

$$\Rightarrow |b|=|a| \underbrace{|q|}_{\geq 1} \geq |a| \Rightarrow |b| \geq |a|$$

قضیه: به ازای اعداد صحیح c, b, a

الف) اگر $a|1$ آنگاه $a = \pm 1$

$$a|1 \xrightarrow{\text{قضیه قبل}} |a| \leq 1 \begin{cases} |a| = 0 \rightarrow a = 0 \rightarrow \text{تقسیم بر صفر نداریم} \\ |a| = 1 \rightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

ب) اگر $a|b$ و $b|a$ آنگاه $a = \pm b$

$$a|b \Rightarrow b=aq$$

$$b|a \Rightarrow a=bq' \Rightarrow b=(bq')q$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \rightarrow a = 0 \Rightarrow a = b = 0 \\ b \neq 0 \Rightarrow qq' = 1 \Rightarrow q'|1 \Rightarrow q' = \pm 1 \Rightarrow a = \pm b \end{cases}$$

پ) اگر $a|c$ و $a|b$ آنگاه به ازای اعداد صحیح و دلخواه m و n داریم: $a|mb+nc$

$$a|b \Rightarrow b=aq$$

$$a|c \Rightarrow c=aq'$$

$$\Rightarrow mb+nc=maq+naq'=\overbrace{(mq+nq')}^k a \Rightarrow mb+nc=ka \Rightarrow a|m b+n c$$

قضیه: "الگوریتم تقسیم"

اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $b \in \mathbb{N}$ آنگاه اعداد صحیح و یکتای q و r وجود دارند بطوریکه:

$$a=bq+r \quad 0 \leq r < b$$

در نظر می گیریم $q = [\frac{a}{b}]$ که در آن $[]$ نماد جزء صحیح است.

از قبل می دانیم $[x] \leq x < [x]+1$ در نتیجه :

$$q \leq \frac{a}{b} < q+1 \Rightarrow bq \leq a < bq+b \Rightarrow 0 \leq \underbrace{a-bq}_r < b \Rightarrow 0 \leq r < b, \quad a=bq+r$$

حال نشان می دهیم r و q یکتا هستند، فرض می کنیم r و q منحصر بفرد نباشند و r_1

$(r_1 \neq r_2), r_2 \in \mathbb{Z}$ و $(q_1 \neq q_2), q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ موجود باشند بطوریکه:

$$a=bq_1+r_1 \quad 0 \leq r_1 < b$$

$$a=bq_2+r_2 \quad 0 \leq r_2 < b$$

$$\Rightarrow bq_1+r_1=bq_2+r_2$$

$$\Rightarrow * b(q_1-q_2)=r_2-r_1 \Rightarrow |b| \frac{r_2-r_1 \neq 0}{r_2-r_1} \leq |r_2-r_1| \quad (1)$$

$$(1), (2) \neq \quad (2) \Rightarrow -b < r_2-r_1 < b \Rightarrow |r_2-r_1| < b$$

$$r_2-r_1=0 \rightarrow r_2=r_1 \text{ پس}$$

$$b \neq 0 \Rightarrow q_1-q_2=0 \Rightarrow q_1=q_2 \text{ و چون}$$

مثال: در یک تقسیم ، مقسوم ۱۴ برابر باقیمانده است و باقیمانده بیشترین مقدار خود را دارد، اجزای تقسیم را بیابید.

$$a=bq+r \quad a=14r \quad r=b-1$$

$$14r=bq+(b-1) \Rightarrow 14(b-1)=bq+b-1 \Rightarrow$$

$$14b-14=bq+b-1 \Rightarrow 13b-bq=13 \Rightarrow b(13-q)=13 \times 1$$

$$\Rightarrow b=13, r=12 \quad 13-q=1 \Rightarrow q=12 \quad a=14 \times 12$$

مثال ۶: اگر در یک تقسیم ، باقیمانده ۲۱ و خارج قسمت ۶ باشد، حداکثر چند واحد می توان به مقسوم علیه اضافه کرد تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکنند.

نکته: بیشترین تعداد واحدهایی که می توان به مقسوم علیه اضافه کرد تا مقسوم و خارج

قسمت تغییر نکند برابر است با جزء صحیح $\frac{r}{q}$

مثال ۷: اگر a عدد زوج بر ۲۳ تقسیم شود، باقیمانده برابر ۱۷ می شود، باقیمانده تقسیم $\frac{a}{2}$

بر ۲۳ کدام است؟

نکته: اگر مضربی از مقسوم علیه را به مقسوم اضافه کنیم ، باقیمانده تقسیم تغییر نمی کند و خارج قسمت با همان مضرب جمع می شود.

تست ۳: در یک تقسیم مقسوم علیه ۱۲ است و خارج قسمت ۷، اگر ۳۶ واحد به مقسوم

اضافه شود خارج قسمت جدید کدام است؟

$$۱۲(۴) \quad ۱۱(۳) \quad ۱۰(۲) \quad ۷(۱)$$

مثال ۸: ابتدا ثابت کنید حاصلضرب دو عدد صحیح متوالی بر ۲ تقسیم پذیر است و سپس

نشان دهید:

$$3 \mid n^3 - n$$

مثال: با استقراء ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n ، همواره $7 \mid 2^{3n} - 1$

$$n=1 \Rightarrow 7 \mid 7$$

$$n=k \rightarrow 7 \mid 2^{3k} - 1$$

$$n=k+1 \rightarrow 7 \mid 2^{3k+3} - 1$$

$$2^{3k} - 1 = 7t \xRightarrow{\times 2^3} 2^3 (2^{3k} - 1) = 2^3 \times 7t \Rightarrow$$

$$2^{3k+3} - 8 = 2^3 \times 7t \Rightarrow 2^{3k+3} - 1 = 56t + 7$$

$$\Rightarrow 2^{3k+3} - 1 = 7(\underbrace{8t + 1}_k) \Rightarrow 7 \mid 2^{3k+3} - 1$$

مثال ۹: ثابت کنید اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد آنگاه همواره یکی از اعداد صحیح a یا

$a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش پذیر است.

تست ۴: در یک تقسیم، مقسوم علیه برابر ۵۳ و باقیمانده برابر ۱۷ است، بزرگترین عددی که

می توان به مقسوم اضافه کرد تا خارج قسمت تغییر نکند کدام است؟

۱۷(۴)

۱۶(۳)

۳۶(۲)

۳۵(۱)

نکته: همواره در تقسیم a بر b ، $(a=bq+r)$ حداکثر $\underline{n=b-r-1}$ واحد می توان به مقسوم

اضافه کرد تا خارج قسمت تغییر نکند.

چند سوال از فصل کلیات و تقسیم پذیری:

(۱) اگر $n \in \mathbb{Z}$ ثابت کنید $a-b \mid a^n - b^n$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \Rightarrow a^n - b^n = (a-b)q \Rightarrow a-b \mid a^n - b^n$$

(۲) اگر n عدد طبیعی فرد باشد آنگاه $a+b \mid a^n + b^n$

(۳) اگر n عدد طبیعی زوج باشد آنگاه $a+b \mid a^n - b^n$

(۴) نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی n داریم: $3 \mid 2^{3n} - 5^n$

(۵) نشان دهید: $24 \mid 5^{2n} + 23$ (n عدد طبیعی است)

$$5^{2n} + 23 = 25^n - 1 + 24 = \underbrace{(25 - 1)}_{24} (25^{n-1} + \dots + 1) + 24 \Rightarrow$$

$$5^{2n} + 23 = 24 \underbrace{(25^{n-1} + \dots + 1)}_{q'} = 24q' \Rightarrow 24 \mid 5^{2n} + 23$$

(۶) نشان دهید به ازای هر عدد طبیعی n داریم: $17 \mid 3^{8n+4} + 4^{2n+1}$

(۷) * ثابت کنید حاصل ضرب ۳ عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش پذیر است.

$$(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n} = \frac{(n+3)!}{n!}$$

$$\Rightarrow (n+1)(n+2)(n+3) = \frac{(n+3)!}{n!} = \binom{n+3}{3} 3!$$

$$\Rightarrow 3! \mid (n+1)(n+2)(n+3)$$

نکته: حاصل ضرب k عدد متوالی بر $k!$ و تمام عامل های آن بخش پذیر است.

(۸) ثابت کنید اگر n زوج باشد آنگاه $48 \mid n^3 - 4n$

چون n زوج است پس: $n = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}$)

$$n^3 - 4n = (2k)^3 - 4(2k) = 8k^3 - 8k = 8k(k^2 - 1) = 8k(k+1)(k-1)$$

میدانیم ضرب سه عدد متوالی بر ۶ بخش پذیر (باتوجه*) است یعنی: $6 \mid (k+1)k(k-1)$

$$\Rightarrow n^3 - 4n = 8 \times 6q = 48q \Rightarrow 48 \mid n^3 - 4n$$

(۹) ثابت کنید مربع هر عدد فرد به صورت $8q+1$ است.

۱۰) اگر عدد صحیح n نه بر ۲ و نه بر ۳ بخش پذیر باشد ثابت کنید : $n=6q+5$ یا

$$n=6q+1$$

تست ۵: اگر a یک عدد صحیح فرد باشد آنگاه a^4 به کدام صورت است؟

- (۱) $16k+2$ (۲) $16k+1$ (۳) $8k-1$ (۴) $8k+3$

تست ۶: در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت و باقیمانده مساوی q

اند، اگر ۳ واحد از مقسوم علیه کم شود، ۵ واحد به خارج قسمت اضافه شده و باقیمانده صفر

می شود، مقادیر q کدامند؟

- (۱) ۵ و ۸ (۲) ۴ و ۹ (۳) ۱۰ و ۵ (۴) ۱۰ و ۸

مثال: نشان دهید که 6^{502} بر ۹ بخش پذیر است.

$$6^{502} = 6 \times 6 \times 6^{500} = 3 \times 2 \times 3 \times 2 \times 6^{500} = \underbrace{(3 \times 3)}_9 \times \underbrace{(2 \times 2 \times 6^{500})}_q = 9q$$

$$6^{502} \Rightarrow 9|6^{502}$$

(۱۱) نشان دهید که هر عدد به شکل $\overline{abcabc}$ بر ۷ و ۱۱ و ۱۳ بخش پذیر است.

(۱۲) نشان دهید که هر عدد به شکل $\overline{ababab}$ بر ۳ و ۷ و ۱۳ و ۳۷ بخش پذیر است.

(۱۳) ثابت کنید $2^{39} - 3^{52}$ بر ۷۳ بخش پذیر است.

(۱۴) نشان دهید: $15 | 4^{2n} - 1$

(۱۵) نشان دهید: $10^{2n}-1 \mid 3$ (n عدد طبیعی است)

(۱۶) اگر $a \mid 3n-2$ و $a \mid -4n+3$ نشان دهید: $a = \pm 1$

(۱۷) نشان دهید که هر عدد صحیح را می توان به شکل $3k$ یا $3k+1$ یا $3k+2$ نوشت.

نمایش اعداد صحیح:

قضیه: اگر b یک عدد طبیعی بزرگتر از ۱ باشد هر عدد طبیعی n را می توان به طریقی یکتا به صورت

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \dots + a_1 b + a_0$$

و برای هر $j = 0, 1, 2, \dots, k$ ، $0 \leq a_j \leq b-1$ و $a_k \neq 0$

تذکر: در این حالت n را به صورت $(a_k a_{k-1} a_{k-2} \dots a_1 a_0)_b$ نمایش می دهند و این نمایش را نمایش عدد در مبنای b می نامند. هریک از a_i ها را یک رقم در مبنای b گویند و $k+1$ ، تعداد ارقام عدد n در مبنای b است و می گویند n در مبنای b ، $k+1$ رقم دارد. این نوع نمایش را به صورت $\overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0}$ نیز نمایش می دهند.

مثال: عدد $n = (23102)_4$ را به صورت عددی در مبنای ۵ نمایش دهید.

ابتدا عدد مورد نظر را در مبنای خودش بسط می دهیم تا به مبنای ده رفته و سپس از مبنای ده با تقسیم های متوالی به مبنای ۵ می رویم. (از یکان شروع میکنیم به عدد گذاری و از صفر شروع میکنیم که توانهای مبنا را تشکیل میدهند)

$$\begin{array}{r} 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \\ (23102)_4 = 2 \times 4^4 + 3 \times 4^3 + 1 \times 4^2 + 0 \times 4^1 + 2 = 722 \end{array}$$

و حال ۷۲۲ روبه مبنای ۵ میبریم:

$$\begin{array}{r}
 722 \\
 5 \overline{) 22} \\
 \underline{20} \\
 22 \\
 \underline{20} \\
 20 \\
 \underline{20} \\
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 5 \\
 5 \overline{) 144} \\
 \underline{10} \\
 44 \\
 \underline{40} \\
 4 \\
 \underline{4} \\
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 5 \\
 5 \overline{) 28} \\
 \underline{25} \\
 3
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 5 \\
 5 \overline{) 5} \\
 \underline{5} \\
 0
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 5 \\
 5 \overline{) 1} \\
 \underline{0} \\
 1
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 5 \\
 5 \overline{) 0} \\
 \underline{0} \\
 0
 \end{array}$$

$$\Rightarrow (23102)_4 = (10342)_5$$

توجه: برای تبدیل یک عدد طبیعی از مبنای ده به مبنای دیگر از تقسیم های متوالی استفاده می کنیم بدین ترتیب که عدد را بر مبنای جدید تقسیم می کنیم سپس خارج قسمت بدست آمده را بر مبنای جدید تقسیم می کنیم و... تا به خارج قسمت صفر برسیم سپس باقیمانده های بدست آمده را از آخر به اول می نویسیم.

توجه: برای تبدیل یک عدد طبیعی از مبنای غیر ده به مبنای ده از قضیه (بر اساس توان) استفاده می کنیم.

مثال ۱۰: عدد ۱۳۲ در مبنای g بصورت ۲۴۶ نمایش داده شده است g را بیابید.

مثال ۱۱: ثابت کنید اگر $b > 3$ آنگاه $n = (1331)_b$ مکعب کامل است.

مثال ۱۲: ثابت کنید مجموع اجسام ۱ تا ۶۳ گرم را می توان با شش وزنه ۱ و ۲ و ۴ و ۸ و ۱۶ و ۳۲

گرمی توزین کرد (قرار دادن وزنه در هر دوکفه مجاز نیست).

تذکر: اگر $A = (a_n \dots a_1 a_0)_{10}$ باقیمانده تقسیم بر ۹ یا ۳ برابر است با باقیمانده

مجموع $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$ بر ۹ یا ۳ به زبان ساده تر باقیمانده هر عدد بر ۳

یا ۹ از باقیمانده مجموع ارقام آن عدد بر ۳ یا ۹ بدست می آید.

بیشتر بدانیم:

- (۱) رابطه عاد کردن روی Z یک رابطه انعکاسی است. $a \sim a$
- (۲) رابطه عاد کردن روی Z خاصیت تقارنی ندارد $4 \nmid 2$, $2 \nmid 4$
- (۳) رابطه عاد کردن روی Z خاصیت پاد تقارنی ندارد. $3 = -3 \nRightarrow 3 \sim -3$, $3 \sim -3$
- (۴) رابطه عاد کردن روی N خاصیت پاد تقارنی دارد.
- (۵) رابطه عاد کردن روی Z خاصیت تراگذری دارد.
- (۶) اگر $a-b$ بر m بخش پذیر باشد آنگاه $a^n - b^n$ نیز بر m بخش پذیر است.
- (۷) عبارت $a^n - b^m$ در صورتی بر $a^p - b^q$ بخش پذیر است که: $\frac{n}{p} = \frac{m}{q} \in N$
- (۸) عبارت $a^n - b^m$ در صورتی بر $a^p + b^q$ بخش پذیر است که: $\frac{n}{p} = \frac{m}{q}$ زوج شود.
- (۹) از ۸ نتیجه می شود عبارت $a^n - b^m$ در صورتی بر $a+b$ بخش پذیر است که n و m زوج باشند.
- (۱۰) عبارت $a^n + b^m$ در صورتی بر $a^p + b^q$ بخش پذیر است که: $\frac{n}{p} = \frac{m}{q}$ فرد شود.
- (۱۱) از ۱۰ نتیجه می شود که $a^n + b^n$ در صورتی بر $a+b$ بخش پذیر است که n فرد باشد.
- (۱۲) عبارت $a^n + b^m$ هیچ گاه بر $a^p - b^q$ بخش پذیر نیست در نتیجه عبارت $a^n + b^n$ هیچ گاه بر $a-b$ بخش پذیر نیست.
- (۱۳) تعداد مضرب های صحیح و مثبت b و کوچک تر از a یا مساوی با a برابر است با: $[\frac{a}{b}]$
- (۱۴) حاصلضرب چهار عدد صحیح متوالی به علاوه ۱ همواره عددی مربع کامل است.

تست:

عدد $3^{52} - 2^{39}$ بر کدامیک از اعداد زیر بخش پذیر است؟

۷۱(۱) ۷۲(۲) ۷۳(۳) ۱۹(۴)

$$3^{52} - 2^{39} = (3^m - 2^n)(\dots) \Rightarrow \frac{52}{m} = \frac{39}{n} \Rightarrow 52 \frac{n}{3} = 39 \frac{m}{4}$$

$$\Rightarrow (3^{52} - 2^{39}) = (\underbrace{34 - 23}_{81-8=73})(\dots)$$

سوال: از ۱ تا ۱۰۰ چند مضرب ۷ وجود دارد؟ طبق نکته ۱۳: $[\frac{100}{7}] = 14$

۱۵) خاصیت ارشمیدسی اعداد صحیح:

اگر a و b دو عدد طبیعی باشند آنگاه یک عدد طبیعی n وجود دارد بطوریکه: $na \geq b$

۱۶) مجموعه اعداد صحیح نسبت به اعمال جمع، تفریق و ضرب بسته است یعنی مجموع، تفاضل و حاصلضرب هر دو عدد صحیح، عددی صحیح می باشد.

۱۷) اگر $(n \in \mathbb{N}) \quad a|b^n$ آنگاه نمی توان نتیجه گرفت که $a|b$

برای مثال $4|100$ یعنی $4|10^2$ ولی $4 \nmid 10$

۱۸) اگر $k \in \mathbb{Z}$ در این صورت همه ی اعداد صحیح، به شکل $x = 2k$ را زوج و همه اعداد صحیح به شکل $2k+1$ یا $2k-1$ را فرد می نامند.

۱۹) اگر ارقام عددی را یک در میان مثبت و منفی علامت گذاری کنیم

(بطوریکه اولین رقم از سمت راست مثبت در نظر گرفته شود) و سپس آن ها را جمع جبری کنیم، باقیمانده ی تقسیم آن عدد بر ۱۱ بدست می آید.

به عنوان مثال: باقیمانده تقسیم ۱۵۷۴۳ بر ۱۱: $r = 1 - 5 + 7 - 4 + 3 = 2$: $\frac{+}{1} \frac{-}{5} \frac{+}{7} \frac{-}{4} \frac{+}{3} \Rightarrow$

۲۰) نتیجه از نکته ۱۹: عددی بر ۱۱ بخش پذیر است که اگر ارقام آن عدد را یک در میان مثبت و منفی علامت گذاری کنیم (بطوریکه اولین رقم از سمت راست مثبت در نظر گرفته شود) و سپس آن ها را جمع جبری کنیم، حاصل صفر شود.

۲۱) عددی بر ۸ بخش پذیر است که مجموع یکان و دو برابر دهگان و چهار برابر صدگان آن بر ۸ بخش پذیر باشد.

۲۲) عددی بر ۴ بخش پذیر است که مجموع یکان و دو برابر دهگان آن بر ۴ بخش پذیر باشد.

۲۳) عددی بر ۲ بخش پذیر است که رقم سمت راست آن بر ۲ بخش پذیر باشد.

۲۴) باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۱۰ با یکان آن عدد برابر است و لذا عددی بر ۱۰ بخش پذیر است که یکان آن صفر باشد.

۲۵) نکته ۲۱ به این صورت هم صحیح است: باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۸ با باقیمانده تقسیم سه عدد سمت راست آن برابر است.

۲۶) همچنین نکته شماره ۲۲: عددی بر ۴ بخش پذیر است که دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخش پذیر باشد

توجه: بهتر است در صورت لزوم از ۲۵ و ۲۶ استفاده کنیم.

۲۷) عددی بر ۷ بخش پذیر است که تفاضل عددی که با حذف رقم یکان آن عدد بدست می

آید و دو برابر رقم یکان آن عدد بر ۷ بخش پذیر باشد مثلاً ۶۵۱ بر ۷: $65-2(1)=63$

چون ۶۳ بر ۷ بخش پذیر است پس ۶۵۱ نیز بر ۷ بخش پذیر است.

۲۸) اگر alb در این صورت: $almb$ و $malmb$

حل تمرینات حل نشده قسمت دوم: نظریه اعداد فصل ۴: تقسیم پذیری

حل مثال ۱: (شماره ۱) عضو ابتدا و عضو انتها ۳ می باشد. (شماره ۲) عضو ابتدا ۲- و عضو انتها ۵ می باشد

(شماره ۳) عضو ابتدا و انتها ندارد. (شماره ۴) عضو ابتدا ندارد و عضو انتها ۱ می باشد.

حل مثال ۲: $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$:مجموعه کرانهای پایین A

$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 3\}$:مجموعه کرانهای بالا A

حل مثال ۳:

$\{2, 3, 4, \dots\}$:مجموعه کرانهای بالا A $\{\dots, -2, -1\}$:مجموعه کرانهای پایین A

حل مثال ۴: $2 \times \frac{n!}{(n-2)!2!} + n = 2 \times \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2} + n = n^2 - n + n = n^2$

حل مثال ۵: $n=1 \Rightarrow 1=1$

$$n=k \Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

فرض استقرا

حکم استقرا:

$$n=k+1 \Rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

ریاضیات گسسته-نظریه اعداد

$$\frac{k(K+1)(2k+1)}{6} + \frac{(k+1)^2}{1} = \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}$$
$$= \frac{(k+1)(2k^2+k+6k+6)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(K+2)(2k+3)}{6}$$

$$A=2k^2+7k+6 \Rightarrow$$

$$2A=4k^2+7(2k)+12 \Rightarrow 2A=(2K+4)(2K+3) \Rightarrow 2A=2(K+2)(2K+3)$$

$$\Rightarrow A=(K+2)(2K+3)$$

$$a=6b+21, a=6(b+x)+r \Rightarrow 6b+21=6b+6x+r \Rightarrow r=21-6x \quad \text{حل مثال ۶:}$$

$$\text{داریم: } r \geq 0, r=21-6x \geq 0 \Rightarrow -6x \geq -21 \Rightarrow x \leq \frac{21}{6} \Rightarrow x=3$$

$$a=2k, a=23q+17 \Rightarrow q \quad \text{فرد} \quad \text{حل مثال ۷}$$

$$q=2k'+1 \Rightarrow a=23(2k'+1)+17 \Rightarrow a=23 \times 2k'+40 \Rightarrow \frac{a}{2} = 23k' + 20 \xRightarrow{20 < 23} r=20$$

$$1) n=2k \Rightarrow 2 \mid n \Rightarrow 2 \mid n(n-1) \quad \text{حل مثال ۸}$$

$$2) n=2k+1 \Rightarrow n-1=2k \Rightarrow 2 \mid n-1 \Rightarrow 2 \mid n(n-1)$$

$$1) n=3k \Rightarrow 3 \mid n \Rightarrow 3 \mid n(n^2-1) \Rightarrow 3 \mid n^3-n$$

$$2) n=3k+1 \Rightarrow n-1=3k \Rightarrow 3 \mid n-1 \Rightarrow 3 \mid (n-1)(n+1)n \Rightarrow 3 \mid n^3-n$$

ریاضیات گسسته-نظریه اعداد

$$3) n=3k+2 \Rightarrow n+1=3k+3 = 3(\underbrace{k+1}_{k'}) \Rightarrow 3 \mid n+1 \Rightarrow 3 \mid (n+1)(n-1)n \Rightarrow 3 \mid n^3-n$$

حل مثال ۹: اگر a عددی صحیح باشد می توان آن را به یکی از سه صورت $a=3k$ یا $a=3k+1$ یا $a=3k+2$ نوشت

$$\begin{aligned} a=3k &\Rightarrow 3 \mid a & a=3k+1 &\Rightarrow a+2 = 3k+3 = 3(\underbrace{k+1}_{k'}) \Rightarrow 3 \mid a+2 \\ a=3k+2 &\Rightarrow a+4 = 3k+6 = 3(\underbrace{k+2}_{k'}) \Rightarrow 3 \mid a+4 \end{aligned}$$

حل مثال ۱۰

$$132=(246)_g \Rightarrow 132=2g^2+4g+6 \Rightarrow 2g^2+4g-126=0 \xrightarrow{\div 2} g^2+2g-63=0$$

$$\Rightarrow (g+9)(g-7)=0 \Rightarrow g=7, g=-9 \text{ غ ق ق}$$

$$n=(1331)_b = b^3+3b^2+3b+1=(b+1)^3 \quad \text{حل مثال ۱۱:}$$

$$63=(111111)_2 \Rightarrow 63=32+16+8+4+2+1 \quad \text{حل مثال ۱۲:}$$

پس این عدد و هر عدد کوچکتر از آن را می توان به صورت ترکیبی از ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲ نمایش داد پس حکم ثابت است.

حل سوالات حل نشده کلیات و تقسیم پذیری

حل سوال ۲

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b) \underbrace{(a^{2k} - a^{2k-1}b + \dots - ab^{2k-1} + b^{2k})}_q \Rightarrow$$

$$a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a+b)q \Rightarrow a+b \mid a^{2k+1} + b^{2k+1}$$

توجه: چون n فرد است پس: $n=2k+1$

.....

حل سوال ۳:

$$K=1 \Rightarrow a+b \mid a^2 - b^2$$

$$a+b \mid a^{2k} - b^{2k} \quad \text{حکم استقرا} \quad a+b \mid a^{2k+2} - b^{2k+2} \quad \text{فرض استقرا}$$

$$a^{2k} - b^{2k} = (a+b)q \xrightarrow{\times a^2} a^{2k+2} - a^2 b^{2k} = a^2 (a+b)q$$

$$\xrightarrow{-b^{2k+2}} a^{2k+2} - a^2 b^{2k} - b^{2k+2}$$

$$= a^2 (a+b)q - b^{2k+2} \Rightarrow a^{2k+2} - b^{2k+2} = a^2 (a+b)q + a^2 b^{2k} - b^{2k+2}$$

$$\Rightarrow a^{2k+2} - b^{2k+2} = a^2 (a+b)q + b^{2k} (a^2 - b^2)$$

$$\Rightarrow a^{2k+2} - b^{2k+2} = (a+b) \underbrace{[a^2q + b^{2k}(a-b)]}_q \Rightarrow a+b \mid a^{2k+2} - b^{2k+2}$$

حل سوال ۴

$$2^{3n} - 5^n = 8^n - 5^n = (8-5) \underbrace{(8^{n-1} + \dots + 5^{n-1})}_q \Rightarrow 2^{3n} - 5^n = 3q \Rightarrow 3 \mid 2^{3n} - 5^n$$

حل سوال ۶

$$3^{8n+4} + 4^{2n+1} = 81^{2n+1} = (81+4)(81^{2n} - 81^{2n-1} \times 4 + \dots + 4^{2n})$$

$$\Rightarrow 3^{8n+4} + 4^{2n+1} = 85q = 17 \times \overbrace{5q}^q = 17q \Rightarrow 17 \mid 3^{8n+4} + 4^{2n+1}$$

حل سوال ۹

$$a=2k+1 \Rightarrow a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=\underbrace{4k(k+1)}_{*}+1=4(2q)+1=8q+1$$

* حاصلضرب دو عدد متوالی بر 2! بخش پذیر است.

حل سوال ۱۰: چون n بر ۳ و ۲ بخش پذیر نیست پس r نمی تواند ۰ یا ۲ یا ۳ یا ۴ باشد.

پس: $r=1$ یا $r=5$ بنابراین: $n=6q+1$ یا $n=6q+5$

حل سوال ۱۱

$$\overline{abcabc} = 100000a + 10000b + 1000c + 100a + 10b + c$$

$$= 100a(1000+1) + 10b(1000+1) + c(1000+1) = 1001(\underbrace{100a + 10b + c}_q)$$

$$= 7 \times 11 \times 13q$$

$\overline{abcabc}$ بر ۷ و ۱۳ و ۱۱ بخش پذیر است.

حل سوال ۱۲:

$$\begin{aligned}\overline{ababab} &= 100000a + 10000b + 1000a + 100b + 10a + b \\ &= 10a(10000 + 100 + 1) + b(10000 + 100 + 1) = 10101(\underbrace{10a + b}_q) \\ &= 3 \times 7 \times 13 \times 37q\end{aligned}$$

پس هر عدد به صورت $ababab$ بر ۷ و ۱۳ و ۳۷ بخش پذیر است.

حل سوال ۱۳

$$\begin{aligned}3^{52} - 2^{39} &= (3^4)^{13} - (2^3)^{13} = (81)^{13} - 8^{13} = (81 - 8) \underbrace{(81^{12} + \dots + 8^{12})}_q \\ \Rightarrow 3^{52} - 2^{39} &= 73q \Rightarrow 73 \mid 3^{52} - 2^{39}\end{aligned}$$

حل سوال ۱۴

$$4^{2n} - 1 = 16^n - 1 = (16 - 1) \underbrace{(16^{n-1} + \dots + 1^n)}_q \Rightarrow 4^{2n} - 1 = 15q \Rightarrow 15 \mid 4^{2n} - 1$$

حل سوال ۱۵

$$\begin{aligned}10^{2n} - 1 &= (100^n - 1) = (100 - 1) \underbrace{(100^{n-1} - \dots + 1^n)}_q \\ \Rightarrow 10^{2n} - 1 &= 99q = 3 \times \overbrace{33q}^{\dot{q}} = 3\dot{q} \Rightarrow 3 \mid 10^{2n} - 1\end{aligned}$$

حل سوال ۱۶

$$a \mid 3n-2 \Rightarrow a \mid 4(3n-2) \quad \text{و} \quad a \mid -4n+3 \Rightarrow a \mid 3(-4n+3)$$

$$\Rightarrow a \mid 12n-8-12n+9 \Rightarrow a \mid 1 \Rightarrow a \mid \pm 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

حل سوال ۱۷

$$a=3q+r \quad 0 \leq r < 3$$

$$r=0 \Rightarrow a=3q, \quad r=1 \Rightarrow a=3q+1, \quad r=2 \Rightarrow a=3q+2$$

پاسخنامه تست های حل نشده نظریه اعداد فصل تقسیم پذیری

شماره تست	۱	۲	۳	۴	۵	۶
پاسخ	گزینه ۴	گزینه ۱	گزینه ۲	گزینه ۱	گزینه ۲	گزینه ۳

فصل پنجم: اعداد اول

تعریف: هر عدد طبیعی و غیر از 1 که هیچ مقسوم علیه یا شمارنده مثبتی جز 1 و خودش نداشته باشد، اول نامیده می شود.

توجه: هر عدد طبیعی و غیر از 1 که اول نباشد، مرکب نامیده می شود و عدد 1، نه اول است و نه مرکب.

تذکر: هر عدد طبیعی دارای تجزیه ای بدیهی به صورت $n=1 \times n$ است و تجزیه غیر از این حالت، در صورت وجود، تجزیه نا بدیهی نامیده می شود.

