

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

جزوه‌ی گنگوری

حساب دیفرانسیل و انتگرال

مهدی جعفری کیا

ID: @jafarikia

CH: @mclassir

فهرست مطالب

فصل صفر: یادآوری مفاهیم پایه.....صفحه ۱

فصل اول: دنباله‌ها.....صفحه ۲۱

فصل دوم: حد و پیوستگی.....صفحه ۵۳

فصل سوم: مشتق.....صفحه ۱۱۷

فصل چهارم: انتگرال.....صفحه ۱۹۳

بارم بندی کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال (۹۵-۹۶)

فصل	بخش‌ها	پایانی نوبت اول	پایانی نوبت دوم، شهریور، بزرگسالان و دی ماه
صفر	بخش ۱ تا آخر بخش ۵	۱	۳
	بخش ۶ تا آخر بخش ۸	۱	
اول	بخش ۱ تا آخر بخش ۴	۲	۳
	بخش ۵ تا آخر بخش ۹	۳/۵	
دوم	بخش ۱ تا آخر بخش ۴	۲	۳
	بخش ۵ تا آخر بخش ۹	۴	
	بخش ۱۰ تا آخر بخش ۱۴	۳	
	بخش ۱۵ تا آخر بخش ۱۸	۱/۵	
سوم	بخش ۱ تا آخر بخش ۳	۲	۱
	بخش ۴ تا آخر بخش ۵		۱/۵
	بخش ۶ تا آخر بخش ۷		۱/۵
	بخش ۸ تا آخر بخش ۱۱		۲
	بخش ۱۲ تا آخر بخش ۱۵		۲/۵
	بخش ۱۶		۲
	بخش ۱ تا آخر بخش ۲		۱/۵
چهارم	بخش ۳ تا آخر بخش ۵		۲
	جمع	۲۰	۲۰

((امام علی علیه السلام : عاقل‌ترین مردم کسی است که در امور زندگیش بهتر

برنامه‌ریزی کند و در اصلاح آفرتش بیشتر همت نماید))

بودجه‌بندی ریاضیات پایه و دیفرانسیل رشته ریاضی فیزیک

سال‌های اخیر

سراسری	سراسری	سراسری	سراسری	سراسری	سراسری	دیفرانسیل و ریاضیات پایه
۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	
۱	-	-	-	-	-	یادآوری مفاهیم پایه
۲	-	۱	۱	۲	۱	دنباله
۳	۴	۴	۵	۴	۴	حد و پیوستگی
۹	۸	۸	۶	۶	۷	مشتق و کاربرد مشتق
۲	۲	۲	۲	۲	۲	انتگرال
۳	۳	۳	۱	۲	۲	تابع
-	-	۱	۱	-	-	الگو و دنباله
-	۲	۱	-	-	-	توابع خاص، نامعادله
۱	-	-	۱	۱	۱	توابع نمایی و لگاریتم
۱	۲	۱	۳	۴	۳	محاسبات جبری معادلات و نامعادلات
۲	۳	۳	۳	۳	۴	مثلثات

فصل صدق

یادآوری مفاهیم پایه

تعداد تست: ۷۲

تعداد مثال: ۱۶

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

The collage features several mathematical elements:

- Graphs of absolute value functions, such as $y = |x^2 - 1| - 4$.
- A list of properties of absolute values:

۱) $ x = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$	۱) $\sqrt{x^2} = x $
۲) $ x \leq a \iff -a \leq x \leq a$	۲) $ x \geq a \iff x \geq a \vee x \leq -a$
۳) $- x \leq x \leq x $	۳) $ x+y \leq x + y $ (نامساوی مثلث)
۴) $ x+y = x + y \iff (xy > 0)$	۴) $ x-y = x + y \iff (xy < 0)$
۵) $ x \leq y \iff x^2 \leq y^2$	۵) $ x = y \iff x = \pm y$
۶) $ f(x) = f(x) \iff f(x) \geq 0$	۶) $ f(x) = -f(x) \iff f(x) \leq 0$
۷) $ f(x) > f(x) \iff f(x) < 0$	۷) $ f(x) > -f(x) \iff f(x) > 0$



۱. دستگاه اعداد حقیقی:

تعریف (اعداد حقیقی): اعدادی هستند که بتوانیم آن‌ها را به صورت اعشاری بیان کنیم. نظیر: $e, \pi, \sqrt{5}, -\frac{1}{3}, \gamma$. مجموعه این اعداد را با نماد \mathbb{R}

می‌دهیم. بدین است که $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$.

تعریف (دستگاه اعداد حقیقی): منظور از دستگاه اعداد حقیقی، مجموعه اعداد حقیقی همراه دو عمل جمع و ضرب تعریف شده در آن است. دستگاه اعداد حقیقی

با نماد $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ نشان داده می‌شود.

در زیر اصول جمعی و ضربی به همراه خاصیت بخشی را برای اعداد حقیقی را بررسی می‌کنیم:

الف) اصولهای جمعی:

۱. عمل جمع در \mathbb{R} بسته می‌باشد، یعنی $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a + b \in \mathbb{R}$

۲. عمل جمع در \mathbb{R} خاصیت جابجایی دارد، یعنی $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a + b = b + a$

۳. عمل جمع در \mathbb{R} خاصیت شرکت‌پذیری دارد، یعنی $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad (a + b) + c = a + (b + c)$

۴. مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} دارای عضو همانی (صفر) است، یعنی $\forall a \in \mathbb{R} \quad a + 0 = 0 + a = a$

۵. هر عضو از \mathbb{R} دارای قرینه است، یعنی $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists (-a) \in \mathbb{R} \text{ s.t. } a + (-a) = (-a) + a = 0$



قضیه ۱: عضو صفر در مجموعه اعداد حقیقی منحصر به فرد است.

اثبات:



قضیه ۲: هر عدد حقیقی دارای عضو قرینه منحصر به فرد است.

اثبات:

مثال ۱: برای هر دو عدد حقیقی x و y نشان دهید: $-(x + y) = -x - y$

مثال ۲: برای هر عدد حقیقی x نشان دهید: $-(-x) = x$

مثال ۳: برای هر سه عدد حقیقی x و y و z نشان دهید اگر $x + z = y + z$ ، آن‌گاه $x = y$.



بیا اصل‌های ضربی:

۱. عمل ضرب در \mathbb{R} بسته می‌باشد، یعنی $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad ab \in \mathbb{R}$.۲. عمل ضرب در \mathbb{R} خاصیت جابجایی دارد، یعنی $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad ab = ba$.۳. عمل ضرب در \mathbb{R} خاصیت شرکت‌پذیری دارد، یعنی $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a(bc) = (ab)c$.۴. مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} دارای عضو همانی (عدد یک) است، یعنی $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.۵. هر عضو غیر صفر از \mathbb{R} دارای وارون است، یعنی $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists \left(\frac{1}{a}\right) \in \mathbb{R} \quad \text{s.t.} \quad a \left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a}\right) a = 1$.نکته: عمل ضرب نسبت به جمع دارای خاصیت توزیع‌پذیری به صورت روپرو است: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a(b+c) = ab+ac$ قضیه ۳: الف) وارون هر عدد حقیقی منحصر به فرد است. ب) عضو یک در اعداد حقیقی منحصر به فرد است.اثبات:قضیه ۴: وارون وارون هر عدد حقیقی، برابر خودش است.اثبات:تمرین ۱: اگر اعداد $x-y+2$ و $2x+y-1$ قرینه عدد حقیقی a باشند و عدد x نیز وارون y باشد، حاصل $\frac{1}{x^2+4y^2}$ کدام است؟ $(x, y \neq 0)$

(۱) $\frac{1}{9}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{5}$ (۴) غیر قابل محاسبه

تمرین ۲: اگر اعداد گویای $\frac{x+1}{2x+1}$ و $\frac{y}{5}$ هر دو وارون عدد xy^{-1} باشند، کدام است؟

(۱) ۱ (۲) $\frac{۳۶}{۵}$ (۳) $\frac{۴}{۵}$ (۴) $\frac{۲۰}{۹}$

شرح ۴: برای هر دو عدد حقیقی x و y نشان دهید:

- (الف) $xy = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$ (ب) $x(-y) = (-x)y = -xy$ (ج) $(-x)(-y) = xy$ (د) $x \times 0 = 0$ (الف)

(ب)

(ج)

(د)

شرح ۵: برای هر سه عدد حقیقی x و y و z نشان دهید $x(y-z) = xy - xz$.



۲. بسط اعشاری اعداد گویا:

هر عدد گویا یا دارای بسط اعشاری منتووم نظیر 0.12 است، یا بسط اعشاری متناوب ساده نظیر $0.121212\dots$ دارد و یا بسط اعشاری متناوب مرکب نظیر $0.12555\dots$ دارد.
نکته: عدد اعشاری گویا غیر منتووم را می توان به صورت زیر به شکل کسری تبدیل کرد:

$$0.\overline{a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n} = \frac{a_1 a_2 \dots a_m b_1 b_2 \dots b_n - a_1 a_2 \dots a_m}{\underbrace{99\dots 9}_n \underbrace{00\dots 0}_m}$$

شرح ۶: اعداد زیر را به شکل کسری تبدیل کنید. $0.\overline{123} =$ $0.\overline{14} =$ $2/3 =$

تست ۳: اگر کسر مولد عدد $0.\overline{7a}$ به صورت $\frac{b}{11}$ باشد a چه عددی است؟ (۱) ۲ (۲) ۶ (۳) ۴ (۴) ۹

تست ۴: اگر $0.\overline{4a} = \frac{b}{15}$ حاصل $a + b$ برابر است با؟ (۱) ۱۴ (۲) ۱۳ (۳) ۱۶ (۴) ۱۹

تست ۵: اگر $A = 1/۳۶۳۶۳۶...$ باشد، حاصل $(\frac{1}{A} + \frac{3}{5})$ کدام است؟

$\frac{5}{4}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

$\frac{5}{3}$ (۱)

تست ۶: حاصل $\sqrt{0.۱۷} / \sqrt{0.۱۵}$ برابر ... است.

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

نکته: اگر در تجزیه کسر تجزیه ناپذیر از عددی گویا، فقط اعداد ۲ یا ۵ موجود باشند، عدد مختوم، اگر فقط اعداد غیر از ۲ و ۵ موجود باشند، عدد متناوب ساده، و اگر از هر دو نوع باشند، عدد متناوب مرکب است.



