نشرالگو

۲–۲: الگوریتم تقسیم

«الگوریتم تقسیم» با وجود اسم جدید آن، در واقع بحث بسیار ساده و آشنایی برای شماست. از دوره‌ی ابتدایی و راهنمایی به یاد دارید که هنگام تقسیم یک عدد بر عددی دیگر، یک خارج قسمت و یک باقی‌مانده پیدا می‌کردید. مثلاً در تقسیم مقابل عدد ۶ خارج قسمت و ۳ باقی‌مانده‌ی تقسیم است. حتماً به یاد دارید که برای امتحان درست بودن تقسیم دو کار را انجام می‌دادیم، یکی این که درستی تساوی $۲۷ = ۳ + ۴ \times ۶$ را بررسی می‌کردیم و دیگری این که مراقب بودیم، عدد باقی‌مانده کم‌تر از مقسوم علیه باشد (یعنی $۴ > ۳$). همین مطلب ساده، در نظریه‌ی اعداد به «الگوریتم تقسیم» موسوم است.

$$\begin{array}{r|l} ۲۷ & ۴ \\ \hline -۲۴ & ۶ \\ ۳ & \end{array}$$

قضیه‌ی ۱۲: (قضیه‌ی تقسیم) **اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد، در این صورت اعداد منحصر به فرد q و r وجود دارند که:**

$$a = bq + r \quad , \quad ۰ \le r < b$$

به q و r به ترتیب خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر b گفته می‌شود.

نکته‌ی ۳: **رابطه‌ی $۰ \le r < b$ در قضیه‌ی تقسیم واضح است که بیشترین مقداری که r می‌تواند داشته باشد $b - ۱$ است.**

➢ **مثال:** در تقسیم ۵۰ بر ۱۱ خارج قسمت برابر ۴ و باقی‌مانده برابر ۶ است:

$$۵۰ = ۱۱ \times ۴ + ۶ \quad , \quad ۰ \le ۶ < ۱۱$$

و در تقسیم ۵۰– بر ۱۱ خارج قسمت ۵– و باقی‌مانده برابر ۵ است.

$$-۵۰ = ۱۱(-۵) + ۵ \quad , \quad ۰ \le ۵ < ۱۱$$

علّت نام‌گذاری قضیه‌ی فوق به «الگوریتم تقسیم»، ریشه در مفهوم تقسیم دارد. هنگام تقسیم یک عدد مانند a، بر عدد دیگری مانند b، در واقع شما از الگوریتمی استفاده می‌کنید که مرتباً b را از a کم می‌کند و چک می‌کند که آیا حاصل از b کم‌تر شده است یا نه. با طی این فرآیند و الگوریتم، در پایان باقی‌مانده‌ی تقسیم به جا می‌ماند.

مسائل مربوط به الگوریتم تقسیم تنوع زیادی دارند ولی جدا از راه‌حل‌های ابتکاری، تمام آن‌ها بر مبنای مفهوم قضیه‌ی تقسیم و به خصوص **مقایسه‌ی مقدار باقی‌مانده و مقسوم علیه** قابل حل هستند.

❍ **مسأله‌ی ۱۰:** **بزرگ‌ترین عدد a را بیابید که باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۵۲ دو برابر مربع خارج قسمت تقسیم باشد؟**

حل: فرض کنید q و r به ترتیب خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۵۲ باشند. چون $r = ۲q^۲$، پس:

$$a = ۵۲q + ۲q^۲ \quad , \quad ۰ \le ۲q^۲ < ۵۲$$

پس $q^۲ < ۲۶$ و در نتیجه $q \le ۵$، لذا بیشترین مقدار a وقتی به دست می‌آید که $q = ۵$. در این صورت حداکثر مقدار a برابر $۵۲ \times ۵ + ۵۰ = ۳۱۰$ است.