قضیه ۱: هر عدد صحیح به جز 1 و -1 حداقل یک مقسوم علیه اول دارد.
(X نماینده عدد صحیح)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{صفر بر هر عدد اولی بخش پذیر است} \Rightarrow x = 0 \text{ اگر} \\ \text{در این صورت } S \text{ را مجموعه همه مقسوم علیه های بزرگتر} \Rightarrow x \neq 0 \text{ اگر} \end{array} \right.$$

از ۱ در نظر می گیریم بدیهی است که $S \neq \emptyset$ (زیرا $|x| \in S$)

کوچکترین عضو مجموعه S را K در نظر می گیریم (چون $S \subset \mathbb{N}$ خوش ترتیب است پس

عضو ابتدا دارد) این کوچکترین عضو باید اول باشد زیرا اگر اول نباشد آنگاه عدد طبیعی

$t > 1$ ، $t \neq k$ وجود دارد که tlk در این صورت $t \in S$ $(\underbrace{tlx}_{t \in S} \Leftarrow tlk, k|x)$ که با

کوچکترین عضو بودن K تناقض دارد. پس X حداقل یک مقسوم علیه اول مانند k دارد.

قضیه ۲: بی نهایت عدد اول وجود دارد.

از برهان خلف استفاده می کنیم. فرض می کنیم این دنباله ... ۳ و ۲ متناهی باشد یعنی $p_1, p_2, \dots, p_n$ اعداد اول باشند اکنون عدد $k = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ را در نظر می گیریم (k عددی طبیعی و مخالف همه ی اعداد اول است). چون k مخالف همه ی اعداد اول است پس k مرکب است یعنی یک مقسوم علیه اول دارد: $p_j | k$ از طرفی حاصلضرب همه ی اعداد اول بر p_j بخش پذیر است یعنی: $p_j | p_1 p_2 \dots p_n \Leftarrow$

$$(۱) \quad p_j | \overbrace{p_1 p_2 \dots p_n}^K + 1$$

$$(۲) \quad p_j | p_1 p_2 \dots p_n,$$

$$\Rightarrow p_j | 1 \quad \# \quad \Rightarrow \text{تفاضل (۱) و (۲)}$$

p_j یک عدد اول است و $p_j \nmid 1$

بنا بر این تعداد اعداد اول نامتناهی است.

قضیه ۳: اگر n یک عدد مرکب باشد، آنگاه n حداقل یک مقسوم علیه اول دارد که

کوچکتر یا مساوی $\sqrt{n}$ است.

$$n \text{ مرکب} \Rightarrow n = ab \quad (1 < a \leq b < n)$$

ضرب طرفین دو نامساوی $a \leq b$

$$\begin{cases} \text{اگر } a > \sqrt{n} \Rightarrow b > \sqrt{n} \Rightarrow ab > \sqrt{n} \times \sqrt{n} \Rightarrow ab > n \quad \# \\ \text{بنابراین قضیه ۱} \quad a \neq 1 \quad \text{اگر } a \leq \sqrt{n} \Rightarrow p | a * (p \text{ عددا اول}) \Rightarrow p | n \end{cases}$$

طبق $p \leq a$ یعنی عدد اول p وجود دارد که: $p \leq \sqrt{n}$ ، $p | n$

(چون $p \leq a$ و $a \leq \sqrt{n} \Leftrightarrow p \leq \sqrt{n}$)

نکته: هر دو عدد طبیعی (صحیح) متوالی نسبت به هم اولند.

نکته: هر دو عدد طبیعی (صحیح) فرد متوالی نیز نسبت به هم اولند.

تذکر: دو عدد a و b را نسبت به هم اول گویند هرگاه: $(a,b)=1$ ب.م.م

نکته: هر دو عدد اول متمایز، نسبت به هم اولند.

توجه: اگر عددی هیچ شمارنده اول و کوچکتر یا مساوی با جذرش نداشته باشد آن عدد

اول است.

حدس های گلدباخ: هر عدد طبیعی زوج را می توان بصورت حاصل جمع دو عدد اول و

هر دو عدد طبیعی فرد رامی توان به صورت حاصل جمع سه عدد اول نوشت.

نکته: اگر $2^n + 1$ اول باشد آنگاه n به صورت 2^k خواهد بود (عدد فرما)

نکته: اگر $2^n - 1$ اول باشد آنگاه n اول است (عدد مرسن)

مقسوم علیه مشترک و بزرگترین آن:

تعریف: عدد صحیح C را مقسوم علیه (شمارنده) مشترک دو عدد صحیح a و b گوئیم هرگاه

clb و cla

تعریف: عدد d را بزرگترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م) دو عدد صحیح a و b (که حداقل

یکی از آن ها مخالف صفر است) گوئیم هرگاه:

الف) d یک مقسوم علیه مشترک a و b باشد

ب) هر مقسوم علیه مشترک a و b از d کوچکتر باشد.

قضیه ۴: بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b که حداقل یکی از آنها صفر

نیست برابر است با کوچکترین عضو مجموعه ی

$$S = \{ma + nb : m, n \in \mathbb{Z}, ma + nb > 0\}$$

اثبات: مشخص است: که S ناتهی است و چون S زیر مجموعه ای از اعداد طبیعی است

پس خوش ترتیب است بنابراین دارای کوچکترین عضو است بنابراین

فرض می کنیم d کوچکترین عضو باشد:

$$d = m_1a + n_1b, m_1, n_1 \in \mathbb{Z}^*$$

-طبق الگوریتم تقسیم (فصل قبل)، اگر a رابه d تقسیم کنیم:

$$(1) a = dq + r \quad 0 \leq r < d$$

اگر $r > 0$ پس $r \notin S$ و چون $r < d$ و d کوچکترین عضو S است داریم:

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow r = a - dq &\Rightarrow r = a - (m_1a + n_1b)q = a - m_1aq - n_1bq = a(1 - m_1q) - (n_1q)b \\ (2) \end{aligned}$$

رابطه (۲) یک ترکیب خطی از a و b است یعنی باید عضو S باشد ولی $r < d$ و این

با کوچکترین عضو بودن d تناقض دارد پس $r \neq 0$ و $r = 0$ پس طبق (۱): $d \mid a$

به همین ترتیب می توانیم نشان دهیم $d \mid b$ یعنی d مقسوم علیه مشترک a و b است. حال

$$\text{اگر } c > 0, \quad c \mid a, \quad c \mid b \quad \Leftrightarrow \quad c \mid m_1a + n_1b \quad \Leftrightarrow \quad c \mid d$$

یعنی $c \leq d$ پس d بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b است.

$$\text{توجه: هرگاه } a = bq + r \quad \text{آنگاه: } (a, b) = (b, r)$$

نتیجه قضیه: ب.م.م دو عدد را می توان بصورت ترکیب خطی از آن دو عدد نوشت

(قضیه بزو (Bezout))

توجه: برای محاسبه بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد a و b کافی است، عدد بزرگتر

را بر عدد کوچکتر تقسیم نموده و سپس بزرگترین مقسوم علیه مشترک عدد کوچکتر و

باقیمانده را بدست می آوریم. این عمل را آنقدر ادامه می دهیم تا یکی از اعداد صفر شود.

در این صورت عدد دیگر ب.م.م است.

مثال: بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد ۷۲ و ۳۰ را بیابید.

$$\begin{array}{r} 72 \overline{) 30} \\ \underline{60} \\ 12 \end{array} \quad \begin{array}{r} 30 \overline{) 12} \\ \underline{24} \\ 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 12 \overline{) 6} \\ \underline{12} \\ 0 \end{array} \leftarrow \text{ب.م.م}$$

می توان به صورت جدول تقسیمات متوالی هم آن را نوشت:

خارج قسمت	--	۲	۲	۲
اعداد	۷۲	۳۰	۱۲	۶
	۶۰	۲۴	۱۲	(ب.م.م)
باقیمانده	۱۲	۶	۰	

توجه: اعداد صحیح a

و b نسبت به هم

اولند اگر و تنها اگر

اعداد صحیح m و n

موجود باشند

بطوریکه:

$$ma + nb = 1$$

نکته: اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $(a, b) = d$

در این صورت:

$$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$$

نکته: اگر دو عدد a و b را بر (ب.م.م) آنها تقسیم کنیم خارج قسمت ها نسبت به هم

اولند.

تست ۱: اگر کوچکترین عضو مثبت مجموعه $\{ma+nb \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$ عدد C باشد. بزرگترین

شمارنده مشترک $\frac{a^2}{c}$ و $\frac{ab}{c}$ کدام است؟

۱) $|a|$ ۲) $|ac|$ ۳) ac ۴) 1

توجه: اگر عددی حاصل ضرب دو عدد دیگر را عاد کند نمی توان نتیجه گرفت که حداقل

یکی از آنها را عاد می کند. $4 \nmid 2 \times 6$ ولی $4 \nmid 2$ و $4 \nmid 6$

قضیه ۵: عدد طبیعی d بزرگترین مقسوم علیه مشترک دو عدد صحیح a و b است اگر و

تنها اگر:

۱) $d \mid a$ و $d \mid b$ ۲) هرگاه $c \mid a$ و $c \mid b$ آنگاه $c \mid d$

اثبات:

اگر $(a,b)=d$ پس: $d \mid a$, $d \mid b$

در این صورت اعداد صحیح m و n وجود دارند که: $d=ma+nb$ (1)

اگر $c \mid a$ و $c \mid b$ بنابراین $ma+nb$ بر c بخش پذیر است یعنی طبق (۱) $c \mid d$

برعکس اگر d عددی باشد که: $d \mid a$ و $d \mid b$ و c یک مقسوم علیه مشترک مثبت a و b باشد

آنگاه $c \mid d$ یعنی $c \leq d$

پس d بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b است.

قضیه ۶: (لم اقلیدس): اگر $albc$ و $(a,b)=1$ آنگاه alc

$$(a,b)=1 \Rightarrow ma+nb=1 \xrightarrow{\times c} cma+Cnb=C$$

ولی چون $albc$ پس: $bc=aq$ در نتیجه:

$$C=Cma+naq=\underbrace{(cm+nq)}_{q'}a \Rightarrow c=q'a \Rightarrow alc$$

۸۸

قضیه ۷: اگر p یک عدد اول باشد و $plab$ انگاه pla یا plb

اگر pl_a انگاه یا $(a,p)=1$ یا $(a,p)=d$ و $d \neq 1$

اگر $(a,p)=d$ در این صورت داریم: $d|a$ و $d|p$ و چون p یک عدد اول است پس $d=1$ یا

$d=p$ که فرض کردیم $d \neq 1$ پس $d=p$ و چون $d|a$ پس pla که با فرض تناقض دارد (pl_a)

بنابراین در هر صورت داریم: $(a,p)=1$ پس طبق لم اقلیدس plb

نکته: هرگاه عددی دو عدد را بشمارد، انگاه همواره ب.م.م آنها را نیز میشمارد به عبارت

دیگر

$$alb, alc: \Rightarrow al(b,c)$$

توجه: عکس قضیه بزو در حالت کلی برقرار نمی باشد یعنی اگر عددی چون d برابر با ترکیب

خطی دو عدد صحیح مانند a و b باشد نمی توان نتیجه گرفت که d ، ب م م دو عدد ba و

است. در حالت $d=1$ برقرار است

نکته: اگر عددی بر دو عدد بخش پذیر باشد و آن دو عدد نسبت به هم اول باشند، انگاه بر

حاصلضرب آن دو عدد نیز بخش پذیر است.

نکته: اگر عددی نسبت به دو عدد اول باشد، انگاه نسبت به حاصلضرب آن دو عدد نیز اول

است و برعکس.

نکته: اگر $(a,b)=d$ و $k \in \mathbb{N}$ در این صورت $(Ka, Kb)=Kd$ ب م م

نکته: هرگاه دو عدد نسبت به هم اول باشند انگاه تفاضل و مجموع و حاصلضرب آن دو

عدد نیز نسبت به هم اولند.

تست: اگر a و b دو عدد صحیح و $plab$ و $37p-29a=1$ کوچکترین عضو مثبت مجموعه

$A = \{mp + nb : m, n \in \mathbb{Z}\}$ کدام است؟

$$b \mid p \quad (2) \quad |p| \quad (3) \quad 1 \quad (4)$$

$$d=1$$

$$37p - 29a = 1 \xRightarrow{\text{عکس بزو}} (p, a) = 1, p \mid ab \Rightarrow p \mid b \Rightarrow (p, b) = |p|$$

که طبق قضیه بزو: $\min A = (p, b) = d$ پس $\min A = |p|$

مثال ۱: اگر ریشه های معادله $x^2 - bx + c = 0$ که در آن $c \in \mathbb{Z}$ و b نسبت به هم اول باشند

ب م م b و c را بدست آورید.

مثال ۲: اگر $(a, b) = d$ در این صورت نشان دهید:

$$(a+b, a-b) = d \quad \text{یا} \quad (a+b, a-b) = 2d \quad \text{اگر} \quad (a, b) = 1 \quad \text{آنگاه:}$$

$$(a+b, a-b) = 1 \quad \text{یا} \quad (a+b, a-b) = 2$$

مثال ۳: نشان دهید اگر a و b دو عدد صحیح باشند و $(a,b)=d$

$$\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)=1$$

در اینصورت:

تست ۲: عدد اول m و عدد صحیح و مثبت n در رابطه $\frac{m+n}{m-n}=36$ صدق می کنند. تعداد

مقسوم علیه های n برابر با:

$$4(1) \quad 5(2) \quad 2(3) \quad 3(4)$$

قضیه بنیادی حساب:

هر عدد طبیعی $n > 1$ را می توان بصورت حاصلضرب عوامل اول به شکل $n = p_2^{\alpha_2} p_k^{\alpha_k} \dots$

$p_1^{\alpha_1}$ نمایش داد که در آن p_i ها اعداد اول متمایزند و " α_i " ها اعداد طبیعی هستند. این

نمایش صرف نظرا از ترتیب عوامل منحصر بفرد است. این نمایش را "نمایش متعارف" n یا

"تجزیه قانونی" (استاندارد) n به عوامل اول می نامیم.

قضیه: اگر $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ و $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n}$ آنگاه

$$d=(a,b): p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \dots p_n^{\gamma_n} \quad \gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$$

توجه: اگر برای عدد اول p ، $p \nmid n$ آنگاه توان آن را در نمایش n برابر با صفر می گیریم به

عبارت دیگر ممکن است در تجزیه عدد طبیعی $n > 1$ اعداد اولی را دخالت دهیم که n را

عاد نمی کنند در این حالت توان اینگونه اعداد اول را مساوی صفر فرض می کنیم:

$$140 = 2^2 \times 3^0 \times 5 \times 7$$

$$360 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^0$$

کوچکترین مضرب مشترک دو عدد (ک.م.م)

عدد صحیح m را مضرب مشترک دو عدد صحیح و ناصفر a و b می نامیم هرگاه مضرب هر

دو عدد a و b باشد یعنی: alm و blm

تعریف: اگر a و b دو عدد صحیح و ناصفر باشند، کوچکترین مضرب مشترک دو عدد a و b

را با نماد $[a, b]$ نمایش داده و آن عددی است طبیعی مانند C به قسمی که اولاً

C مضرب مشترک a و b باشد و ثانیاً از هر مضرب مشترک a و b کوچکتر باشد.

قضیه: اگر a و b دو عدد صحیح و ناصفر بوده و alb در این صورت:

$$[a, b] = |b|$$

قضیه: اگر عددی بر دو عدد بخش پذیر باشد آنگاه بر ک.م.م آن دو عدد نیز بخش پذیر

است:

$$alm, blm \Rightarrow [a, b] \mid m$$

قضیه: اگر $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_k^{\alpha_k} \dots$ و $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} p_k^{\beta_k} \dots$ آنگاه:

$$[a, b] = p_1^{\theta_1} p_2^{\theta_2} \dots p_k^{\theta_k} \quad \text{که} \quad \theta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\} \quad \text{به عبارت ساده تر میتوان گفت}$$

ک م م برابر است با حاصل ضرب عاملهای مشترک باتوان بزرگتر $\times$ عاملهای غیر مشترک

قضیه اساسی حساب استدلالی :

$$\frac{|ab|}{(a,b)} = [a,b] \quad \text{یا} \quad a,b = |ab|$$

مثال: اگر $(a,b)=15$ و $[a,b]=90$ انگاه a و b را در N بیابید.

$$15|a \Rightarrow a=15q$$

$$\Rightarrow 90=15qq' \Rightarrow qq'=\frac{90}{15}=6 \quad (q,q')=1$$

$$a|90 \Rightarrow 90=aq'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q = 2 \\ q' = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} q = 1 \\ q' = 6 \end{cases}$$

پس: $\begin{cases} q = 2 \rightarrow a = 30, & q' = 3 \rightarrow b = 45 \\ q = 1 \rightarrow a = 15, & q' = 6 \rightarrow b = 6 \times 15 = 90 \end{cases}$

مثال ۴: کوچکترین عدد ۴ رقمی را که باقیمانده تقسیم آن عدد بر ۹ و ۲۴، ۲۵ به ترتیب

۱۴، ۱۳، ۷ باشد بیابید.

تست ۳: اگر p یک عدد اول فرد باشد آنگاه $2p^2$ بر چند عدد صحیح مثبت قابل قسمت

است؟

$$\begin{matrix} ۷(۴ & ۴(۳ & ۶(۲ & ۵(۱ \\ ۹۳ \end{matrix}$$

تست ۴: نسبت دو عدد صحیح $\frac{4}{9}$ و ک.م.م آنها ۱۲۶ است، ب.م.م آنها کدام است؟

۱۷(۱) ۳۴(۲) ۵۱(۳) ۶۸(۴)

مثال ۵: تعداد مضرب های طبیعی عدد ۶ که کوچکتر یا مساوی ۲۹ باشند را بدست آورید.

مثال ۶: ثابت کنید که حاصل جمع دو عدد صحیح فرد، زوج است ولی حاصل ضرب آنها فرد است.

بیشتر بدانیم:

(۱) به ازای هر دو عدد صحیح مانند a و b اگر $(a,b)=1$ داریم:

$$(a^n, b^m)=1, (a^n, b)=1$$

(۲) اگر $(a,b)=d$ آنگاه: $(a^n, b^n)=d^n=[(a,b)]^n$ ب م م

(۳) هرگاه $a^n | b^n$ در این صورت $a | b$

(۴) اگر a و b سه عدد صحیح بوده به طوریکه دو به دو نسبت به هم اول باشند داریم:

$$(ab+ac+bc, abc)=1$$

(۵) اگر $(a,b)=1$ در این صورت: $(ab, a+b)=1$

(۶) اگر a نسبت به b اول بوده و $cla+b$ باشد آنگاه c نسبت به b و a نیز اول خواهد بود.

(۷) اگر a و b دو عدد صحیح و ناصفر بوده و $(a,b)=1$ در این صورت همواره :

$$[a,b]=a \times b$$

$$[a,b]=(a,b) \Leftrightarrow |a|=|b| \quad (۸)$$

$$[a,(b,c)]=([a,b], [a,c]) \quad (۹)$$

$$(a,[b,c])=[(a,b), (a,c)] \quad (۱۰)$$

$$[a,b]=c \Leftrightarrow [a^n, b^n]=c^n \quad (۱۱)$$

$$[a,b]=c \Leftrightarrow [na, nb]=nc \quad (۱۲)$$

(۱۳) اگر n عدد طبیعی باشد در این صورت توان عدد اول p در $n!$ برابر است با:

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

که در آن $[]$ نماد جزء صحیح است.

(۱۴) با توجه به نکته ۱۳ اگر بخواهیم توان عدد p را در تجزیه $n!$ به عوامل اول بدست آوریم کافی است n را بر p تقسیم متوالی نموده و خارج قسمت ها را با هم جمع کنیم تا توان p بدست آید مثلاً توان عدد ۷ در $400!$:

$$\text{چون } 7^4 > 400 \text{ پس: } \left[\frac{400}{7}\right] + \left[\frac{400}{7^2}\right] + \left[\frac{400}{7^3}\right]$$

$$= 57 + 8 + 1 = 66 \text{ توان عدد ۷ در تجزیه } 400!$$

$$\text{یا: } 400 \begin{array}{r} 7 \\ \hline 57 \\ \hline 7 \\ \hline 8 \\ \hline 7 \\ \hline 1 \end{array} \longrightarrow 57+8+1=66$$

(۱۵) برای یافتن تعداد صفرهای جلوی $n!$ کافیست n را بر ۵ تقسیم های متوالی نموده و خارج قسمت ها را با هم جمع کنیم:
مثلاً: تعداد صفرهای جلوی $45!$:

$$45 \begin{array}{r} 5 \\ \hline 9 \\ \hline 5 \\ \hline 1 \end{array} \longrightarrow 9+1=10$$

(۱۶) اگر نمایش متعارف عدد طبیعی n به صورت $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ باشد بطوریکه " p_i " ها اعداد اول متمایزند در این صورت تعداد مقسوم علیه های مثبت n برابر است:

$$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_r+1)$$

مثلاً: تعداد مقسوم علیه های مثبت عدد: ۲۴۲۰:

$$2420 = 2^2 \times 5 \times 11^2 \longrightarrow (2+1)(1+1)(2+1) = 18$$

تعداد مقسوم علیه ها

حل مثالهای حل نشده نظریه اعداد فصل پنجم: اعداد اول

حل مثال ۱: فرض کنیم α و β ریشه های $x^2 - bx + c = 0$ باشند در این صورت $\alpha\beta = c$ و $\alpha + \beta = b$ چون $(\alpha, \beta) = 1$ پس: $(\alpha\beta, \alpha + \beta) = 1$ بنابراین $(b, c) = 1$

حل مثال ۲: ابتدا فرض می کنیم $(a, b) = 1$ و $(a+b, a-b) = c$ در این صورت $c \mid a+b$ و $c \mid a-b$ بنابراین $c \mid 2a$ و $c \mid 2b$ پس c یک مقسوم علیه مشترک $2a$ و $2b$ است از طرفی از $(a, b) = 1$ داریم: $(2a, 2b) = 2$ بنابراین $c \leq 2$ در نتیجه $c = 1$ یا $c = 2$ یعنی $(a+b, a-b) = 1$ یا $(a+b, a-b) = 2$

حال اگر $(a, b) = d$ در این صورت: $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$ پس بنا به حالت قبل:

$$(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}, \frac{a}{d} - \frac{b}{d}) = 1 \text{ یا } 2 \Rightarrow d(\frac{a}{d} + \frac{b}{d}, \frac{a}{d} - \frac{b}{d}) = d \times 1 \text{ یا } d \times 2 \Rightarrow (a+b, a-b) = d \text{ یا } 2d$$

حل مثال ۳: چون $(a, b) = d$ پس اعداد صحیح m و n وجود دارند بطوریکه: $ma + nb = d$ در نتیجه با تقسیم طرفین بر d داریم: $m(\frac{a}{d}) + n(\frac{b}{d}) = 1$ و چون $\frac{a}{d} \in \mathbb{Z}$, $\frac{b}{d} \in \mathbb{Z}$ پس $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$

$$(a, b) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid a \\ d \mid b \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{d}, \frac{b}{d} \in \mathbb{Z} \quad \text{توجه:}$$

حل مثال ۴: فرض کنیم عدد مطلوب a باشد پس: $a = 9k_1 + 7$, $a = 24k_2 + 13$, $a = 25k_3 + 14$

$$a + 11 = 9k_1 + 18, \quad a + 11 = 24k_2 + 24, \quad a + 11 = 25k_3 + 25$$

$$\Rightarrow 9|a+11, 24|a+11, 25|a+11$$

بنابراین $a+11$ کوچکترین عددی است که بر ۹ و ۲۴ و ۲۵ بخش پذیر بوده و طبق قضیه باید بر $[9,24,25]=1800$ بخش پذیر باشد و چون $a+11$ پس $a+11$ کوچکترین عددی است که بر ۱۸۰۰ بخش پذیر است و باید $a+11=1800 \Rightarrow a=1800-11=1789$

$$\left[\frac{29}{6}\right]=[4/8]=4 \quad \text{حل مثال ۵: } \{6,12,18,24\}$$

.....

$$a=2k+1 \quad \text{و} \quad b=2k'+1 \quad \Rightarrow a+b=2 \overbrace{(k+k'+1)}^{k''} \quad \text{حل مثال ۶}$$

$$\Rightarrow a+b=2k'' \quad \text{زوج}$$

$$ab=(2k+1)(2k'+1)=4kk'+2k+2k'+1=2 \underbrace{(2kk'+k+k')}_{k''}+1=2k''+1 \quad \text{فرد}$$

پاسخنامه تست های حل نشده نظریه اعداد فصل پنجم: اعداد اول

شماره تست	۱	۲	۳	۴
پاسخ	گزینه ۱	گزینه ۴	گزینه ۲	گزینه ۱

فصل ششم: همنهشتی:

تعریف: دو عدد صحیح a و b را به پیمانه m همنهشت می گوئیم هرگاه $m|a-b$ و می

نویسیم: $a \equiv b \pmod{m}$ (به عبارت دیگر:

$$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a = mk + b$$

تذکره: وقتی می نویسیم $a \equiv b \pmod{m}$ مهم ترین مفهوم این جمله این است که a و b در تقسیم

بر m هم باقی مانده هستند.

تذکره: مهم ترین کاربرد همنهشتی، پیدا کردن باقیمانده تقسیم a بر b است.

توجه: با توجه به تعریف همنهشتی گزاره های زیر همگی معادل اند:

$a \equiv b \pmod{m}$ به پیمانه m با b همنهشت است.

$a \equiv b \pmod{m}$ به پیمانه m همنهشت اند.

$$a \equiv b \pmod{m} \quad *$$

$$[a] = [b] \quad *$$

$a-b$ مضربی از m است. $*$

$$m|a-b \quad *$$

a و b در یک دسته همنهشتی به پیمانه m قرار دارند.

* باقیمانده تقسیم a و b بر m باهم برابرند.

نکته: برای اینکه همنهشتی های عدد a به پیمانه m را پیدا کنیم کافی است هر مضرب

دلخواه m را از a کم و یا به آن اضافه کنیم، در واقع:

$$a \equiv a \pm mk \pmod{m}$$

توجه: نکته فوق را می توان به صورت: $[a] = \{a \pm mk : k \in \mathbb{Z}\}$ نیز بیان کرد.

نکته: وقتی در تستی باقی مانده ی a بر b را بخواهند یعنی $a \equiv b$? در آخر، جواب باید عددی

از صفر تا $b-1$ باشد که بتواند باقی مانده شود.

خواص همنهشتی

(۱) هر عدد با خودش همنهشت است: $a \equiv a$

(۲) همنهشتی خاصیت جابجایی دارد: $a \equiv b \Rightarrow b \equiv a$

(۳) دو عدد همنهشت با عدد سوم، خودشان همنهشت اند: $b \equiv a, c \equiv a \Rightarrow b \equiv c$

(۴) خاصیت ترایی: $a \equiv b, b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$

(۵) انتقال به طرف دیگر با تغییر علامت: $a \equiv b+c \Rightarrow a-c \equiv b$

(۶) جمع، تفاضل و ضرب طرفین دو همنهشتی :

$a \equiv b, c \equiv d \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d, a \times c \equiv b \times d$

(۷) جمع، تفاضل و ضرب طرفین یک همنهشتی بایک عدد:

$a \equiv b \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c, a \times c \equiv b \times c$

(۸) به توان رساندن طرفین همنهشتی: $a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n$

(۹) هر مضرب پیمانه، همنهشت صفر میشود: $km \equiv 0$

(۱۰) به جای هر عددی که در توان نباشد، می توانید همیشه همنهشت آن را قرار

دهید در این نکته با همنهشت گذاری سعی می کنیم با عدد های کوچک تر ی کار کنیم.

(۱۱) چون رابطه همنهشتی روی Z یک رابطه هم ارزی است بنابراین کلاس های هم ارزی

این رابطه، Z را افراز می کند و دارای کلاس های هم ارزی "به پیمانه m " زیر می

باشد: $[0], [1], \dots, [m-1]$

$$a \equiv_m b, a \equiv_n b \Rightarrow a \equiv_{[m,n]} b \quad (۱۲)$$

$$a \equiv_m b, a \equiv_n b \Rightarrow a \equiv_{mn} b \iff [m,n]=mn \iff (m,n)=1 \quad \text{در حالتی که}$$

$$a \equiv_m b, b \equiv_n c \Rightarrow a \equiv_{(m,n)} c \quad (۱۳)$$

$$a \equiv_m b, n|m \Rightarrow a \equiv_n b \quad (۱۴) \quad \text{"به تخفیف پیمانه معروف است"}$$

تعریف دسته ی همنهشتی: عدد صحیح a به پیمانه عدد طبیعی m را با $[a]$ یا $\bar{a}$ نشان

$$[a] = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv_m a\} \quad \text{می دهیم و تعریف می کنیم :}$$

$[a]$ را کلاس یا رده ی هم ارزی a نیز می گویند.

مجموعه همه دسته های همنهشتی به پیمانه m را با $\frac{\mathbb{Z}}{m}$ یا $\mathbb{Z}_m$ نشان می دهیم:

$$\mathbb{Z}_m = \{[0], [1], \dots, [m-1]\}$$

توجه: رابطه همنهشتی به پیمانه m ، مجموعه $\mathbb{Z}$ را دقیقاً به m کلاس هم ارزی افراز می کند.

تست ۱: باقی مانده a بر ۱۵ برابر ۱۳ است. باقی مانده تقسیم $2a^2 - 5a + 1$ بر ۵ کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} ۴(۴) & ۳(۳) & ۲(۲) & ۱(۱) \text{ صفر} \end{array}$$

تست ۲: رابطه $R = \{(x,y) : m|x-y\}$ مجموعه اعداد صحیح را به ۱۱ کلاس هم ارزی افراز

نموده است. در این صورت مجموع ارقام کوچکترین عدد سه رقمی که به $[1389]$ تعلق دارد، کدام است؟

$$\begin{array}{cccc} ۵(۴) & ۳(۳) & ۲(۲) & ۷(۱) \end{array}$$

مثال ۱: $9 \equiv ?^{2001} 64$

مثال ۲: $31 \equiv ?^{1379} 126$

مثال: اگر $a=15k+14$ در اینصورت عدد a^9 به کدام یک از صورت های زیر است؟

$$15t+10 \text{ (۴)} \quad 15t+14 \text{ (۳)} \quad 15t+3 \text{ (۲)} \quad 15t+1 \text{ (۱)}$$

$$a=15k+14 \Rightarrow a \equiv_{15} 14, 14 \equiv_{15} -1 \Rightarrow a \equiv_{15} -1 \Rightarrow a^9 \equiv_{15} -1$$

$$\xrightarrow{\text{طبق}^*} a^9 \equiv_{15} 14 \Rightarrow a^9 = 15k+14$$

مثال ۳: ثابت کنید به ازای هر n ، (2^n+6n-1) بر ۹ بخش پذیر است.

مثال: اگر $a \equiv^m b$ و $n|m$ ثابت کنید $a \equiv^n b$.

$$a \equiv^m b \Rightarrow m|a-b, n|m \xRightarrow{\text{تعدی}} n|a-b \Rightarrow a \equiv^n b$$

مثال ۴: ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n ، $6^{3n-1}+7$ بر ۴۳ بخش پذیر است.

مثال ۵: باقیمانده تقسیم $A = (2^{11} - 1) \times 4$ بر ۲۳ را بیابید.