مثال ۷: نوع اعداد $\frac{3}{۲۰}$ ، $\frac{2}{۱۴}$ و $\frac{3}{۱۴}$ را بیابید.

تست ۷: به ازای چند مقدار طبیعی n کسر کوچکتر از واحد $\frac{2n}{35}$ یک بسط اعشاری متناوب ساده است؟

۷ (۴)

۶ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

تست ۸: به ازای چند مقدار طبیعی n کسر کوچکتر از واحد $\frac{n}{۱۸}$ یک بسط اعشاری متناوب مرکب است؟

۸ (۴)

۹ (۳)

۱۶ (۲)

۱۷ (۱)

قهبیه ۵: اگر عدد غیر صفر $a \in \mathbb{Q}$ و همچنین $b \in \mathbb{Q}'$ را داشته باشیم، آن‌گاه همه اعداد روبه‌لنگ هستند: $a \pm b, ab, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{1}{b}$.

نکته: اعداد لنگ \sqrt{a}, e, π (به شرطی که عدد حقیقی a مربع کامل نباشد) هیچ‌کدام بسط اعشاری مختوم یا متناوبی ندارند.

نکته: عدد گویای $\frac{a+c}{b+d}$ بین اعداد گویای $\frac{c}{d}$ و $\frac{a}{b}$ قرار دارد، همچنین عدد لنگ $a + \frac{b-a}{\sqrt{2}}$ بین اعداد گویای a, b قرار دارد.



مثال ۸: بین اعداد گویای $0, \frac{1}{5}$ یک عدد گویا و یک عدد گنگ بیابید.

«(برترین عبادت محابمت نمودن بر تفکر دربارہ خداوند و قدرت اوست.)»

تست ۹: اگر α و β دو عدد گنگ باشند، چه تعداد از اعداد $\alpha + \beta$ ، $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ، $\alpha + \beta + \alpha\beta$ و α^β حتماً گنگ هستند؟

(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) هیچ (۴) ۱

تست ۱۰: با فرض گویا بودن a, b از تساوی $\frac{ab + b\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$ ، حاصل $a - b$ کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

تست ۱۱: اگر a گویا و b گنگ باشد، کدام یک از اعداد زیر حتماً گنگ است؟

(۱) ab^2 (۲) a^2b (۳) $a + b^2$ (۴) $a^2 + b$

تست ۱۲: اگر m عددی گنگ باشد، کدامیک همواره گنگ است؟

(۱) $m^2 + 3m$ (۲) $\frac{2m+2}{m-1}$ (۳) $m + \frac{1}{m}$ (۴) $m^3 + 1$

تست ۱۳: اگر a^3 عددی گویا و b^5 عددی گنگ باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) $a^2 + b^5$ گویاست. (۲) a^3b^5 گنگ است. (۳) $a^3 + b^5$ گویاست. (۴) $\frac{a^6 + 1}{b}$ گنگ است.

تعریف: مجموعه A نسبت به عمل جمع بسته است هرگاه حاصل جمع هر دو عضو آن، عضوی از خود آن مجموعه باشد. برای سه عمل تقرب، ضرب و تقسیم نیز بسته بودن مشابه تعریف بالا معرفی می‌شود.



مثال ۹: الف) آیا مجموعه اعداد گنگ نسبت به چهار عمل اصلی بسته است؟
ب) آیا مجموعه اعداد صحیح نسبت به چهار عمل اصلی بسته است؟
ج) آیا $A = \{-1, +1\}$ نسبت به چهار عمل اصلی بسته است؟

تست ۱۴: کدام یک از جملات زیر درست است؟

- (۱) مجموعه اعداد گنگ نسبت به ضرب بسته است. (۲) مجموعه اعداد گنگ نسبت به جمع بسته است.
(۳) مجموعه $\{-1, 0, 1\}$ نسبت به چهار عمل اصلی بسته است. (۴) مجموعه $\{-1, 1\}$ نسبت به عمل ضرب و تقسیم بسته است.

در مجموعه \mathbb{R} تنها مجموعه منتهای که نسبت به جمع بسته باشد مجموعه $\{0\}$ و تنها مجموعه‌های منتهای که نسبت به ضرب بسته باشند $\{0\}$ ، $\{0, 1\}$ ، $\{-1, 1\}$ ، $\{-1, 0, 1\}$ ، $\{1\}$ می‌باشند.



تست ۱۵: کدام مجموعه‌ی زیر نسبت به عمل ضرب بسته است؟

- (۱) $\{0, -1\}$ (۲) $\{-1, 1\}$ (۳) $\{0, 2\}$ (۴) $\{1, 2\}$

تست ۱۶: کدام مجموعه زیر نسبت به ضرب بسته نیست؟

- (۱) $\{3k+1 | k \in \mathbb{Z}\}$ (۲) $\{4k+1 | k \in \mathbb{Z}\}$ (۳) $\{2k+10 | k \in \mathbb{Z}\}$ (۴) $\{3k+2 | k \in \mathbb{Z}\}$

تست ۱۷: مجموعه منتهای A نسبت به عمل جمع بسته است. مجموعه $A \cup \{1\}$ نسبت به عمل

بسته است؟

- (۱) جمع (۲) ضرب (۳) جمع و ضرب (۴) تفریق

تست ۱۸: مجموعه منتهای $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ نسبت به عمل ضرب بسته است. بیشترین مقدار $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) n (۳) ۰ (۴) ۱

تست ۱۹: اگر مجموعه $A = \{a-1, b, c+1\}$ نسبت به عمل جمع بسته باشد، مجموعه $B = \{a, b, c\}$ نسبت به کدام عمل بسته است؟

- (۱) جمع (۲) تفریق (۳) ضرب (۴) تقسیم

تست ۲۰: مجموعه منتهای A نسبت به عمل جمع بسته است، مجموعه $A \cup \{-1, 1\}$ نسبت به کدام عمل بسته است؟

- (۱) جمع (۲) ضرب (۳) تفریق (۴) تقسیم

تست ۲۱: مجموعه $A = \{x + y\sqrt{2} | x, y \in \mathbb{Q} - \{0\}\}$ نسبت به چند عمل از چهار عمل اصلی بسته است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳



تعریف: عدد حقیقی a از عدد حقیقی b کوچکتر (یا a بزرگتر) است اگر $b - a$ مثبت باشد.
نکته: با تعریف بالا مجموعه اعداد حقیقی یک مجموعه مرتب نامیده می‌شود. یعنی هر دو عضو از آن با یکدیگر قابل مقایسه‌اند.

خواص نامساوی‌ها:



اگر a, b, c و c سه عدد حقیقی باشند داریم:

$$\begin{aligned} (a < b, c < d) &\Rightarrow a + c < b + d \quad ۲ & (a < b, b < c) &\Rightarrow a < c \quad ۱ \\ (a < b, c > ۰) &\Rightarrow ac < bc \quad ۴ & a < b &\Rightarrow a + c < b + c \quad ۳ \\ (ab > ۰, a < b) &\Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \quad ۶ & (a < b, c < ۰) &\Rightarrow ac > bc \quad ۵ \\ (a, b > ۰, a < b) &\Rightarrow a^2 < b^2 \quad ۸ & (ab < ۰, a < b) &\Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad ۷ \\ & & (a, b < ۰, a < b) &\Rightarrow a^2 > b^2 \quad ۹ \end{aligned}$$

نکته: اگر n عددی فرد و $a < b$ باشد، آنگاه $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ ، $a^n < b^n$.

نکته: اگر $۰ < a < b$ ، $۰ < c < d$ ، آنگاه $ac < bd$.

تست ۲۲: اگر a, b مختلف علامه و $a < b$ باشد، کدام نامساوی برقرار است؟

(۱) $a^2 < b^2$ (۲) $a^3 < b^3$ (۳) $b^2 < a^2$ (۴) $b^3 < a^3$

تست ۲۳: از نامساوی $a > b$ چه تعداد از نامساوی‌های $a^3 > ab$ ، $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ، $a^3 - b > b^3 - a$ ، $\sqrt[3]{a} > \sqrt[3]{b}$ را می‌توان نتیجه گرفت؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۲۴: اگر $a > b > ۰$ باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) $\sqrt[3]{a^2} > \sqrt[3]{b^2}$ (۲) $a^2 > b^2$ (۳) $\frac{a}{b} < ۱$ (۴) $ab > ۱$

تست ۲۵: اگر $a < b$ ، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

(۱) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ (۲) $a^2 < b^3$ (۳) $2a < 3b$ (۴) $a - 3 < b - 2$

تست ۲۶: اگر $0 < b < a$ و $0 < c < d$ ، کدام نتیجه گیری درست است؟

(۴) $\frac{c}{b} < \frac{d}{a}$

(۳) $\frac{d}{b} < \frac{c}{a}$

(۲) $\frac{c}{a} < \frac{d}{b}$

(۱) $\frac{d}{a} < \frac{c}{b}$

تست ۲۷: اگر $a > \frac{b}{c}$ آن گاه کدام نتیجه همواره درست است؟

(۴) $ac^2 > bc$

(۳) $ab^2 > \frac{b^3}{c}$

(۲) $\frac{1}{a} < \frac{c}{b}$

(۱) $ac > b$

تست ۲۸: اگر $-x^2 \geq x$ و $-2 \leq 3y \leq -2$ ، کدام درست است؟

(۴) $-2 \leq x+y \leq 2$

(۳) $-3 \leq x+y \leq -1$

(۲) $-2 \leq x+y \leq 0$

(۱) $-1 \leq x+y \leq 1$

نکته: در حالت کلی داریم: $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \quad a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $\forall a, b \in \mathbb{R}^- \cup \{0\} \quad a+b \leq -2\sqrt{ab}$



مثال ۹: کمترین مقدار عبارت $5^x + 5^{2-x}$ را بیابید.

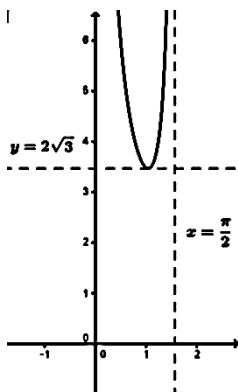
تست ۲۹: مجموعه $\left\{x^2 + \frac{4}{x^2} \mid x \neq 0\right\}$ شامل چند عدد صحیح نمی شود؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲



تست ۳۰: قسمتی از نمودار تابع $y = \tan x + b \cot x$ به صورت مقابل است. مقدار مثبت b کدام است؟

(۴) ۸

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱۲



نتیجه: داریم: $\forall a > 0, a + \frac{1}{a} \geq 2, \forall a < 0, a + \frac{1}{a} \leq -2$.