تست ۴: **در یک تقسیم اگر ۱۰۰ واحد به مقسوم و یک واحد به مقسوم علیه اضافه کنیم، خارج قسمت تغییر نمی‌کند و باقی‌مانده ۲ واحد زیاد می‌شود. در این تقسیم خارج قسمت کدام است؟**

۱) ۱۰۲ ۲) ۸۸ ۳) ۱۰۰ ۴) ۹۸

حل: تقسیم اولیه را به صورت $a = bq + r$ فرض می‌کنیم و تغییرات فرض سؤال را روی آن اعمال می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} a = bq + r \\ a + ۱۰۰ = (b+۱)q + r + ۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{کم کردن دو رابطه}} q = ۹۸$$

بنابراین گزینه‌ی ۴ درست است.

مسأله‌ی ۱۱: باقی‌مانده‌ی تقسیم چند عدد طبیعی دو رقمی بر ۹ برابر ۴ است؟

حل: اگر عددی مانند a، در تقسیم بر ۹ باقی‌مانده‌ای برابر ۴ داشته باشد، طبق تعریف داریم: $a = ۹q + ۴$، بنابراین باید تعداد اعداد صحیح q را بیابیم که در نابرابری $۱۰ \leq ۹q + ۴ \leq ۹۹$ صدق می‌کنند:

$$۱۰ \leq ۹q + ۴ \leq ۹۹ \Rightarrow ۶ \leq ۹q \leq ۹۵ \Rightarrow \frac{۶}{۹} \leq q \leq \frac{۹۵}{۹} \xrightarrow{q \in Z} ۱ \leq q \leq ۱۰$$

پس مجموعه‌ی مقادیر q که در نابرابری فوق صدق می‌کنند عبارت است از $\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$، که تعداد اعضای این مجموعه برابر ۱۰ است.

مسأله‌ی ۱۲: باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۷ برابر ۳ است.

الف) باقی‌مانده‌ی تقسیم $-a$ بر ۷ چند است؟

ب) باقی‌مانده‌ی تقسیم $a - ۲۳$ بر ۷ چند است؟

پ) باقی‌مانده‌ی تقسیم $a + ۱۳$ بر ۷ چند است؟

حل: الف) طبق فرض، عدد صحیحی مانند q وجود دارد که $a = ۷q + ۳$، بنابراین:

$$a = ۷q + ۳ \Rightarrow -a = -(۷q + ۳) = ۷(-q) - ۳$$

طبق شرط باقی‌مانده در قضیه‌ی تقسیم $(۰ \leq r < b)$ باید $۰ \leq r < ۷$، لذا با اضافه و کم کردن عدد ۷ (مقسوم علیه) شرط باقی‌مانده را ایجاد می‌کنیم:

$$-a = ۷(-q) - ۷ + ۷ - ۳ = ۷\overbrace{(-q - ۱)}^{q_۱} + ۴ = ۷q_۱ + ۴$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم $-a$ بر ۷ برابر ۴ است.

ب) مشابه قسمت قبل داریم:

$$a = ۷q + ۳ \Rightarrow a - ۲۳ = ۷q - ۲۰ = ۷q - ۳ \times ۷ + ۳ \times ۷ - ۲۰ = ۷\overbrace{(q - ۳)}^{q_۲} + ۱ = ۷q_۲ + ۱$$

همان طور که مشاهده کردید در این قسمت نیز برای این‌که $۰ \leq r < ۷$، ۳ برابر مقسوم علیه را اضافه کردیم.

پ) مشابه قسمت‌های قبل داریم:

$$a = ۷q + ۳ \Rightarrow a + ۱۳ = ۷q + ۱۶ = ۷q + ۱۴ + ۲ = ۷\overbrace{(q + ۲)}^{q_۳} + ۲ = ۷q_۳ + ۲$$

تست ۵: در تقسیم a بر ۶۳، باقی‌مانده ۱۷ است. اگر ۶۰ واحد به a اضافه کنیم، باقی‌مانده و خارج قسمت چه تغییری می‌کنند؟ (آزاد ـ ۸۵)

۱) سه واحد کم می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود.
۲) سه واحد اضافه می‌شود ـ یک واحد اضافه می‌شود.
۳) سه واحد اضافه می‌شود ـ تغییر نمی‌کند.
۴) سه واحد کم می‌شود ـ دو واحد اضافه می‌شود.