مثال: ثابت کنید $6^{2n+2} - 5^{2n+2} \equiv 0 \pmod{11}$

عبارت $a^p - b^q$ بر $a^m + a^n$ بخش پذیر است به شرطی که: $\frac{p}{m} = \frac{q}{n} = 2k$ و چون

$2n+2 = 2(n+1) = 2k$ پس $6^{2n+2} - 5^{2n+2}$ بر $(6+5)$ بخش پذیر است

یعنی: $6^{2n+2} - 5^{2n+2} \equiv 0 \pmod{11}$

قضیه: در رابطه همنهشتی $(a \equiv b \pmod{m})$ داریم: $a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$

که در آن $d = (m, c)$

$$ac \equiv bc \pmod{m} \Rightarrow m | ac - bc \Rightarrow ac - bc = mk \Rightarrow (a-b)c = mk$$

$$\xrightarrow{\div d} \xrightarrow{d=(m,c)} (a-b)\frac{c}{d} = \frac{m}{d}k \Rightarrow \frac{m}{d} | (a-b)\frac{c}{d}$$

$$\left(\frac{m}{d}, \frac{c}{d}\right) = 1 \Rightarrow \frac{m}{d} | a-b \Rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

$$(m, c) = d \Rightarrow \left(\frac{m}{d}, \frac{c}{d}\right) = 1 \quad \text{توجه:}$$

نکته: محاسبات باقی مانده در اعداد فاکتوریلی:

اگر $a \geq m$ باشد آنوقت $a! \equiv 0^m$

اگر $a < m$ باشد گاهی جواب صفر است و این زمانی است که $a!$ تمامی عامل های m را در

خودش داشته باشد: $1000 \equiv 0 \pmod{24!}$

برای آن اعدادی که در این دو حالت قرار نمی گیرند دو راه کلی هست:

(۱) **قضیه ویلسون:** اگر p عددی اول باشد: $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, $(p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$

(۲) باز کردن کامل عدد فاکتوریلی و محاسبات همنهشتی به صورت معمولی فقط لازمه

دو تادوتا، تک به تک یا سه تایی به طور مناسب بگیریم.

تست ۳: باقی مانده تقسیم $11! + 12! + 7! + 37! + 25!$ بر ۱۳ کدام است؟

(۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

توجه: در عبارت هایی که اعداد فاکتوریلی باهم جمع شده اند و ضمنا عددها مدام در حال

بزرگ شدن هستند تمام تلاش شما باید پیدا کردن اولین عدد فاکتوریلی باشد که به

پیمانه مورد نظر سوال، صفر شود چون عدد های فاکتوریلی بزرگتر هم در این حالت همگی

صفر شده و از رده خارج می شوند.

$$A! \equiv 0^m \xrightarrow{B > A} B! \equiv 0^m$$

تست ۴: باقیمانده تقسیم $1!+5!+9!+13!+\dots+1389!$ بر ۱۰۵ کدام است؟

- ۱۳(۱) ۱۴(۲) ۱۵(۳) ۱۶(۴)

تست ۵: باقیمانده تقسیم $\frac{200!}{1!} + \frac{200!}{2!} + \frac{200!}{3!} + \dots + \frac{200!}{200!}$ بر ۱۱ کدام است؟

- ۱(صفر) ۳(۲) ۴(۳) ۵(۴)

مثال: باقیمانده تقسیم $1!+2!+\dots+5!$ بر ۱۲ را به دست آورید؟

$$1! = 1 \equiv_{12} 1, 2! = 2 \equiv_{12} 2, 3! = 2 \times 3 \equiv_{12} 6, 4! = 24 \equiv_{12} 0$$

(به ازای $n! \equiv_{12} 0 : n \geq 4$) $\dots \equiv_{12} 0$ $5! \equiv_{12} 0$
 $5 \times 4!$

باقیمانده ۹ است. $1+2+6+0+0=9 \Rightarrow 9 \equiv_{12} 9$

تذکر مهم: برای یافتن رقم سمت راست یا یکان هر عدد، کافی است همنهشت آن عدد به

پیمانه ۱۰ را محاسبه کنیم به عبارت دیگر: دو عدد صحیح رقم یکان برابر دارند اگر و فقط

اگر به پیمانه ۱۰ باهم همنهشت باشند.

تست: دو عدد طبیعی $3k+5$ و $4k+9$ رقم یکان برابر دارند. عدد k به کدام رقم ختم

می شود؟

- ۴(۱) ۶(۲) ۰(۳) -۴(۴)

$$4k+9 \equiv_{10} 3k+5 \Rightarrow k \equiv_{10} -4 \Rightarrow k \equiv_{10} 6$$

قضیه نیوتن و کاربردهای آن برای محاسبه ی رقم یکان اعداد تواندار:

قضیه نیوتن: رقم یکان توان های متوالی هر عدد طبیعی، هر چهار بار یک مرتبه تکرار می

شود:

$$\forall a \in \mathbb{N}: a^{n+4} \equiv_{10} a^n$$

به عبارت دیگر برای پیدا کردن باقیمانده تقسیم عدد a^n بر ۱۰ (همان پیدا کردن رقم

سمت راست) کافی است عدد n را بر ۴ تقسیم کرده و در صورتیکه باقیمانده

۱ یا ۲ یا ۳ باشد رقم یکان a را به توان ۱ یا ۲ یا ۳ میرسانیم و اگر باقیمانده صفر باشد رقم

یکان را به توان ۴ میرسانیم آنگاه رقم یکان عدد a^n حاصل میشود.

حالت های خاص:

(۱) اگر عددی به صفر یا ۱ یا ۵ یا ۶ ختم شود هر توان آن نیز به صفر یا ۱ یا ۵ یا ۶ ختم

می شود.

(۲) اگر عددی به ۹ ختم شود توان های فرد آن به ۹ و توان های زوج آن به ۱ ختم می شود.

(۳) اگر عددی به ۴ ختم شود توان های فرد آن به ۴ و توان های زوج آن به ۶ ختم می

شود.

تست ۶: رقم یکان عدد $((29)^3)^{70} + (45)^{271} + (43)^{2041}$ کدام است؟

۶(۱) ۵(۲) ۹(۳) ۷(۴)

راهنمایی: با استفاده از قضیه نیوتن و حالت های خاص حل کنید

تابع فی اویلر:

اگر تجزیه عدد طبیعی n به عوامل اول به صورت $n = p^\alpha q^\beta r^\gamma \dots$ باشد بدون توجه به

$$\phi(n) = n \times \frac{p-1}{p} \times \frac{q-1}{q} \times \frac{r-1}{r} \times \dots$$

توان عامل های اول داریم:

مفهوم $\phi(n)$ این است که چه تعداد از اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی n نسبت به n اول اند.

تست ۷: چند عدد نا بیشتر از ۷۰ وجود دارد که با ۷۰ عامل مشترکی به جز ۱ داشته باشند؟

۲۴(۱) ۴۶(۲) ۴۵(۳) ۲۳(۴)

نکته: اگر $(a, n) = 1$ آنگاه $a^{\phi(n)} \equiv 1$ یا $a^{p-1} \equiv 1$ (اول p)

این نکته به قضیه اویلر مشهور است و از آن می توان برای همنهشتی هایی که پیمانه آنها عدد مرکب است استفاده کرد.

به این صورت: (پیمانه ϕ) رو حساب می کنیم، توان را پیمانه عدد به دست آمده حساب میکنیم هرچه شد آن را جای توان قرار میدهم و همنهشتی را حساب میکنیم. در تست زیر از آن استفاده کنید

تست ۸: باقیمانده 7^{19654} بر ۲۰ کدام است؟

۵(۱) ۱(۲) ۹(۳) ۴(۴)

*برخی اوقات استفاده از قضیه اوایلر را وقتی پیمانه ۱۰۰ است و می خواهیم دو رقم سمت

راست رو پیدا کنیم توصیه می کنندمثل تست زیر:

تست ۹: دو رقم سمت راست عدد 3^{405} کدام است؟

۹۳(۱) ۴۳(۲) ۷۳(۳) ۸۳(۴)

نکته: اگر $(a,b)=d$ باشد در اینصورت $\varphi(a,b)=\frac{\varphi(a)\varphi(b)d}{\varphi(d)}$

و در نتیجه اگر $(a,b)=1$ باشد $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$ است.

برای عدد اول p داریم: $\varphi(p^n)=p^n-p^{n-1}$

تست ۱۰: اگر $\varphi(1000)=k$ باشد حاصل $\varphi(1500)$ چه ضربی از k است؟

$\frac{3}{2}$ (۱) ۳(۲) ۲(۳) ۱(۴)

قضیه بزرگ فرما: معادله $x^n+y^n=z^n$ به جز حالتی که $n=2$ است و اعداد فیثاغورسی

در آن صدق می کنند برای n های دیگر جواب غیر بدیهی صحیح ندارد.

توجه: جواب غیر بدیهی یعنی جوابی که در آن هیچ یک از متغیرهای x ، y ، z صفر

نباشند.

تست ۱۱: معادله $x^{1389} + y^{1389} = z^{1389}$ چند جواب طبیعی دارد؟

(۱) هیچ (۲) ۱ (۳) ۱۳۸۹ (۴) ۱۳۹۰

حل معادله سیاله خطی $ax+by=c$:

قضیه: معادله سیالی خطی $ax+by=c$ در مجموعه Z جواب دارد اگر و تنها اگر

بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b ، عدد c را بشمارد.

اگر $(a,b)=d$ و $d|c$ (یعنی d ، c را بشمارد) در این صورت:

$$d|c \Rightarrow c=dk \quad (1)$$

و چون d ، b و a است پس می توان آن را بصورت ترکیب خطی از a و b نوشت:

$$d=am+bn \quad \text{که } m,n \in Z$$

$$(1) \Rightarrow C=(am+bn)k=a(\underbrace{mk}_{x_0})+b(\underbrace{nk}_{y_0}) \Rightarrow c=ax_0+by_0$$

یعنی معادله ی $ax+by=c$ جوابی مثل (x_0,y_0) دارد.

برعکس: اگر $ax+by=c$ دارای جواب باشد فرض کنیم جوابی مثل (x_0,y_0) داشته باشد

یعنی:

$$ax_0+by_0=c$$

از طرفی اگر $d=(a,b)$ می دانیم: $d|a$ و $d|b$ پس هر ترکیب خطی از آنها نیز بر d بخش

پذیر است یعنی: $d|ax_0+by_0$ پس: $d|c$

توجه: اگر $(a,b)=d$ و x_0 و y_0 یک جواب برای معادله خطی $ax+by=c$ باشد آنگاه

تمام جواب های آن بصورت:

$$x=x_0+k\frac{b}{d} \quad \text{و} \quad y=y_0-k\frac{a}{d} \quad \text{که } k \in Z$$

توجه: معادله $ax+by=c$ در Z یا جواب ندارد و یا بی نهایت جواب دارد. شرط لازم و کافی

برای وجود جواب معادله این است که: $(a,b)|c$

توجه: می توان معادله $ax+by=c$ را به یکی از معادلات همنهشتی $ax \equiv c$ یا $by \equiv c$

تبدیل کرد.

سوال: ثابت کنید معادله $(7n+9)x+(3n+4)y=5$ به ازای هر عدد صحیح n دارای

جواب است.

$$(7n+9, 3n+4) = d$$

$$d \mid 7n+9 \Rightarrow d \mid -3(7n+9)$$

$$\stackrel{\text{جمع } d}{\Rightarrow} d \mid 1 \Rightarrow d=1$$

$$d \mid 3n+4 \Rightarrow d \mid 7(3n+4)$$

و چون $(7n+9, 3n+4) = 1$ پس معادله سیاله به ازای هر عدد صحیح n دارای جواب

است.

سوال: معادله $4x+6y=10$ را حل کنید.

چون $(4,6)=2$ و $2 \mid 10$ ، پس معادله دارای جواب است چون $4+6=10$ پس

یعنی $(1,1)$ یک جواب است پس کلیه جواب های این معادله عبارتند از:

$$\begin{cases} X = x_0 + \frac{b}{d}k \Rightarrow x = 1 + \frac{6}{2}k = 1 + 3k \\ Y = y_0 - \frac{a}{d}k = 1 - \frac{4}{2}k = 1 - 2k \end{cases}$$

مثال ۶: معادله سیاله $2x+5y=51$ را حل کنید.

مثال ۷: m بر چه عددی بخش پذیر باشد تا معادله $21x - 39y = 2m$ در $\mathbb{Z}$ جواب داشته

باشد. ثانیا: معادله فوق را به ازاء $m=21$ حل کنید.

سوال: معادله $4x + 6y = 7$ را حل کنید.

چون $(4,6)=2$ و $2 \nmid 7$ پس معادله دارای جواب نیست.

توجه: اگر $(a,b)=d$ و $d \nmid c$ آنگاه معادله سیاله $ax+by=c$ دارای جواب صحیح

نیست.

توجه: اگر $(a,b)=1$ چون $1 \mid c$ آنگاه معادله سیاله $ax+by=c$ همواره دارای جواب

صحیح است.

سوال: معادله $2x + 3y = 8$ را حل کنید.

می توان مثل مثال های قبل حل کرد ولی اگر حدس زدن جواب اولیه سخت باشد معادله

سیاله را به روش اویلر حل می کنیم.

حل اول: چون $(2,3)=1$ و $1 \mid 8$ پس دارای جواب است و چون $2 \times 1 + 3 \times 2 = 8$ پس

$(1,2)$ یک جواب است بنابراین:

$$\begin{cases} X = x_0 + \frac{b}{d}k \Rightarrow 1 + \frac{3}{1}k = 1 + 3k \\ Y = y_0 - \frac{a}{d}k = 2 - \frac{2}{1}k = 2 - 2k \end{cases}$$

یا اینکه $(4,0)$ یک جواب است بنابراین :

$$\begin{cases} x = 4 + 3k \\ y = 0 - 2k = -2k \end{cases}$$

حل دوم به روش اویلر: چون $(2,3)=1$ و $1 \mid 8$ پس دارای جواب است و چون ضریب x

دارای قدر

مطلق کوچکتر از ضریب y است پس:

$$X = \frac{8-3y}{2} = \frac{8-2y-y}{2} = \frac{8-2y}{2} + \frac{-y}{2} = 4-y + \frac{-y}{2}$$

$$\text{حال } \frac{-y}{2} = k \Rightarrow y = -2k \quad \text{قرار می دهیم:}$$

$$X = 4 - y + \frac{-y}{2} = 4 - (-2k) + \frac{-(-2k)}{2} = 4 + 3k$$

$$\begin{cases} x = 4 + 3k \\ y = -2k \end{cases} \quad \text{بنابراین:}$$

بنابراین در روش اویلر، مجهولی را که ضریب آن از لحاظ قدر مطلق کمتر از ضریب دیگری

است برحسب بقیه ی عناصر معادله حساب می کنیم که یک عبارت کسری بدست می

آید. این عبارت را تا حد امکان تفکیک می کنیم و کسر جدیدی که حاصل می شود را برابر

عدد صحیحی مانند k قرار داده و از آنجا x و y را برحسب k بدست می آوریم.

سوال: معادله $5x-3y=11$ را حل کنید.

چون $(5,-3) \mid 11$ و پس معادله دارای جواب است. چون ضریب y دارای قدر مطلق

کوچکتر از ضریب x است پس:

$$Y = \frac{11-5x}{-3} = \frac{9+2-6x+x}{-3} = -3+2x + \frac{2+x}{3}$$

$$\frac{2+x}{-3} = k \Rightarrow x = -2-3k$$

پس:

$$Y = -3+2x + \frac{2+x}{-3} = -3+2(-2-3k)+k = -7-5k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2-3k \\ y = -7-5k \end{cases}$$

حل به روش حدس زدن یکی از جواب ها به عهده دانش آموز عزیز:

توجه: برای حل معادله همنهشتی $ax \equiv b \pmod{m}$ ، اعداد a و b را با همنهشتهایشان به پیمانه m

طوری جایگزین می کنیم که پس از تقسیم طرفین همنهشتی ضریب x برابر ± 1 شود،

وقتی معادله به صورت $x \equiv t \pmod{n}$ درآمد، جواب می شود: $x = nk+t$

تست ۱۲: هرگاه معادله $85x \equiv 4a+1$ در $\mathbb{Z}$ جواب داشته باشد، کدام معادله حتما جواب

دارد؟

(۱) $ax \equiv 13$ (۲) $ax \equiv 17$ (۳) $ax \equiv 14$ (۴) $ax \equiv 19$

تذکر: برای حل معادله ی همنهشتی $ax \equiv b$ در صورت وجود جواب می توانیم به صورت

زیر عمل کنیم:

(۱) اگر a یا b از m بزرگتر باشند مضارب پیمانه را از a یا b کم می کنیم

(۲) مضاربی از پیمانه را به b اضافه می کنیم تا دو طرف همنهشتی دارای یک عامل مشترک شوند.

(۳) دو طرف همنهشتی را بر عامل مشترک تقسیم می کنیم (۴) روند فوق را تاجایی ادامه می

دهیم که معادله بصورت $x \equiv b'$ در آید. این نوع راه حل رادرتست زیر ببینید:

تست: چند عدد طبیعی سه رقمی در معادله $15x \equiv 2$ صدق می کنند.

(۱) ۶۹ (۲) ۶۸ (۳) ۷۰ (۴) ۷۱

$$15x \equiv 2 \xrightarrow[15x-13x]{15>13} 2x \equiv 2 \xrightarrow[\div 2]{(2,13)} x \equiv 1 \Rightarrow x=13k+1 \xrightarrow{\text{سه رقمی}}$$

$$7/61 \leq k \leq 76/84 \iff 99 \leq 13k \leq 999 \iff 100 \leq 13k+1 \leq 1000$$

$$\Rightarrow 8 \leq k \leq 76 \Rightarrow 76-8+1=69$$

تست ۱۳: رقم یکان کوچکترین عدد سه رقمی a که در رابطه همنهشتی $13a \equiv 11$

صدق می کند، کدام است؟

۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴)

تست ۱۴: عدد $3^{15} + a$ بر ۱۷ تقسیم پذیر است. کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

۵(۱) ۶(۲) ۱۱(۳) ۱۲(۴)

تست ۱۵: باقیمانده تقسیم $5^{12} + 6^{12} + 7^{12} + 8^{12}$ بر عدد ۱۳ کدام است؟

۰(۱) ۳(۲) ۴(۳) ۶(۴)

تست ۱۶: تعداد اعداد صحیح و مثبت و نابیشتر از ۲۳۱ و غیر اول با آن کدام است؟

۱۱۴(۱) ۱۱۱(۲) ۱۰۷(۳) ۱۰۳(۴)

تست ۱۷: عدد شش رقمی $5a7b24$ بر عدد ۴۴ تقسیم پذیر است. باقیمانده تقسیم آن

عدد بر ۹ کدام است؟

۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴)

تست ۱۸: باقیمانده تقسیم 18^{20} بر ۱۰ کدام است؟

- ۸(۱) ۶(۲) ۴(۳) ۲(۴)

تست ۱۹: به ازای کدام عدد طبیعی n معادله خطی $24x+39y=2n+1$ در مجموعه Z

جواب دارد؟

- ۲۹(۱) ۳۳(۲) ۳۷(۳) ۴۱(۴)

تست ۲۰: اگر معادله سیاله $(2m+3)x+(m+6)y=12$ دارای جواب نباشد m کدام

است؟

- ۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴)

تست ۲۱: اگر $1 \leq a < 18$ در این صورت به ازای چند مقدار a ، معادله $ax \equiv 4 \pmod{18}$ جواب

دارد؟

- ۱۱(۱) ۱۰(۲) ۱۲(۳) ۱۳(۴)

بیشتر بدانیم:

(۱) برای یافتن رقم یکان عدد A که بصورت $A=a^n$ می باشد ابتدا n را بر عدد ۴ تقسیم می

کنیم و آن را بصورت $n=4k+r$ می نویسیم در این صورت:

الف) اگر $r \neq 0$ آنگاه $a^n \equiv a^r$ ب) اگر $r=0$ آنگاه $a^n \equiv a^4$.

تست: رقم یکان عدد $(1378)^{2!} + (1378)^{4!} + \dots + (1378)^{1378!}$ چقدر است؟

۴(۱) ۶(۲) ۸(۳) ۲(۴)

چون به ازای هر $n! , n \geq 4$ بر ۴ بخش پذیر است پس به ازای $n \geq 4$: $a^n \equiv a^4$

پس:

$$(1378)^{2!} \equiv (1378)^2 \quad + (1378)^{4!} \equiv (1378)^4 \quad + \dots + (1378)^{1378!} \equiv (1378)^4$$

$$\equiv (-2)^2 + (-2)^4 + \dots + (-2)^4 \equiv 4 + 6 + \dots + 6 \equiv 4 + 688 \times 6 \equiv 4132 \equiv 2$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

(۲) یک مسئله جالب: اگر اول مهر در سالی روز پنج شنبه باشد، معین کنید ۲۲ بهمن

همان سال چه روزی خواهد بود؟

روز مشخص شده را به عنوان مبدا فرض کرده و عدد صفر را به آن نسبت می دهیم و

جدولی از اعداد ۰ تا ۶ متناظر با روزهای هفته بصورت زیر تنظیم میکنیم:

چهارشنبه سه شنبه دوشنبه یکشنبه شنبه جمعه پنج شنبه

۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

حال فاصله تاریخ مشخص شده تا تاریخ خواسته شده را به روز حساب می کنیم که ازاول مهرماه تا ۲۲ بهمن ماه بطور دقیق $(4 \times 30) + 21$ روز است یعنی ۱۴۱ روز که اگر همنهشتی به پیمانه ۷ (هر هفته ۷ روز است) محاسبه می کنیم $141 \equiv 1$ و عدد ۱ در جدول متناظر با جمعه است پس ۲۲ بهمن حتما در آن سال جمعه است.

۳) رقم یکان اعداد توانی: تمام پایه ها به پیمانه ۱۰، تمام توان ها را به پیمانه ۴ حساب می کنیم. در تست زیر ببینید:

تست: رقم یکان $7^{70} + 6 + (9^{90} - 3) + (7^{70} + 3)$ کدام است؟

۲(۱) ۴(۲) ۶(۳) ۸(۴)

$$\begin{aligned} & 70 \equiv 2 \Rightarrow 7^{70} \equiv 7^2 \equiv 9 \Rightarrow 7^{70} + 3 \equiv 12 \\ & 9^{90} \equiv 1 \Rightarrow 9^{90} - 3 \equiv -2 \\ & 7^{70} \equiv 9 \Rightarrow 7^{70} + 6 \equiv 15 \\ & 9^{90} \equiv 1 \Rightarrow 9^{90} - 7 \equiv -6 \\ & (7^{70} + 3) + (9^{90} - 3) + 7^{70} + 6 \equiv 12 - 2 + 15 - 6 \equiv 22 \equiv 2 \end{aligned}$$

توان ها را به سنج ۴ و پایه ها را به سنج ۱۰ حساب کردیم.

۴) برای پیدا کردن باقی مانده بر اعداد ۲، ۱۰، ۵، رقم یکان را نگه میداریم و آنرا به پیمانه ۵ و ۱۰ حساب می کنیم.

۵) برای پیدا کردن باقی مانده بر اعداد ۳، ۹، مجموع ارقام عدد را به پیمانه ۹، ۳ حساب می کنیم.

(۶) برای پیدا کردن باقی مانده بر اعداد ۴ و ۲۵ تنها دو رقم سمت راست عدد را نگه داشته و به پیمانه ۴ و ۲۵ حساب می کنیم.

(۷) برای پیدا کردن باقی مانده بر ۱۱، از سمت راست و بطور یک در میان علامت + و - می دهیم.

(۸) برای پیدا کردن باقی مانده بر ۱۳، ۷ از سمت راست و بطور سه تا سه تا جدا کرده، و متناوباً اعداد را جمع و منها می کنیم.

(۹) برای پیدا کردن باقی مانده بر ۸ تنها ۳ رقم سمت راست را نگه داشته و به پیمانه ۸ حساب می کنیم.

(۱۰) برای پیدا کردن باقی مانده بر ۳۷، ۲۷ از سمت راست و بطور سه تا سه تا جدا کرده و اعداد حاصل را باهم جمع می کنیم.

(۱۱) بازهم یک مسئله جالب : به چند طریق می توان ۲۹ تومان را توسط سکه های ۲ و ۵ تومانی خرد کرد؟

(۱) ۲ طریق (۲) ۳ طریق (۳) ۴ طریق (۴) امکان پذیر نیست.

باید تعداد جواب هاب صحیح و مثبت معادله $2x+5y=29$ را بیابیم که با توجه به آنکه : $(2,5)=1$ و $1|29$ دارای جواب است و چون : $2 \times 12 + 5 \times 1 = 29$ پس $(12,1)$ یک جواب معادله است.

پس: $\begin{cases} x = 12 + 5k \\ y = 1 - 2k \end{cases}$ که به ازای $k=0,-1,-2$ جواب های صحیح و مثبت برای x و y بدست آید پس گزینه ۲ صحیح است.

حل مثالهای حل نشده نظریه اعداد فصل ششم همنهشتی

حل مثال ۱: $64 \equiv 1 \Rightarrow 64^{2001} \equiv 1$

.....

حل مثال ۲:

به توان 275 $\Rightarrow (126)^5 \equiv 2^5 \equiv 1 \Rightarrow (126)^5 \equiv 2^5 \equiv 1 \Rightarrow (126)^{275} \equiv 1$

$\Rightarrow (2^5)^{275} \equiv 1 \Rightarrow 2^{1375} \equiv 1 \Rightarrow 2^{1375} \times 2^4 \equiv 16 \Rightarrow 2^{1379} \equiv 16$

.....

حل مثال ۳: توجه: معمولاً مسائلی که پارامتر n در توان و هم در پایه ها به عنوان ضریب قرار

دارد به استقراء حل میشوند :

$$n=1 : 2^6 + 6 \times 1 - 1 = 9 \equiv 0$$

فرض استقراء $n=k : 2^{6k} + 6k - 1 \equiv 0$

حکم استقراء $n=k+1 : 2^{2k+2} + 6k + 6 - 1 = 2^{2k+2} + 6k + 5 \equiv 0$

فرض $\times 2^2 \Rightarrow 2^{2k+2} + 6k \times 2^2 - 1 \times 2^2 \equiv 0 \Rightarrow 2^{2k+2} + 24k - 4 \equiv 0$

$\Rightarrow 2^{2k+2} + 6k + 5 + 18k - 9 \equiv 0 \Rightarrow 2^{2k+2} + 6k + 5 \equiv 9 - 18k \Rightarrow 2^{2k+2} + 6k + 5$

$\equiv 9(1-2k) \equiv 0$

حل مثال ۴

$$6^3=216 \equiv_{43} 1 \Rightarrow 6^3 \equiv_{43} 1 \xrightarrow{\text{به توان } n-1} (6^3)^{n-1} \equiv_{43} 1$$

$$\Rightarrow 6^{3n-3} \equiv_{43} 1 \xrightarrow{\times 6^2} 6^{3n-3} \times 6^2 \equiv_{43} 36 \xrightarrow{+7} 6^{3n-1} + 7 \equiv_{43} 43 \equiv_{43} 0$$

.....

حل مثال ۵

$$2^6=64 \equiv_{23} 18 \equiv_{23} -5 \Rightarrow 2^6 \equiv_{23} -5 \quad (۱) \quad 2^5=32 \equiv_{23} 9 \Rightarrow 2^5 \equiv_{23} 9 \quad (۲) \Rightarrow$$

$$(۱) \times (۲) \Rightarrow 2^6 \times 2^5 \equiv_{23} -5 \times 9 \Rightarrow 2^{11} \equiv_{23} -45 \equiv_{23} 1 \Rightarrow 2^{11} - 1 \equiv_{23} 0 \xrightarrow{\times 4} (2^{11} - 1) \times 4 \equiv_{23} 0$$

حل مثال ۶

$$(x_0, y_0) = (3, 9) , (2, 5) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d}k = 3 + 5k \\ y = y_0 - \frac{a}{d}k = 9 - 2k \end{cases}$$

حل مثال ۷

$$(21, 39) | 2m \Rightarrow 3 | 2m \Rightarrow (2, 3) = 1 \Rightarrow 3 | m$$

$$\text{ثانیا: } 21x - 39y = 42 \xrightarrow{\div 7} 7x - 13y = 14 \quad (x_0, y_0) = (2, 0) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + 13k \\ y = -7k \end{cases}$$

پاسخنامه تست های حل نشده نظریه اعداد فصل ششم: همنهشتی:

شماره تست	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
گزینه پاسخ	۴	۳	۲	۴	۴	۳	۲	۳	۲	۴	۱

شماره تست	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱
گزینه پاسخ	۱	۴	۳	۳	۲	۱	۲	۳	۳	۳

قسمت سوم: مباحثی دیگر از ترکیبیات

مدلهای شهودی و تجسمی

در ترکیبیات

فصل هفتم: مدلهای شهودی و تجسمی در ترکیبیات

رابطه ها و گراف ها:

یادآوری مطالبی از جبر سال سوم:

تعریف: اگر A و B دو مجموعه باشند، آنگاه هر زیر مجموعه از حاصل ضرب دکارتی $A \times B$

را یک رابطه از A در B گویند و اگر $A=B$ آنگاه رابطه را روی A گویند.

توجه: رابطه را با R نشان می دهند پس: $R \subset A \times A$ یا $R \subset A \times B$

ویژگی های رابطه:

(۱) بازتابی: (انعکاسی) رابطه R روی A انعکاسی است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in A$

داشته باشیم: $(x,x) \in R$ یا xRx

(۲) تقارنی: رابطه R روی A متقارن است اگر و تنها اگر به ازای هر $x, y \in A$:

$$(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$$

(۳) پاد تقارنی: رابطه R روی A پادمتقارن است اگر و تنها اگر به ازای هر $x, y \in A$ داشته

باشیم:

$$(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R \Rightarrow x=y$$

به عبارت دیگر: $xRy, yRx \Rightarrow x=y$

(۴) تراگذری: رابطه R روی A تراگذری (تعدی) است اگر و تنها اگر به ازای هر

$$x, y, z \in A$$

$$(x,y) \in R \Rightarrow (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$$

به عبارت دیگر: $xRy, yRz \Rightarrow xRz$

توجه: اگر رابطه R روی A دارای سه خاصیت بازتابی و تقارنی و تراگذری باشد، آن را یک رابطه هم ارزی گویند.

توجه: اگر R دارای سه خاصیت بازتابی، پاد تقارنی و تراگذری باشد آن را یک رابطه ترتیب گویند.

رابطه و گراف:

اگر R یک رابطه روی مجموعه متناهی A باشد، می توان به این رابطه یک گراف جهت دار مانند G نسبت داد بطوریکه راس های G اعضای مجموعه A و هر یال G عضوی از R باشد همچنین راس a از گراف G به راس b متصل خواهد بود اگر aRb باشد.

توجه: اگر aRa آنگاه گراف G در راس a دارای یک طوقه خواهد بود.

سوال ۱: مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ داده شده است. اگر به ازای a و $b \in A$ تعریف کنیم

$$aRb \Leftrightarrow alb$$

الف) رابطه R :

ب) گراف متناظر با رابطه R :

توجه: یک رابطه بازتابی است اگر و فقط اگر هر راس گراف متناظر آن طوقه داشته باشد.

توجه: یک رابطه متقارن است هرگاه از هر راس a به b دو یال در جهت متقارن موجود باشد.