نکته: در حالت کلی داریم: $\forall a, b, x, -\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \sin x \pm b \cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

مثال ۱۰: برد توابع $y = \sin x + \cos x$ و $y = \sin 2x - 4 \cos^2 x$ را بیابید.



نکته: در حالت کلی داریم: $\forall a, b, x, y \in \mathbb{R}, (ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$.

تست ۳۱: با فرض $x^2 + y^2 = 9$ ، حداکثر $3x - 4y$ کدام است؟

۱۲ (۴) ۱۸ (۳) ۲۵ (۲) ۱۵ (۱)

تست ۳۲: بیشترین مقدار عبارت $y = ax + \sqrt{1 - x^2}$ برابر است با:

۱) $\frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$ ۲) $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 1}}$ ۳) $a^2 + 1$ ۴) $\sqrt{a^2 + 1}$



نکته: برای عدد حقیقی a و اعداد طبیعی m, n داریم:

$$\begin{cases} (n > m, 0 < a < 1) \rightarrow a^m > a^n > 0 \\ (n > m, a > 1) \rightarrow a^n > a^m > 0 \end{cases}$$

تست ۳۳: کدام گزینه نادرست است؟

۱) $\sqrt[5]{\sqrt{3}-1} > \sqrt[3]{\sqrt{3}-1}$ ۲) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{200} > (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{300}$ ۳) $\left(\frac{1}{4}\right)^5 > \left(\frac{1}{4}\right)^7$ ۴) $(\pi-3)^{20} > (\pi-3)^{40}$

تست ۳۴: کدام گزینه بزرگتر از بقیه است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) $\sqrt[3]{3}$ ۳) $\sqrt[5]{5}$ ۴) $\sqrt[6]{6}$



بازه‌های اعداد: برای نمایش محدوده‌های خاص از اعداد حقیقی از بازه‌ها استفاده می‌شود. بازه‌ها به صورت زیرند:

$$(a, +\infty) = \{x : x > a\}$$

$$(a, b) = \{x : a < x < b\}$$

$$[a, +\infty) = \{x : x \geq a\}$$

$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$$

$$(-\infty, b) = \{x : x < b\}$$

بازه‌های نامحدود (بی‌کرانه):

$$[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$$

بازه‌های باز و نیم‌باز (کرانه‌دار):

$$(-\infty, b] = \{x : x \leq b\}$$

$$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$$

همسایگی متقارن: به بازه‌هایی از اعداد نظیر (a, b) و $[a, b]$ همسایگی متقارن به مرکز $x_0 = \frac{a+b}{2}$ و شعاع $r = \frac{b-a}{2}$ می‌گوییم. این

همسایگی‌ها را می‌توانیم به ترتیب به صورت $\{x : |x - x_0| < r\}$ و $\{x : |x - x_0| \leq r\}$ نشان دهیم.

شرح ۱۱: شعاع و مرکز بازه‌های $(-4, 2)$ و $(-7, 4)$ را بیابید و سپس این بازه‌ها را به صورت یک نامساوی قدرمطلق نشان دهید.

شرح ۱۲: نامساوی‌های $0 < -6 \leq |3x + 4| \leq 2$ ، $2 \leq \frac{2x-4}{5}$ یک بازه را مشخص می‌کند. این بازه، مرکز و شعاع آن را مشخص کنید.

تست ۳۵: در همسایگی محذوف متقارن به صورت $\{3\} - (3a - 7, a + 5)$ ، شعاع همسایگی، کدام است؟

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تست ۳۶: یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع بیشترین مقدار ممکن زیرمجموعه‌ی $\left\{x : \left|\frac{x-3}{2x-1}\right| > 1\right\}$ است، a کدام است؟

$\frac{11}{6}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{3}$ (۲)

$-\frac{3}{4}$ (۱)

تست ۳۷: مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $\frac{x-2}{x-4} < \frac{x+2}{x}$ یک همسایگی متقارن به مرکز است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تست ۳۸: اگر I_1 یک همسایگی متقارن a به شعاع ۲ و I_2 یک همسایگی متقارن ۳ به شعاع $2a$ و $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ ، آنگاه حدود تغییرات a کدام است؟

۰ < a ≤ 1/3 (۴)

1/5 ≤ a ≤ 1/3 (۳)

۰ < a ≤ 1/5 (۲)

۰ < a ≤ ۱ (۱)

تست ۳۹: جواب نامعادله‌ی $8 < \left| \frac{5}{2} - \frac{-3x+x^2}{2x-6} \right|$ در بازه‌ی متقارن به مرکز ۵ و به شعاع 1/5 قرار دارد. بیشترین مقدار ε کدام است؟

2/5 (۴)

1/20 (۳)

2/11 (۲)

1/10 (۱)

تست ۴۰: اگر بازه $(3a-7, a+5)$ بازه متقارن به مرکز ۳ و شعاع r باشد، در این صورت:

$r = 4$ (۴)

$r = 3$ (۳)

$r = 2$ (۲)

$r = 1$ (۱)

تست ۴۱: مجموعه جواب نامعادله $x^2 + ax + b < 0$ یک بازه متقارن به مرکز ۳ است. مقدار a کدام است؟

-۳ (۴)

۳ (۳)

-۶ (۲)

۶ (۱)



ع. قدر مطلق:

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

تعریف: برای هر عدد حقیقی x تعریف می‌کنیم

قضیه ۶: برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$|ab| = |a||b|, \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}, |a^n| = |a|^n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{الف}$$

ب)

$$-|a| \leq a \leq |a|, |a| \leq k \Leftrightarrow -k \leq a \leq k, |a| \geq k \Leftrightarrow a \geq k \vee a \leq -k, |a+b| \leq |a|+|b| \quad (k \in \mathbb{R}^+)$$

اثبات:

تست ۴۲: مجموعه جواب نامعادله $|2x - m| \leq x$ یک همسایگی به شعاع ۲ است. مرکز این همسایگی کدام است؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

شماره ۱۳: برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم: $|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|$

مثال ۱۴: فرض کنید $a < x < b$. ثابت کنید $|x| < \text{Max}\{|a|, |b|\}$. آیا عکس حکم درست است؟

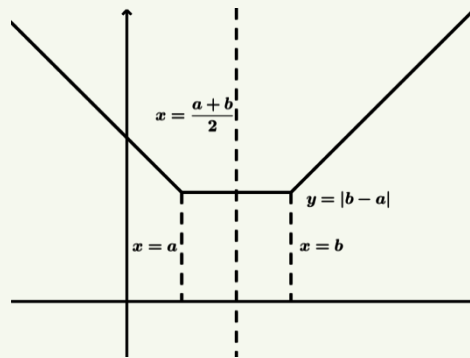
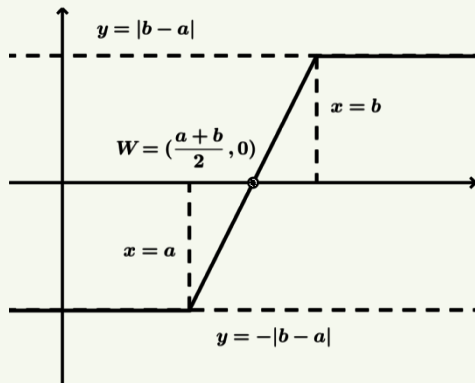


نکته: توابع قدر مطلق به شکل $y = |x-a| + |x-b|$ ، گدانی نامیده می‌شوند و داریم: $\min(y) = |b-a|$ و همچنین خط $x = \frac{a+b}{2}$

تغیر آن است. در این توابع اگر $a+b=0$ تابع زوج است.

نکته: توابع $y = |x-a| - |x-b|$ آشاری نامیده می‌شوند و داریم: $\min(y) = -|b-a|$, $\max(y) = |b-a|$ و همچنین نقطه

مرکز تغییر آن است. در این توابع اگر $a < b$ ، تابع صعودی و اگر $a > b$ تابع نزولی است و اگر $a+b=0$ تابع فرد است.



مثال ۲۳: اگر $f(x) = -2|x| + |x-2| + |3x+1|$ در بازه $[a, b]$ تابعی ثابت باشد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

مثال ۱۵: نشان دهید اگر برای هر عدد مثبت h ، $0 \leq a < h$ ثابت کنید $a=0$.

مثال ۱۶: نشان دهید اگر برای هر عدد طبیعی n رابطه $a \leq b < a + \frac{1}{n}$ برقرار باشد، آن گاه $b=a$ است.

تست ۴۴: برای هر $x > 0$ رابطه $x < 2 + 4b + 2a - 4b + 2a^2 + 4b^2 \leq 0$ برقرار است. حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

تست ۴۵: برای هر عدد n رابطه $1 < n(x^2 + x - 3) \leq 0$ برقرار است. مقدار $x^2 + \frac{9}{x^2}$ چقدر است؟

- (۱) ۸ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۹

تست ۴۶: اگر برای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $\varepsilon < x^2 + |x| - 6 < \varepsilon$ ، در این صورت مجموعه مقادیر x چند عضوی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۴۷: در هر پنج ضلعی منتظم نسبت قطر به ضلع کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

جزء صحیح:

تعریف: به اولین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی یک عدد حقیقی جزء صحیح آن عدد می‌گوییم. مثلا:

$$[1/5] = 1, [-2] = -2, [-0.75] = -1$$

خواص جزء صحیح: برای اعداد حقیقی x و y و عدد طبیعی n داریم:

$$[x] \leq x < [x] + 1 \text{ و } [x] = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1 \quad ۱. \quad [x] > n \Rightarrow x \geq n + 1 \text{ و } ۰ \leq x - [x] < ۱. \quad ۲.$$



تست ۴۸: اگر $198 = (\sqrt{2}-1)^6 + (\sqrt{2}+1)^6$ باشد حاصل $[(\sqrt{2}+1)^6]$ کدام است؟

- (۱) ۱۹۸ (۲) ۱۹۷ (۳) ۱۹۶ (۴) ۱۹۵

تست ۴۹: اگر جزء صحیح $(x^2 + x)$ برابر ۱- باشد، آنگاه $[x^2]$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) صفر (۳) 1 (۴) 2