حل: با توجه به فرض، اگر عدد q خارج قسمت تقسیم اول باشد، داریم: $a = ۶۳q + ۱۷$. حال اگر ۶۰ واحد به a اضافه شود داریم:

$$a + ۶۰ = ۶۳q + ۱۷ + ۶۰ = ۶۳(q + ۱) + ۱۴$$

پس در تقسیم جدید، خارج قسمت $q + ۱$ و باقی‌مانده ۱۴ است. بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

مسأله‌ی ۱۳: در تقسیم عدد صحیح a بر عدد صحیح b، خارج قسمت و باقی‌مانده به ترتیب ۵ و ۲۱ می‌باشند. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم علیه اضافه کرد تا خارج قسمت و مقسوم تغییر نکنند؟

حل: با فرض این‌که a و b به ترتیب مقسوم و مقسوم علیه باشند، داریم: $a = ۵b + ۲۱$. به فرآیندهای جبری زیر دقت کنید:

۱) $a = ۵b + ۲۱ = ۵b + ۵ + ۱۶ = ۵(b + ۱) + ۱۶$

۲) $a = ۵b + ۲۱ = ۵b + ۱۰ + ۱۱ = ۵(b + ۲) + ۱۱$

همان طور که مشاهده می‌کنید برای این‌که خارج قسمت و مقسوم تغییر نکند، به ازای هر واحد که به مقسوم علیه اضافه می‌شود، ۵ واحد (به اندازه‌ی مقدار خارج قسمت) از باقی‌مانده کم می‌شود. پس حداکثر به مقدار $[\frac{۲۱}{۵}]$ یعنی ۴ واحد می‌توان به مقسوم علیه اضافه کرد تا مقسوم و خارج قسمت تغییر نکند.

توجه: دقت کنید که اگر با شرایط مسأله بیشتر از ۴ واحد بخواهیم به مقسوم علیه اضافه کنیم باقی‌مانده منفی می‌شود.

مسألهٔ ۱۴: **در یک تقسیم مقسوم علیه ۱۱ و باقی‌مانده ۳ است. حداکثر چند واحد می‌توان به مقسوم اضافه کرد به طوری که در تقسیم بر ۱۱، خارج قسمت تغییر نکند؟**

حل: فرض کنید a و q به ترتیب مقسوم و خارج قسمت این تقسیم باشند، پس: $a = 11q + 3$. اکنون داریم:

$$a + x = 11q + x + 3 \xrightarrow{0 \le r < b} 0 \le x + 3 < 11 \Rightarrow 0 \le x < 8 \xrightarrow{x \in Z} x_{max} = 7$$

برای درک بهتر مسأله یک بار ۸ واحد و یک بار ۹ واحد به مقسوم علیه اضافه کنید:

$$a + 8 = 11q + 11 = 11(q + 1)$$
$$a + 9 = 11q + 12 = 11q + 11 + 1 = 11(q + 1) + 1$$

پس اگر بیشتر از ۷ واحد به مقسوم اضافه کنیم، خارج قسمت تغییر می‌کند.

مسألهٔ ۱۵: **فرض کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۷ برابر ٤ باشد:**

الف) باقی‌ماندهٔ تقسیم $9a + 5$ بر ۷ چند است؟

ب) باقی‌ماندهٔ تقسیم a^2 بر ۷ چند است؟

حل: الف) با توجه به فرض سؤال عدد صحیحی مانند q وجود دارد که $a = 7q + 4$، در نتیجه:

$$a = 7q + 4 \Rightarrow 9a + 5 = 9(7q + 4) + 5 = 9 \times 7q + 41 = 7 \times (9q) + 35 + 6 = 7\overbrace{(9q + 5)}^{q'} + 6 = 7q' + 6$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $9a + 5$ بر ۷ برابر ۶ است.