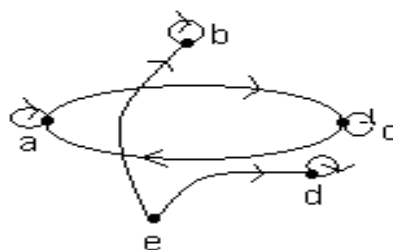
توجه: یک رابطه تراگذاری است اگر از راس a به b و از راس b به c یال وجود داشته باشد،

آنگاه از راس a به c نیز یال موجود باشد.

توجه: یک رابطه پاد متقارن است اگر و فقط اگر از راس a به b یال موجود باشد ولی از b به

a یال موجود نباشد.

سوال ۲: باتوجه به گراف زیر خواص رابطه R را بررسی کنید.

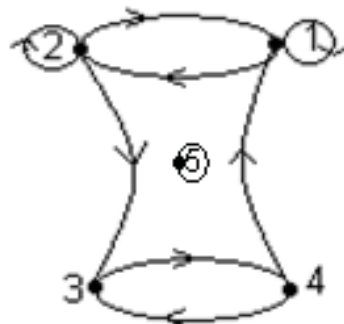


سوال ۳: رابطه R روی مجموعه $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ به صورت $xRy \Leftrightarrow |x| = |y|$

تعریف شده است. گراف متناظر R را رسم کنید.

سوال ۴: فرض کنید $A=\{1,2,3,4,5\}$ گراف جهت دار زیر نمایشگر رابطه R روی A

می باشد. اعضای رابطه R را بنویسید.



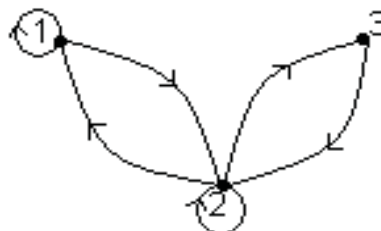
رابطه و ماتریس:

میدانیم به هر گراف ساده یک ماتریس صفر و یک به نام ماتریس مجاورت نسبت داده می شود. حال اگر R یک رابطه روی مجموعه A باشد می توان ماتریس مجاورتی برای گراف جهت دار G متناظر با رابطه R نوشت. این ماتریس را ماتریس مجاورت گراف جهت دار می نامند که با m نشان می دهند در این ماتریس درایه ی i, j عدد یک است اگر از راس i به راس j یال جهت داری وجود داشته باشد. و عدد صفر است اگر از راس i به راس j یال جهت دار وجود نداشته باشد.

تذکر مهم: چون در گراف جهت دار طوقه وجود دارد برخلاف ماتریس مجاورت گراف ساده که درایه های قطر اصلی اش صفر بودند در ماتریس مجاورت گراف جهت دار درایه های روی قطر اصلی ممکن است ۱ یا صفر باشند.

سوال ۵: فرض کنید $A = \{1, 2, 3\}$ و R رابطه روی A باشد که گراف جهتدار آن در شکل

زیر رسم شده است، ماتریس متناظر این رابطه را بنویسید.



توجه: رابطه R بازتابی است اگر و تنها اگر درایه های روی قطر اصلی ماتریس مجاورت نظیر آن همه ۱ باشند.

توجه: رابطه R متقارن است اگر و تنها اگر ماتریس نظیر آن متقارن باشد یعنی: اگر درایه ij ام برابر ۱ باشد آنگاه درایه ji ام برابر ۱ باشد و به عکس یعنی درایه ها نسبت به قطر اصلی متقارن باشند.

توجه: رابطه R پاد متقارن است اگر درایه ij ام برابر ۱ باشد آنگاه درایه ji ام برابر صفر باشد یعنی ماتریس نسبت به قطر متناقض است.

توجه: رابطه R تراگذاری است اگر درایه ij ام 1 باشد همچنین درایه jk ام ۱ باشند آنگاه درایه ik ام نیز یک باشد.

تست ۱: ماتریس $m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس نظیر رابطه R است. رابطه R کدام ویژگی

ها را دارد؟

(۱) فقط تقارنی (۲) فقط پاد تقارن (۳) فقط بازتابی (۴) ترتیب است.

عمل های بولی: روی مجموعه $\{0,1\}$ دو عمل جمع و ضرب را به صورت زیر تعریف می

کنیم که به اعمال بولی معروفند:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

توجه: در ضرب ماتریس ها عمل های بولی به صورت زیر انجام می شود:

مانند ضرب معمولی ماتریس هاست با این تفاوت که اگر در ضرب یک سطر در یک ستون حاصل جمع مخالف صفر باشد عدد ۱ قرار می دهیم و در صورتی که صفر باشد همان صفر قرار می دهیم.

توجه: گاهی عمل $\oplus$ را بصورت $+$ نشان می دهند.

سوال ۶: اگر ماتریس m بصورت زیر باشد ماتریس $m^{(2)}$ را بدست آورید.

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ترکیب رابطه ها:

اگر R رابطه ای از مجموعه A به مجموعه B و S رابطه ای از مجموعه B به مجموعه C باشد آنگاه " ترکیب دو رابطه " R و S را با SoR نشان می دهیم و تعریف می کنیم:

$x(\text{SoR})y$ هرگاه عضوی مانند $z \in B$ موجود باشد به قسمی که xRz و zSy در این حالت SoR رابطه ای از A به C است.

توجه: برای مشخص نمودن اعضای رابطه SoR یک زوج مرتب (x,y) در R در نظر می گیریم اگر زوج مرتبی به شکل (y,z) در S وجود داشته باشد آنگاه (x,z) عضوی از SoR است.

مثال: اگر $A=\{1,2,3,4\}$ و $R=\{(1,1),(1,2),(2,3),(3,4)\}$ آنگاه RoR را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} (1,1) \in R, (1,1) \in R &\Rightarrow (1,1) \in \text{RoR} \\ (1,1) \in R, (1,2) \in R &\Rightarrow (1,2) \in \text{RoR} \\ (1,2) \in R, (2,3) \in R &\Rightarrow (1,3) \in \text{RoR} \\ (2,3) \in R, (3,4) \in R &\Rightarrow (2,4) \in \text{RoR} \\ \Rightarrow \text{RoR} &= \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,4)\} \end{aligned}$$

تذکر: اگر R رابطه ای روی مجموعه A باشد رابطه RoR را با R^2 نیز نمایش می دهند.

سوال ۷: رابطه های SoR و RoS را روی مجموعه $A=\{2,5,7,8\}$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

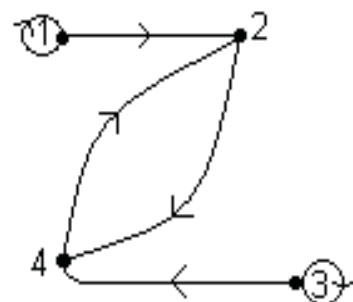
$$aSb \Leftrightarrow a < b \quad \text{و} \quad aRb \Leftrightarrow a \equiv^3 b, a \neq b$$

رابطه RoS و SoR را بدست آورید.

تست ۲: اگر گراف نظیر رابطه R به صورت مقابل باشد. گراف متناظر RoR چند طوقه

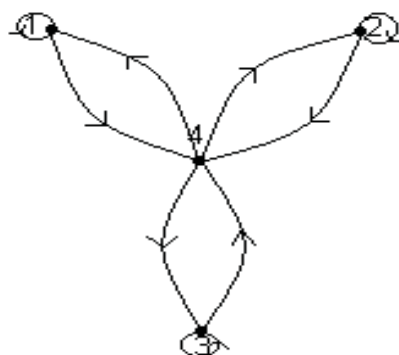
دارد؟

۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴)



تست ۳: تعداد صفرهای ماتریس مجاورت گراف مقابل کدام است؟

۷(۱) ۸(۲) ۹(۳) ۱۰(۴)



سوال ۸: رابطه R در مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$R = \{(b, b), (a, b), (b, c), (a, c), (c, a), (b, d), (a, d), (d, d)\}$$

الف) گراف متناظر R را رسم کنید.

ب) ماتریس مجاورت گراف متناظر را بنویسید.

ج) $[m(R)]^2$ را بدست آورید و به کمک آن رابطه RoR را بنویسید.

قضیه ۱: فرض کنید A یک مجموعه n عضوی، $R \subseteq A \times A$ یک رابطه روی A باشد هرگاه

$m(R)$ ماتریس متناظر R باشد داریم:

الف) $m(R) = [0]_{n \times n}$ (یعنی همه رایه های $m(R)$ صفرند) اگر و تنها اگر $R = \emptyset$

ب) $m(R) = [1]_{n \times n}$ (یعنی همه رایه های $m(R)$ یک اند) اگر و تنها اگر $R = A \times A$

پ) $m(R \circ R) = [m(R)]^2$

الف) اگر $R = \emptyset$ هیچ دو عضوی باهم رابطه ندارند در نتیجه رایه های نظیر در ماتریس

همگی صفرند و در نتیجه $m(R) = [0]_{n \times n}$ و برعکس اگر همه رایه های ماتریس R صفر

باشند یعنی $\forall i, j: M_{ij} = 0$ یعنی: $\forall i, j: (a_i, a_j) \notin R$ پس $R = \emptyset$

ب) $R = A \times A \Leftrightarrow \forall i, j: (a_i, a_j) \in R \Leftrightarrow \forall i, j: M_{ij} = 1 \Leftrightarrow m(R) = [1]_{n \times n}$

پ) فرض می کنیم $i(R \circ R)_j$ پس عضوی مثل $k \in A$ وجود دارد به طوریکه: iRk و

kRj بنابراین رایه های i_k ام و k_j ام در ماتریس m مساوی با ۱ هستند در نتیجه

رایه ij ام در ماتریس $m^{(2)}$ برابر ۱ است. به عکس اگر رایه ij ام در ماتریس $m^{(2)}$

برابر ۱ باشد یعنی:

$$m_{i1} \odot m_{1j} + m_{i2} \odot m_{2j} + \dots + m_{in} \odot m_{nj} = 1$$

پس حداقل یکی از این عامل های جمع باید ۱ باشد مثلاً فرض می کنیم:

$$m_{ik} \odot m_{kj} = 1$$

پس $m_{ik} = m_{kj} = 1$ یعنی: iRk, kRj پس: $i(R \circ R)_j$

تعریف: اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه 0 و 1 باشند [درایه هایشان صفر و یک

باشد] آنگاه گوییم A کوچکتر یا مساوی B است و می نویسیم: $A \ll B$ هرگاه هر درایه A

از درایه نظیرش در B کوچکتر یا مساوی باشد.

توجه: اگر m_1 و m_2 دو ماتریس نظیر رابطه های R_1 و R_2 روی مجموعه A باشند آنگاه

$$R_1 \subseteq R_2 \text{ اگر و تنها اگر } m_1 \ll m_2$$

قضیه ۲: مجموعه n عضوی A و رابطه R روی آن را در نظر می گیریم. فرض کنید

m ماتریس متناظر با این رابطه باشد آنگاه:

(الف) R بازتابی است اگر و تنها اگر $m \ll I_n$ (I_n ماتریس همانی $n \times n$ است)

(ب) R متقارن است اگر و تنها اگر $m = m^T$ (m^T ماتریس ترانهاده m است)

(پ) R تراگذری است اگر و تنها اگر $m^2 \ll m$

(ت) R پاد متقارن است اگر و تنها اگر $m \wedge m^T \ll I_n$ ($m \wedge m^T$ ماتریسی است که از

ضرب درایه به درایه m و m^T به دست می آید).

(الف) فرض کنیم R بازتابی است در این صورت چون درایه های روی قطر اصلی $m(R)$

همه 1 می شوند و سایر درایه ها یا صفرند یا 1 پس: $I_n \ll m$ یعنی درایه های I_n نظیر

به نظیر از درایه های $m(R)$ کوچکتر یا مساوی اند.

حال اگر $I_n \leq m$ و با توجه به آنکه درایه های روی قطر اصلی I_n همگی 1 هستند ناچارا

باید درایه های روی قطر اصلی $m(R)$ یک باشند یعنی R بازتابی است.

ریاضیات گسسته-مباحثی از ترکیبیات

ب) فرض کنیم R متقارن باشد پس ماتریس نظیر آن متقارن است یعنی اگر درایه ij ام برابر یک باشد درایه ji ام هم برابر ۱ است یعنی اگر جای سطر و ستون را عوض کنیم

درایه ها تغییر نمی کنند یعنی: $m=m^T$

(برای درایه ij ام اگر صفر باشد در ماتریس متقارن درایه ji ام نیز صفر است)

برعکس اگر $m=m^T$ یعنی هر گاه جای سطر و ستون را عوض کنیم ماتریس تغییری نخواهد کرد یعنی:

$$\forall ij \begin{cases} mij = 1 \Rightarrow mji = 1 \\ mij = 0 \Rightarrow mji = 0 \end{cases}$$

واین به معنای آن است که R متقارن است

پ) فرض کنیم R تراییبی باشد نشان می دهیم: $m^{(2)} \ll m$

C_{xz} را درایه واقع در سطر x ام و ستون z ام در ماتریس $m^{(2)}$ در نظر می

گیریم: $C_{xz}=1$

دراین صورت باید $y \in A$ وجود داشته باشد که در ماتریس m $m_{xy}=1$, $m_{yz}=1$:

پس xRy و yRz و چون R تراییبی است xRz پس $m_{xz}=1$ یعنی $m^{(2)} \ll m$

[چون درایه ای که در $m^{(2)}$ ، ۱ بود در m نیز یک شد.]

برعکس: فرض کنیم $m^{(2)} \ll m$ باید نشان دهیم R تراگذری است فرض کنیم xRy و

yRz یعنی در ماتریس m : $m_{xy}=1$ و $m_{yz}=1$

بنابراین: در ماتریس $m^{(2)}$ درایه سطر x ام و ستون z ام برابر یک است یعنی: $C_{xz}=1$

و چون $m^{(2)} \ll m$ پس $m_{xz}=1$ یعنی xRz و این به معنای آن است که R تراییبی است

ریاضیات گسسته-مباحثی از ترکیبیات

ت) فرض کنیم R پاد متقارن باشد. اگر به ازای دو عضو متمایز i, j داشته باشیم $(i, j) \notin R$ آنگاه $m_{ij} = 0$ پس درایه i, j ام در $m \wedge m^T$ برابر با صفر است. اگر $(i, j) \in R$ آنگاه $(j, i) \notin R$ (چون پاد متقارن است) یعنی $m_{ji} = 0$ و در این صورت درایه j, i ام در $m \wedge m^T$ برابر صفر است. یعنی:

$$m \wedge m^T \ll I_n$$

برعکس: اگر $m \wedge m^T \ll I_n$ در این صورت همه درایه های غیر قطری $m \wedge m^T$ صفر هستند یعنی به ازای $i \neq j$ داریم: $m_{ij} \cdot m_{ji} = 0$ در این صورت سه حالت داریم:

$$\begin{cases} (1) m_{ij} = 0, m_{ji} = 1 \\ (2) m_{ij} = 1, m_{ji} = 0 \\ (3) m_{ij} = 0, m_{ji} = 0 \end{cases}$$

پس حداقل یکی از درایه های m_{ji} یا m_{ij} برابر صفرند. در نتیجه اگر $a_i R a_j$ و $a_j R a_i$ آنگاه

$$m_{ij} = m_{ji} = 1 \text{ در نتیجه } i = j \text{ یعنی } R \text{ پاد متقارن است.}$$

توجه: از قضیه ۲ می توان نتیجه گرفت: رابطه R یک رابطه هم ارزی است اگر و تنها اگر m ، ماتریس صفر و یک (ماتریسی که درایه های آن صفر و یک باشند) متناظر با آن دارای شرایط زیر باشد:

$$\text{الف) } I_n \ll m \quad \text{ب) } m = m^T \quad \text{ج) } m^2 \ll m$$

توجه: در گراف جهت دار متناظر با یک رابطه متقارن، یا بین دو راس متمایز یالی وجود ندارد و یا در صورت وجود، یال دو طرفه وجود دارد.

تست ۴: تعداد ماتریس های صفر و یک از مرتبه 5×5 مانند m باشد $m \ll I_5$ کدام

است؟

۱۶ (۱) ۳۲ (۲) 2^{20} (۳) 2^{15} (۴)

نکته: تعداد یکهای $2^A =$ تعداد ماتریس های صفر و یک $B \ll A$ که

نکته: تعداد صفرهای $2^A =$ تعداد ماتریس های صفر و یک C که $A \ll C$ یا $C \gg A$

تست ۵: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ چند ماتریس B با درایه های صفر و یک وجود دارد

به طوریکه $A \leq B$

۸ (۱) ۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۳۲ (۴)

سوال ۹: رابطه R در مجموعه $A = \{a, b, c\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, a), (b, a)\}$$

الف) نمودار گراف متناظر R را رسم کنید.

ب) ماتریس مجاورت گراف R یعنی $m(R)$ را بنویسید.

ج) $[m(R)]^2$ را بدست آورده و با مقایسه $m(R)$ تحقیق کنید R تراپایی است.

تست ۶: اگر مجموعه A بیش از یک عضو داشته باشد آنگاه رابطه $A \times A$ کدام ویژگی را

نمی تواند داشته باشد؟ (۱) بازتابی (۲) تقارنی (۳) پاد تقارنی (۴) ترایی

تست ۷: رابطه R در مجموعه اعداد حقیقی با ضابطه $aRb \Leftrightarrow a+b < 0$ تعریف می شود

R دارای کدام خاصیت است؟

(۱) تقارنی (۲) تراگذری (۳) پاد تقارنی (۴) بازتابی

برچسب گذاری گراف ها:

تعریف: یک ماتریس $n \times n$ از اعداد متمایز مثلا $1, 2, 3, \dots, n^2$ را یک "مربع افقی" (مربع

جادویی) می نامیم هرگاه حاصل جمع درایه های هر سطر، حاصل جمع درایه های هر

ستون ، حاصل جمع درایه های قطر اصلی و حاصل جمع درایه های قطر فرعی باهم

مساوی باشند.

مثل:مربع 3×3 زیر:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

یا مربع 5×5 زیر:

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

تعریف: برچسب گذاری جادویی: یک برچسب گذاری جادویی برای گراف G عبارت است از متناظر کردن اعدادی (معمولا اعداد طبیعی) به یال های گراف G به طوریکه حاصل جمع اعداد متناظر با یال های گذرنده از هر راس عددی ثابت باشد.

تعریف: برچسب گذاری دلپذیر: فرض کنیم T یک درخت n راسی باشد، یک "برچسب گذاری دلپذیر" برای درخت T عبارت است از نسبت دادن اعداد $1, 2, 3, \dots, n$ به رئوس آن بطوریکه برچسب یال ها $n-1$ عدد متمایز باشند و برچسب هریال از قدر مطلق تفاضل برچسب راس های دو انتهای آن بدست آید.

اصل شمول و عدم شمول:

سال قبل در جبر و احتمال خواندیم که اگر $|A|$ تعداد اعضای مجموعه متناهی و شمارش پذیر A و $|B|$ تعداد اعضای مجموعه متناهی و شمارش پذیر B باشد آنگاه تعداد اعضای $A \cup B$ متناهی است و داریم:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

این فرمول به اصل شمول و عدم شمول معروف است یعنی تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه شامل مجموع تعداد اعضای دو مجموعه است (شمول) ولی شامل تعداد اعضای اشتراک آنها نیست. (عدم شمول)

توجه: اصل شمول و عدم شمول را برای هر تعداد مجموعه می توان بکار برد.

قضیه ۳: فرض کنید A_1 و A_2 و A_3 سه زیر مجموعه متناهی از یک مجموعه A باشند در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\ = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| \\ - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

نشان می دهیم که هر عضو x از A به تعداد مساوی در دو طرف رابطه ی ذکر شده به حساب می آید.

حالت اول: اگر x متعلق به هیچ کدام از مجموعه A_1 و A_2 و A_3 نباشد آنگاه x در دو طرف رابطه صفر بار به حساب می آید.

حالت دوم: فرض کنید x به S مجموعه از مجموعه های A_1 و A_2 و A_3 تعلق داشته

باشد ($1 \leq S \leq 3$) آنگاه x یک بار در طرف چپ به حساب می آید و در طرف راست نیز:

اگر $S=1$ ، یک بار به حساب می آید.

اگر $S=2$ باز هم $2-1=1$ بار به حساب می آید.

اگر $S=3$ در این صورت هم $3-3+1=1$ بار به حساب می آید.

چند کاربرد مهم از اصل شمول و عدم شمول:

۱- محاسبه ی تعداد تابع های پوشا از یک مجموعه r عضوی به یک مجموعه n عضوی

سوال: تعداد توابع پوشا از یک مجموعه 4 عضوی به یک مجموعه 3 عضوی را پیدا کنید.

مجموعه کلیه تابع هایی که می توان از یک مجموعه 4 عضوی به یک مجموعه 3 عضوی

نوشت برابر است با 3^4 یعنی 81

A_i تابعی است که هیچ عضوی را به a_i نسبت ندهد پس درواقع از یک مجموعه 4 عضوی

به یک مجموعه دو عضوی کارمان را انجام میدهیم یا آنکه در اشتراک دو مجموعه، ما از یک

مجموعه 4 عضوی به یک مجموعه 1 عضوی و در اشتراک سه مجموعه ما از یک مجموعه

4 عضوی به یک مجموعه صفر عضوی محاسبات را انجام میدهیم

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^4 = 16$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 2^1 = 2$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

در نتیجه

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 2^4 + 2^4 + 2^4 - (2 + 2 + 2) + 0 = 45$$

$$\Rightarrow |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 81 - 45 = 36$$

توجه: تعداد تابع هایی که از یک مجموعه r عضوی به یک مجموعه n عضوی می توان

نوشت برابر است با n^r (به شرط آن که تابع روی هر r عضو مجموعه اول خود اثر کند)

توجه: برای حل تستی سوال قبل به نکته شماره 24 در قسمت بیشتر بدانیم مراجعه کنید.

۲- محاسبه تعداد جواب معادله ها در مجموعه اعداد حسابی:

سوال: تعداد جواب های صحیح معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ را بطوریکه:

به ازای $i = 1, 2, 3$ و $0 \leq x_i \leq 2$ باشد پیدا کنید.

جوابهای معادله فوق با شرط داده شده برابر است با $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ اکنون ما A_i را اینگونه تعریف میکنیم:

$$A_i = \{x_i > 2 \mid \text{جواب های معادله فوق به شرطی که } x_i > 2 \text{ باشد}\} \quad i=1,2,3$$

حال باید تعداد $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$ را پیدا کنیم.

$$\binom{3+4-1}{4} = 15 \quad \text{همه جواب های صحیح و نامنفی معادله فوق برابر است با:}$$

$$A_1 \text{ برابر است با: } \{x_1 \mid x_1 > 2\} \text{ پس: } y_1 = x_1 - 2 > 0 \quad x_1 = y_1 + 3$$

$$y_1 + 3 + y_2 + y_3 = 4 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 1 \Rightarrow |A_1| = \binom{3+1-1}{1} = \binom{3}{1} = \frac{3!}{1!2!} = \frac{3 \times 2!}{1 \times 2!} = 3$$

$$\Rightarrow |A_1| = 3$$

$$\text{به همین ترتیب } |A_1| = |A_2| = |A_3| = 3$$

از طرفی چون X_1 و X_2 و X_3 طبق معادله نمیتوانند مقداری برابر داشته باشند بنابراین:

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \emptyset \quad \text{همین طور } A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \emptyset \text{ پس:}$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 3 + 3 + 3 - 0 + 0 = 9 \Rightarrow |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 15 - 9 = 6$$

تذکر: تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ مساوی است با

$$\binom{n+k-1}{k-1} \text{ یا } \binom{n+k-1}{n}$$

نکته: تعداد جواب های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با:

$$\binom{n-1}{k-1}$$

سوال ۱۰: تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ که $0 \leq x_i < 4$

را حساب کنید.

سوال ۱۱: به چند طرق می توان ۱۰ شاخه گل از سه نوع گل خریداری کرد به شرطی که از هر نوع حداقل دو شاخه خریداری کنیم

تست ۸: تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله ی $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ در صورتیکه

$2 \leq x_1 \leq 3$ و $4 \leq x_2 \leq 8$ و $x_3 \geq 1$ باشد کدام است؟

۶(۱) ۳(۲) ۳۶(۳) ۲۱(۴)

قضیه ۴: فرض کنید عدد صحیح و مثبت n برابر با حاصل ضرب سه عدد اول و متمایز به

صورت

$n = p_1 p_2 p_3$ باشد در این صورت $\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \left(1 - \frac{1}{p_3}\right)$ یا

$$\phi(n) = n \left(\frac{p_1-1}{p_1}\right) \left(\frac{p_2-1}{p_2}\right) \left(\frac{p_3-1}{p_3}\right)$$

اثبات: A_i اعدادی است که نسبت به n اول نیستند:

$$A_i = \{m: 1 \leq m \leq n, p_i | m\} \quad i=1,2,3$$

$$A_i = \{p_i, 2p_i, 3p_i, \dots, \left(\frac{n}{p_i}\right)p_i\} \Rightarrow |A_i| = \frac{n}{p_i}$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j} \quad (i \neq j \text{ به ازای } i, j \text{ داریم})$$

ریاضیات گسسته-مباحثی از ترکیبیات

$$\begin{aligned}
 |A1 \cap A2 \cap A3| &= \frac{n}{p_1 p_2 p_3} \\
 \emptyset(n) &= |\overline{A1 \cup A2 \cup A3}| = n - |A1 \cup A2 \cup A3| = \\
 n - \left(\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \frac{n}{p_3} - \frac{n}{p_1 p_2} - \frac{n}{p_1 p_3} - \frac{n}{p_2 p_3} + \frac{n}{p_1 p_2 p_3} \right) &= \\
 n - \frac{n}{p_1} - \frac{n}{p_2} - \frac{n}{p_3} + \frac{n}{p_1 p_2} + \frac{n}{p_1 p_3} + \frac{n}{p_2 p_3} - \frac{n}{p_1 p_2 p_3} &= \\
 = n \left[1 - \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \right) + \left(\frac{1}{p_1 p_2} + \frac{1}{p_1 p_3} + \frac{1}{p_2 p_3} \right) - \frac{1}{p_1 p_2 p_3} \right] &= \\
 = \frac{n}{p_1 p_2 p_3} [p_1 p_2 p_3 - (p_2 p_3 + p_1 p_3 + p_1 p_2) + & \\
 (p_3 + p_2 + p_1) - 1] &= \\
 = \frac{n}{p_1 p_2 p_3} [p_1 p_2 p_3 - p_2 p_3 - p_1 p_3 - p_1 p_2 + p_3 + p_2 + p_1 - 1] &= \\
 \Rightarrow \frac{n}{p_1 p_2 p_3} [p_2 p_3 (p_1 - 1) - p_3 (p_1 - 1) - p_2 (p_1 - 1) + p_1 - 1] &= \\
 = \frac{n}{p_1 p_2 p_3} [(p_1 - 1)(p_2 p_3 - p_3 - p_2 + 1)] &= \\
 = \frac{n}{p_1 p_2 p_3} (p_1 - 1)[p_3(p_2 - 1) - (p_2 - 1)] &= \\
 = \frac{n}{p_1 p_2 p_3} (p_1 - 1)[(p_2 - 1)(p_3 - 1)] = n \left[\left(\frac{p_1 - 1}{p_1} \right) \left(\frac{p_2 - 1}{p_2} \right) \left(\frac{p_3 - 1}{p_3} \right) \right] &= \\
 = n \left(1 - \frac{1}{p_1} \right) \left(1 - \frac{1}{p_2} \right) \left(1 - \frac{1}{p_3} \right) &
 \end{aligned}$$

توجه: ما از این قضیه در فصل همنهشتی استفاده کردیم پس با کاربرد آن آشنا هستید.

مثال: ثابت کنید $\phi(42) = 12$ چون $42 = 2 \times 3 \times 7$

$$\phi(42) = 42 \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 42 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{6}{7}\right) = 42 \left(\frac{12}{42}\right) = 12$$

تذکر: $\phi(42)$ منظور اعداد صحیح و مثبت کمتر از ۴۲ که نسبت به آن اولند.

تست ۹: تعداد اعداد کوچکتر یا مساوی ۲۴ که نسبت به ۲۴ اول باشند کدام است؟

۱۲ (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۸ (۴)

تست ۱۰: به چند طریق می توان از میان سه نوع گل به تعداد فراوان ۶ شاخه گل خرید به

طوری که از هر کدام لااقل یک شاخه گل خریداری شود؟

$$۲۸(۱) \quad ۵۶(۲) \quad ۸۴(۳) \quad ۱۰(۴)$$

سوال: چند عضو از مجموعه $\{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 6300\}$ نه بر ۵ تقسیم پذیرند و نه بر ۳؟

$$A_1: \text{مضارب } ۳: |A_1| = \frac{6300}{3} = 2100$$

$$A_2: \text{مضارب } ۵: |A_2| = \frac{6300}{5} = 1260$$

و چون $A_1 \cap A_2$ مجموعه اعدادی هستند که هم بر ۳ و هم بر ۵ تقسیم پذیرند پس:

$$|A_1 \cap A_2| = \frac{6300}{5 \times 3} = 420$$

$$\Rightarrow |A_1 \cup A_2| = 2100 + 1260 - 420 = 2940$$

$$\Rightarrow |\overline{A_1 \cup A_2}| = 6300 - 2940 = 3360$$

سوال ۱۲: چند عضو از مجموعه $A = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 30\}$ نه بر ۲ و نه بر ۳ و نه بر ۵

بخش پذیرند؟

بیشتر بدانیم:

(۱) اگر A مجموعه اعداد صحیح و بخش پذیر بر K باشد و a اولین (کوچکترین) و b

آخرین (بزرگترین) عضو مجموعه A باشند در این صورت: $|A| = \frac{b-a}{k} + 1$

(۲) اگر p عدد اول باشد $\varphi(p) = p-1$

(۳) اگر p عدد اول و k یک عدد طبیعی باشد داریم: $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$

(۴) تابع فی اویلر ضربی است یعنی برای دو عدد طبیعی m و n بطوریکه: $(m,n)=1$ داریم:

$$\varphi(m \times n) = \varphi(m) \times \varphi(n)$$

و اگر $(m,n)=d$ در این صورت:

$$\varphi(m \times n) = \varphi(m) \times \varphi(n) \times \frac{d}{\varphi(d)}$$

(۵) تعداد جایگشت های n شیء به صورت حلقه وار که در هر جایگشت همه n شیء

شرکت کنند برابر است با $(n-1)!$. "جبر سوم"

به چند طریق می توانند ۵ نفر دور یک میز گرد بنشینند؟ $(n-1)! = 4! = 24$

(۶) تعداد جایگشت های n شیء که n_1 تا از آنها از یک نوع و n_2 تا از آنها هم از یک نوع

باشند برابر است با $\frac{n!}{n_1! n_2!}$

به چند طریق می توان ۳ پرچم ایران و ۴ پرچم پاکستان را کنار هم قرار داد: $\frac{7!}{3!4!} = 35$

(۷) اگر A یک مجموعه n عضوی باشد و R یک رابطه روی A ، آنگاه ماتریس نظیر R یک

ماتریس 0×1 مربع است از مرتبه n که تعداد درایه های آن n^2 تا است و درایه های روی

قطر n تا است.