$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ پس } [-x] = \begin{cases} -[x] & x \in \mathbb{Z} \\ -[x] - 1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} . ۲$$

$$[x + [x]] = ۲[x] \text{ پس } [x + n] = [x] + n . ۴$$

$$[x + y] = [x] + [y] + ۱ \text{ و } [x + y] = [x] + [y] . ۵$$

$$[nx] \geq n[x] \text{ و } [nx] = [x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \dots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] . ۶$$

$$. x \leq [x] < x + 1, x - 1 < [x] \leq x . ۷$$

تذکره ۵: معادله $\left[\frac{x}{3}\right] = \frac{x}{2}$ چند جواب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (بیشمار)

تذکره ۵: مجموعه جواب معادله $[x] - [-x] = ۵$ کدام است؟

- ۱ (۲, ۳) ۲ (۲, ۳) ۳ $\left(\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}\right)$ ۴ $\left\{\frac{۵}{۲}\right\}$

تذکره ۵: برد تابع $y = \frac{1}{x} - \left[\frac{x+1}{x}\right]$ کدام است؟

- ۱ $0 \leq y < 1$ ۲ $-1 \leq y < 0$ ۳ $-1 \leq y < 1$ ۴ $-2 \leq y < -1$

تست ۱: هر گاه به ازای هر عدد طبیعی n داشته باشیم $\frac{fn+1}{n} < 3x + x^2 \leq 4$ عدد x کدام است؟ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۲: اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $2 + 5\varepsilon < x + \frac{1}{x} \leq 2$ حاصل $x^5 - 3x$ کدام است؟ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۳: بازه (a, b) مجموعه جواب نامعادله $1 < \frac{1}{2x+1} < \frac{1}{2}$ میباشد. مرکز بازه کدام است؟
(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{8}$ (۴) ۱

تست ۴: مجموعه جواب $A < 2x - 3 < B$ یک بازه متقارن به مرکز ۱ و شعاع $\frac{1}{10}$ است. $\frac{A+B}{2}$ چه عددی است؟
(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

تست ۵: جواب نامعادله $2x + |x - 1| > 5$ که در بازه متقارن به مرکز ۱ و شعاع ۲ قرار داشته باشد، عبارت است از:
(۱) (۲, ۳) (۲) (۱, ۷) (۳) (-۱, ۲) (۴) (-۲, ۳)

تست ۶: اگر جواب عبارت $10 \leq |x - 2| \leq k$ را به فرم $|x| \leq k$ بنویسیم، حداقل مقدار k چه عددی است؟
(۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۶

تست ۷: قسمتی از نمودار تابع $y = |x| + |x+1| + |2x+6|$ یک پاره خط افقی است، طول آن چه عددی است؟
(۱) ۱ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) ۳

تست ۸: هرگاه $a < 0 < b$ ، حاصل $|a-b| + |a+1| - |1-b|$ ، کدام است؟

- (۱) $2a + 2b + 2$ (۲) $2a + 2b$ (۳) $2a$ (۴) $2b$

تست ۹: چند نقطه روی محور x ها وجود دارد که مجموع فواصل آنها از نقاط به طولهای ۱ و ۲ بر این محور برابر ۲ باشد؟

- (۱) بی شمار (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) صفر

تست ۱۰: اگر x عددی گنگ و y عددی گویا باشد، کدام گزینه الزاماً گنگ است؟

- (۱) $xy - y$ (۲) $\frac{1}{x} + y$ (۳) $xy + y$ (۴) $x^2 y^2$

تست ۱۱: هرگاه مجموعه جواب نامعادله $|x+1| + |2x-2| < |3x-1|$ به صورت یک بازه متقارن باشد، مرکز بازه چه عددی است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) -۱

تست ۱۲: کسر مولد عدد اعشاری $\frac{3}{45}$ به صورت یک کسر تحویل ناپذیر است. مخرج کسر چه عددی است؟

- (۱) ۱۲ (۲) ۴ (۳) ۱۴ (۴) ۱۱

تست ۱۳: مجموعه جواب نامعادله $0 < [x-1-3][x-2+1]$ شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) صفر

تست ۱۷: بین دو عدد $\frac{2}{9}$ و ۳ چند عدد گویا وجود دارد؟ (۱) ۱ (۲) بی شمار (۳) ۲ (۴) هیچ عددی وجود ندارد

«هیچ کس نمی تواند ما را بهتر از خودمان فریب دهد، تنها شرط رسیدن به پیروزی داشتن اراده قوی است، شرایط دیگر اهمیتی ندارد.»*

تست ۱۸: اگر $2[x] + y = 7/6$ و $2[y] + x = 5/2$ ، حاصل $x + y$ کدام است؟

- (۱) $7/8$ (۲) $4/8$ (۳) $5/8$ (۴) $6/8$

تست ۱۹: مجموعه جواب معادله $\frac{[x + [x]]^3}{4} + \frac{[x - [x]]^3}{8} = 432$ کدام است؟

- (۱) $[6, 7]$ (۲) $[12, 13]$ (۳) $[4, 6]$ (۴) $[12, 14]$

تست ۲۰: اگر x, y دو ضلع قائم از مثلثی به طول وتر $5\sqrt{2}$ باشند، بیشترین مقدار $3x + 4y$ کدام است؟

- (۱) $25\sqrt{2}$ (۲) $28\sqrt{2}$ (۳) 36 (۴) 40

(سراسری ۹۰)

تمارین کتاب

۱- نامعادله $-\frac{2}{x} < \frac{5}{x-1}$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را روی خط حقیقی نشان دهید.

۲- جواب نامعادله‌های زیر را به صورت بازه و یا اجتماعی از بازه‌ها پیدا کنید.

الف) $3x + 5 \leq 8$ (ب) $5x - 3 \leq 7 - 3x$

ج) $x^2 < 9$ (د) $\frac{1}{2-x} < 3$

۳- هر یک از نامساوی‌های زیر یک بازه را مشخص می‌سازد. این بازه را بنویسید.

الف) $|x - 2| \leq 2$ (ب) $|2x + 5| < 1$ (پ) $\left| 2 - \frac{x}{2} \right| < \frac{1}{2}$

ت) $|3x - 7| < 2$ (ث) $|5 - 3x| < 3$

۴- جواب‌هایی از نابرابری $|x^2 - 4| < 1$ را به دست آورید که در بازه متقارن $(2 + \frac{1}{10}, 2 - \frac{1}{10})$ قرار داشته باشند.

۵- جواب‌هایی از نابرابری $|x^2 - 9| < \frac{1}{100}$ را به دست آورید که در بازه متقارن $(2.4, 2.4)$ قرار داشته باشند.

۶- ثابت کنید که اگر $0 < a < 1$ و $n \in \mathbb{N}$ آنگاه $0 < a^n \leq a$

۷- جواب‌هایی از نابرابری $\sqrt{x^2 - 9} < \frac{1}{100}$ را به دست آورید که در بازه متقارن $(3 + \frac{1}{10}, 3 - \frac{1}{10})$ قرار دارند.

۸- فرض کنیم $a < x < b$ ، ثابت کنید $|x| < \text{Max}\{|a|, |b|\}$

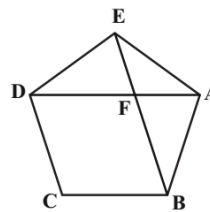
(منظور از Max، ماکسیمم مقدار مجموعه است)

آیا عکس این حکم درست است؟

۹- فرض کنیم برای هر عدد مثبت h ، $0 \leq a < h$ ، ثابت کنید $a = 0$

۱۰- ثابت کنید در هر پنج ضلعی منتظم با طول ضلع a ، نسبت طول قطر به طول ضلع، عددی گنگ است. (قضیه هیپاسوس)

راهنمایی: ابتدا نشان دهید دو مثلث ABE و FEA در شکل زیر متشابه‌اند.



۱۱- ثابت کنید $\sqrt{3}$ عددی گنگ است.

۱۲- ثابت کنید \log_3 گویا نیست.

۱۳- ثابت کنید:

نامساوی زیر (نامساوی برنولی) به ازای هر عدد طبیعی n و هر عدد حقیقی $x \geq -1$ برقرار است.

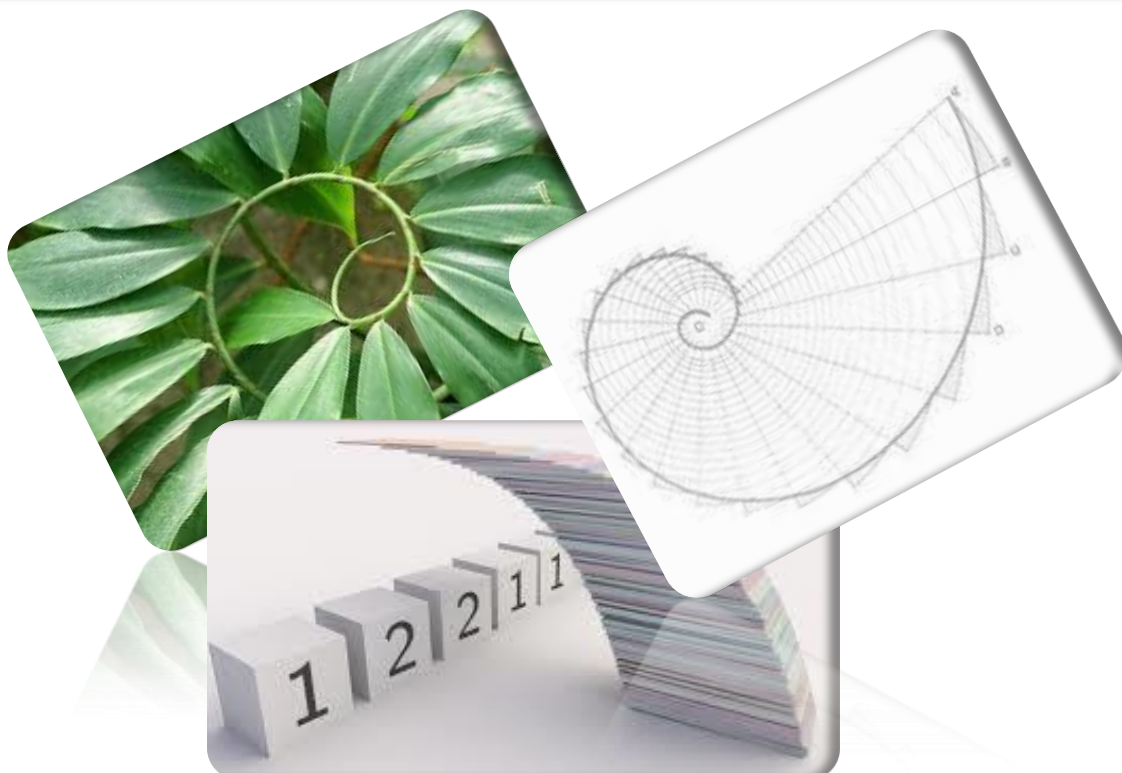
$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (\text{راهنمایی: استقرا})$$

فصل اول

دنباله‌ها

تعداد تست: ۱۰۶

تعداد مثال: ۱۹





$$a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

دنباله اعداد: دنباله تابعی است با دامنه اعداد طبیعی که هر عدد طبیعی را به یک عدد حقیقی نسبت می‌دهد.
 $n \mapsto a_n$

برای نمایش دنباله‌ها از نماد $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ و یا $\{a_n\}$ استفاده می‌کنیم، که در آن a_n جمله عمومی دنباله نامیده می‌شود.