ب) برای این قسمت نیز از $a = 7q + 4$ استفاده می‌کنیم:

$$a = 7q + 4 \Rightarrow a^2 = (7q + 4)^2 = 49q^2 + 56q + 16 = 7 \times 7q^2 + 7 \times 8q + 14 + 2 = 7\overbrace{(7q^2 + 8q + 2)}^{q'} + 2 = 7q' + 2$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم a^2 بر ۷ برابر ۲ است.

یادداشت: همان طورکه در راه‌حل مساله‌ی قبل مشخص است، باقی‌ماندهٔ تقسیم $9a + 5$ بر ۷، برابر باقی‌ماندهٔ تقسیم $9 \times 4 + 5$ بر ۷، و همچنین باقی‌ماندهٔ تقسیم a^2 بر ۷ برابر باقی‌ماندهٔ تقسیم 4^2 بر ۷ است. در حالت کلی نتیجهٔ زیر را داریم:

نکتهٔ ۴: **اگر باقی‌مانده تقسیم a بر b برابر r باشد:**

۱- در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم a^n بر b، برابر باقی‌ماندهٔ تقسیم r^n بر b است.

۲- باقی‌ماندهٔ تقسیم $x_n a^n + x_{n-1} a^{n-1} + \dots + x_0$ بر b، برابر باقی‌ماندهٔ تقسیم $x_n r^n + x_{n-1} r^{n-1} + \dots + x_0$ بر b است.

یعنی در واقع برای یافتن باقی‌مانده در یک تقسیم، می‌توانیم همان اعمال جبری را که روی a (مقسوم) اعمال شده است، روی r (باقی‌مانده) نیز اعمال کنیم و با عدد کوچک‌تر به دست آمده به عنوان مقسوم جدید کار کنیم.

تذکر: منظور از اعمال جبری، ضرب در یک عدد و جمع با عدد دیگر است. مواردی چون تقسیم، در این نکته صدق نمی‌کند. همچنین در مواردی مانند a^n (a مقسوم)، همان‌طور که گفته شد چون از تعدادی ضرب تشکیل شده، این نکته صادق است، ولی اگر با حالتی چون n^a سر و کار داشتیم (یعنی مقسوم در توان ظاهر شد)، مجاز به استفاده از این نکته نیستید، چون نمی‌توان آن را به صورت مخلوطی از اعمال جمع و ضرب توصیف کرد.

مسألهٔ ۱۶: **باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۱ برابر ۵ است. باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^2 + 3a + 1$ بر ۱۱ چند است؟**

حل: با توجه به نکتهٔ قبل، باقی‌ماندهٔ تقسیم $a^2 + 3a + 1$ بر ۱۱، برابر باقی‌ماندهٔ تقسیم $(5)^2 + 3(5) + 1 = 41$ بر ۱۱، یعنی برابر ۸ است.

مسألهٔ ۱۷: **باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۲ برابر ۸ است.**

الف) باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ٦ چند است؟

ب) باقی‌ماندهٔ تقسیم $20a$ بر ۳۰ چند است؟

حل: الف) چون باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۱۲ برابر ۸ است، عدد صحیح q وجود دارد که:

$$a = 12q + 8 \Rightarrow a = 6(2q) + 6 + 2 \Rightarrow a = 6(2q + 1) + 2 = 6q' + 2$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر ۶ برابر ۲ می‌شود.

ب) مشابه راه‌حل الف داریم:

$$a = ۱۲q + ۸ \Rightarrow ۲۰a = ۲۰(۱۲q) + ۲۰ \times ۸ = ۳۰ \times (۸q) + ۱۶۰ = ۳۰ \times (۸q) + ۱۵۰ + ۱۰ = ۳۰(۸q + ۵) + ۱۰ = ۳۰q' + ۱۰$$

پس باقی‌مانده‌ی مورد نظر برابر ۱۰ است.