(۸) تعداد رابطه های بازتابی که روی مجموعه n عضوی می توان نوشت برابر است با:

$$2^{n^2-n}.$$

(۹) تعداد رابطه های متقارن روی یک مجموعه n عضوی برابر است با: $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

(۱۰) تعداد رابطه های بازتابی و متقارن برابر است با: $2^{\frac{n^2-n}{2}}$

(۱۱) تعداد رابطه های بازتابی و شامل یک عضو (x,y) برابر است با: 2^{n^2-n-1}

(۱۲) تعداد رابطه های پاد متقارن برابر $2^n \times 3^{\frac{n^2-n}{2}}$ می باشد.

(۱۳) تعداد رابطه های پاد متقارن و شامل یک عضو مانند (x,y) برابر است با:

$$2^n \times 3^{\frac{n^2-n}{2}-1}$$

(۱۴) تعداد رابطه های متقارن و پاد متقارن ، 2^n تا است.

(۱۵) تعداد رابطه هایی که متقارن و پاد متقارن بازتابی باشند یکی است و آن هم رابطه همانی است.

(۱۶) تعداد رابطه های بازتابی روی مجموعه n عضوی A که شامل k زوج مرتب متمایز از

$A \times A$ باشند و شامل K' زوج مرتب متمایز از $A \times A$ نباشند برابر است با:

$$2^{n^2-n-k-k'}$$

(۱۷) تعداد رابطه های متقارن روی مجموعه n عضوی A که شامل K زوج مرتب خاص از

$A \times A$ باشند یا نباشند برابر است با: $2^{\frac{n^2+n}{2}+k}$

(۱۸) تعداد رابطه های بازتابی و متقارن روی مجموعه n عضوی A که شامل k زوج مرتب

خاص از $A \times A$ باشند یا نباشند: $2^{\frac{n^2-n}{2}-k}$

(۱۹) تعداد رابطه های پاد متقارن روی مجموعه n عضوی A که شامل K زوج مرتب متمایز خاص باشند و نیز شامل K' زوج مرتب با مولفه های یکسان باشند (یا نباشند) برابر است با:

$$2^{n-K'} \times 3^{\frac{n^2-n}{2}-K}$$

(۲۰) تعداد رابطه های پاد متقارن و بازتابی روی مجموعه n عضوی برابر است با: $3^{\frac{n^2-n}{2}}$

(۲۱) اگر G گراف جهت دار متناظر با رابطه هم ارزی R باشد در این صورت تعداد دسته های هم ارزی R برابر با تعداد بخش های جدا از هم گراف G است.

(۲۲) تعداد توابع از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه m عضوی برابر است با m^n (قضیه).

(۲۳) تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه n عضوی به یک مجموعه m عضوی ($m \geq n$) برابر است با: $\frac{m!}{(m-n)!}$ (قضیه).

(۲۴) تعداد تابع های پوشا که از مجموعه r عضوی به مجموعه n عضوی می توان نوشت برابر است با:

$$n^r - \binom{n}{1}(n-1)^r + \binom{n}{2}(n-2)^r - \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} \times 1^r$$

مثال: چند تابع پوشا از روی یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۴ عضوی می توان نوشت؟

$$256(1) \quad 36(2) \quad 24(3) \quad 81(4)$$

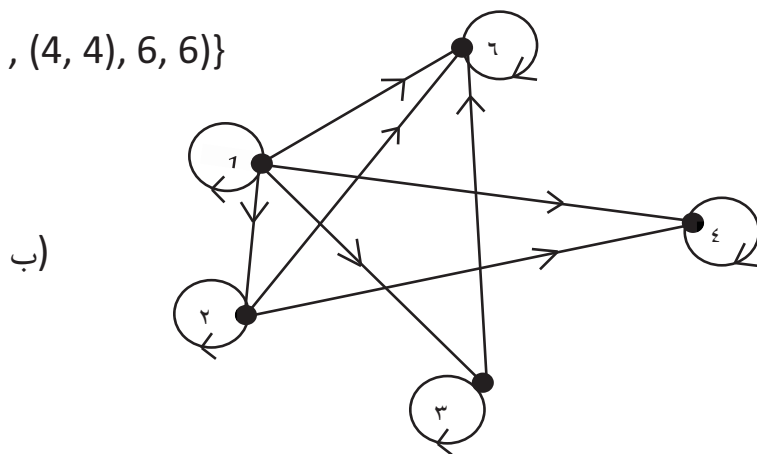
$$4^4 - \binom{4}{1}(4-1)^4 + \binom{4}{2}(4-2)^4 - \binom{4}{3}(4-3)^4 = 256 - 4 \times 81 + 6 \times 16 - 4 = 24$$

$$147$$

حل سوالات حل نشده فصل هفتم: مدلهای شهودی و تجسمی در ترکیبیات

حل سوال ۱:

الف) $R: \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), 6, 6)\}$

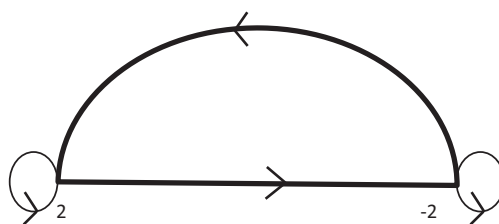
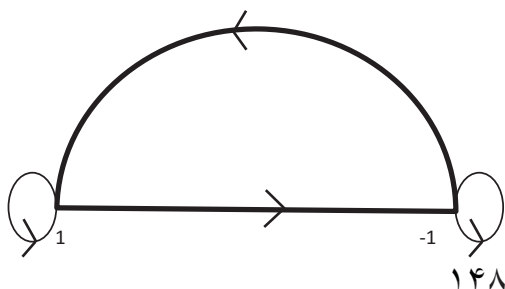


حل سوال ۲: راس e طوقه ندارد پس بازتابی نیست. از طرفی eRb ولی bRc پس تقارنی نیست و aRc و cRa پس پاد متقارن هم نیست ولی

$aRa \Rightarrow aRc$, $cRa \Rightarrow cRc$ و $aRc \Rightarrow cRa$ بنابراین تراگذری است.

حل سوال ۳

$R: \{(0,0), (2,2), (-2,-2), (2,-2), (-2,2), (1,1), (-1,-1), (1,-1), (-1,1)\}$



حل سوال ۴

$$R: \{ (1,1), (2,2), (5,5), (1,2), (2,1), (3,4), (4,3), (4,1), (2,3) \}$$

.....

حل سوال ۵

$$m(R) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

.....

حل سوال ۶

$$m^2 = m \times m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

توجه: هر جا جمع عددی غیر صفر شد عدد ۱ قرار دادیم.

حل سوال ۶

$$R: \{ (2,5), (5,2), (2,8), (8,2), (5,8), (8, 5) \} \quad S: \{ (2,5), (2,7), (2,8), (5,7), (5,8), (7, 8) \}$$

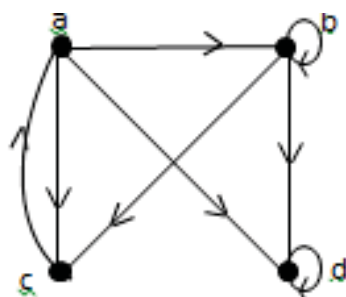
$$RoS: \{ (2,2), (2,8), (2,5), (5,5), (5,2), (7, 5), (7, 2) \}$$

$$SoR: \{ (2,7), (2,8), (5,5), (5,7), (5,8), (8, 5), (8, 7), (8, 8) \}$$

.....

حل سوال ۸

(الف)



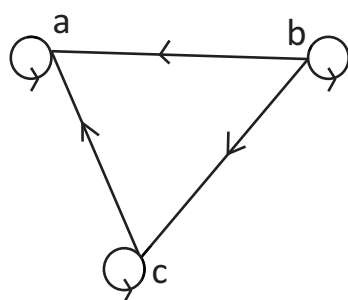
$$m(R) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(ب)

(ج)

$$m(R \circ R) = [m(R)]^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$R \circ R = \{ (a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (b,a), (b,b), (b,c), (b,d), (c,b), (c,c), (c,d), (d,d) \}$$



(الف)

حل سوال ۹:

$$m(R) = \begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$[m(R)]^2 = m(R) \times m(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \ll m(R) \text{ همه جوابها} \quad \binom{7+3-1}{7} = \binom{9}{7} = 36$$

حل سوال ۱۰:

$$A_i = \{x_i \mid x_i \geq 4\} \Rightarrow A_1 = \{x_1 \mid x_1 \geq 4\} \Rightarrow y_1 = x_1 - 4 \Rightarrow x_1 = y_1 + 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \Rightarrow y_1 + 4 + y_2 + y_3 = 7 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 3$$

$$\Rightarrow |A_1| = \binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = 10$$

به همین ترتیب $|A_2| = |A_3| = 10$ و $|A_i \cap A_j| = 0$ بنابراین:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$$= 3 \times 10 - 0 + 0 = 30 \Rightarrow |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 36 - 30 = 6$$

حل سوال ۱۱: راه اول: ابتدا دو شاخه گل را از هر کدام خریداری و جدا می کنیم یعنی ۶ شاخه

گل خریداری شده حالتی ندارد. پس کافی است ۴ شاخه باقیمانده را خریداری کنیم یعنی

$$(x_i \geq 0) x_1 + x_2 + x_3 = 4 \quad \binom{4+3-1}{4} = 15$$

راه دوم: $(x_i \geq 2) x_1 + x_2 + x_3 = 10$

$$x_i \geq 2 \Rightarrow y_i = x_i - 2 \Rightarrow x_i = y_i + 2 \Rightarrow y_1 + 2 + y_2 + 2 + y_3 + 2 = 10$$

$$\text{بنابراین: } y_1 + y_2 + y_3 = 4 \Rightarrow \binom{4+3-1}{4} = 15$$

$$|A|=30$$

$$A_1: \Rightarrow |A_1| = \left[\frac{30}{2} \right] = 15$$

$$A_2: \Rightarrow |A_2| = \left[\frac{30}{3} \right] = 10$$

$$A_3: \Rightarrow |A_3| = \left[\frac{30}{5} \right] = 6$$

$$|A_1 \cap A_2| = \left[\frac{30}{6} \right] = 5, \quad |A_1 \cap A_3| = \left[\frac{30}{10} \right] = 3$$

$$|A_2 \cap A_3| = \left[\frac{30}{15} \right] = 2, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left[\frac{30}{30} \right] = 1$$

$$\Rightarrow |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 15 + 10 + 6 - 5 - 3 - 2 + 1 = 22$$

$$\Rightarrow |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 30 - 22 = 8$$

پاسخنامه تست های حل نشده ترکیبیات فصل هفتم:

شماره تست	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
گزینه پاسخ	۴	۴	۱	۲	۴	۳	۱	۳	۴	۴

قسمت چهارم: احتمال

احتمال

توزیعهای گسسته احتمال

فصل هشتم: احتمال

یادآوری از جبر سال سوم:

تعریف: اگر آزمایشی یا پدیده ای قبل از رخداد، نتیجه اش معلوم نباشد ولی نتیجه های ممکن آن مشخص باشند آن را آزمایش تصادفی یا پدیده تصادفی می نامند.

تعریف: مجموعه همه ی نتایج ممکن را فضای نمونه ای آزمایش تصادفی می نامیم که آن را با S نشان می دهیم.

تعریف: هر نتیجه ممکن یعنی هر عضو S را یک برآمد می گوئیم.

توجه: دو پیشامد را که برآمد مشترکی ندارند ناسازگار می گویند.

توجه: اگر فضای نمونه ، n برآمد ممکن داشته باشد تعداد پیشامد ها ی آن 2^n است.

توجه: $\emptyset$ را پیشامد ناممکن و S را پیشامد مطمئن می گوئیم.

تعریف: اگر فضای نمونه متناهی یا شمارای متناهی باشد آن را فضای نمونه ای گسسته گوئیم و اگر فضای نمونه ناشمارای نامتناهی باشد آن را فضای نمونه ای پیوسته گوئیم.

تعریف: هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای S را یک پیشامد می گوئیم.

اعمال روی پیشامدها:

۱- **اجتماع دو پیشامد:** اجتماع دو پیشامد A و B را که با $A \cup B$ نشان می دهیم بدین

معنی است که حداقل یکی از دو پیشامد A یا B رخ می دهد.

۲- **اشتراک دو پیشامد:** اشتراک دو پیشامد A و B را با $A \cap B$ نشان می دهیم بدین

معنی است که پیشامد A و پیشامد B هر دو رخ می دهند.

۳- تفاضل دو پیشامد: تفاضل دو پیشامد A و B را با $A-B$ نشان می دهیم بدین معنی

است که پیشامد A رخ می دهد ولی پیشامد B رخ نمی دهد.

۴- متمم یک پیشامد: متمم پیشامد A را با A^c یا A^c نشان می دهیم، A' وقتی اتفاق

می افتد که A اتفاق نیفتد. گاهی آن را با $\bar{A}$ هم نشان می دهند.

۵- تفاضل متقارن دو پیشامد: تفاضل متقارن دو پیشامد A و B را که با $A \Delta B$ نشان

می دهیم بدین معنی است که فقط یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق می افتد.

$$0 \leq p(A) \leq 1 \quad -۶$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad -۷$$

$$p(A') = 1 - p(A) \quad -۸$$

$$p(B-A) = p(B) - p(A) \quad \text{اگر } A \subseteq B \text{ آنگاه:} \quad -۹$$

$$p(A) \leq p(B) \quad \text{اگر } A \subseteq B \text{ آنگاه:} \quad -۱۰$$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad -۱۱$$

۱۲- فرض کنیم $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ یک فضای نمونه است اگر $p(e_i)$ احتمال وقوع پیشامد

ساده (برآمد) e_i باشد در اینصورت داریم:

$$\sum_{i=1}^n p(e_i) = 1 \quad (۲) \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad p(e_i) \geq 0 \quad (۱)$$

توجه: e_i ها پیشامدهای غیر همشانس در فضای گسسته اند.

احتمال شرطی:

در برخی مواقع ممکن است اطلاعاتی در مورد یک پدیده تصادفی داشته باشیم که آن

اطلاعات در محاسبه احتمال وقوع پیشامدی مانند A موثر باشد به عبارت دیگر می

ریاضیات گسسته-احتمال

خواهیم با فرض رخ دادن پیشامدی مانند B احتمال وقوع پیشامدی مانند A را بدست آوریم. به اینگونه احتمالات، احتمال شرطی می گوییم که آنرا با $p(A|B)$ نشان می دهیم

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{و برابر است با:}$$

$$p(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \quad \text{توجه: در فضای نمونه گسسته:}$$

مثال: یک عدد طبیعی کوچکتر از ۱۱ را تصادفی انتخاب کرده ایم. مطلوبست تعیین:

الف-احتمال آمدن عدد زوج، به شرط آمدن عدد مضرب ۳

ب-احتمال آمدن عدد مضرب ۳، به شرط آمدن عدد زوج

حل: $S = \{1, 2, \dots, 10\}$ و $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ پیشامد آمدن عدد زوج و

$$B = \{3, 6, 9\}$$

پیشامد آمدن عدد مضرب ۳ پس: $(A \cap B) = \{6\}$

$$\text{الف) } p(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{3} \quad \text{ب) } p(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{5}$$

سوال ۱: یک جفت تاس را می ریزیم، اگر عدد آنها مختلف باشد، احتمال آنکه مجموع دو

عدد زوج باشد را بدست آورید.

تست ۱: در پرتاب دو مکعب باهم، مشروط بر آن که مجموعه دو عدد رو شده برابر ۶ باشد،

احتمال آنکه هر دو عدد روشده زوج باشند کدام است؟

$$\frac{5}{8} (4) \quad \frac{3}{5} (3) \quad \frac{2}{5} (2) \quad \frac{1}{2} (1)$$

تعریف: اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند که $p(A) > 0$ و $p(B) > 0$ آنگاه A

و B را دو "پیشامد مستقل" گوئیم هرگاه وقوع یکی از آنها در احتمال وقوع دیگری تاثیر نداشته باشد.

توجه: اگر A و B مستقل نباشند آنها را "پیشامد های وابسته" گوئیم.

توجه: اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند در این صورت:

$$p(B|A) = p(B), \quad p(A|B) = p(A), \quad P(A \cap B) = p(A).p(B)$$

مثال: اگر $p(A-B) = \frac{1}{4}$ و $p(A) = \frac{3}{4}$ باشد. مقدار $p(B|A)$ را بدست آورید.

حل:

$$p(A-B) = p(A) - p(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{4} = \frac{3}{4} - p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

مثال: اگر $p(A) = \frac{1}{4}$ و $p(B) = \frac{1}{6}$ و $p(A|B) = \frac{1}{3}$ باشد. $p(A \cup B)$ را بدست

آورید.

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{p(A \cap B)}{\frac{1}{6}} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{1}{18}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{18} = \frac{9+6-2}{36} = \frac{13}{36}$$

قضیه(قانون ضرب احتمال): اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند در این

صورت:

الف) اگر A و B مستقل باشند آنگاه $p(A \cap B) = p(A).p(B)$

ب) اگر A و B وابسته باشند آنگاه $p(A \cap B) = p(A).p(B|A)$

مثال: جعبه ای محتوی ۱۲ لامپ است و می دانیم که ۳ تای آنها معیوب اند از این جعبه

به تصادف یک لامپ بر می داریم، سپس بدون جایگذاری لامپ اول، لامپ دیگری به

تصادف بر می داریم. احتمال اینکه هر دو لامپ معیوب باشند چقدر است؟

A پیشامد لامپ اول (معیوب) B پیشامد لامپ دوم (معیوب)

$$p(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

اگر لامپ اول معیوب باشد، لامپ دوم را از بین ۱۱ لامپ باقی مانده که ۲ تای آنها معیوب

است بر می داریم یعنی: $p(B|A) = \frac{2}{11}$

$$p(A \cap B) = p(A).p(B|A) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{11} = \frac{1}{22}$$

سوال ۲: در کارخانه ای دو دستگاه مستقل از هم کار می کنند و احتمال خرابی هر یک

از این دستگاه ها $1/4$ است. مطلوبست احتمال اینکه:

الف) حداقل یکی از دستگاه ها سالم کار کند

ب) فقط دستگاه اول سالم کار کند.

سوال ۳: کیسه ای شامل ۵ مهره سیاه و ۳ مهره سفید است. دو مهره متوالیا و بدون جایگذاری از کیسه بیرون می آوریم. احتمال آنکه اولی سیاه و دومی سفید باشد چقدر است؟

تست ۲: اگر A و B دو پیشامد باشند، $p(B) + p(A - B)$ برابر است با:

$p(A)$ (1) $p(A \cup B)$ (2) $p(B)$ (3) $p(A \cap B)$ (4)

تست ۳: یک سکه را حداقل چندبار پرتا ب کنیم تا احتمال آمدن اقلا یک شیر بیش از ۹۹ درصد باشد؟

۷(۱) ۱۵(۲) ۴۵(۳) ۱۰۰(۴)

توجه: اگر دو پیشامد یک فضای نمونه ای ناسازگار باشند یعنی برآمدی مشترک نداشته باشند و احتمال هر دو مثبت باشد آن دو پیشامد از هم مستقل نیستند به عبارت دیگر ناسازگاری دو پیشامد به استقلال دو پیشامد ربطی ندارد.

توجه: دو پیشامد ناسازگار وقتی مستقل اند که $p(A)=0$ یا $p(B)=0$ و اگر این دو احتمال (حداقل یکی از آنها) صفر نباشند A و B مستقل نیستند.

فرمول احتمال کل: $p(A) = \sum_{i=1}^n p(B_i) p(A|B_i)$

مثال: در ظرف A، ۳ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و در ظرف B، ۲ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و در

در ظرف C، ۴ مهره قرمز و ۴ مهره آبی موجود است. از این سه ظرف A، B و C به ترتیب ۳

مهره، ۲ مهره، ۴ مهره تصادفی خارج کرده و در ظرف D می ریزیم.

سپس یک مهره از ظرف D تصادفی خارج می کنیم. احتمال آنکه این مهره آبی باشد چقدر

است؟ $D: 3+2+4=9$ ظرف

یک مهره انتخابی ممکن است از ظرف A و آبی باشد: $\frac{3}{9} \times \frac{4}{7}$

یک مهره انتخابی ممکن است از ظرف B و آبی باشد: $\frac{2}{9} \times \frac{3}{5}$

یک مهره انتخابی ممکن است از ظرف C و آبی باشد: $\frac{4}{9} \times \frac{4}{8}$

$$p(m) = p(m|A).p(A) + p(m|B).p(B) + p(m|C).p(C)$$

$$= \frac{3}{9} \times \frac{4}{7} + \frac{2}{9} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{4}{21} + \frac{2}{15} + \frac{2}{9} = \frac{172}{315}$$

سوال ۴: 54٪ جمعیت کشوری را زنان و بقیه را مردان تشکیل می دهند. اگر 15٪ زنان و

40٪ مردان این کشور تحصیلات دانشگاهی داشته باشند و یک نفر از این کشور را به

تصادف انتخاب کنیم. احتمال اینکه فرد انتخاب شده دارای تحصیلات دانشگاهی باشد چقدر

است؟

مثال: سه ظرف داریم. ظرف اول شامل ۴ مهره سیاه و ۵ مهره سفید و ظرف دوم شامل ۲ مهره

سیاه و ۴ مهره سفید و ظرف سوم فقط شامل ۷ مهره سفید است. یک ظرف به تصادف انتخاب

نموده و به تصادف مهره ای از آن بیرون می آوریم. احتمال سیاه بودن آن چقدر است؟

$$p(A) = \left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{9}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{6}\right) + \left(\frac{1}{3} \times \frac{0}{7}\right) = \frac{4}{27} + \frac{1}{9} = \frac{7}{27}$$

قاعده بیز: $p(A|B).p(B)=p(B|A).p(A)$

مثال: سه کارت هم شکل را در نظر می گیریم هر دو طرف کارت اول آبی و هر دو طرف کارت دوم قرمز است ولی در کارت سوم یک طرف قرمز و یک طرف آبی است. یکی از این کارت ها را به تصادف انتخاب می کنیم و مشاهده می کنیم که یک طرف آن قرمز است. احتمال اینکه طرف دیگر آن آبی باشد چقدر است؟

A_1 : هر دو طرف قرمز A : طرف انتخاب شده قرمز A_2 : هر دو طرف آبی

A_3 : یک طرف قرمز یک طرف آبی

$$p(A)=p(A_1)p(A|A_1)+p(A_2)p(A|A_2)+p(A_3)p(A|A_3)$$

$$=\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow p(A_3|A).p(A)=p(A|A_3).p(A_3) \Rightarrow p(A_3|A) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow p(A_3|A) = \frac{1}{3}$$

راه دوم: $p(\text{قرمز} | \text{آبی}) = \frac{p(\text{قرمز} \cap \text{آبی})}{p(\text{قرمز})} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

تست ۴: در یک کیسه ۹ مهره سفید و ۳ مهره سیاه داریم، از این کیسه یک مهره تصادفی

خارج می کنیم و بدون جایگذاری، مهره دیگری را خارج می کنیم. احتمال آنکه هر دو

مهره سیاه باشند چقدر است؟

$$\frac{1}{11}(1) \quad \frac{2}{22}(2) \quad \frac{2}{11}(3) \quad \frac{2}{44}(4)$$

حل چند تمرین:

۱) از بین ماتریس های 2×2 که هر درایه آنها عضو مجموعه $\{1,2,3\}$ می باشد دو ماتریس به تصادف انتخاب میکنیم.

الف) تعداد اعضای فضای نمونه را بدست آورید.

ب) پیشامد اینکه "درایه های دو ماتریس انتخابی فرد باشند" چند عضو دارد؟

الف) هر ماتریس 2×2 به صورت $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ می باشد بنابراین اگر

$A = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d, \in \{1,2,3\} \}$ در نتیجه $|A| = 3^4 = 81$ پس تعداد کل

ماتریس های 2×2 با شرط عنوان شده، ۸۱ تاست. در نتیجه تعداد اعضای فضای نمونه

برابر $\binom{81}{2} = \frac{81 \times 80}{2} = 3240$ می باشد.

ب) اگر B مجموعه تمام ماتریس های 2×2 با درایه فرد باشد در اینصورت:

بنابراین $|B| = 2^4 = 16$ پس تعداد $B = \{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d, \in \{1,3\} \}$

اعضای پیشامد B برابر $\binom{16}{2} = \frac{16 \times 15 \times 14!}{14! \times 2} = 120$ می باشد.

۲) یک فضای نمونه S متشکل از چهار برآمد a,b,c,d است و $p(a)=p(b)=\frac{1}{3}$

$p(c)=p(d)=\frac{1}{6}$ مطلوبست:

الف) محاسبه $p(\{a,b,c\})$ ب) محاسبه $p(\{a,b,c\} | \{b,c,d\})$

الف: $p(\{a,b,c\}) = p(a) + p(b) + p(c) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

ب: $p(\{a,b,c\} | \{b,c,d\}) = \frac{p(\{b,c\})}{p(\{b,c,d\})} = \frac{p(b)+p(c)}{p(b)+p(c)+p(d)} = \frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}} = \frac{3}{4}$

۳) دو تاس پرتاب می شوند. اگر مجموع شماره ها ۶ باشد احتمال آنکه اقلا یکی از دو تاس ۲ باشد را حساب کنید.

$$p(B|A)=? \quad A: \text{مجموع شماره ها } 6 \text{ باشد}$$

B: اقلا یکی از تاس ها دو ظاهر شود

$$A=\{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

$$B=\{(1,2), (2,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$$

$$A \cap B = \{(2,4), (4,2)\}$$

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{5}$$

۴) در امتحانات یک کلاس 20٪ دانش آموزان در ریاضی، 15٪ در فیزیک و 10٪ در هر دو درس تجدید شده اند. احتمال اینکه دانش آموزی از این کلاس در درس فیزیک تجدید شده باشد، مشروط بر اینکه در درس ریاضی تجدید شده باشد را بدست آورید:

$$A: \text{تجدید در درس ریاضی} \quad B: \text{تجدید در درس فیزیک}$$

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{10\%}{20\%} = 0.5$$

۵) سه ظرف داریم که ظرف اول شامل ۴ مهره سیاه و ۵ مهره سفید و ظرف دوم شامل ۳ مهره سیاه و ۶ مهره سفید و ظرف سوم فقط شامل تعدادی مهره سیاه است. یک ظرف به تصادف انتخاب نموده و به تصادف مهره ای از آن بیرون می آوریم. احتمال سفید بودن آن چقدر است؟

$$A_i: \text{انتخاب ظرف } i \text{ ام} \quad A: \text{سفید بودن مهره}$$

$$p(A) = p(A_1)p(A|A_1) + p(A_2)p(A|A_2) + p(A_3)p(A|A_3)$$

ریاضیات گسسته-احتمال

$$= \frac{1}{3} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{9} + \frac{1}{3} \times 0 = \frac{5}{27} + \frac{6}{27} = \frac{11}{27}$$

۶) اگر $p(A|B) = \frac{1}{3}$ و $p(B|A) = \frac{1}{4}$ و $p(A \cup B) = \frac{3}{4}$ باشند حاصل $p(A-B)$ را بدست آورید.

۷) تست: اگر A و B مستقل از هم باشند $p(A-B)$ کدام است؟

۱) $p(A)$ ۲) $p(B)$ ۳) $p(A) \cdot p(B')$ ۴) $p(B) \cdot p(A')$

۸) تست: حاصل $p(A'|B)$ کدام است؟

۱) $p(A|B)$ ۲) $1 - p(A|B)$ ۳) $p(A|B')$ ۴) گزینه ۲ و ۳

۹) اگر $p(A \cup B) = 0.6$ و $p(A) = 0.2$ و $p(B|A) = 0.1$ باشد $p(B)$ کدام است؟

۱) 0.38 ۲) 0.3 ۳) 0.4 ۴) 0.42

حل سوالات حل نشده احتمالات فصل هشتم:احتمال

حل سوال ۱:

A: مجموع دو عدد زوج $\{(1,5), (1,1), (1,3), (2,2), (2,4), (2,6), (3,1), (3,3), (3,5), (4,2), (4,4), (4,6), (5,1), (5,3), (5,5), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

B: $\{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), \dots\}$ مختلف بودن اعداد

$$P(A|B): \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$$

توجه: هر عدد با ۵ عدد دیگر متفاوت است پس $n(B) = 6 \times 5 = 30$

حل سوال ۲

A: سالم کار کردن دستگاه اول $\Rightarrow p(A) = 0/6$

B: سالم کار کردن دستگاه دوم $\Rightarrow p(B) = 0/6$

$\Rightarrow p(A \cap B) = 0/6 \times 0/6 = 0/36$ دو دستگاه مستقل از هم

الف $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0/6 + 0/6 - 0/36 = 0/84$

ب $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = 0/6 - 0/36 = 0/24$

B: سفید بودن مهره دوم

A: راه اول: سیاه بودن مهره اول

$$P(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{p(A \cap B)}{\frac{5}{8}} \Rightarrow \frac{3}{7} = \frac{8}{5} p(A \cap B) \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{8}{5}} = \frac{15}{56}$$

راه دوم $\Rightarrow \frac{3}{7} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{56}$ مهره دوم سفید و مهره اول سیاه

حل سوال ۴: زن بودن: A_1 مرد بودن: A_2 تحصیلات دانشگاهی: A

$$p(A) = p(A_1) \cdot p(A|A_1) + p(A_2) \cdot p(A|A_2) = \%54 \times \%15 + \%46 \times \%40 = \%015$$

درواقع: $p(A)$ مرد باشد و تحصیل کرده یا زن باشد و تحصیل کرده که با عبارتهای ریاضی

نوشته شده است *****

حل تمرین ۶

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{3}{4} \quad (۱)$$

$$p(A|B) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{1}{3} \Rightarrow p(B) = 3 p(A \cap B) \quad (۲)$$

$$p(B|A) = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{1}{4} \Rightarrow p(A) = 4 p(A \cap B) \quad (۳)$$

$$(۱) و (۲) و (۳) \Rightarrow 3 p(A \cap B) + 4 p(A \cap B) - p(A \cap B) = \frac{3}{4} \Rightarrow 6 p(A \cap B) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow p(A \cap B) = \frac{\frac{3}{4}}{6} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \quad p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = 4 \times \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

پاسخنامه تست های حل نشده فصل هشتم: احتمال

شماره تست	۱	۲	۳	۴	تمرین ۷	تمرین ۸	تمرین ۹
گزینه پاسخ	گزینه ۲	گزینه ۲	گزینه ۱	گزینه ۲	گزینه ۳	گزینه ۲	گزینه ۴

فصل نهم: توزیع گسسته احتمال

تعریف: اگر در آزمایشی، به هر نتیجه آن آزمایش عددی نسبت دهیم، این عدد را متغیر تصادفی می نامیم که معمولاً با حروف X و Y و ... نشان می دهیم به عبارت دیگر اگر S یک فضای نمونه ای باشد به تابع $X: S \rightarrow R$ که به هر عضو فضای نمونه عددی حقیقی را نسبت میدهد متغیر تصادفی می گوییم.

توجه: در واقع متغیر تصادفی، نه متغیر است و نه تصادفی بلکه یک تابع روی مدل احتمال است.

تابع جرم احتمال:

تابع جرم احتمال یک متغیر تصادفی گسسته X ، تابعی است که به هر یک از مقادیر X ، یعنی به هریک از x_i ها $i=1,2,\dots,k$ احتمال $p(X=x_i)=p_i$ را نسبت می دهد.