نکته: دنباله‌ها را می‌توان روی محور اعداد حقیقی و یا مانند توابع در دستگاه مختصات نمایش داد.

مثال ۱: الف) چند جمله اول از دنباله‌های $b_n = \left\{ \frac{1}{2n} \right\} a_n = \{(-1)^n n\}$ را بیابید. ب) جملات این دنباله‌ها را یک‌بار در دستگاه محورهای مختصات و یک‌بار بر روی محور اعداد حقیقی نشان دهید.

تست ۱: دنباله $\{2n^2 - 37n\}$ چند جمله منفی دارد؟

- ۱۸ (۱) ۱۹ (۲) ۲۰ (۳) ۲۳ (۴)

تست ۲: دنباله $\left\{ \frac{3n-4}{2n-19} \right\}$ چند جمله منفی دارد؟

- ۸ (۱) ۵ (۲) ۳ (۳) ۴ بی‌شمار

تست ۳: چند جمله دنباله $a_n = \left[\log_2 \frac{n+3}{2} \right]$ برابر ۳ است؟

- ۱۵ (۱) ۱۶ (۲) ۸ (۳) ۷ (۴)

نکته: می‌دانیم که به کمک مشتق می‌توان بزرگترین و یا کوچکترین جمله مقدار یک تابع را به دست آورد. پس با توجه به تابع بودن دنباله‌ها، می‌توانیم به کمک مشتق از ضابطه دنباله، بزرگترین و یا کوچکترین مقدار دنباله را بیابیم.



تست ۴: کوچکترین جمله دنباله $a_n = n^3 - 12n^2 + 128$ کدام است؟

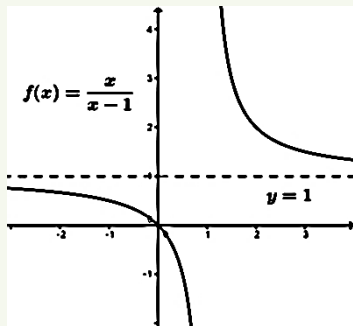
- ۱۲۸ (۱) -۶۴ (۲) -۲۵۶ (۳) -۱۲۸ (۴)

(آزاد تجربی ۸۰)

«(هر کاری که انجام می‌دهید در واقع دارید هفتان را می‌فروشید، آن را از آن نفره‌شید.)»

در کدام یک از دنباله‌های زیر، تمام جملات دنباله بین دو عدد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{11}$ واقع است؟

- (۱) $\left\{ \frac{n+10}{n+11} \right\}$ (۲) $\left\{ \frac{n+1}{1 \cdot n+11} \right\}$ (۳) $\left\{ \frac{n+1}{11n+10} \right\}$ (۴) گزینه ۲ و ۳



حد در بی‌نهایت: به نمودار تابع f دقت کنید:

مشاهده می‌شود که با میل کردن x به سمت اعداد مثبت خیلی بزرگ و منفی خیلی کوچک،

مقدار تابع به عدد یک نزدیک می‌شود. در این حالت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

برای همسایه چنین حدهایی کافی است از جمله با بیشترین درجه را نوشته و سایر جملات را حذف کنیم.

نکته: داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^r} = 0 \quad (r \in \mathbb{N}), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax = \pm\infty \quad (a > 0), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax = \mp\infty \quad (a < 0), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} ax^{2n} = +\infty \quad (a > 0, n \in \mathbb{N})$$

مثال ۲: حاصل‌دهای زیر را بیابید.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x+5}$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2+3}{5-x}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6x-x^2}{x^3+5x}$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \frac{x^3+3x-1}{5x^2-x^3}$$



انواع دنباله‌ها:

(۱) دنباله‌های همگرا و واگرا: دنباله $\{a_n\}$ همگرا است مرگه عددی حقیقی نظیر L موجود باشد بطوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. در غیر این صورت دنباله واگرا می‌باشد.

مثال ۳: همگرایی و یا واگرایی دنباله‌های $\left\{ \frac{n^2+1}{n+4n^2} \right\}$, $\{\sin n\}$, $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ و $\{(-1)^n\}$ را مشخص کنید.

تست ۷: اگر $a_n = (2n+1)!$ باشد، دنباله $b_n = \frac{5a_{n+1} + 3n^2 a_n}{2a_{n+1} + 4n^2 a_n}$ به کدام عدد همگراست؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{23}{12}$ (۴) $\frac{13}{8}$

تست ۷: اگر $a_n = \sqrt{n^2 + 2n}$ و $b_n = \frac{n^2 + 1}{n}$ ، هر یک از دو دنباله $\{a_n - b_n\}$ و $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ به ترتیب چگونه‌اند؟

سراسری ۸۶

(۱) همگرا - همگرا (۲) همگرا - واگرا (۳) واگرا - همگرا (۴) واگرا - واگرا

تست ۸: حد دنباله $u_n = \frac{1}{1 - \left[\frac{-1}{n}\right]}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{1}{2}$ (۲) 0 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) 1

تست ۹: کدام دنباله همگرا است؟

- (۱) $\{n(-1)^{2n-1}\}$ (۲) $\{\cos \frac{n\pi}{2}\}$
 (۳) $\left\{ \left[2 + \frac{(-1)^n}{n} \right] \right\}$ (۴) $\left\{ \left[1 - \frac{(-1)^n}{n} \right] \right\}$
- سراسری ۸۷

تست ۱۰: دنباله $\{a_n\}$ که در آن $a_n = 1$ و $a_n = a_{n-1} \left(\cos \frac{x}{2^n}\right)$ ، با در نظر گرفتن $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ ، به ازای $x = \frac{\pi}{p}$ ، a_n به کدام عدد همگرا است؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{6}$ (۳) $\frac{2}{\pi}$ (۴) $\frac{p}{\pi}$
- خارج ۹۱

* ((آدم بدبین سختی را در هر فرصتی می بیند، آدم خوش بین فرصت را در هر سختی))*

نکته: برای اثبات همگرایی دنباله‌ها ثابت می‌کنیم: $\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geq M |a_n - L| < \varepsilon$.



با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها، همگرایی دنباله‌های $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ و $\left\{ \frac{n^2}{2n^2 - 1} \right\}$ و $\left\{ 3 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}$ را ثابت کنید.

مشق

تست ۱۱: در مجموعه اعداد طبیعی برای $n \geq n_0$ فاصله نقاط دنباله $\left\{ \frac{2n+8}{3n+4} \right\}$ از نقطه همگرایی خود کمتر از 0.04 است، کمترین مقدار n_0 کدام است؟ الف) ۴۱ ب) ۴۲ ج) ۴۳ د) ۴۴

تست ۱۲: جملات دنباله $\left\{ \frac{n+2}{n+1} \right\}$ برای $n > 49$ الزاما در کدام بازه قرار می‌گیرند.
الف) $(0.9, 1)$ ب) $(1, 1.2)$ ج) $(0.98, 1)$ د) $(1, 1.01)$

مشق ۴: دنباله $\left\{ \frac{2n}{n+1} \right\}$ مفروض است. محدوده n را چنان بیابید که داشته باشیم $0.0001 < \left| \frac{2n}{n+1} - 2 \right|$.

تست ۱۳: اگر در دنباله با جمله‌ی عمومی $a_n = \frac{4n-3}{2n-6}$ برای مقادیر $n > m$ ، رابطه‌ی $0 < a_n < \frac{1}{99}$ برقرار باشد، آن‌گاه کوچکترین مقدار طبیعی n کدام است؟

- ۴۵۰۳ (۱) ۴۵۰۲ (۲) ۴۵۰۴ (۳) ۴۵۰۵ (۴)

تست ۱۴: چند جمله از دنباله‌ی $\left\{ \frac{1+(-1)^n}{n^2} \right\}$ در همسایگی حد دنباله به شعاع $\frac{1}{100}$ قرار ندارد؟

- ۵ (۱) ۷ (۲) ۱۰ (۳) ۱۴ (۴)

تست ۱۵: در مجموعه اعداد طبیعی برای مقادیر $n \geq n_0$ ، فاصله نقاط دنباله $\left\{ \frac{2n+8}{3n+4} \right\}$ از نقطه همگرایی خود کمتر از $0/04$ است. کمترین مقدار n_0 کدام است؟

- ۴۱ (۱) ۴۲ (۲) ۴۳ (۳) ۴۴ (۴)

تست ۱۶: به ازای مقادیر $n \geq n_0$ ، اگر فاصله نقاط نظیر دنباله $\left\{ \frac{4n+1}{3n-2} \right\}$ از نقطه همگرایی خود، کمتر از $0/02$ باشد، کوچکترین مقدار n_0 کدام است؟

- ۶۱ (۱) ۶۲ (۲) ۶۳ (۳) ۶۴ (۴)

«(برنامه ریزی نکردن، یعنی برنامه ریزی برای تنگ‌ست.)»