مسأله‌ی ۱۸: باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۹ و ۸ به ترتیب برابر ۳ و ۲ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۷۲ و ۳۶ چند است؟

حل: طبق فرض اعداد صحیح $q_۱$ و $q_۲$ وجود دارند که $a = ۹q_۱ + ۳$ و $a = ۸q_۲ + ۲$. اکنون برای پیدا کردن باقی‌مانده‌ی a بر ۷۲، $a = ۹q_۱ + ۳$ را در ۸ و $a = ۸q_۲ + ۲$ را در ۹ ضرب می‌کنیم تا عدد ۷۲ ایجاد شود:

$$\left.\begin{array}{l} ۸a = ۸(۹q_۱ + ۳) \Rightarrow ۸a = ۷۲q_۱ + ۲۴ \\ ۹a = ۹(۸q_۲ + ۲) \Rightarrow ۹a = ۷۲q_۲ + ۱۸ \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{دو رابطه را از هم کم می‌کنیم}} ۹a - ۸a = (۷۲q_۲ + ۱۸) - (۷۲q_۱ + ۲۴)$$

$$\Rightarrow a = ۷۲(q_۲ - q_۱) - ۶ = ۷۲(q_۲ - q_۱) - ۷۲ + ۷۲ - ۶ = ۷۲\overbrace{(q_۲ - q_۱ - ۱)}^{q_۳} + ۶۶$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۷۲، برابر ۶۶ است. اکنون برای محاسبه‌ی باقی‌مانده‌ی a بر ۳۶ داریم:

$$a = ۷۲q_۳ + ۶۶ \Rightarrow a = ۳۶ \times (۲q_۳) + ۳۶ + ۳۰ = ۳۶(۲q_۳ + ۱) + ۳۰$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۳۶، برابر ۳۰ است.

تست ۶: باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۳ و ۷، به ترتیب ۲ و ٤ است. باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۲۱ چند است؟

۱) ۱۱ **۲)** ۱۲ **۳)** صفر **٤)** ۲

حل: طبق فرض سؤال اعداد صحیح $q_۱$ و $q_۲$ وجود دارند به طوری که $a = ۳q_۱ + ۲$ و $a = ۷q_۲ + ۴$. اکنون چون باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۲۱ را می‌خواهیم باید ترکیبی خطی از $۷a$ و $۳a$ پیدا کنیم که برابر a شود. به طور مثال می‌توان نوشت:

$$a = (۷a) - ۲ \times (۳a) = ۲۱q_۱ + ۱۴ - ۲(۲۱q_۲ + ۱۲) = ۲۱(q_۱ - ۲q_۲) - ۱۰$$
$$= ۲۱(q_۱ - ۲q_۲) - ۲۱ + ۲۱ - ۱۰ = ۲۱(q_۱ - ۲q_۲ - ۱) + ۱۱$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۲۱، برابر ۱۱ است. بنابراین گزینه‌ی ۱ درست است.

صورت‌های یک عدد بر حسب یک پیمانه: (افراز اعداد صحیح)

بسیاری از مسائل نظریه‌ی اعداد را می‌توان به وسیله‌ی در نظر گرفتن صورت‌های یک عدد بر حسب یک پیمانه بررسی و حل کرد. مفهوم اصلی این بحث به قضیه‌ی تقسیم مربوط می‌شود.

قضیه‌ی ۱۳: فرض کنید b عدد طبیعی باشد. در این صورت هر عدد صحیح به پیمانه‌ی b به یکی و فقط یکی از b صورت زیر است.

$$bk\ ,\ bk + ۱\ ,\ \ldots\ ,\ bk + b - ۱$$

اثبات: مطابق قضیه‌ی تقسیم برای عدد صحیح a، اعداد منحصر به فرد q و r وجود دارند که $a = bq + r$ و $۰ \le r < b$، پس r یکی از عدد ۰، ۱، ... و $b - ۱$ است.