توجه: هر تابع احتمال مربوط به متغیر تصادفی گسسته X دارای ویژگی های زیر است:

$$\text{الف) } 0 \leq p(X=x_i) \leq 1 \quad i=1,2,\dots \quad \text{ب) } \sum p(X=x_i) = 1$$

توجه: اگر X یک متغیر تصادفی با مقادیر $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ باشد و p تابع احتمال X

باشد جدول توزیع احتمال X را به صورت زیر نشان می دهیم

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_k

مثال: توزیع احتمال متغیر تصادفی X بصورت زیر است:

$$p(X=j)=\frac{1}{14} \quad (j=4,5,6), \quad , \quad p(X=i) = \frac{i}{i^2+3}$$

$$(i=1,2,3)$$

الف) جدول توزیع احتمال تابع X را بنویسید. ب) مقدار $p(X \geq 3)$ را

بدست آورید.

حل: الف)

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$

$$p(X \geq 3) = p(X=3) + p(X=4) + p(X=5) + p(X=6) \quad \text{ب)}$$

$$= \frac{3}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} = \frac{21+6+6+6}{84} = \frac{39}{84} = \frac{13}{28}$$

سوال ۱: اگر X متغیر تصادفی باشد n را طوری بدست آورید که تابع زیر یک تابع

احتمال باشد.

$$P(X=x) = \frac{x}{2n+1} \quad x=1,2,3,4,5$$

$$p(X=x) = \frac{2x-1}{n^2}$$

مثال: تحقیق کنید تابع زیر تابع احتمال است یا نه؟

$$x=1,2,\dots,n$$

ابتدا باید نشان دهیم $0 \leq p(X=x) \leq 1$ و سپس نشان دهیم:

$$\sum_{x=1}^n p(X=x) = 1$$

$$1 \leq x \leq n \Rightarrow 1 \leq 2x-1 \leq 2n-1 \Rightarrow \frac{1}{n^2} \leq \frac{2x-1}{n^2} \leq \frac{2n-1}{n^2}$$

چون $\frac{1}{n^2} > 0$ پس $\frac{2x-1}{n^2} \geq 0$ و چون $\frac{2n-1}{n^2} \leq 1$ پس:

$$0 \leq p(X=x) \leq 1$$

توجه: $n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2 \geq 0$ صورت - مخرج

چون اختلاف مثبت است پس $\frac{2n-1}{n^2} \leq 1 \Rightarrow n^2 \geq 2n-1$

از طرفی:

$$\sum_{x=1}^n p(X=x) = \frac{1}{n^2} \sum_{x=1}^n (2x-1) = \frac{1}{n^2} [1+3+\dots+(2n-1)]$$

$$= \frac{1}{n^2} \times n^2 = 1$$

توجه: جمع اعداد فرد طبیعی: n^2

سوال ۲: جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است:

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{6}a^2$	$\frac{3}{2}a$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}a$

اولا: مقدار a را تعیین کنید.

ثانیا: $p(X=4)$ را بدست آورید.

مثال: جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر است:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}a^2$	$\frac{1}{2}a^2$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}a^2$

اولاً: a را بیابید. ثانیاً) به ازاء $a = \frac{1}{2}$ جدول توزیع احتمال و نمودار

آن را رسم کنید.

اولاً: چون در تابع توزیع احتمال داریم: $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ در نتیجه:

$$\frac{1}{6}a^2 + \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3}a^2 = 1 \Rightarrow \frac{1+3+2}{6}a^2 + \frac{3+2+1}{8} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{6}{6}a^2 + \frac{6}{8} = 1 \Rightarrow a^2 + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

ثانیاً:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{6}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$



سوال ۳: خانواده ای ۳ فرزندی را به تصادف انتخاب می کنیم. متغیر تصادفی X را

تعداد فرزندان پسر تعریف می کنیم.

اولاً: X چه مقادیری را انتخاب می کند.

ثانیا: اگر احتمال تولد پسر مساوی احتمال تولد دختر باشد. جدول توزیع احتمال X را بنویسید.

مثال: تاسی پرتاب می شود متغیر تصادفی X صفر است، اگر عدد ظاهر شده اول باشد در غیر این صورت برابر عدد ظاهر شده است.

الف) مقادیری که X می تواند اختیار کند کدامند؟

ب) جدول توزیع احتمال X را بنویسید.

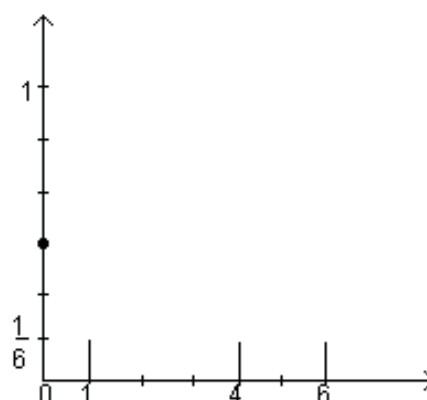
ج) نمودار میله ای متناظر با جدول توزیع X را رسم کنید.

الف) $X=0,1,4,6$

x_i	0	1	4	6
p_i	$\frac{3}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

ب)

ج)



سوال ۴: سکه ای آنقدر پرتاب می شود تا برای اولین بار رو ظاهر شود. متغیر تصادفی

X تعداد دفعات پرتاب سکه می باشد.

الف) X چه مقادیری می تواند اختیار کند.

ب) احتمال رخداد هر مقدار X را تعیین کنید.

مثال: سکه ای داریم که یک طرف آن عدد ۱ و طرف دیگر عدد ۲ نوشته شده

است. سکه را سه بار پرتاب می کنیم. متغیر تصادفی X مجموع اعداد ظاهر شده

در نظر گرفته میشود

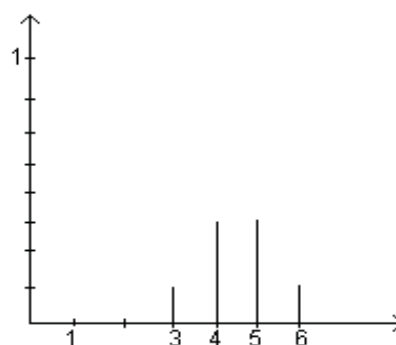
اولا: مقادیری که X می تواند اختیار کند را بنویسید.

ثانیا: جدول توزیع احتمال متغیر تصادفی X و نمودار مربوط را رسم کنید.

اولا: $X=3,4,5,6$

x_i	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

ثانیا:



توزیع برنولی:

در بعضی از آزمایش ها با دو پیشامد روبرو هستیم. یکی از این پیشامدها را پیروزی (۱) و دیگری را شکست (۰) می نامیم. اگر احتمال پیروزی را با p و احتمال شکست را با q نمایش دهیم خواهیم داشت:

و همیشه: $p+q=1$

x_i	0	1
p_i	q	p

چنین آزمایش هایی را آزمایش برنولی می نامند. توزیع این آزمایش ها به شکل زیر می باشد که به توزیع برنولی موسوم است:

$$p(X=x_i)=p^{x_i} \cdot q^{1-x_i} \quad x_i=0,1$$

توجه: پیشامدی که مسئله به دنبال آن است را پیروزی و پیشامد دیگر را شکست می گیریم.

توجه: تولد فرزند دارای توزیع برنولی است.

توجه: پرتاب سکه دارای توزیع برنولی است.

حل چند تمرین:

x_i	1	2	3	4	5	متغیر	اگر X
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{2k+1}$	$\frac{2}{2k+1}$	$\frac{3}{2k+1}$	$\frac{4}{2k+1}$	$\frac{5}{2k+1}$	تصادفی	

باشد، مقدار K را

طوری بدست آورید که تابع زیر تابع توزیع احتمال باشد.

$$\sum_{i=1}^5 p(X = x_i) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2k+1} + \frac{2}{2k+1} + \frac{3}{2k+1} + \frac{4}{2k+1} + \frac{5}{2k+1} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{15}{2k+1} = 1 \Rightarrow 15 = 2k+1 \Rightarrow 14 = 2k \Rightarrow k=7$$

۲) تحقیق کنید که آیا تابع زیر تابع احتمال است یا خیر؟ چرا؟

$$p(X = x_i) = \frac{2x_i - 3}{k^2} \quad x_i = 1, 2, \dots, n$$

$$p(X=1) = \frac{2-3}{k^2} = \frac{-1}{k^2} < 0 \quad p(X=1) \notin [0,1]$$

پس تابع احتمال نیست.

۳) یک سکه طوری ساخته شده است که احتمال آمدن رو $\frac{1}{4}$ و پشت $\frac{3}{4}$ است. احتمال

اینکه سه بار رو بیاید را بدست آورید زمانی که این سکه را ۸ بار پرتاب می کنیم.

$$p(X=3) = \binom{8}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{8!}{5!3!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^5$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} \times \frac{1}{64} \times (0.75)^5$$

$$= 56 \times \frac{1}{64} \times 0.2373047 \cong 0.20$$

بیشتر بدانیم:

(۱) در پرتاب یک سکه به تعداد n بار اگر احتمال آمدن رو و پشت برابر باشند احتمال k بار پیروزی به شکل زیر است:

$$p(X=K) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

مثلاً: سکه ای را ۱۰۰ بار انداخته ایم، احتمال آمدن ۶۰ بار پشت:

$$\frac{\binom{100}{60}}{2^{100}}$$

(۲) در کیسه ای n مهره داریم اگر بخواهیم k مهره از کیسه خارج کنیم:

الف) k مهره به تصادف و یکجا خارج کنیم: $\binom{n}{k}$

ب) k مهره را یکی پس از دیگری و بدون جایگذاری خارج کنیم:

$$p(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ج) k مهره را یکی پس از دیگری و با جایگذاری مجدد خارج کنیم: n^k

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots + \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1} \quad (۳)$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots + \binom{n}{2k} = 2^{n-1} \quad (۴)$$

(۵) اگر n شیء بخواهند در کنار هم قرار گیرند به طوریکه n_1 شیء از نوع اول و...

n_k شیء از نوع k ام باشد به طوریکه:

$$n_1 + \dots + n_k = n \quad \text{داریم:} \quad \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

(۶) با n مهره متمایز، دقیقاً $\frac{(n-1)!}{2}$ گردن بند متمایز می توان ساخت.

(۷) توزیع یکنواخت:

در بعضی از آزمایش ها تمام اعضا دارای احتمال وقوع یکسان هستند. چنین آزمایش هایی دارای توزیعی به شکل زیر می باشند. این توزیع را توزیع یکنواخت می نامند:

$$p(X = X_i) = \frac{1}{k} \quad X_i = 1, 2, \dots, n \quad \text{"k تعداد اعضا"}$$

مثال: پرتاب یک تاس دارای یک توزیع یکنواخت است معادله این تابع به صورت

$$p(X = X_i) = \frac{1}{6} \quad X_i = 1, 2, \dots, 6 \quad \text{زیر می باشد:}$$

مثال: پرتاب سکه هم دارای توزیع یکنواخت است معادله این تابع بصورت زیر می

$$p(X = X_i) = \frac{1}{2} \quad X_i = 1, 2 \quad \text{باشد:}$$

رو را و پشت را ۲ در نظر گرفتیم.

(۸) امید ریاضی: متغیر تصادفی X_i با احتمال $p(X = X_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ را در نظر

می گیریم. امید ریاضی این متغیر، را اینگونه تعریف می کنیم:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$$

مثال: در سه تولد پی در پی یک خانواده، امید ریاضی تولد فرزند پسر چقدر است؟

X_i : تولد فرزند پسر در نظر میگیریم و داریم:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

۹) توزیع دو جمله ای:

یکی از مهمترین تابع های توزیع احتمال گسسته ،توزیع دو جمله ای می باشد.متغیر تصادفی این توزیع، x بار موفقیت در n بار آزمایش می باشد که احتمال موفقیت در یک بار این آزمایش، مساوی p می باشد. ضابطه این تابع به صورت زیر می باشد:

$$p(X) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

مثال: یک سکه را شش بار پرتاب می کنیم، احتمال آن که سه بار از این شش پرتاب پشت بیاید چقدر است؟

در یک بار پرتاب سکه، احتمال آمدن پشت $p = \frac{1}{2}$ است.

$n=6$ و $x=3$ بنابراین:

$$p(X=3) = \binom{6}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{6-3} = \frac{6!}{3!3!} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{5}{16}$$

تست: یک بسکتبالیست معمولاً 80٪ از پرتاب های خود را از حلقه عبور می دهد

احتمال آنکه او در پرتاب 4 پرتاب خود 3 بار توپ را وارد حلقه کند، کدام است؟

۰/۱۰۲۴ (۱) ۰/۲۰۸۴ (۲) ۰/۴۰۹۶ (۳) ۰/۸۱۹۲ (۴)

تست: خانواده ای دارای ۵ فرزند است، احتمال آنکه این خانواده حداکثر ۴ دختر

داشته باشد کدام است؟

$\frac{6}{32}$ (4) $\frac{7}{32}$ (3) $\frac{27}{32}$ (2) $\frac{31}{32}$ (1)

احتمال متمم این پیشامد، یعنی پیشامد تولد ۵ دختر را بدست می آوریم:

$$p(X=5) = \binom{5}{5} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}$$

$$p(A) = 1 - p(A') = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

تست: در آزمایشگاهی از ۶۰ دانه کاشته شده، نوعی بذر ۴۸ دانه جوانه زده اند. اگر ۳

دانه از این نوع بذر کاشته شود با کدام احتمال فقط ۲ دانه از آنها جوانه می زنند؟

- ۰/۲۸۶(۱) ۰/۳۷۲(۲) ۰/۳۸۴(۳) ۰/۲۱۶(۴)

تست: ده درصد محصولات یک کارخانه معیوب است. ۴ نمونه از این محصول را

انتخاب کرده ایم، احتمال آن که فقط یک نمونه خراب باشد، کدام است؟

- ۰/۱(۱) ۰/۴(۲) ۰/۲۸۷۳(۳) ۰/۲۹۱۶(۴)

حل سوالات حل نشده فصل نهم: توزیعهای گسسته احتمال

حل سوال ۱: برای اینکه تابع p یک تابع احتمال باشد باید داشته باشیم $\sum_{x=1}^5 p(X=x)=1$ در نتیجه :

$$\sum_{x=1}^5 p(X=x) = \sum_{x=1}^5 \frac{x}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} [1+2+3+4+5] = 1$$

$$\Rightarrow \frac{15}{2n+1} = 1 \Rightarrow 2n+1=15 \Rightarrow 2n=14 \Rightarrow n=7$$

حل سوال ۲: الف) $p(1)+p(2)+p(3)+p(4)=1 \Rightarrow 6a^2 + \frac{3}{2}a + \frac{1}{4} + 2a = 1$

$$\Rightarrow 24a^2 + 14a - 3 = 0 \Rightarrow a = \frac{-14 \pm 22}{48} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-36}{48} = \frac{-3}{4} \text{ غ ق} \\ a = \frac{8}{48} = \frac{1}{6} \end{cases}$$

ب) قسمت $p(X'=4)=2a=2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

حل سوال ۳: الف) ۰ یا ۱ یا ۲ یا ۳

ب) با فرض مساوی بودن احتمال تولد دختر و تولد پسر جدول توزیع احتمال به صورت زیر است:

x_j	0	1	2	3
p_j	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

حل سوال ۴: الف) $X=1,2,3,\dots$

x_i	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$

ب)

پاسخنامه تستهای قسمت بیشتر بدانیم فصل نهم

شماره تست	۱	۲	۳	۴
پاسخ	گزینه ۳	گزینه ۱	گزینه ۳	گزینه ۴

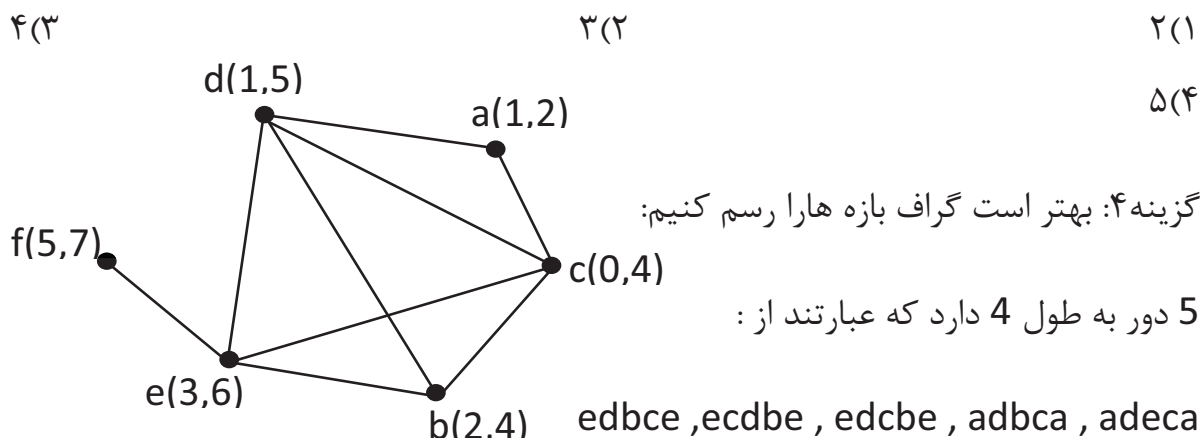
۱۳ سال کنکور سراسری

همراه پاسخ تشریحی

از ۸۳ تا ۹۵

تست های کنکور ۹۵:

۱) گراف بازه های $(5,7), (3,6), (1,5), (0,4), (2,4), (1,2)$ از اعداد حقیق چند دور با طول ۴ دارد؟



توجه: در گراف بازه ها راس های متناظر باید اشتراک ناتهی داشته باشند.

توجه: دور مسیری است که راس ابتدا و انتهای آن یکی باشد.

۲) حاصل $(5342)_6 - (1553)_6$ در مبنای 6 کدام است؟

(۳) $(3435)_6$ (۴) $(3453)_6$ (۲) $(3345)_6$ (۱) $(3245)_6$

گزینه ۲ زیرا:

$$\begin{array}{r} ۸۹ \\ ۴۴۴۸ \\ ۵۴۴۴ \\ - ۱۵۵۳ \\ \hline ۳۳۴۵ \end{array}$$

توجه: مثل تفریق معمولی است ولی وقتی یک واحد قرض می گیریم

چون مبنا 6 است 6 واحد به قبلی اضافه می کنیم.

۳) باقیمانده تقسیم عدد طبیعی N بر عدد 31 برابر 26 می باشد . اگر این عدد را بر 43 تقسیم کنیم ، باقیمانده برابر خارج قسمت می شود . رقم یکان عدد بزرگتر (N) کدام است؟

- ۳(۱) ۴(۲) ۶(۳) ۷(۴)

$$N=31q+26 \Rightarrow N \equiv_{31} 26, 26 \equiv_{31} 88 \quad (88-26=62=2 \times 31) \Rightarrow N \equiv_{31} 88$$

(۱)

$$N=43q+q \Rightarrow N=44q \Rightarrow N \equiv_{44} 0 \Rightarrow$$

توجه : می دانیم هر مضربی از پیمانه همنهشت با صفر می باشد یعنی: $88 \equiv_{44} 0$

$$\Rightarrow N \equiv_{44} 88 \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow N \equiv_{[31,44]}^{[31,44]} 88 \Rightarrow N \equiv_{1364}^{1364} 88 \Rightarrow N=1364 \cdot \vec{q} + 88$$

$$\Rightarrow N=1364+88=1452$$

۴) اگر $221x+357y=(221, 357)$ باشد ، تعداد اعداد طبیعی دو رقمی X کدام است؟

- ۴(۱) ۵(۲) ۶(۳) ۷(۴)

$$(221,357)=17 \Rightarrow 221X+357Y=17 \xRightarrow{\div 17} 13X+21Y=1$$

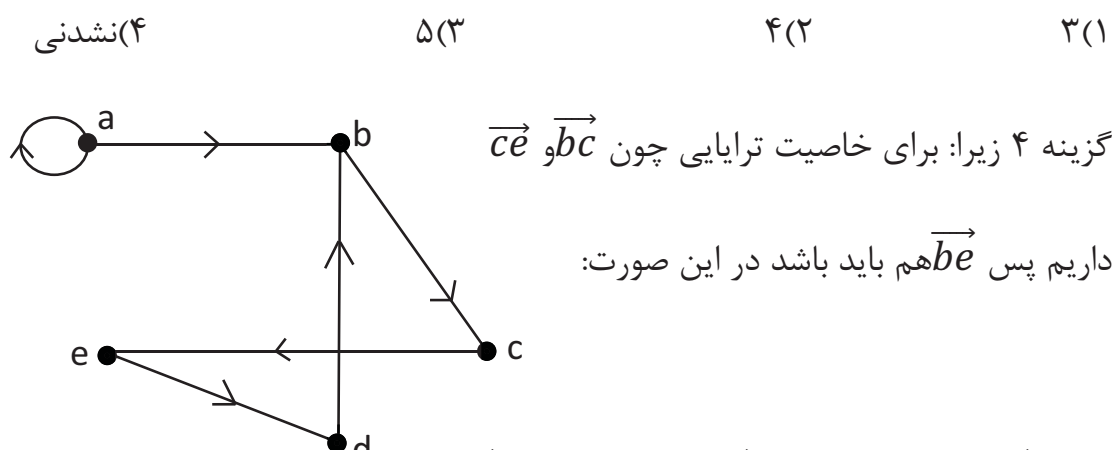
یکی از جواب ها را با کمی دقت حدس می زنیم : $Y=5$ و $X=-8$ (که البته غیر قابل قبول است) پس:

$$x=x_0+k\frac{b}{a} \Rightarrow x=-8+21k$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{در این مساله نیازی به جوابهای } y \text{ نیست} \left(\begin{array}{l} k=0 \Rightarrow x=-8 \\ k=1 \Rightarrow x=13, k=2 \Rightarrow x=34, k=3 \Rightarrow x=55 \\ k=4 \Rightarrow x=76, k=5 \Rightarrow x=97, k=6 \Rightarrow x=118 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

۱۸۸ غ ق ق (سه رقمی) پس ۵ جواب می باشد گزینه ۲.

۵) در گراف جهت دار زیر، با رسم حداقل چند یال جدید، گراف یک رابطه با خواص ترایایی، پاد تقارن حاصل می شود؟



چون $\vec{be}$ رسم می شود و $\vec{ed}$ داریم پس $\vec{bd}$ هم باید رسم کنیم ولی چون در شکل $\vec{db}$ داریم در این صورت پادتقارنی نقض می شود پس نشدنی است.

۶) در جعبه ای ۸ لامپ موجود است که دوتای آن معیوب است. به تصادف متوالیا این لامپ ها را آزمایش کرده و لامپ ها سالم را کنار می گذاریم تا اولین لامپ معیوب پیدا شود. با کدام احتمال در آزمایش سوم، اولین لامپ معیوب پیدا می شود؟

۵(۱) $\frac{4}{21}$ (۲) $\frac{3}{14}$ (۳) $\frac{5}{21}$ (۴)

گزینه ۱ زیرا:

$$P(\text{سومی خراب و دومی سالم و اولی سالم}) = \frac{6}{8} \times \frac{5}{7} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{28}$$

۷) در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز است. اگر ۳ مهره از کیسه خارج کنیم با کدام احتمال حداکثر ۲ مهره از مهره های خارج شده هم رنگ هستند؟

$$\frac{41}{44} \text{ (۴)}$$

$$\frac{39}{44} \text{ (۳)}$$

$$\frac{19}{22} \text{ (۲)}$$

$$\frac{17}{22} \text{ (۱)}$$

گزینه ۴: راه اول: حداکثر ۲ مهره هم رنگ باشند یعنی یا دو مهره هم رنگ باشند یا اصلاً هم رنگ نباشند پس:

$$p(A) = \frac{\binom{7}{1}\binom{5}{2} + \binom{4}{2}\binom{8}{1} + \binom{3}{2}\binom{9}{1} + \binom{5}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{12}{3}}$$

$$\Rightarrow p(A) = \frac{7 \times 10 + 6 \times 8 + 3 \times 9 + 5 \times 4 \times 3}{220} = \frac{205}{220} = \frac{41}{44}$$

راه دوم : از راه متمم:

$$p(\text{حداکثر ۲ تا هم رنگ}) = 1 - p(\text{هر سه هم رنگ}) = 1 - \frac{\binom{5}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = 1 - \frac{10 + 4 + 1}{220} = 1 - \frac{15}{220}$$

$$= 1 - \frac{3}{44} = \frac{41}{44}$$

تست های کنکور ۹۴:

۱) در یک گراف کامل از مرتبه 5 چند دور با طول 5 وجود دارد؟

۲۴(۴)

۱۶(۳)

۱۵(۲)

۱۲(۱)

توجه: تعداد دورهای به طول k در گراف کامل K_p برابر است با: $\binom{p}{k} \frac{(m-1)!}{2}$

$$\binom{5}{5} \frac{4!}{2} = 1 \times \frac{4 \times 3 \times 2!}{2} = 12$$

پس گزینه ۱ صحیح است.

۲) چند عدد سه رقمی وجود دارد که مضرب 11 بوده و باقیمانده تقسیم های آن بر 2 عدد 4 و 5 برابر 1 باشد؟

۶(۴)

۵(۳)

۴(۲)

۳(۱)

گزینه ۲ زیرا: فرض کنیم x عدد سه رقمی باشد که چون مضرب 11 می باشد پس به پیمانه 11 همنهشت با صفر است: $x \equiv 0 \pmod{11}$ از طرفی:

$$x \equiv 1 \pmod{4}, x \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{20} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 1 \pmod{20} \Rightarrow x \equiv 6 \times 20 + 1 = 121 & (1) \\ x \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow x \equiv 11 \times 11 + 0 = 121 & (2) \end{cases}$$

توجه: هم باید سعی کنیم عدد سمت راست 3 رقمی شود هم اینکه هر دو یک عدد شوند به همین دلیل در رابطه 1 مضرب 6 و در رابطه 2 مضرب 11 را در نظر گرفتیم.

$$(1), (2) \Rightarrow x \equiv 121 \pmod{220} \Rightarrow x = 220k + 121$$

$$\Rightarrow k=0 \Rightarrow x=121, k=1 \Rightarrow x=341, k=2 \Rightarrow x=561, k=3 \Rightarrow x=781, k=4 \Rightarrow$$

غ ق ق $x=1001$

۳) مجموع دو عدد 2772 و بزرگترین مقسوم علیه آنها 231 و مخالف عدد کوچکتر است .

تفاضل این دو عدد کدام است؟ (۱) ۲۳۱ (۲) ۴۶۲ (۳) ۶۹۳ (۴) ۹۲۴

$$(2) \quad (a, b) = d \Rightarrow \left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1 \Rightarrow (a', b') = 1 \quad 1) a + b = 2772, \text{ از طرفی}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = a'd \\ b = b'd \end{cases} \quad (1) \Rightarrow a'd + b'd = 2772 \xrightarrow{\div 231} a' + b' = 12$$

که زوج مرتب های (1,11), (2,10), (3,9), (4,8), (5,7), (6,6) در این رابطه صدق می کنند که طبق رابطه 2 چون باید نسبت به هم اول باشند تنها جواب (5,7) می باشد:

$$a - b = a'd - b'd = 7 \times 231 - 5 \times 231 = 462$$

پس گزینه ۲ درست است .

۴) اگر عدد $2x^2 - x - 6$ مضرب 53 باشد رقم یکان بزرگترین عدد سه رقمی X کدام است؟

(۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴) ۹

$$* 2x^2 - x - 6 = x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3) \xrightarrow{\div 2} (x-2)\left(x+\frac{3}{2}\right) =$$

$$(x-2)(2x+3) = 53k \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 53k_1 \xrightarrow{k_1=18} \\ 2x+3 = 53k_2 \xrightarrow{k_2=37} \end{cases}$$

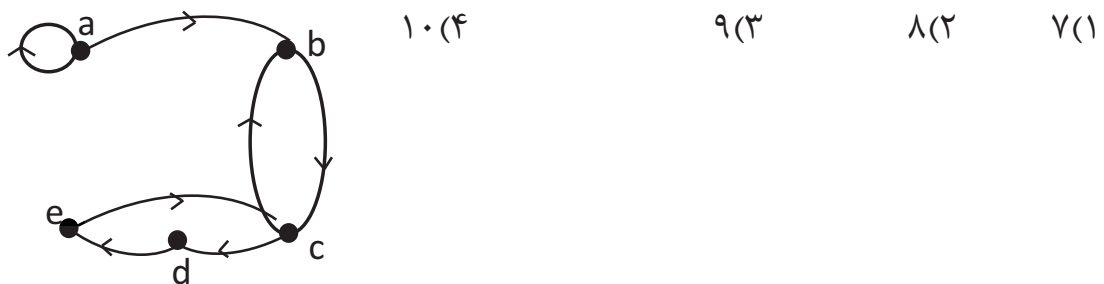
(چون رقم یکان بزرگترین عدد سه رقمی را می خواهیم به جای k_1 باید 18 قرار دهیم اگر بیشتر بگذاریم X چهار رقمی می شود و به جای k_2 باید 37 قرار دهیم چون رابطه دارای $2x$ می باشد ، بعد عدد حاصله بر 2 تقسیم می شود.)

$$\Rightarrow x-2=954 \Rightarrow x=\underline{956}$$

$$2x+3=1961 \Rightarrow 2x=1961-3 \Rightarrow 2x=1958 \Rightarrow x=\frac{1958}{2}=\underline{979}$$

پس رقم یکان بزرگترین عدد سه رقمی X برابر 9 می باشد.

(۵) شکل زیر گراف مربوط به رابطه R است. ماتریس متناظر RoR چند درایه یک دارد؟



گزینه ۴ زیرا: راه اول: $R: \{(a,a), (a,b), (b,c), (c,b), (e,c), (c,d), (d,e)\}$

$$\Rightarrow RoR = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,b), (b,d), (c,c), (e,b), (e,d), (c,e), (d,c),\}$$

RoR ۱۰ درایه یک دارد.