تست ۱۷
خرج ۸۸

به ازای مقادیر $n \geq n_0$ ، فاصله‌ی اعداد دنباله‌ی $\left\{ \frac{2^n - 1}{3 + 2^{n-1}} \right\}$ از عدد همگرایی خود کوچک‌تر از $\frac{1}{4}$ است. کوچک‌ترین مقدار n_0 کدام

- است؟ (۱) ۸ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴) ۱۱

تست ۱۸
خرج ۹۰

با مقادیر $n \geq n_0$ ، فاصله‌ی نقاط جملات دنباله‌ی $\left\{ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right\}$ از نقطه‌ی همگرایی آن کم‌تر از $\frac{1}{98}$ است. کم‌ترین مقدار n_0 کدام

- است؟ (۱) ۱۱ (۲) ۱۲ (۳) ۱۳ (۴) ۱۴

تست ۱۹
خرج ۹۳

به ازای مقادیر $n \geq n_0$ ، اگر فاصله‌ی نقاط نظیر دنباله $\left\{ \frac{2n-5}{3n+2} \right\}$ از نقطه‌ی همگرایی خود کمتر از 0.01 باشد. کوچک‌ترین

مقدار n_0 کدام است؟

- (۱) ۲۰۹ (۲) ۲۱۰ (۳) ۲۱۱ (۴) ۲۱۲



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^p + bn^{p-1} + \dots}{a'n^q + b'n^{q-1} + \dots} = \begin{cases} \cdot & p < q \\ \frac{a}{a'} & p = q \\ \infty & p > q \end{cases} \quad \text{داریم:} \quad \left\{ \frac{an^p + bn^{p-1} + \dots}{a'n^q + b'n^{q-1} + \dots} \right\}$$

نکته ۱۸: برای تشخیص همگرایی دنباله‌های بشکل

مثال ۵: دنباله $\left\{ \frac{3}{4n-1} \right\}$ و $\left\{ \frac{2n}{-3n+5} \right\}$ و $\left\{ \frac{1-x^3}{x^2+4} \right\}$ به چه اعدای همگرا هستند؟

مثال ۵
خرج ۲۶



نکته ۱۹: داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} C^n = \begin{cases} 0 & |C| < 1 \\ 1 & C = 1 \\ \infty & |C| > 1 \end{cases}$ همچنین اگر $C = -1$ ، دنباله نوسانی واگرا می‌باشد.

سوال ۲۰: دنباله $\left\{ \left(\frac{5n-3}{3n+1} \right)^n \right\}$ به چه عددی همگراست؟

- (۱) $\frac{5}{3}$ (۲) -1 (۳) 0 (۴) واگرا

سوال ۲۱: دنباله $\left\{ \left(\tan^{-1} \left(\sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^n \right\}$ چگونه است؟

- (۱) همگرا به ۱ (۲) همگرا به -1 (۳) همگرا به 0 (۴) واگرا

سوال ۲۲: اگر دنباله $\{a^{-n} 2^n\}$ همگرا باشد، حدود a کدام است؟

- (۱) $-2 < a < 2$ (۲) $-2 < a \leq 2$ (۳) $a < -2 \vee a > 2$ (۴) $a < -2 \vee a \geq 2$

سوال ۲۳: هرگاه دنباله $\{\cos(n\pi) a^n\}$ نزولی باشد، حدود a کدام است؟

- (۱) $a \leq 0$ (۲) $-1 \leq a \leq 0$ (۳) $a \geq 0$ (۴) $1 \geq a \geq 0$



نکته: اگر $u \rightarrow 0$ ، آنگاه

$$\sin u \sim u, \tan u \sim u, \sin^{-1} u \sim u, \tan^{-1} u \sim u, \sin^n u \sim u^n, \tan^n u \sim u^n$$

$$\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}, \cos^n u \sim 1 - \frac{nu^2}{2} \left(\text{if } u \rightarrow 1 \Rightarrow \cos^{-1} u \sim \sqrt{1-u^2} \right)$$

* (کسی که دارای عزمی راسخ است، جهان را مطابق میل خودش عوض می کند) *

تست ۲۴: کدام دنباله زیر همگراست؟

$$d_n = (\log 5)^n \quad (\varepsilon) \quad c_n = (\tan^{-1} 2)^n \quad (3) \quad b_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n+1}\right) \quad (2) \quad a_n = \log\left(\frac{n}{n^2+1}\right) \quad (1)$$

تست ۲۵: کدام دنباله واگراست؟

$$\left\{ \frac{1}{n} \cos n \right\} \quad (4) \quad \left\{ n \cos \frac{1}{n} \right\} \quad (3) \quad \left\{ \frac{1}{n} \sin n \right\} \quad (2) \quad \left\{ n \sin \frac{1}{n} \right\} \quad (1)$$

تست ۲۶: دنباله $a_n = \left\{ \frac{3n^2}{2-4n} \times \sin \frac{2}{n} \right\}$...

(۱) واگرا است. (۲) همگرا به $\frac{2}{3}$ است. (۳) همگرا به $-\frac{2}{3}$ است. (۴) همگرا به $-\frac{2}{3}$ است.

نکته: نامساوی‌های $|\tan x| \leq |x| \leq |\sin^{-1} x|$ و $|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$ که در آن x بر حسب رادیان است، همیشه برقرار است.

نکته: وقتی $x \rightarrow 0, u \rightarrow 0$ می‌توان از هم‌ارزی‌های زیر استفاده نمود:

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{6}, \tan x \sim x + \frac{x^3}{3}, \sin^{-1} x \sim x + \frac{x^3}{6}, \tan^{-1} x \sim x - \frac{x^3}{3}, \tan x - \sin x \sim \frac{x^3}{2}$$



تست ۲۷: دنباله‌های $\left\{ n \sin \frac{\pi}{n+1} \right\}$ و $\left\{ 2n^3 \left(\frac{1}{2n} - \tan \frac{1}{2n} \right) \right\}$ به چه اعدادی همگرايند؟

تست ۲۷: دنباله $\left\{ \frac{\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} \right\}$ همگراست به:

(۱) صفر (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) واگراست.

سؤال ۲۸: دنباله $\left\{ n^2 \left(1 - \cos^3 \frac{1}{n} \right) \right\}$ به چه عددی همگراست؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۰ (۴) ۱

سؤال ۲۹: دنباله $\left\{ kn^m \left(\sin \frac{1}{n} - \tan \frac{1}{n} \right) \right\}$ همگرا به ۲ باشد، $k + m$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۱۵ (۳) -۱ (۴) -۱۵

نکته: هم‌رزی‌های زیر را داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{an^2 + bn + c} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a} \left(n + \frac{b}{2a} \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{an^3 + bn^2 + cn + d} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{a} \left(n + \frac{b}{3a} \right)$$



سؤال ۷: اگر دنباله‌ی $a_n = \sqrt{n^2 + bn} - 1 - n + 4$ همگرا به ۶ باشد، b کدام است؟

سؤال ۳۰: دنباله‌ی $a_n = \left\{ \sqrt[3]{2n + 8n\sqrt{n} - 5} - 2\sqrt{n} \right\}$ همگرا است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{3}{8}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{8}{9}$

سؤال ۳۱: دنباله $\left\{ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right\}$ به کدام عدد همگرا است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) صفر

سؤال ۳۲: دنباله $\left\{ \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + n} \right) \right\}$ چگونه است؟

- (۱) همگرا به صفر (۲) همگرا به ۱ (۳) همگرا به $\frac{1}{3}$ (۴) واگرا

بزرگترین کران پایین دنباله $\{\sqrt{n^2 + 3n} - n\}$ ، کدام است؟

۲ (۴)

۱/۵ (۳)

۱/۲۵ (۲)

۱ (۱)



نکته ۲: وقتی $n \rightarrow \infty$ ، هم‌ارزی $n^m \sqrt{\frac{n+a}{n+b}} \sim n + \frac{a-b}{m}$ را داریم.

تست ۳۴: اگر دنباله $\left\{n\sqrt{\frac{n}{n+a}} + bn\right\}$ به عدد ۱ همگرا باشد، $a+b$ کدام است؟

۳ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۳ (۱)



نکته ۲۵: برای اعداد طبیعی k, n داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} (1^k + 2^k + \dots + n^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{k+1}}{k+1}$

تست ۳۵: حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+2+\dots+n) + (1^2+2^2+\dots+n^2) + \dots + (1^{99}+2^{99}+\dots+n^{99})}{(1+2+\dots+n)^{50}}$ کدام است؟

$+\infty$ (۴)

$\frac{100}{250}$ (۳)

$\frac{2}{100}$ (۲)

$\frac{250}{100}$ (۱)

تست ۳۶: دنباله $a_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{bn^b}$ به عددی غیر صفر همگراست. این عدد کدام است؟

$\frac{1}{9}$ (۴)

$\frac{1}{6}$ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)



نکته: اگر $a > b$ ، $a' > b'$ داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{a'^n + b'^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{a'^n}$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{a'^n + b'^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{b'^n}$

۵ (۴)

۳ (۳)

۱۶ (۲)

۹ (۱)

دنباله $a_n = \frac{1}{(3^{2n} + 2^{4n})^n}$ همگراست به :

تست ۳۷

دنباله‌ی $\left\{ \frac{2^{3n+2} + 8^{n+1}}{2^{3n+1} + 8^n} \right\}$

تست ۳۸

آزاد تجربی ۸۲

(۱) همگرا به ۲ است.

(۳) همگرا به ۴ است.

(۲) همگرا به ۸ است.

(۴) واگرا است.

نکته (خودارزشی): اگر n عددی طبیعی و $a > 0, a \neq 1$ و $b > 0$ و $c > 1$ ، در حالت کلی داریم: $n^n > n! > c^n > n^b > \log_a n$



کدامیک از دنباله‌های زیر همگراست؟

تست ۳۹

(۴) $\frac{\log n}{n^2}$

(۳) $\frac{n^n}{5^n}$

(۲) $\frac{(n-2)!}{2n^3}$

(۱) $\frac{3^n}{n^3}$

کدام دنباله به صفر همگراست؟

تست ۴۰

(۱) $\left\{ \sqrt{3n+1} - \sqrt{2n-1} \right\}$ (۲) $\left\{ \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} \right\}$ (۳) $\left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{4n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{9n+1}} \right\}$ (۴) $\left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\}$

دنباله $\left\{ \frac{\log n + n^3 - n!}{(n+1)! + n^n} \right\}$ به کدام عدد همگراست؟

تست ۴۱

(۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۰ (۴) واگراست.

کدام دنباله همگراست؟

تست ۴۲

(۱) $\left\{ \frac{(n+1)!}{2 \cdot \dots \cdot n} \right\}$ (۲) $\left\{ \frac{\sqrt[2]{n}}{\log n} \right\}$ (۳) $\left\{ \frac{\pi^{n+2}}{(n+1)^{2 \cdot \dots}} \right\}$ (۴) $\left\{ \frac{2 \cdot 2 \cdot n}{n!} \right\}$



نکته (نامساوی برنولی): اگر $u > 0$ ، آنگاه: $\sqrt[m]{1 \pm u} \sim 1 \pm \frac{u}{m}$ ، $(1 \pm u)^m \sim 1 \pm mu$.