مثال: هر عدد صحیح به پیمانه‌ی ۲ به یکی از دو صورت $۲k$ و $۲k + ۱$ است.

هر عدد صحیح به پیمانه‌ی ۳ به یکی از ۳ صورت $۳k$، $۳k + ۱$ و $۳k + ۲$ است.

هر عدد صحیح به پیمانه‌ی ۴ به یکی از ۴ صورت $۴k$، $۴k + ۱$، $۴k + ۲$ و $۴k + ۳$ است.

برای درک بهتر موضوع یک عدد صحیح مثل ۷۵ را در نظر می‌گیریم. داریم: $۷۵ = ۲ \times ۳۷ + ۱ = ۳ \times ۲۵ = ۴ \times ۱۸ + ۳$

پس ۷۵ به پیمانه‌ی ۲ به صورت $۲k + ۱$، به پیمانه‌ی ۳ به صورت $۳k$ و به پیمانه‌ی ۴ به صورت $۴k + ۳$ است.

مسأله‌ی ۱۹: ثابت کنید هر عدد صحیح به یکی از ۵ صورت $۵k$، $۵k \pm ۱$ و $۵k \pm ۲$ است.

حل: طبق قضیه هر عدد به پیمانه‌ی ۵، به یکی از ۵ صورت $۵k$، $۵k + ۱$، $۵k + ۲$، $۵k + ۳$ و $۵k + ۴$ است. از طرفی داریم:

$$۵q + ۳ = ۵q + ۵ - ۵ + ۳ = ۵(q + ۱) - ۲$$
$$۵q + ۴ = ۵q + ۵ - ۵ + ۴ = ۵(q + ۱) - ۱$$

پس هر عددی که به صورت $۵k + ۳$ باشد به صورت $۵k - ۲$ و هر عددی که به صورت $۵k + ۴$ باشد به صورت $۵k - ۱$ نیز می‌باشد.

تذکر ۱: از راه‌حل مسأله‌ی قبل برای سهولت در محاسبات استفاده می‌کنیم. مثلاً برای پیمانه‌ی ۶ می‌توانیم از صورت‌های $6k$، $6k \pm 1$، $6k \pm 2$ و $6k+3$، یا برای پیمانه‌ی ۷ می‌توانیم از صورت‌های $7k$، $7k \pm 1$، $7k \pm 2$ و $7k \pm 3$ استفاده کنیم.

نکته‌ی ۵: **اگر a به صورت $bk+r$ باشد، آنگاه a^n به صورت $bk+r^n$ است (نکته‌ی(٤) را ببینید).**

مسأله‌ی ۲۰: **عدد صحیح a به فرم $7k+2$ است. چند عدد ۳ رقمی طبیعی وجود دارد که در تقسیم بر ۷ با عدد a^3 هم‌باقی‌مانده‌اند؟**

حل:

$$a = 7k+2 \Rightarrow a^3 = 7k+2^3 = 7k+8 = 7k+7+1 = 7(k+1)+1 = 7q+1$$

پس باقی‌مانده‌ی a^3 بر ۷ برابر ۱ است و باید تعداد اعداد ۳ رقمی طبیعی به فرم $7q+1$ را پیدا کنیم:

$$100 \le 7q+1 \le 999 \Rightarrow \frac{99}{7} \le q \le \frac{998}{7} \xrightarrow{q \in Z} 15 \le q \le 142$$

لذا جواب مورد نظر برابر $142-15+1=128$ است.