راه دوم: ماتریس متناظرش را می نویسیم:

$$m(RoR)=[m(R)]^2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

۱۰ تا درایه یک دارد

۶) تعداد جواب های صحیح و غیر منفی نامساوی $x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$ کدام است؟

۳۵(۴)

۳۳(۳)

۳۲(۲)

۳۰(۱)

توجه: تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با:

$$\binom{n+k-1}{n} \text{ یا } \binom{n+k-1}{k-1}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \Rightarrow \binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{3} = 35$$

سوال ۷) در دو ظرف به ترتیب 24 و 18 مهره یکسان موجود است. در ظرف اول 6 مهره سفید و در ظرف دوم 3 مهره سفید قرار دارد. از اولی 7 مهره و از دومی 5 مهره به تصادف برداشته و در ظرف دیگری می ریزیم. سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

$$\frac{31}{144}(۴)$$

$$\frac{15}{72}(۳)$$

$$\frac{7}{36}(۲)$$

$$\frac{13}{72}(۱)$$

$p(A)$ = مهره سفید ظرف دوم و مهره از ظرف دوم خارج + مهره سفید ظرف اول و مهره از ظرف اول خارج

$$\Rightarrow p(A) = \frac{7}{12} \times \frac{6}{24} + \frac{5}{12} \times \frac{3}{18} = \frac{31}{144}$$

گزینه ۴ صحیح است

تست های کنکور ۹۳

۱) درجه راس های یک گراف ساده و همبند اعداد $4,3,1,a,b,c$ هستند. اگر p تعداد راس های گراف، q تعداد یال های گراف و $q = \frac{3}{2}p$ باشد تعداد جواب های مجموعه $\{a,b,c\}$ کدام است؟

- ۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴)

گزینه ۳ زیرا: این گراف ۶ تا راس دارد پس $p=6$ در نتیجه $q = \frac{3}{2} \times 6 = 9$

$$\sum \deg V_i = 2q \Rightarrow 4+3+1+a+b+c=18 \Rightarrow a+b+c=10$$

چون $p=6$ پس بیشترین درجه ممکن ۵ می باشد.

$$\begin{cases} 5,4,1 \Rightarrow 5,4,4,3,1,1 \\ 5,3,2 \Rightarrow 5,4,3,3,2,1 \\ 4,4,2 \Rightarrow 4,4,4,3,2,1 \\ 4,3,3 \Rightarrow 4,4,3,3,3,1 \end{cases}$$

که حالت اول قابل قبول نیست چون طبق الگوریتم هول حکیمی به ۱- می رسیم پس نمی تواند دنباله درجه راس های یک گراف باشد.

$$5,4,4,3,1,1 \xrightarrow[5 \text{ تای بعد}]{5 \text{ حذف}} 3,3,2,0,0 \xrightarrow[3 \text{ تای بعد}]{3 \text{ حذف}} 2,1,-1,0 \quad \text{پس ۳ حالت باقی میماند}$$

۲) هفت برابر عدد شش رقمی $\overline{abcabc}$ مربع کامل است. بیشترین مقدار مجموع ارقام عدد $\overline{abc}$ کدام است؟

- ۱۴(۱) ۱۵(۲) ۱۶(۳) ۱۷(۴)

$$\overline{abcabc} = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2a + 10b + c$$

$$= 10^2a(10^3+1) + 10b(10^3+1) + c(10^3+1) = 1001(10^2a+10b+c) = 1001\overline{abc}$$

$$\Rightarrow 7 \overline{abcabc} = 7 \times 1001 \overline{abc} = 7 \times 7 \times 11 \times 13 \overline{abc}$$

در نتیجه $\overline{abc}$ باید به صورت $11 \times 13 \times q^2$ باشد تا عبارت مربع کامل شود پس:

$$\overline{abc} = 143q^2$$

$$\xrightarrow{\text{برای آنکه } abc \text{ سه رقمی شود}} \begin{cases} q^2 = 1 \Rightarrow \overline{abc} = 143 \Rightarrow a + b + c = 8 \\ q^2 = 4 \Rightarrow \overline{abc} = 143 \times 4 = 572 \Rightarrow \\ a + b + c = 14 \end{cases}$$

۳) دو برابر عدد طبیعی $N = \overline{abc}$ با تغییر مبنا به صورت $(aobc)_6$ نوشته شده است. بیشترین مقدار N از مربع کامل حداقل چند واحد کمتر است؟

۴(۴)

۳(۳)

۲(۲)

۱(۱)

گزینه ۱ زیرا:

$$2\overline{abc} = (aobc)_6 \Rightarrow 2(10a^2+10b+c) = (6^3a+6^2 \times 0+6b+c) \Rightarrow 200a+20b+2c=216a+6b+c$$

$$\Rightarrow 16a-14b-c=0 \quad 0 \leq b, c \leq 5, 1 \leq a \leq 5$$

$$\Rightarrow 16a-14b=c \Rightarrow c=2(8a-7b)$$

پس c مضرب ۲ باید باشد:

$$\begin{cases} c = 2 \Rightarrow a = 1, b = 1 \Rightarrow N = 112 \\ c = 4 \Rightarrow a = 2, b = 2 \Rightarrow N = 224 \end{cases}$$

مربع کامل که به ۲۲۴ نزدیک باشد ۲۲۵ است پس : $225-224=1$

۴) به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n ، دو عدد به صورت های $5n-2$ و $7n+3$ نسبت به هم غیر اولند؟

۶(۴)

۵(۳)

۴(۲)

۳(۱)

$$(7n+3, 5n-2)=d \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} d|7n+3 \\ d|5n-2 \end{cases} \Rightarrow d|35n+15-35n+14 \Rightarrow d|29 \xRightarrow{d \neq 1} d=29$$

$$\begin{cases} 29|5n-2 \\ 29|7n+3 \end{cases} \Rightarrow 29|3(5n-2)-2(7n+3)$$

$$\Rightarrow 29|n-12 \Rightarrow n-12=29k \Rightarrow n=29k+12=12, 41, 70, 99$$

۵) تعداد رابطه های هم ارزی روی مجموعه $\{a, b, c, d\}$ که شامل (a, b) باشد کدام است؟

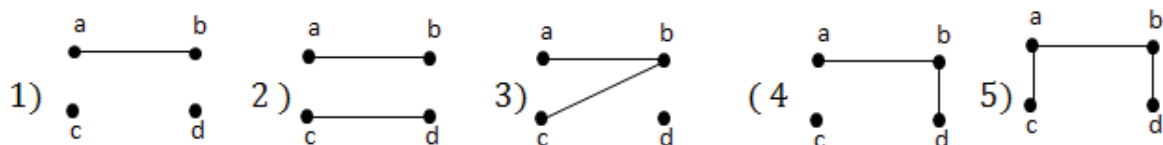
۶(۴)

۵(۳)

۴(۲)

۳(۱)

گزینه ۳ زیرا: در واقع باید تعداد افرازهایی را پیدا کنیم که در آن a و b در یک مجموعه باشند یا آنکه گراف های جهت دار متناظر با رابطه هم ارزی شامل a و b را بنویسیم که گزینه ۳ صحیح است.



۶) تعداد سه تایی های مرتب با مختص های صحیح و غیر منفی به طوری که مجموع هر ۳ مختص برابر ۱۰ و هر مختص کمتر از ۶ باشد کدام است؟

$$۲۱(۴)$$

$$۲۰(۳)$$

$$۱۸(۲)$$

$$۱۷(۱)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \quad 0 \leq x_1, x_2, x_3 < 6 \quad |S| = \binom{10+3-1}{10} = \binom{12}{10} = 66$$

$$A: \{x_i \geq 6\} \Rightarrow A_1: \{x_1 \geq 6\} \Rightarrow y_1 = x_1 - 6 \Rightarrow x_1 = y_1 + 6 \Rightarrow y_1 + 6 + y_2 + y_3 = 10$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 4 \Rightarrow |A_1| = \binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$$

$$(A_i \cap A_j \cap A_t) = 0, |A_i \cap A_j| = 0, |A_2| = |A_3| = 15 \text{ به همین ترتیب:}$$

$$\Rightarrow (A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3 \times 15 - 0 = 45 \Rightarrow |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = 66 - 45 = 21$$

گزینه ۴ صحیح است. توجه: تعداد جواب های صحیح نامنفی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر است با

$$\binom{n+k-1}{k-1} \text{ یا } \binom{n+k-1}{n}$$

(۷) در ظرفی ۵ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، در ظرف دیگر ۴ مهره سفید و ۲ مهره سیاه موجود است. به تصادف از هر ظرف دو مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال ۴ مهره خارج شده هم رنگ هستند؟

$$۰/۲۴(۴)$$

$$۰/۱۸(۳)$$

$$۰/۱۵(۲)$$

$$۰/۱۲(۱)$$

گزینه ۲ زیرا: ۴ مهره سیاه یا ۴ مهره سفید

$$\Rightarrow \frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}} \times \frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} \times \frac{\binom{2}{2}}{\binom{6}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{28} \times \frac{6}{15} + \frac{3}{28} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{7} + \frac{1}{140} = \frac{20+1}{140} = \frac{21}{140} = \frac{3}{20} = 0/15$$

تست های کنکور ۹۲:

۱) اگر A ماتریس مجاورت گراف G و درایه های واقع در سطر i ام و ستون j ام ماتریس A^2 اعداد $4,4,2,2,2$ باشند گراف G دارای چند دور است؟

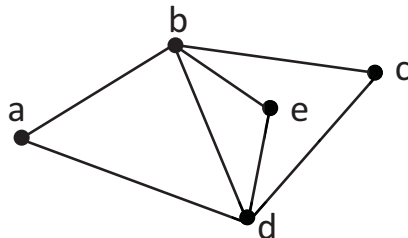
۵(۳)

۴(۲)

۳(۱)

۶(۴)

اعداد $4,4,2,2,2$ درایه های روی قطر ماتریس A^2 هستند پس دنباله درجه راس های گراف هستند که شکل گراف را از روی آن می کشیم:



دورهای به طول ۳ : $abda, bcdb, bedb$

دورهای به طول ۴ : $abcda, abeda, bcdeb$

پس گزینه ۴ صحیح است.

توجه: دو دور متفاوت باید حداقل یک یال متفاوت داشته باشند یعنی دو دور که مجموعه یال های آنها برابر باشند یکسان در نظر گرفته می شوند.

۲) عدد چهار رقمی $\overline{aabb}$ مربع کامل است. باقیمانده تقسیم عددی دو رقمی $\overline{ab}$ بر عدد ۱۳ کدام است؟

۱۲(۴)

۱۱(۳)

۱۰(۲)

۹(۱)

گزینه ۱ زیرا: b نمی تواند ۱ یا ۹ باشد زیرا اعداد فردی که مربع کامل هستند به صورت $4k+1$ نوشته می شوند و $\overline{aabb}$ ممکن است فرد باشد.

b نمی تواند 2,3,7,8 باشد چون عددی که رقم سمت راست آن یکی از این اعداد باشد مربع کامل نیست.

b نمی تواند 5 باشد چون اگر 5 رقم یکان عددی باشد برای آنکه آن عدد مربع کامل باشد باید رقم دهگان آن 2 باشد ولی رقم دهگان در $\overline{aabb}$ با یکان برابر است.

b نمی تواند 6 باشد چون اعداد زوج که مربع کامل هستند به صورت $4k$ باید باشند. پس: $b=4$

$$\overline{aabb} = 10^3a + 10^2a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a + b) = 11(100a + 4) \Rightarrow 100a + 4 = 11q^2 \Rightarrow 100a + 4 \equiv 0 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow 100a \equiv -4 \pmod{11} \Rightarrow a \equiv 100a \pmod{11} \Rightarrow a \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow \overline{ab} = 74 \pmod{9}$$

۳) در تقسیم عدد طبیعی سه رقمی a بر عدد طبیعی b خارج قسمت 21 و باقیمانده 37 می باشد. چند عضو از مجموعه جوابهای a مضرب 5 می باشند؟

۴(۴

۳(۳

۲(۲

۱(۱

گزینه ۲ زیرا: $a = 21b + 37$ $r < b \Rightarrow 37 < b$

چون a سه رقمی است پس: $21b + 37 \leq 999$

$$\Rightarrow 21b \leq 962 \Rightarrow b \leq 45 \frac{8}{21} \xrightarrow{\text{عدد طبیعی}} b \leq 45$$

از طرفی $b > 37$ بنابراین:

$$b = 38 \Rightarrow a = 835 \quad \vee \quad b = 39 \rightarrow a = 859$$

$$b = 40 \Rightarrow a = 877 \quad b = 41 \rightarrow a = 898 \quad b = 42 \rightarrow a = 919$$

$$b = 43 \Rightarrow a = 940 \quad \vee \quad b = 44 \rightarrow a = 961 \quad b = 45 \rightarrow a = 982$$

پس 2 مقدار a مضرب 5 می باشند.

۴) به ازای چند عدد طبیعی کوچکتر از 50، عدد $7^n + 42$ بر 43 بخش پذیر است؟

۹(۴

۸(۳

۷(۲

۶(۱

گزینه ۳ زیرا:

$$7^n + 42 \equiv 0 \pmod{43} \Rightarrow 7^n \equiv -42 \equiv 1 \pmod{43} \Rightarrow 7^n \equiv 1 \pmod{43}$$

$$7^2 \equiv 6 \pmod{43}, \quad 7^3 \equiv -1 \pmod{43}, \quad 7^4 \equiv -7 \pmod{43}, \quad 7^5 \equiv -6 \pmod{43} \quad (7^4 = 7^2 \times 7^2, \quad 7^5 = 7^2 \times 7^3),$$

$$7^6 \equiv 1 \pmod{43}$$

$$\Rightarrow 7^{6k} \equiv 1 \pmod{43} \Rightarrow n = 6k, \quad 0 < n < 50 \Rightarrow 0 < 6k < 50 \Rightarrow 0 < k \leq 8$$

پس به ازای 8 عدد بر 43 بخش پذیر است.

۵) به چند طریق می توان 9 کتاب یکسان را در 5 قفسه متمایز جای داد به طوریکه در هر قفسه لااقل یکی از آنها قرار داده شود؟

۷۰(۴

۵۶(۳

۴۲(۲

۳۵(۱

توجه: تعداد جوابهای طبیعی معادله $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k = n$ برابر است با $\binom{n-1}{k-1}$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9 \xrightarrow{x_i \geq 1} \binom{n-1}{k-1} = \binom{9-1}{5-1} = \binom{8}{4} = 70 \text{ پس گزینه ۴ درست است}$$

۶) پنج مهره سفید با شماره های 1 تا 5 و همچنین پنج مهره سیاه با شماره های 1 تا 5 و یکسان را در ظرفی قرار می دهیم. به تصادف 2 مهره از بین آنها بیرون می آوریم. اگر مجموع شماره های هر دو مهره 6 باشد با کدام احتمال هر دو مهره هم رنگ هستند؟

$\frac{3}{5}$ (۴

$\frac{5}{9}$ (۳

$\frac{4}{9}$ (۲

$\frac{2}{5}$ (۱

ریاضیات گسسته-کنکور

$A: \{(1,5), (2,4), \dots, (1,5), (2,4), \dots\}$ هر دو سیاه یا هر دو سفید باشند

$B: \{(\underset{\text{سفید}}{1}, 5), (1,5), (2,4), (2,4), (3,3), (1,5), (2,4), (2,4)\}$ مجموع شش باشد

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{4}{9}$$

تابع احتمال به صورت $X=0,1,2,3,4,5$ و $p(X=x) = \frac{\binom{5}{x}}{A}$ تعریف شده است. با محاسبه عدد A ، مقدار $p(X=2 \text{ یا } 3)$ کدام است؟

$$\frac{5}{8}(4)$$

$$\frac{9}{16}(3)$$

$$\frac{7}{16}(2)$$

$$\frac{3}{8}(1)$$

$$\sum_{i=1}^5 p(X=i) = 1 \Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{5}{A} + \frac{10}{A} + \frac{10}{A} + \frac{5}{A} + \frac{1}{A} = 1 \Rightarrow \frac{32}{A} = 1 \Rightarrow A=32$$

$$\Rightarrow p(X=2 \text{ یا } 3) = \frac{10}{32} + \frac{10}{32} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

گزینه ۴ صحیح است.

تست های کنکور ۹۱

۱) در یک گراف همبند که مجموع مرتبه و اندازه آن ۸ باشد با افزودن چند یال گراف کامل میشود؟

				۴(۴		۳(۳		۲(۲		۱(۱
p+q=8	p	1	2	3	4	5	6	7	8	
	q	7	6	5	4	3	2	1	0	

در یک گراف همبند داریم: $p-1 \leq q \leq \binom{p}{2}$ پس p نمی تواند ۵, ۶, ۷, ۸ باشد و طبق $q \leq \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$ ، p نمی تواند ۱, ۲, ۳ باشد بنابراین $p=q=4$ و چون قرار است گراف کامل باشد تعداد یال ها $\binom{4}{2}=6$ ولی ما ۴ یال داریم بنابراین ۲ یال کم است. گزینه ۲ صحیح است.

۲) اگر $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ماتریس مجاورت گراف G باشد ، اندازه G کدام است؟

		۴(۴)	۳(۳)	۲(۲)	۱(۱)
--	--	------	------	------	------

گزینه ۲: زیرا تعداد یک های ماتریس مجاورت مساوی مجموع درجات تمام رئوس گراف می باشد و چون مجموع درجات رئوس دو برابر اندازه آن است داریم:

$$\sum \deg V_i = 4 \Rightarrow 2q = 4 \Rightarrow q = 2$$

۳) گر عدد $6^n - 3^n$ مضرب ۲۵ باشد کوچکترین عدد طبیعی n کدام است؟

۲۰(۴)	۱۶(۳)	۱۵(۲)	۱۰(۱)
-------	-------	-------	-------

$$25 \mid 6^n - 3^n \Rightarrow 25 \mid 3^n(2^n - 1) \xrightarrow[\text{لم اقلیدس}]{(25, 3^n)=1} 25 \mid 2^n - 1 \Rightarrow 2^{n \cdot 25} \equiv 1$$

$$(2, 25) = 1 \Rightarrow 2^{\phi(25)} \equiv 1 \pmod{25}, \quad \phi(25) = 25 \times \frac{4}{5} = 20, \quad 25 = 5^2 \Rightarrow 2^{20} \equiv 1 \pmod{25} \\ \Rightarrow n = 20$$

البته باید مقسوم علیه های 20 که در گزینه ها وجود دارد را امتحان کنیم که در اینجا هیچکدام درست نیست پس گزینه ۴ صحیح است. توجه: $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{25}$

۴) به چند طریق می توان با 3700 ریال تمبرهای 150 و 250 ریالی خرید؟

۳(۱) ۴(۲) ۵(۳) ۶(۴)

$$150x + 250y = 3700 \Rightarrow 3x + 5y = 74 \quad \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 13 \end{cases}$$

$$x = 3 + 5k \geq 0 \Rightarrow 5k \geq -3 \Rightarrow k \geq \frac{-3}{5}, \quad y = 13 - 3k \geq 0 \Rightarrow -3k \geq -13 \Rightarrow k \leq \frac{13}{3}$$

$$\frac{-3}{5} \leq k \leq \frac{13}{3} \Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4$$

۵) اگر $A = \{a, b, c, d\}$ چند رابطه هم ارزی روی A با ماکسیمم درجه 2 در گراف ساده متناظر آن می توان یافت؟

۳(۱) ۴(۲) ۵(۳) ۶(۴)

صورت سوال مشکل دارد واضح نیست زیرا گراف متناظر با یک رابطه جهتدار است که در صورت سوال گراف ساده بیان شده است.

ریاضیات گسسته-کنکور

۶) اعداد $1, 2, \dots, 9$ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است. به تصادف دو کارت از بین آنها بیرون می آوریم. با کدام احتمال مجموع عدد این دو کارت برابر ۱۱ است؟

$$\frac{1}{6}(۴)$$

$$\frac{1}{8}(۳)$$

$$\frac{1}{9}(۲)$$

$$\frac{1}{12}(۱)$$

$$A = \{(2,9), (3,8), (4,7), (5,6)\} \Rightarrow n(A) = 4, \quad n(S) = \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8 \times 7!}{7! \times 2} = 36 \Rightarrow p(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

۷) دو تاس همگن را انداختیم. اگر حاصل جمع شماره های رو شده کمتر از ۶ باشد احتمال آنکه شماره یکی از تاس های رو شده ۲ باشد کدام است؟

$$\frac{3}{5}(۴)$$

$$\frac{1}{2}(۳)$$

$$\frac{2}{5}(۲)$$

$$\frac{1}{3}(۱)$$

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1)\} \Rightarrow n(B) = 10$$

$$A = \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2)\}$$

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

گزینه ۳ صحیح است.

حل سوالات کنکور ۹۰

۱) با شش بازه $(0,2), (1,4), (2,5), (3,4), (3,8), (6,9)$ از اعداد حقیقی یک گراف بازه ها می سازیم. در گراف حاصل، چند مسیر مختلف از راس متناظر $(0,2)$ به راس متناظر $(3,4)$ موجود است؟

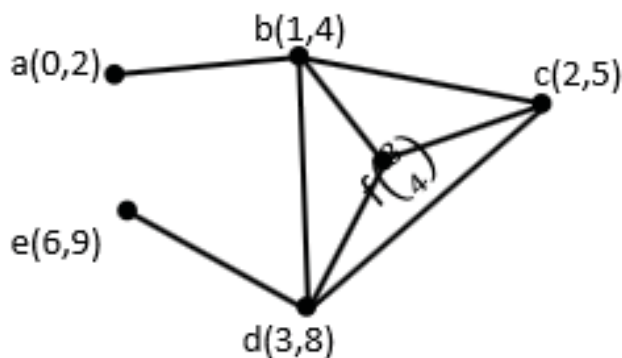
۲(۴)

۴(۳)

۳(۲)

۵(۱)

میدانیم در گراف بازه ها دو سر هر یال اشتراک دارند پس:



مسیرهای موجود از $(0,2)$ به $(3,4)$:

$abf, abdf, abcf, abcdf, abdce$ پس ۵ مسیر موجود است.

۲) یک عدد طبیعی فرد و مربع کامل، با بیشترین مقدار ممکن به صورت $(abc)_8$ نوشته می شود. $a+c$ کدام است؟

۷(۴)

۹(۳)

۸(۲)

۱۰(۱)

گزینه ۴ زیرا: با کمی دقت در می بایم که: $17^2=289, 15^2=225, 19^2=361, 21^2=441, 23^2=529$

بنابراین بزرگترین عدد سه رقمی فرد و مربع کامل $21^2=441$ مدنظر ماست که آنرا به پایه 8 منتقل می کنیم:

$$\begin{array}{r|l} 441 & 8 \\ \hline 40 & 55 \\ \hline 41 & 48 \end{array} \begin{array}{l} 8 \\ 6 \\ 7 \\ 1 \end{array}$$

توجه: 529 به دلیل حضور 9 اگر به مبنای 8 برده شود چهار رقمی می شود.

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix} \Rightarrow a+c=7$$

۳) اگر $357x+629y=(357,629)$ آنگاه کوچکترین عدد مثبت $x+y$ کدام است؟

۱۲(۳)

۱۱(۲)

۳(۱)

۱۰(۴)

$$357x+629y=17 \xrightarrow{\div 17} 21x+37y=1 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -7 \\ y_0 = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -7 + \frac{37}{1} k \Rightarrow x = -7 + 37k \\ y = +4 - \frac{21}{1} k \Rightarrow y = +4 - 21k \end{cases}$$

$K=0$ که همان x_0 و y_0 بدست می آیند: غ ق $x+y=-3$

ق ق $k=1 \Rightarrow x=30, y=-17 \Rightarrow x+y=13$

غ ق ق $k=-1 \Rightarrow x=-44, y=25 \Rightarrow x+y=-19$

۴) عدد (75)! مختوم به چند صفر است؟

۱۵(۴)

۱۷(۳)

۱۶(۲)

۱۸(۱)

گزینه ۱ زیرا: در واقع تعداد صفرهای سمت راست را می خواهیم و برای بدست آوردن تعداد صفرهای سمت راست هر عدد فاکتوریلی باید تعداد عوامل 5 را در آن عدد محاسبه کنیم که در ! (75) برابرند با:

$$15+3=18 \Rightarrow \left\lfloor \frac{75}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{75}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{75}{5^3} \right\rfloor + \dots$$

[علامت جزء صحیح است.] توجه:

۵) تعداد اعداد دو رقمی که نسبت به 105 اول باشند کدام است؟

۴۲(۱) ۴۰(۲) ۴۱(۳) ۳۹(۴)

Ø(105) تعداد اعداد طبیعی کوچکتر از 105 است که نسبت به 105 اول می باشند و چون اعداد دو رقمی را می خواهیم از این تعداد ، سه رقمی و تک رقمی ها را حذف می کنیم:

$$105=3 \times 5 \times 7 \Rightarrow \phi(105)=105 \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \right)=48$$

$$\Rightarrow 48-7=41 \quad \text{عدد } 7 \rightarrow \{1,2,4,8,101,103,104\} \text{ : تک رقمی و سه رقمی}$$

۶) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند بطوریکه: $p(A)=0/2$ و $p(B)=0/22$ و $p(B|A)=0/7$

آنگاه $p(B'|A')$ کدام است؟ ۱) ۰/۹۶ ۲) ۰/۹۰ ۳) ۰/۹۲ ۴) ۰/۸۴

$$p(B'|A') = \frac{p(B' \cap A')}{p(A')} = \frac{p(A \cup B)'}{p(A')} = \frac{1-p(A \cup B)}{1-p(A)} = \frac{1-[p(A)+p(B)-p(A \cap B)]}{1-p(A)}$$

گزینه ۲ زیرا:

$$= \frac{1-[(p(A)+p(B)-p(A).p(B|A))]}{1-p(A)} = \frac{1-(0/2+0/22-\overbrace{0/2 \times 0/7}^{0/14})}{1-0/2} = \frac{1-0/28}{0/8} = \frac{0/72}{0/8} = 0/9$$

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \Rightarrow p(A \cap B) = p(A).p(B|A) \quad \text{توجه:}$$

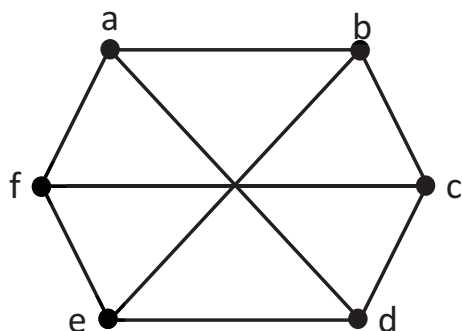
(۷) در یک آزمایش دو حالت احتمال موفقیت p است. اگر متغیر تصادفی X تعداد آزمایش هایی باشد که برای اولین بار موفقیت حاصل می شود تابع احتمال آن کدام است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & C_n^X p(1-p)^{X-1} \\ (2) \quad & p(1-p)^X \\ (3) \quad & (1-p)p^X \\ (4) \quad & p(1-p)^{X-1} \end{aligned}$$

چون X تعداد آزمایشهایی است که برای اولین بار موفقیت حاصل می شود پس در $(X-1)$ آزمایش قبلی موفقیت نداشتیم که احتمال هر کدام $1-p$ است پس ::

$$p(X) = \underbrace{(1-p)(1-p) \dots (1-p)}_{\text{بار}(X-1)} \times p = (1-p)^{X-1} p$$

تست های کنکور ۸۹:



۱) در گراف 3- منتظم مقابل، چند دور با طول 4 وجود دارد؟

۹(۴)

۸(۳)

۷(۲)

۶(۱)

هر قطر 2 چهار ضلعی ایجاد می کند (گراف را به 2 چهار ضلعی قسمت می کند)

در واقع دو دور به طول 4 ایجاد می شود بنابراین $3 \times 2 = 6$

از طرفی هر دو ضلع روبرو با دو قطر ارتباطی 1 دور به طول 4 ایجاد می کند: $3 \times 1 = 3$

$$6 + 3 = 9$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

توجه: دور ها : $abef, bcde, afed, abcd, fedc, abcf, abed, adcf$

$bcfe$ می باشند.

۲) اگر A ماتریس مجاورت یک درخت با مرتبه 7 باشد، مجموع درایه های قطری ماتریس A^2

کدام است؟

۱۴(۴)

۱۲(۳)

۹(۲)

۸(۱)

گزینه ۳ زیرا: مجموع درایه های قطری ماتریس A^2 همان مجموع درجه راس های گراف است

که برابر $2q$ میباشد $q=6 \Rightarrow 2q=12$ $\Rightarrow p=7$ درخت

۳) عدد شش رقمی $\overline{ababab}$ ممکن است مضرب کدام عدد نباشد؟

- ۷(۱) ۱۳(۲) ۳۱(۳) ۳۷(۴)

$$ababab = 10^5a + 10^4b + 10^3a + 10^2b + 10a + b = \text{گزینه ۳ زیرا:}$$

$$10a(10^4 + 10^2 + 1) + b(10^4 + 10^2 + 1) = 10101(10a + b) = \underline{3 \times 7 \times 13 \times 37}(10a + b)$$

۴) به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی n ، دو عدد به صورت های $25n+9$ و $11n+4$ نسبت به هم اولند؟

- ۸۶(۱) ۸۷(۲) ۸۹(۳) ۹۰(۴)

$$(11n+4, 25n+9)=d \Rightarrow \begin{cases} d|11n+4 \xrightarrow{\times 25} \\ d|25n+9 \xrightarrow{\times -11} \end{cases} \Rightarrow d|275n+100-275n-99$$

$$\Rightarrow d|1 \Rightarrow d=1$$

پس 2 عدد، به ازای همه مقادیر طبیعی n نسبت به هم اولند که اعداد دو رقمی طبیعی 90 تا می باشد.

۵) مجموع ارقام کوچکترین عدد طبیعی سه رقمی X که در معادله $57X-87Y=342$ صدق کند کدام است؟

- ۵(۱) ۶(۲) ۷(۳) ۸(۴)

$$57x-87y=342 \xrightarrow{\div 3} 19x-29y=114 \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 6 \\ y_0 = 0 \end{cases} (19, 29)=1$$

$$\Rightarrow x = x_0 + k \frac{b}{a} = 6 - 29k$$

مشخص است که به k باید مقدار منفی دهیم و تا $k=-3$ عدد دو رقمی است پس

$$K=-4 \Rightarrow x=6+116=122 \quad \text{که مجموع ارقام آن 5 می باشد پس گزینه ۱ صحیح است.}$$

۶ در دو جعبه به ترتیب 24 و 15 عدد لامپ یکسان موجود است. در جعبه اول 4 عدد و در جعبه دوم 3 عدد لامپ معیوب اند. از اولی 8 و از دومی 6 لامپ به تصادف برداشته و در جعبه قرار می دهیم. با کدام احتمال یک لامپ انتخابی از جعبه جدید معیوب است؟

$$\frac{8}{35} (۴)$$

$$\frac{6}{35} (۳)$$

$$\frac{19}{105} (۲)$$

$$\frac{17}{105} (۱)$$

$$\frac{8}{14} \times \frac{4}{24} + \frac{6}{14} \times \frac{3}{15} = \frac{19}{105}$$

(ممکن است لامپ انتخابی از ظرف جدید و ظرف اول یا از ظرف جدید و ظرف دوم باشد)

۷) سکه ای را پرتاب می کنیم اگر "رو" بیاید تاس را می ریزیم. اگر پشت بیاید سکه دیگر را باهم میریزیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود کدام است؟

$$\frac{11}{16} (۴)$$

$$\frac{5}{8} (۳)$$

$$\frac{9}{16} (۲)$$

$$\frac{3}{4} (۱)$$

گزینه ۱ زیرا: از متمم استفاده می کنیم. یعنی حالتی که پشت بیاید را حساب می کنیم (حالت هایی که سکه پشت و دو پرتاب دیگر هر دو رو یا هر دو پشت باشند).

$$P(A') = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \Rightarrow p(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

تست های کنکور ۸۸:

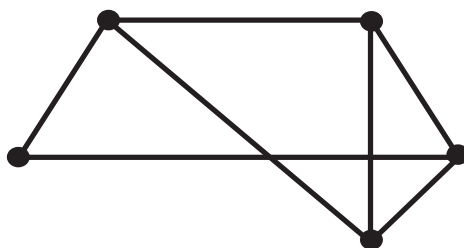
۱) اگر A ماتریس مجاورت گراف همبند G باشد کدام دنباله اعداد برای درایه های قطر A^2 مورد قبول است؟

- ۱) $4,3,2,1,0$ ۲) $4,3,2,1,1$ ۳) $5,3,2,1,1$ ۴) $4,3,2,2,1$

گزینه ۴ زیرا: چون گراف همبند است پس درجه راس صفر نداریم بنابراین گزینه ۱ رد می شود. در گزینه ۲ تعداد رئوس فرد، فرد است پس این گزینه هم رد می شود و چون $p=5$ حداکثر درجه باید ۴ باشد که گزینه ۳ هم رد می شود.