توجه ۴۳: اگر دنباله $\left\{ n \left(1 + \frac{a}{n} \right)^3 - n \right\}$ به عدد ۱۲ همگرا باشد، کدام است a ؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۲ (۴) ۶

توجه ۴۴: دنباله $\left\{ \frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^4 - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^3}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^5 - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2} \right\}$ به چه عددی همگراست؟

(۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{4}{5}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۰

نکته ۱: در صورتی که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ ، دنباله $\{a_n\}$ واگرا می‌باشد، نظیر دنباله $\{n\}$. برای اثبات واگرایی این نوع دنباله‌ها نشان می‌دهیم:

$$\forall K > 0 \exists M \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geq M \ a_n > K$$

۲ در صورتی که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ ، دنباله $\{a_n\}$ واگرا می‌باشد، نظیر دنباله $\{-n\}$. برای اثبات واگرایی این نوع دنباله‌ها نشان می‌دهیم:

$$\forall K < 0 \exists M \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \forall n \geq M \ a_n < K$$

۳ در صورتی که $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ به سمت یک عدد خاص میل نکند، دنباله $\{a_n\}$ واگرا است.

مثال ۸: واگرایی دنباله $\{n^2\}$ ، $\{\sqrt{n+1} - 2\}$ و $\{1000 - n^2\}$ را ثابت کنید.

تست ۴۵: کدام دنباله واگراست؟

(۱) $\left\{ \frac{n + \sin n}{n - \sin n} \right\}$ (۲) $\left\{ (n^2)^{(-1)^{2n-1}} \right\}$ (۳) $\left\{ \sin(\pi n + 1) \frac{\pi}{2} \right\}$ (۴) $\left\{ 1 - \frac{(-1)^n}{n} \right\}$

تست ۴۶: کدام دنباله واگراست؟

آزاد ریاضی ۷۷

(۱) $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\}$ (۲) $\left\{ \frac{n^2 + 1}{2n + 1} \right\}$ (۳) $\left\{ \frac{(-1)^n + (1)^n}{n} \right\}$ (۴) $\left\{ \frac{2n - 1}{3n + 1} \right\}$



تعریف: به دنباله حاصل از حذف تعدادی از جمله‌های یک دنباله، زیردنباله‌ای از آن می‌گوییم. حذف یا اضافه کردن تعداد متناهی جمله به یک دنباله همگرایی و واگرایی آن را تغییر نمی‌دهد.

نکته: هر زیر دنباله از یک دنباله همگرا، خود دنباله‌ای همگراست و اگر زیر دنباله‌ای از یک دنباله واگرا باشد خود دنباله نیز واگراست. مثلاً چون دنباله $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ همگرا است لذا هر زیر دنباله از آن نظیر $\left\{ \frac{1}{2n} \right\}$ نیز همگرا است.

تست ۴۷: دنباله $a_n = \begin{cases} \sin \frac{n\pi}{2} & n < 20 \\ \sin n\pi \cos n\pi & n \geq 20 \end{cases}$ به چه عددی همگراست؟

(۱) واگراست. (۲) صفر (۳) -۱ (۴) ۱

تست ۴۸: دنباله $\left\{ \cos\left(\frac{\pi}{3} n!\right) \right\}$ چگونه است؟

(۱) همگرا به ۱ (۲) همگرا به ۰ (۳) همگرا به -۱ (۴) واگرا

تست ۴۹: اگر $a_n = \frac{2n^2 + b}{n^2 + 3n}$ و $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ ، به ازای کدام مقدار b ، دنباله‌ای $\{f(a_n)\}$ همگرا است؟

خارج ۸۵

(۱) ۳ (۲) ۶ (۳) هر مقدار b (۴) هیچ مقدار b

اگر $a_n = \frac{(-1)^n}{2n}$ ، $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$ ، آن‌گاه دنباله $\{f(a_n)\}$ به کدام عدد همگرا است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) همگرا نیست.

۲) دنباله‌های کراندار و بی‌کران:

دنباله $\{a_n\}$ دارای کران بالا است اگر $\exists k \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N} a_n \leq k$ و همچنین دارای کران پایین است اگر $\exists k \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N} a_n \geq k$. اگر دنباله‌ای دارای کران بالا و پایین باشد، کراندار نامیده می‌شود. لذا دنباله $\{a_n\}$ کراندار است اگر $\exists k \in \mathbb{R} \text{ s.t. } \forall n \in \mathbb{N} |a_n| \leq k$.

نکته: هر دنباله همگرا، کراندار است، ولی عکس این موضوع صحیح نمی‌باشد. مثلاً دنباله $\left\{ \frac{3n^2 - 1}{4n^2 + 3n} \right\}$ چون همگرا به عدد $\frac{3}{4}$ است، لذا کراندار نیز است، اما دنباله $\{(-1)^n\}$ با اینکه کراندار است، ولی همگرا نمی‌باشد.



کراندار بودن دنباله‌های $a_n = \{2n\}$ ، $b_n = \{1-n\}$ ، $c_n = \{(-1)^n\}$ و $d_n = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$ را بررسی کنید.

تست ۵۱: دنباله $\left\{ \frac{n^3}{n^2+1} \right\}$ چگونه است؟

- (۱) فقط از بالا کراندار (۲) فقط از پایین کراندار (۳) نه کراندار از بالا و نه کراندار از پایین (۴) کراندار

تست ۵۲: کدام دنباله زیر کران بالا و پایین ندارد؟

- (۱) $\left\{ \sin \frac{n\pi}{2} \right\}$ (۲) $\left\{ \sin \frac{1}{n} \right\}$ (۳) $\{3^n\}$ (۴) $\{n^2(-1)^n\}$

نکته داریم: $\{\cos n\pi\} = \{(-1)^n\}$, $\left\{\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \{(-1)^n\}$, $(n \in \mathbb{N})$

نکته: اگر $a' > b'$, $a > b$ آنگاه: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{a'^n + b'^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{a'^n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n + b^n}{a'^n + b'^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{b'^n}$

نکته: اگر $a > 1$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$



تست ۵۲: کدام یک از دنباله‌های زیر کران دار است؟

(۱) $\{(-1)^n \cos n\pi\}$ (۲) $\left\{\frac{2n^2 - 1}{n + 1}\right\}$ (۳) $\left\{\frac{n}{2\sqrt{n+1}}\right\}$ (۴) $\left\{\frac{4^n}{3^n + 3^n}\right\}$ (۵)

تست ۵۴: کدام یک فقط از پایین کرندار است؟

(۱) $u_n = \frac{n+3}{n^2+1}$ (۲) $u_n = (-1)^n$ (۳) $u_n = \frac{1}{n}$ (۴) $u_n = \frac{n^2+1}{n+3}$ (۵)

تست ۵۵: کدام یک فقط از پایین کرندار است؟

(۱) $a_n = \left\{\frac{3^{n-2} + (-1)^n}{3^n}\right\}$ (۲) $b_n = \left\{\frac{2n-1}{n^2+1}\right\}$ (۳) $c_n = \{\sqrt{n^2+1} - n\}$ (۴) $d_n = \left\{\frac{2n^2}{n+4}\right\}$ (۵)

تست ۵۶: کدام دنباله از پایین کراندار است ولی از بالا کراندار نیست؟

(۱) $\left\{\log \frac{\pi}{n+1}\right\}$ (۲) $\left\{\cot \frac{\pi}{n+2}\right\}$ (۳) $\left\{n\left(\frac{2}{\delta}\right)^n\right\}$ (۴) $\left\{n \log \frac{\pi}{n+2}\right\}$ (۵)

تست ۵۷: ۱- برای مقادیر $n > 31$ ، جملات دنباله‌ی $\left\{\frac{n-2}{4n}\right\}$ در کدام بازه است؟

(۱) $\left(\frac{1}{4}, \frac{17}{64}\right)$ (۲) $\left(\frac{15}{64}, \frac{17}{64}\right)$ (۳) $\left(\frac{15}{64}, \frac{1}{4}\right)$ (۴) $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right)$ (۵)

خارج ۸۶

۲) دنباله‌های یکتوا و غیر یکتوا: دنباله $\{a_n\}$ صعودی نامیده می‌شود هرگاه $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n \leq m \Rightarrow a_n \leq a_m$. همچنین نزولی است هرگاه $\forall n, m \in \mathbb{N} \quad n \leq m \Rightarrow a_n \geq a_m$. در حالت کلی اگر دنباله‌ای صعودی یا نزولی باشد، یکتوا و اگر نباشد غیر یکتوا نامیده می‌شود.



مثال ۱۰: با نوشتن چند عضو از دنباله‌های $\{3+n\}$ ، $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ ، $\{(-1)^n\}$ ، $\left\{\left[\frac{n}{2}\right]\right\}$ و $\left\{\left[\frac{2}{n}\right]\right\}$ ، یکتوایی آن‌ها را بررسی کنید؟

نکته: اگر c یک عدد حقیقی و دنباله $\{a_n\}$ یکتوا باشد، دنباله $\{ca_n\}$ نیز این چنین است. مثلاً اگر جملات دنباله نزولی $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ را ضرب در عدد ۲ کنیم

دنباله حاصل یعنی $\left\{\frac{2}{n}\right\}$ باز هم نزولی است و اگر در عدد -3 ضرب شود دنباله حاصل یعنی $\left\{\frac{-3}{n}\right\}$ صعودی خواهد بود.

قهنبه ۱: اگر $\{a_n\}$ دنباله صعودی (نزولی) با جملات مثبت (مثفی) باشد، دنباله $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ نزولی (صعودی) با جملات مثبت (مثفی) است.

قهنبه ۲: اگر $\{a_n\}$ دنباله صعودی (نزولی) با جملات مثبت (مثفی) باشد، دنباله $\{-a_n\}$ نزولی (صعودی) با جملات منفی (مثبت) است.