تست ۷: **اگر $a=5k+3$، باقی‌مانده‌ی تقسیم $a+a^2+a^3+a^4$ بر ۵ برابر است با: (آزاد ـ ۷۹)**

۱) ۱ **۲)** ۲ **۳)** ۳ **٤)** صفر

حل: با توجه به نکته‌ی قبل داریم:

$$a=5k+3 \Rightarrow a^2 = 5k_1+9 \; , \; a^3 = 5k_2+27 \; , \; a^4 = 5k_3+81$$

$$\Rightarrow a+a^2+a^3+a^4 = 5(\underbrace{k+k_1+k_2+k_3}_{q})+3+9+27+81 = 5q+120 = 5(q+24) = 5q'$$

پس عدد حاصل بر ۵ بخش‌پذیر است و در تقسیم بر ۵، باقی‌مانده‌ی صفر دارد. بنابراین گزینه‌ی ۴ درست است.

مسأله‌ی ۲۱: **ثابت کنید مربع هر عدد صحیح به صورت $3k$ یا $3k+1$ است.**

حل: می‌دانیم هر عدد صحیح به یکی از سه صورت $3q$ و $3q \pm 1$ است. اما:

$$(3q)^2 = 3(3q^2) = 3k$$
$$(3q \pm 1)^2 = 9q^2 \pm 6q+1 = 3(3q^2 \pm 2q)+1 = 3k+1$$

نکته‌ی ۶: **توان دوم هر عدد صحیح به صورت $3k$ یا $3k+1$ است.**

مسأله‌ی ۲۲: **ثابت کنید مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ است.**

حل: با فرض این‌که a فرد باشد داریم:

$$a = 2q+1 \Rightarrow a^2 = (2q+1)^2 = 4q^2+4q+1 = 4q(q+1)+1$$

اما $q(q+1)$ حاصل ضرب دو عدد متوالی است و می‌دانیم حاصل ضرب دو عدد متوالی عددی زوج است (زیرا در هر صورت یکی از q و $q+1$، عددی زوج و دیگری عددی فرد است)، پس به ازای عددی صحیح مانند t، $q(q+1)=2t$. بنابراین:

$$a^2 = 4q(q+1)+1 = 4(2t)+1 = 8t+1$$

مسأله‌ی ۲۳: **ثابت کنید توان چهارم هر عدد فرد، به صورت $16k+1$ است.**

حل: می‌دانیم اگر a عددی فرد باشد، آن‌گاه: $a^2 = 8q+1$. بنابراین:

$$a^4 = (a^2)^2 = (8q+1)^2 = 64q^2+16q+1 = 16(\underbrace{4q^2+q}_{k})+1 = 16k+1$$

مسأله‌ی ۲۴: ثابت کنید توان چهارم هر عدد صحیح به یکی از صورت‌های $5k$ و $5k+1$ است.

حل: هر عدد صحیح به یکی از ۵ صورت $5k$، $5k\pm 1$، و $5k\pm 2$ است. بنابراین طبق نکته‌ی(۵):

$$a=5k \Rightarrow a^4=5k'$$

$$a=5k\pm 1 \Rightarrow a^4=5k'+(\pm 1)^4=5k'+1$$

$$a=5k\pm 2 \Rightarrow a^4=5k'+(\pm 2)^4=5k'+16=5(\underbrace{k'+3}_{k''})+1=5k''+1$$

پس همواره a^4 در تقسیم بر ۵، یا باقی‌مانده‌ی صفر دارد یا باقی‌مانده‌ی ۱.

مسأله‌ی ۲۵: ثابت کنید حاصل ضرب هر دو عدد به فرم $4k+3$، یک عدد به فرم $4k+1$ است.

حل: دو عدد $a=4k_1+3$ و $b=4k_2+3$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$ab=(4k_1+3)(4k_2+3)=16k_1k_2+12k_1+12k_2+9=4(\underbrace{4k_1k_2+3k_1+3k_2+2}_{q})+1=4q+1$$

پس ab به فرم $4k+1$ است.

مسأله‌ی ۲۶: ثابت کنید حاصل ضرب هر سه عدد متوالی بر ٦ بخش‌پذیر است.