۲) دو راس متناظر با بازه های (a,b) و (c,d) از اعداد حقیقی مجاورند به شرط آنکه اشتراک این دو بازه تهی نباشد، گراف مقابل به چند طریق می تواند گراف بازه ها باشد؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) نشدنی ۴) ۳



گزینه ۳ زیرا: با توجه به آنکه اگر در گرافی چهار ضلعی بدون قطرهایش

وجود داشته باشد گراف بازه ها نیست بنابراین هیچ طریقی برای

گراف بازه ها شدن گراف فوق وجود ندارد.

۳) در تقسیم عدد a بر عدد طبیعی b باقیمانده 17 و خارج قسمت 25 می باشد. اگر a مضرب 6 باشد رقم دهگان کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

۹(۴

۶(۳

۷(۲

۸(۱

گزینه ۴: $a=25b+17$, $b > 17$

$$\begin{cases} 25b + 17 \equiv b + 5 \\ a \equiv 0 \pmod{6} \end{cases} \Rightarrow a \equiv b+5 \Rightarrow b+5 \equiv 0 \Rightarrow b \equiv 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b = 6k + 1 \\ b > 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{\min} = 19 \\ a_{\min} = 19 \times 25 + 17 = 492 \end{cases}$$

۴) از رابطه همنهشتی (پیمانه ۸۴) $36a \equiv 192$ ، کدام نتیجه گیری در پیمانه 7 نادرست است؟

(۴

$a \equiv 3$ (۳

$a \equiv 4$ (۲

$2a \equiv -1$ (۱

$3a \equiv 2$

$$36a \equiv 192 \xrightarrow{\div 12} 3a \equiv 16 \equiv 2 \Rightarrow 3a \equiv 2, \quad 2 \equiv +9 \Rightarrow 3a \equiv 9 \xrightarrow{\div 3} a \equiv 3 \xrightarrow{\times 2} 2a \equiv 6$$

پس گزینه ۲ نتیجه نمیشود و جواب تست است $2a \equiv 6, 6 \equiv -1 \Rightarrow 2a \equiv -1$

۵) چند عدد سه رقمی وجود دارد که در آنها هریک از رقم های 3, 6 حداقل یکبار ظاهر شوند؟

۵۶(۴

۴۸(۳

۵۲(۲

۵۴(۱

گزینه ۲: هریک از رقم های 3 و 6 حداقل یکبار ظاهر شوند متمم آن است که بگوئیم اصلا ظاهر نشوند پس:

ریاضیات گسسته-کنکور

$$\underline{9} \times \underline{10} \times \underline{10} = 900 \quad \text{همه اعداد سه رقمی}$$

3 ظاهر نشود A'

6 ظاهر نشود B'

$$\Rightarrow n(A' \cup B') = n(A') + n(B') - n(A' \cap B') \Rightarrow$$

$$n(A' \cup B') = 8 \times 9 \times 9 + 8 \times 9 \times 9 - 7 \times 8 \times 8 = 848$$

$$6, 3 = 900 - 848 = 52 \quad \text{حداقل یکبار ظاهر شوند}$$

۶) اعداد 1 تا 6 را بر روی 6 کارت یکسان نوشته اند. اگر به تصادف دو کارت از بین آنها بیرون آوریم با کدام احتمال جمع اعداد این دو کارت زوج است؟ ۱

$$\frac{5}{9} (۴) \quad \frac{2}{5} (۳) \quad \frac{4}{9} (۲) \quad \frac{1}{2} (۱)$$

$$n(S) = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

$$n(A) = \text{دو کارت هر دو فرد یا دو کارت هر دو زوج} = \binom{3}{2} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6$$

$$p(A) = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

۷) توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت $p(X=i) = \frac{1}{i(i+1)}$ ($i=1,2,3,\dots$) تعریف شده

$$\frac{1}{3} (۴) \quad \frac{1}{6} (۳) \quad \frac{1}{5} (۲) \quad \frac{1}{4} (۱) \quad \text{است. } p(X \geq 5) \text{ کدام است؟}$$

$$\text{توجه:} \quad \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$$

$$p(X \geq 5) = \sum_{i=5}^{\infty} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{5}$$

تست های کنکور ۸۷:

(۱) در یک گراف کامل از مرتبه ۵ چند دور با طول ۴ وجود دارد؟

۱۵ (۳)

۱۰ (۲)

۹ (۱)

۲۰ (۴)

گزینه ۳: در گراف کامل از مرتبه p تعداد دورهای به طول m برابر است با :

$$\binom{p}{m} \times \frac{(m-1)!}{2} = \binom{5}{4} \frac{3!}{2} = 5 \times 3 = 15$$

(۲) در تقسیم عدد ۱۶۵ بر عدد طبیعی b ، خارج قسمت مجذور باقیمانده است، چند عدد b می توان یافت؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

$$a = bq + r \Rightarrow 165 = br^2 + r, 0 \leq r < b$$

$$\Rightarrow r(br+1) = 165 = 3 \times 5 \times 11 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \Rightarrow b = 164 \\ r = 3 \Rightarrow b = 18 \\ r = 5 \Rightarrow b = \frac{32}{5} \notin Z \\ r = 11 \Rightarrow b = \frac{14}{11} \notin Z \end{cases}$$

پس ۲ مقدار برای b وجود دارد

.....

۳) نمایش عددی در مبنای 3 به صورت $(201121)_3$ است در نمایش این عدد در مبنای 4 چند مرتبه رقم صفر تکرار شده است؟

- (۱) فاقد صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

$$(201121)_3 = 2 \times 3^5 + 0 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 1 \times 3^0 = 529$$

$$\begin{array}{r} 529 \div 4 = 132 \text{ remainder } 1 \\ 132 \div 4 = 33 \text{ remainder } 0 \\ 33 \div 4 = 8 \text{ remainder } 1 \\ 8 \div 4 = 2 \text{ remainder } 0 \\ 2 \div 4 = 0 \text{ remainder } 2 \end{array}$$

۲) رقم صفر دارد $\Rightarrow (20101)_4$

۴) از رابطه همنهشتی (پیمانه 18) : $9a \equiv 6b$ کدام نتیجه گیری نادرست است؟

- (۱) $a \equiv 0$ (۲) $b \equiv 0$ (۳) $a \equiv 2$ (۴) $3a \equiv 2b$

گزینه ۳ زیرا:

$$9a \equiv 6b \Rightarrow 3a \equiv 2b \Rightarrow \begin{cases} (3,6) | 2b \Rightarrow 3 | 2b \xRightarrow{\text{لم اقلیدس}} 3 | b \\ (2,6) | 3a \Rightarrow 2 | 3a \xRightarrow{\text{لم اقلیدس}} 2 | a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \equiv 0 \\ a \equiv 0 \end{cases}$$

۵) اگر m ماتریس متناظر از یک رابطه روی مجموعه 4 عضوی باشد این رابطه کدام یک از خواص را دارد؟

- (۱) بازتابی - ترایی (۲) بازتابی - متقارن (۳) ترایی - پاد متقارن (۴) متقارن - ترایی

گزینه ۱ زیرا همه درایه های قطر اصلی 1 هستند پس بازتابی است

$$m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از طرفی $a_{31}=0$ ولی $a_{13}=1$ یعنی متقارن نیست
و همچنین $a_{21}=1$ و $a_{12}=1$ پس پاد متقارن نیست

۶) به چند طریق می توان 12 سکه را بین 3 نفر تقسیم کرد، به طوریکه لااقل به هرکدام یک سکه برسد؟

$$55(1) \quad 48(2) \quad 45(3) \quad 36(4)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12 \quad (x_i \geq 1) \quad y_i = x_i - 1 \Rightarrow x_i = y_i + 1$$

$$y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 = 12 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 9 \Rightarrow \binom{9+3-1}{9-1} = \binom{11}{9} = 55$$

۷) هریک از ارقام 1,2,3,4,5 را در یکی از 6 خانه همدیاف به تصادف قرار می دهیم. با کدام احتمال این ارقام در خانه های متوالی و دو رقم زوج کنار هم قرار می گیرند؟

$$\frac{2}{15}(4) \quad \frac{1}{15}(3) \quad \frac{1}{10}(2) \quad \frac{1}{5}(1)$$

برای آنکه این 5 رقم در 5 خانه متوالی باشند دو حالت دارند 5 خانه اول یا 5 خانه دوم .
ازطرفی چون قرار است 2 و 4 کنار هم باشند پس آنها را یک حالت در نظر می گیریم که باز به دو صورت امکانپذیر است: 24 یا 42 بنابراین:

$$n(S)=6! \quad , \quad n(A)=4! \times 2! \times 2$$

$$\Rightarrow p(A) = \frac{4! \times 2! \times 2}{6!} = \frac{2}{15}$$

توجه: 1,2,3,4,5 (۲و۴ یک حالت حساب میشوند) در کل 4! طریق می توانند کنار هم باشند.

تست های کنکور ۸۶ :

(۱) در گرافی که 16 راس دارد تعداد راس های زوج عددی و تعداد راس های فرد عددی است.

(۱) فرد – فرد (۲) فرد – زوج (۳) زوج – فرد (۴) زوج – زوج

گزینه ۴ زیرا : طبق یکی از قضایا تعداد راس های فرد، زوج است و تعداد راس های زوج بستگی به مرتبه گراف دارد . اگر مرتبه گراف زوج باشد تعداد راس های زوج، زوج است و اگر مرتبه گراف فرد باشد تعداد راس های زوج ، فرد است.

(۲) اگر A ماتریس مجاورت یک درخت و حاصلضرب درایه های قطری ماتریس A^2 برابر 24 و ماکسیمم درجه آن 4 باشد تعداد یال های این درخت کدام است؟

(۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

گزینه ۳ زیرا : چون حاصلضرب درایه های قطری ماتریس A^2 برابر 24 می باشد و ماکسیمم درجه آن نیز 4 می باشد پس دنباله درجات راس های گراف ۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ می باشد. بنابراین :

$$\sum \deg V_i = 2q \Rightarrow 4 + 3 + 2 + (p-3) \times 1 = 2(p-1) \Rightarrow 9 + p - 3 = 2p - 2$$

$$\Rightarrow p = 8 \quad \Rightarrow q = 7$$

توجه : در درخت داریم: $p = q + 1$

۳) باقیمانده تقسیم $(-6)^{23}$ بر عدد 33 کدام است؟

$$۱۸(۴)$$

$$۱۵(۳)$$

$$-۱۵(۲)$$

$$-۱۸(۱)$$

گزینه ۳ زیرا: (۱) $33=3 \times 11 \quad -6 \equiv 0 \Rightarrow (-6)^{23} \equiv 0$

$$(-6)^{10} \equiv 1 \quad (a^{p-1} \equiv 1 \text{ فرما } \xrightarrow{\text{به توان 2}} (-6)^{20} \equiv 1 \xrightarrow{\times (-6)^3}$$

$$(-6)^{23} \equiv (-6)^3$$

$$\Rightarrow (-6)^{23} \equiv -18 \equiv 4 \Rightarrow (-6)^{23} \equiv 4 \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow (-6)^{23} \equiv 15$$

توجه: $(-6)^3 = 36 \times -6 \equiv 3 \times -6 \equiv -18$

۴) ماتریس متناظر به یک رابطه به صورت شکل زیر است این رابطه کدام خاصیت را دارد؟

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

۴) غیرمتقارن

۳) بازتابی

۲) ترايایی

۱) پاد متقارن

گزینه ۴ زیرا: قطر اصلی همگی 1 نیستند پس بازتابی نیست.

از طرفی $a_{23}=1$ و $a_{32}=1$ پس پادمتقارن نیست

و همچنین: $a_{12}=0 \Rightarrow a_{32}=1$ و $a_{13}=1$ پس ترايایی هم نیست.

۵) شش گوی یکسان با شماره های 1 تا 6 در یک ظرف قرار دارند، به تصادف دو گوی از آنها برمیداریم با کدام احتمال جمع این دو گوی کمتر از ۶ است؟

$$\frac{5}{12} (۴)$$

$$\frac{1}{2} (۳)$$

$$\frac{1}{4} (۲)$$

$$\frac{4}{15} (۱)$$

گزینه ۱ زیرا:

$$n(S) = \binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = 15,$$

$$A = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,3)\} \Rightarrow n(A) = 4 \Rightarrow p(A) = \frac{4}{15}$$

۶) یک تاس همگن را انداخته ایم برآمد حاصل مضرب 3 نیست احتمال آنکه شماره ظاهر شده 2 باشد کدام است؟

$$\frac{1}{3} (۴)$$

$$\frac{1}{4} (۳)$$

$$\frac{1}{5} (۲)$$

$$\frac{1}{6} (۱)$$

$$S = \{1, 2, 4, 5\} \Rightarrow n(S) = 4, \quad A = \{2\} \Rightarrow n(A) = 1 \Rightarrow p(A) = \frac{1}{4}$$

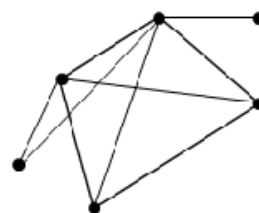
تست های کنکور: ۸۵

(۱) در یک گراف ساده از مرتبه 6، دنباله درجه راس های آن، به کدام صورت می تواند باشد؟

$$5,4,3,2,2,1 \quad (۲) \quad 5,4,3,2,2,0 \quad (۱)$$

$$5,4,3,3,2,1 \quad (۴) \quad 5,4,3,2,1,1 \quad (۳)$$

گزینه ۴ زیرا: در گزینه ۱ چون ۱ راس از درجه $p-1$ (5) داریم پس نمی شود درجه صفر داشته باشیم این گزینه رد می شود. در گزینه ۲ تعداد راس های فرد، زوج نیست و این گزینه هم رد می شود و در گزینه ۳ چون یک راس از درجه ۵ و یک راس از درجه ۴ داریم حداکثر یک راس درجه ۱ می توانیم داشته باشیم پس این گزینه هم رد می شود.



(۲) به ازای کدام مقدار n مجموع ارقام عدد $10^{3n} - 10^n$ برابر 216 می شود؟

$$۱۵ \quad (۴) \quad ۱۲ \quad (۳) \quad ۱۰ \quad (۲) \quad ۹ \quad (۱)$$

$$10^{3n} - 10^n = 10^n (10^{2n} - 1) = 10^n (\underbrace{99 \dots 9}_{2n})$$

$$\text{مجموع ارقام} = \underbrace{9 + 9 + \dots + 9}_{2n} = 2n \times 9 = 18n = 216 \Rightarrow n = \frac{216}{18} = 12$$

. توجه: 10^n چون به صورت $\underbrace{100 \dots 0}_{2n}$ می باشد تاثیری در مجموع ارقام ندارد

ریاضیات گسسته-کنکور

۳) اگر n عدد طبیعی و دو عدد $9n-5$ و $n+4$ دارای مقسوم علیه مشترک غیر 1 باشند تعداد اعداد دو رقمی n کدام است؟ ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$(n+4, 9n-5)=d \Rightarrow d|n+4, d|9n-5 \Rightarrow d|9n+36-9n+5 \Rightarrow d|41$$

$$\Rightarrow (n+4 \equiv 0) n+4 \equiv 0 \Rightarrow n \equiv -4, -4 \equiv 37 \Rightarrow n \equiv 37 \Rightarrow n=41k+37$$

$$\begin{cases} k=0 \Rightarrow n=37 \\ k=1 \Rightarrow n=78 \\ k=2 \Rightarrow \text{سه رقمی می شود} \end{cases}$$

۴) اگر عدد $7^{200}+a$ مضرب 19 باشد کوچکترین عدد طبیعی a کدام است؟

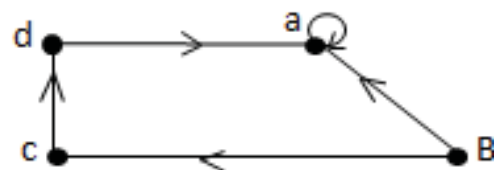
۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۸

$$7^2=49 \equiv_{19} -8 \Rightarrow 7^2 \equiv_{19} -8 \xrightarrow{\times 7} 7^3 \equiv_{19} -56 \equiv_{19} 1 \Rightarrow 7^3 \equiv_{19} 1$$

$$\xrightarrow{\text{به توان 66}} 7^{198} \equiv_{19} 1 \xrightarrow{\times 7^2} 7^{200} \equiv_{19} 49 \equiv_{19} -8 \Rightarrow 7^{200} \equiv_{19} -8 \Rightarrow 7^{200}+8 \equiv_{19} 0 \Rightarrow a=8$$

۵) اگر m ماتریس متناظر با گراف مقابل، یک رابطه باشد ماتریس m^2 چند درایه 1 دارد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸



$$m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow m^2 = m \times m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

پس 7 تا یک دارد بنابراین گزینه 3 درست است. راه دوم:

$$R: \{(a,a), (a,b), (b,c), (c,d), (d,a)\}$$

$$m^2 = m(RoR) = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,d), (c,a), (d,a), (d,b)\}$$

تعداد اعضای RoR همان تعداد یک های ماتریس m^2 می باشد.

6) در ظرفی شش مهره با شماره های 1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6 ریخته شده اند ، دو مهره باهم بیرون می آوریم با کدام احتمال شماره های این دو مهره اعداد متوالی اند؟

$$\frac{2}{3} \text{ (4) } \quad \frac{3}{5} \text{ (3) } \quad \frac{2}{5} \text{ (2) } \quad \frac{1}{3} \text{ (1) }$$

$$n(s) = \binom{6}{2} = 15, \quad A = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\} \Rightarrow n(A) = 5 \Rightarrow p(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$p(X=i) = \frac{1}{i^2+i}$ با حوزه مقادیر اعداد طبیعی به صورت $X \sim V$ تابع احتمال متغیر تصادفی کدام است؟ $p(10 \leq X < 100)$ است مقدار

$$0/11 \text{ (4) } \quad 0/099 \text{ (3) } \quad 0/092 \text{ (2) } \quad 0/09 \text{ (1) }$$

$$p(10 \leq X < 100) = \sum_{i=10}^{99} \frac{1}{i^2+i} = \sum_{i=10}^{99} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{100} = \frac{9}{100} = 0/09$$

تست های کنکور: ۸۴

(۱) چند نوع گراف ساده ، همبند و نامنتظم که مجموع مرتبه و اندازه آن ۱۰ باشد وجود دارد؟

۶(۴)

۵(۳)

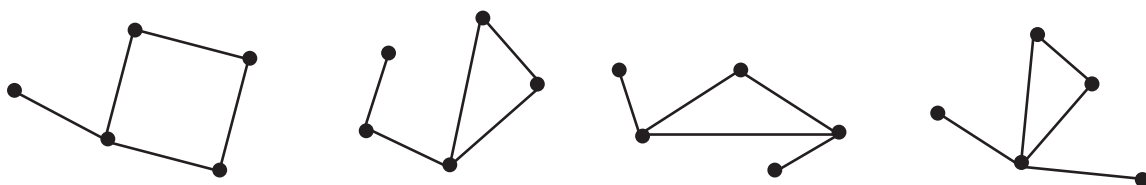
۴(۲)

۳(۱)

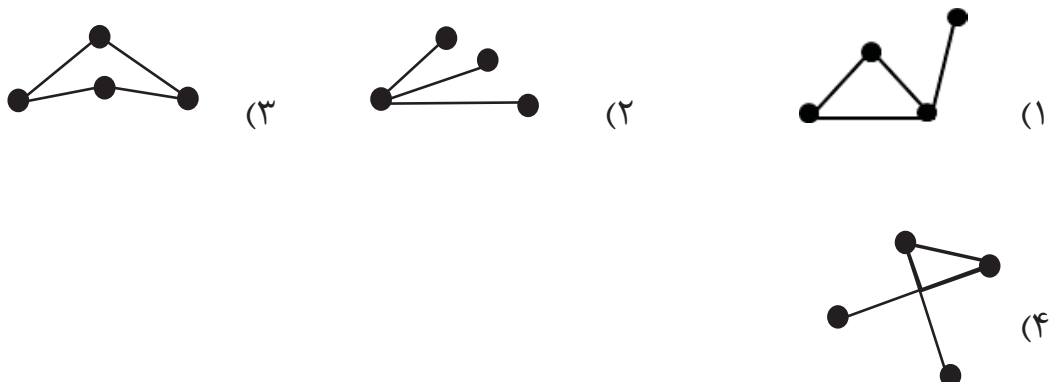
گزینه ۲: برای آنکه گراف همبند باشد باید حداقل $q \geq p-1$ باشد:

$$\begin{cases} p = 5 \Rightarrow q = 5 \quad (p + q = 10) \\ p = 4 \Rightarrow q = 6 \quad (\text{غ ق چون در این حالت گراف کامل و منتظم است}) \\ p = 3 \Rightarrow q = 7 \quad (\text{غ ق چون در این حالت گراف باید طوقه و یال موازی داشته باشد}) \end{cases}$$

که در این صورت دیگر ساده نیست پس تنها یک حالت $p=q=5$ قابل قبول است که ۴ حالت دارد.



(۲) ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ متناظر با کدام گراف است؟



گزینه ۱: میدانیم مجموع عناصر هر سطر ماتریس مجاورت برابر درجه یکی از راس هاست با توجه به ماتریس دنباله درجات به ترتیب ۳ و ۲ و ۱ و ۰ می باشد که با گزینه ۱ همخوانی دارد.

راه دوم: میدانیم درایه های روی قطر مربع ماتریس مجاورت دنباله درجات را تشکیل می دهد پس:

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{با گزینه ۱ همخوانی دارد} \Rightarrow 1, 2, 2, 3: \text{دنباله درجات}$$

۳) در تقسیم عدد طبیعی a بر ۳۷ باقیمانده تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کمتر است بزرگترین مقدار a مضرب کدام است؟

۹(۱) ۱۲(۲) ۱۴(۳) ۱۶(۴)

$$a = 37q + q^2 - 2 \quad (۱) \quad 0 \leq q^2 - 2 < 37 \Rightarrow 2 \leq q^2 < 39 \Rightarrow \sqrt{2} \leq q < \sqrt{39} \\ \Rightarrow q_{\max} = 6$$

$$(۱) \Rightarrow a_{\max} = 37 \times 6 + 6^2 - 2 = 222 + 34 = 256, 16 | 256$$

۴) در نمایش طبیعی ۶۷ در مبنای ۳ رقم صفر چند مرتبه تکرار شده است؟

۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴) فاقد رقم صفر

$$\begin{array}{r} 67 \overline{) 201} \\ 66 \overline{) 21} \\ \underline{66} \\ 6 \end{array}$$

گزینه: ۴

(۵) باقیمانده تقسیم عدد $3^{42} - 2^{42}$ بر عدد 35 کدام است؟

۶(۴)

۵(۳)

۱(۲)

۰(۱)

گزینه ۱: $35 = 5 \times 7$ و 5 و 7 نسبت بهم اولند پس:

می دانیم هرگاه n زوج باشد $a^n - b^n$ بر $a+b$ بخش پذیر است و 42 زوج است پس
 $3+2 \mid 3^{42} - 2^{42}$ و در نتیجه داریم: $5 \mid 3^{42} - 2^{42}$ (۱)

$$\begin{cases} (3,7) = 1 \xRightarrow{\text{فرما}} 3^6 \equiv 1 \xRightarrow{\text{به توان 7}} 3^{42} \equiv 1 \\ (2,7) = 1 \xRightarrow{\text{فرما}} 2^6 \equiv 1 \xRightarrow{\text{به توان 7}} 2^{42} \equiv 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3^{42} - 2^{42} \equiv 0 \Rightarrow 7 \mid 3^{42} - 2^{42} \quad (۲)$$

$$(۱), (۲), (5,7)=1 \Rightarrow 35 \mid 3^{42} - 2^{42}$$

(۶) دو طرف داریم ، در اولی 5 مهره سفید و 4 مهره سیاه ، در دومی 7 مهره سفید و 10 مهره سیاه است ، از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رویت در ظرف دوم قرار می‌دهیم آنگاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می آوریم . با کدام احتمال این مهره سفید است؟

$\frac{41}{81}$ (۴)

$\frac{34}{81}$ (۳)

$\frac{11}{27}$ (۲)

$\frac{8}{27}$ (۱)

گزینه ۳: مهره خارج شده از ظرف اول سیاه یا مهره خارج شده از ظرف اول سفید $p(A)$

$$\Rightarrow p(A) = \frac{5}{9} \times \frac{8}{18} + \frac{4}{9} \times \frac{7}{18} = \frac{20}{81} + \frac{14}{81} = \frac{34}{81}$$

۷) با کدام مقدار a و با کدام حوزه مقادیر X تابع $p(X=i)=a(\frac{1}{3})^i$ یک تابع احتمال اولین موفقیت در امتحان i ام است؟

(۲) $a=1$ ناشمارای متناهی

(۱) $a=1$ ناشمارای نامتناهی

(۴) $a=2$ شمارای متناهی

(۳) $a=2$ شمارای نامتناهی

گزینه ۳: $(\frac{1}{3})^i$ دنباله هندسی است که $q=\frac{1}{3} < 1$ پس مجموع آن از فرمول $\frac{a}{1-q}$ بدست می آید بنابراین داریم:

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(X=i) = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a(\frac{1}{3})^i = 1 \Rightarrow a \times \sum_{i=1}^{\infty} (\frac{1}{3})^i = a \times \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} =$$

$$a \times \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = 1 \Rightarrow a=2$$

تست های کنکور: ۸۳

(۱) درجه راس های گراف همبند G به صورت ۲، ۳، ۴، ۵، b ، a است. کمترین عدد $a+b$ کدام است؟

- ۱(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۴(۴)

گزینه ۴: چون گراف همبند است پس a و b نمی توانند صفر باشند.

باتوجه به دنباله راس ها که به صورت ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و b و a می باشد شروع به رسم گراف می کنیم. ۶ راس داریم:

وقتی درجه ۵ و ۴ و ۳ را رسم می کنیم سه راس درجه ۲ باقی می ماند پس $a, b=2$ در نتیجه $a+b=4$ چون کمترین مقدار را می خواستیم پس $a, b=2$ یا $a, b=1$ (غ ق ق)

(۲) عدد شش رقمی $\overline{a63b29}$ بر عدد ۹۹ بخش پذیر است ، رقم a کدام است؟

- ۱(۳) ۲(۴) ۳(۵) ۴(۶)

گزینه ۱: اولاً $99=9 \times 11$ و $(9,11)=1$ ، ثانيا عددی بر ۱۱ بخش پذیر است که اگر از سمت چپ عدد ارقام را به ترتیب کم و جمع کنیم حاصل بر ۱۱ بخش پذیر باشد و عددی بر ۹ بخش پذیر است که مجموع ارقامش بر ۹ بخش پذیر باشد پس داریم:

$$11 \mid \overline{a63b29} \Rightarrow 11 \mid 9-2+b-3+6-a \Rightarrow 11 \mid b-a+10 \Rightarrow b-a=1 \quad (۱)$$

$$9 \mid \overline{a63b29} \Rightarrow 9 \mid a+6+3+b+2+9 \Rightarrow 9 \mid a+b+20 \Rightarrow a+b=7 \quad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow a=3, b=4$$

۳) دو عدد 24 و 185 در یک دسته هم ارزی به پیمانه m همبسته شده اند . اگر $(m, 7) = 1$ باقیمانده عدد m^m بر 7 کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

$$185 \equiv 24 \Rightarrow m \mid 185 - 24 = 161 \Rightarrow m \mid 7 \times 23 \xrightarrow{(m, 7) = 1} m \mid 23 \Rightarrow m = 23$$

$$m^m = 23^{23} \equiv 2^{23} \Rightarrow m^m \equiv (2^3)^7 \times 2^2 \Rightarrow m^m \equiv 1 \times 4 = 4$$

۴) اگر $a^p = 10k + 7$ آنگاه رقم یکان عدد a^{p+4} کدام است؟

- ۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

گزینه ۴: طبق قضیه نیوتن $(a^{n+4} \equiv a^n \pmod{10})$ داریم : $a^n \equiv a^{p+4} \pmod{10}$ و $7 \equiv 10$
 $a^p = 10k + 7$

۵) در پرتاب دو تاس باهم می دانیم جمع دو عدد رو شده کمتر از 10 است. با کدام احتمال هر دو عدد رو شده فرد اند؟

- ۱) $\frac{4}{15}$ ۲) $\frac{2}{9}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{4}$

A: {(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)}

B: مجموع اعداد رو شده کمتر از ۱۰
 $B' = (6,6), (5,6), (6,5), (4,6), (5,5), (6,4)$

$$36 - 6 = 30 \Rightarrow p(B) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6}$$

$$n(A \cap B) = 8 \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \quad p(A|B) = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{5}{6}} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$$

توجه: A و B در همه اعضای A به جز (5,5) مشترکند و $|S| = 6 \times 6 = 36$

۶) هفت کبوتر به چند طریق می توانند در سه لانه متمایز قرار گیرند به طوری که هیچ لانه ای خالی نماند؟

۲۰(۴)

۱۶(۳)

۱۵(۲)

۱۲(۱)

$$\text{گزینه ۲} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ x_i \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x_i = y_i + 1 \Rightarrow y_1 + 1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 = 7$$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 4 \Rightarrow \text{تعداد جواب ها} = \binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{4} = 15$$

منابع:

- ۱- از مدرسه تا دانشگاه-ریاضیات گسسته-چاپ دوم: ۱۳۸۱
مولفان: حمیدرضا امیری-هوشنگ شرقی، یدالله ایلخانی پور
- ۲- راهنمای منتشران- ریاضیات گسسته-چاپ دوم: ۱۳۸۲
مولف: خداوردی رنجبری
- ۳- کتاب درسی ریاضیات گسسته-چاپ هیجدهم ۱۳۹۱
مولفان: دکتر مهدی بهزاد-دکتر علی رجایی، دکتر علی عمیدی و دکتر عباد الله محمودیان
- ۴- آمار و احتمالات کاربردی (به همراه تست های کارشناسی ارشد)-چاپ اول
اسفند: ۱۳۷۹
مولف: دکتر سعید رضاخواه- عضو هیئت علمی دانشگاه صنعتی امیر کبیر
- ۵- حل و تشریح مسائل نظریه اعداد-چاپ اول ۱۳۷۹
مولفان: فرهاد محمدی، حسین شمسعلی، داوود بهرامی
- ۶- نظریه گراف ها- سایت: www.riazisara.ir
مولف: رحیم خیر الله زاده
- ۷- جزوات کامل-گراف-سایت: www.konkur.in
مولف: مهندس یاسین سپهر

۸- گسسته احتمال-مشت نمونه خروار چاپ اول: ۱۳۸۹

پدید آورندگان: عطا صادقی، احسان موسوی

۹- نظریه اعداد-اردیبهشت ۱۳۸۵ سایت: www.khasteh_math.ir تهیه

کننده: جابر عامری

۱۰- ریاضیات گسسته - چاپ اول ۱۳۹۲ سایت: www.g_al.m.ir مولف: جابر

عامری

۱۱- خلاصه درس ریاضیات گسسته - مجموعه آموزشی سهل آموز

سایت: www.sahlamooz.ir

مولف: رضا کهنسال

۱۲- ریاضیات گسسته-ده سال کنکور سراسری سال های ۸۰ تا ۸۹

گرد آوری کننده: عارف درآیش سایت: www.reyazi.com

۱۳- سوالات کنکور سایت: www.konkoorsara.ir

۱۴- سوالات کنکور سایت www.ganginedanesh.ir

باتشکر فراوان از همه ی اساتید محترم که از دست رنجشان چه از کتابشان چه از سایت نکته برداری شد.

و

باتشکر از کافی نت فرهنگیان که در این راستا بامن همکاری داشته اند