حل: از هر n عدد متوالی دقیقاً یکی از آن‌ها بر n بخش‌پذیر است (چرا؟)، پس از هر ۳ عدد صحیح متوالی حداقل یکی بر ۲ و یکی بر ۳ بخش‌پذیر است. در نتیجه حاصل ضرب آن‌ها بر ۶ بخش‌پذیر است.

تست ۸: اگر a مضرب ٦ نباشد و مضرب ۳ باشد، باقی‌مانده‌ی a^2 بر ٤ کدام است؟ (آزاد ـ ۷۷)

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) صفر ٤) ۲

حل: هر عدد طبیعی به یکی از ۶ صورت $6k$، $6k\pm 1$، $6k\pm 2$ و $6k+3$ است. از این ۶ صورت، دو صورت $6k$ و $6k+3$ بر ۳ بخش‌پذیرند. به طور دقیق‌تر اعداد به فرم $6k$ بر ۶ بخش‌پذیرند، ولی اعداد به فرم $6k+3$ بر ۳ بخش‌پذیرند و مضرب ۶ نیستند. بنابراین از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم: $a=6k+3$ و باید باقی‌مانده‌ی a^2 را بر ۴ پیدا کنیم.

روش اول:

$$a=6k+3 \Rightarrow a^2=36k^2+36k+9=4(\underbrace{9k^2+9k+2}_{q})+1=4q+1$$

روش دوم: a از مجموع یک عدد زوج $(6k)$ و یک عدد فرد (۳) تشکیل شده، بنابراین a خود یک عدد فرد است و می‌دانیم مربع هر عدد فرد به فرم $8k+1$ یا $4(2k)+1$ است. پس باقی‌مانده‌ی تقسیم a^2 بر ۴، برابر ۱ است. بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

تست ۹: کدام معادله در Z، به ازای هیچ مقدار k، جواب ندارد؟ (آزاد ـ ۷۸)

۱) $x^2+y^2=4k$ ۲) $x^2+y^2=4k+3$ ۳) $x^2+y^2=4k+1$ ٤) $x^2+y^2=4k+2$

حل: می‌دانیم برای هر عدد صحیح a، a^2 به فرم $4k$ یا $4k+1$ است (اگر a زوج باشد، $a^2=4k$ و اگر a فرد باشد: $a^2=8k+1=4q+1$). بنابراین هم x^2 و هم y^2 به یکی از دو فرم فوق خواهند بود، و داریم:

$$x^2=4k \quad , \quad y^2=4k' \Rightarrow x^2+y^2=4(k+k')=4k''$$

$$x^2=4k+1\ ,\ y^2=4k' \Rightarrow x^2+y^2=4(k+k')+1=4k''+1$$

$$x^2=4k+1\ ,\ y^2=4k'+1 \Rightarrow x^2+y^2=4(k+k')+2=4k''+2$$

پس همواره x^2+y^2 به یکی از سه فرم $4k$، $4k+1$ و $4k+2$ است، بنابراین هیچ x و y صحیحی وجود ندارد که $x^2+y^2=4k+3$، یعنی معادله‌ی گزینه‌ی (۲) هیچ گاه جواب صحیح ندارد. برای گزینه‌های دیگر می‌توان جواب ارائه کرد. مثلاً اگر $k=0$، معادله‌ی گزینه‌ی (۱)، جواب $x=y=0$ و معادله‌ی گزینه‌ی (۳)، جواب $x=1$ و $y=0$ و معادله‌ی گزینه‌ی (۴)، جواب $x=y=1$ را دارد.
بنابراین گزینه‌ی ۲ درست است.

یادداشت: دقت کنید که لزوماً برای هر عدد صحیح k، معادله‌های گزینه‌های دیگر جواب ندارد. مثلاً برای $k=1$، معادله‌ی گزینه‌ی (۴) هیچ جواب صحیحی ندارد. (چرا؟)