نکته: اگر n عددی طبیعی و $a > 0$ ، $a \neq 1$ و $b > 0$ و $c > 1$ ، در حالت کلی داریم: $n^n > n! > c^n > n^b > \log_a n$

تست ۵۸: کدام یک از دنباله‌های زیر نزولی است؟

- (۱) $\left\{\frac{3^n}{n!}\right\}$ (۲) $\left\{\frac{n!}{3^n}\right\}$ (۳) $\left\{\frac{n^3}{n^3+1}\right\}$ (۴) $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$

مثال ۱۱: دنباله $a_n = \frac{2^n}{(n+1)!}$ از نظر یکتوایی چگونه است؟

«(آغاز هر کار، مهمترین قسمت آن است)»

تست ۵:
سراسری ۹۰

- دنباله‌ی $\left\{ \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right\}$ چگونه است؟

۴) کراندار - صعودی

۳) کراندار - غیریکنوا

۲) کراندار - نزولی

۱) بی‌کران - یکنوا

تست ۶:
ریاضی ۹۵

دنباله $\left\{ \frac{n^2 + (-1)^n}{2n^2 + 2} \right\}$ چگونه است؟

۴) صعودی - واگرا

۳) نزولی - همگرا

۲) غیریکنوا - همگرا

۱) غیریکنوا - واگرا

تست ۷:
ریاضی خارج ۹۵

دنباله $\left\{ \left[\frac{(-1)^n}{n} \right] \right\}$ چگونه است؟ (نماد [] به مفهوم جزء صحیح است.)

۴) غیریکنوا - واگرا

۳) غیریکنوا - همگرا

۲) صعودی - واگرا

۱) نزولی - همگرا

نکته: الف) برای اثبات صعودی بودن دنباله $\{a_n\}$ ، کافی است نشان دهیم $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ یا $a_{n+1} - a_n \geq 0$ و برای اثبات نزولی بودن دنباله $\{a_n\}$ ،

کافی است نشان دهیم $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ یا $a_{n+1} - a_n \leq 0$.

ب) اگر برای هر عدد طبیعی n ، $f'(n) > 0$ باشد دنباله (تابع) $f(n)$ صعودی و اگر $f'(n) < 0$ باشد دنباله (تابع) نزولی است.



تست ۱۲:
دنباله

دنباله $\left\{ \frac{1 \cdot n}{n!} \right\}$ برای $n \geq m$ نزولی است. کمترین مقدار m کدام است؟

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۸ (۱)

تست ۶۳: دنباله $u_n = -n^2 - 2n + 2$ چگونه است؟

- (۱) صعودی (۲) نزولی (۳) ابتدا صعودی بعد نزولی (۴) ابتدا نزولی بعد صعودی



نکته: الف) دنباله‌های هموگرافیک $\left\{ \frac{an+b}{cn+d} \right\}$ که در آن‌ها $(ad-bc \neq 0, c \neq 0)$ ، در صورتی که ریشه مختلطشان بزرگتر از یک باشد غیر یکنوا و اگر کمتر از یک باشد یکنوا هستند و همچنین در این صورت اگر $ad-bc > 0$ تابع صعودی و اگر $ad-bc < 0$ تابع نزولی است.
ب) اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا به عدد a و صعودی باشد، در این صورت $a_n \Rightarrow a^-$ و اگر نزولی باشد، در این صورت $a_n \Rightarrow a^+$

تست ۶۴: دنباله $b_n = \frac{3\sqrt{n}}{5\sqrt{n}-1}$ و $a_n = \frac{3n+1}{1-2n}$ چگونه است؟

- (۱) صعودی، نزولی (۲) نزولی، صعودی (۳) صعودی، صعودی (۴) نزولی، نزولی

تست ۶۵: دنباله $\left\{ \frac{1+2^n}{3+2^{n-1}} \right\}$ چگونه است؟

- سراسری ۸۸
(۱) کراندار - نزولی (۲) بی کران - نزولی (۳) کراندار - صعودی (۴) بی کران - صعودی

تست ۶۶: اگر $a_n = \frac{n+1}{n}$ و $f(x) = \frac{2x + [-x]}{x^2 - 1}$ ، آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ به کدام عدد همگرا است؟

- سراسری ۸۹
(۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) همگرا نیست.

تست ۶۷: اگر $a_n = \frac{4n-3}{n+2}$ ، آنگاه دنباله‌ی $f(a_n)$ چگونه است؟ $f(x) = \frac{[x]-3}{x-4}$

- خارج ۸۷
(۱) همگرا به -۱ (۲) همگرا به صفر (۳) همگرا به ۱ (۴) واگرا

تست ۸۵: اگر $a_n = \frac{2n+1}{2n+1}$ و $f(x) = b + [2x]$ به ازای کدام مقدار b دنباله $\{f(a_n)\}$ به عدد ۱ همگرا است؟

۴) نشدنی

۳) ۱

۲) -۲

۱) -۳

سراسری ۸۵

نکته: اگر در دنباله‌های هموگرافیک $\left\{ \frac{an+b}{cn+d} \right\}$ ریشه‌ی خارج بزرگتر از یک باشد، دنباله غیر یکنوا است. یکنواپی این دنباله‌ها قبل و بعد ریشه‌ی خارج تغییر می‌کند. با استفاده از این موضوع می‌توانیم در دنباله‌های با دترمینان هرابه منفی بزرگترین کران پایین و در دنباله‌های با دترمینان هرابه مثبت کوچکترین کران بالای دنباله را بیابیم.



مثال ۱۲: بزرگترین کران پایین دنباله‌های $\left\{ \frac{n}{2n-5} \right\}$ ، $\left\{ \frac{n+1}{3n-10} \right\}$ و کوچکترین کران بالای دنباله‌های $\left\{ \frac{-1}{2n-7} \right\}$ ، $\left\{ \frac{n-7}{4n-17} \right\}$ را بیابید.

تست ۹۵: بزرگترین کران پائین دنباله $\left\{ \frac{2n+1}{3n+1} \right\}$ کدام است؟

ریاضی ۹۵

۴) ۱

۳) $\frac{3}{4}$

۲) $\frac{5}{7}$

۱) $\frac{2}{3}$

مثال ۱۳: با بررسی جملات اولیه دنباله‌های زیر رفتار آن‌ها از حدس زده و حدس خود را توضیح دهید.

$$\left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$$

$$\left\{ \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{2n} \right\}$$

$$\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \right\}$$

«(آدمهای موفقی کار خاصی انجام نمی دهند بلکه کارها را ، خاص انجام می دهند.)»*

$$\left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\}$$

$$\{1 + (-1)^n\}$$

تست ۷: اگر دنباله $\{a_n\}$ نزولی باشد، دنباله $\{a_{n+1} - a_n\}$:

- (۱) نزولی است. (۲) کران بالا دارد. (۳) کران پایین دارد. (۴) صعودی است.



تعریف: اگر در دنباله $\{a_n\}$ تمام جملات دنباله مقداری ثابت باشند، به این دنباله دنباله ثابت می‌گوییم. **نظیر دنباله:** $a_n : 2, 2, 2, \dots$.

نکته: دنباله ثابت، یکتا است، در واقع این نوع دنباله‌ها هم صعودی و هم نزولی‌اند.

نکته: اگر بدانیم دنباله‌ای یکتا است، برای بررسی صعودی یا نزولی بودن آن، کافی است جمله اول و حد درمی‌نهایت آنرا با یکدیگر مقایسه کنیم.

مثال ۱۴: چند عدد از دنباله‌های زیر ثابت هستند؟

(الف) $\left\{ \left[\sin \frac{5\pi}{4} \right]^{n^2+n} \right\}$ (ب) $\left\{ \sin \left(n\pi + \frac{\pi}{2} \right) - \cos n\pi \right\}$ (ج) $\left\{ \frac{\sin n\pi}{(-1)^n} \right\}$

(د) $\{2^n + (-2)^n\}$ (ه) $\{(-1)^n + \cos^n n\pi\}$

تست ۷۱: دنباله $\{(-1)^n \cos n\pi\}$ چه وضعیتی دارد؟

- (۱) هم صعودی و هم نزولی (۲) نه صعودی و نه نزولی (۳) صعودی (۴) نزولی

تست ۷۲: دنباله‌ی $\left[\frac{1}{n+1}\right]$ چگونه است؟

- (۱) صعودی
(۲) نزولی
(۳) غیر یکنوا
(۴) هم صعودی و هم نزولی

تست ۷۳: اگر $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$ ، آن‌گاه دنباله با جمله عمومی U_n چگونه است؟

- (۱) کراندار-صعودی
(۲) کراندار-نزولی
(۳) بی‌کران-صعودی
(۴) بی‌کران-نزولی

تست ۷۴: دنباله‌ی $\left\{\frac{1+2^n}{3+2^{n-1}}\right\}$ چگونه است؟

- (۱) کراندار - نزولی
(۲) کراندار - صعودی
(۳) بی‌کران - نزولی
(۴) بی‌کران - صعودی

تست ۷۵: کدام یک از دنباله‌های زیر صعودی و همگرا است؟

(۱) $U_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$
(۲) $U_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$
(۳) $U_n = \left[\frac{(-1)^n}{n}\right]$
(۴) $U_n = \frac{2n+1}{n}$



تعریف: فرض کنید A زیر مجموعه‌ای از \mathbb{R} باشد. مجموعه A از بالا کراندار نامیده می‌شود هرگاه $\exists u \in \mathbb{R}$ s.t $\forall x \in A$ $x \leq u$. همچنین می‌گوییم $a \in \mathbb{R}$ کوچکترین کران بالا برای این مجموعه است هرگاه برای هر کران بالای دیگر نظیر $u \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $a \leq u$. به کوچکترین کران بالای مجموعه A سوپریوم این مجموعه می‌گوییم و می‌نویسیم: $\text{Sup}(A) = a$.

تعریف: فرض کنید A زیر مجموعه‌ای از \mathbb{R} باشد. مجموعه A از پایین کراندار نامیده می‌شود هرگاه $\exists v \in \mathbb{R}$ s.t $\forall x \in A$ $x \geq v$. همچنین می‌گوییم $a \in \mathbb{R}$ بزرگترین کران پایین برای این مجموعه است هرگاه برای هر کران پایین دیگر نظیر $v \in \mathbb{R}$ داشته باشیم $v \leq a$. به بزرگترین کران پایین مجموعه A اینفیوم این مجموعه می‌گوییم و می‌نویسیم: $\text{Inf}(A) = a$.

اصل موضوع هامیت: هر زیر مجموعه نامتناهی از اعداد حقیقی که دارای کران بالا باشد، دارای کوچکترین کران بالا می‌باشد.

معادلا هر مجموعه نامتناهی از اعداد حقیقی که دارای کران پایین باشد، دارای بزرگترین کران پایین می‌باشد.

مثال‌ها: برای مجموعه‌های $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x-2| < \frac{5}{2} \right\}$, $B = [0, 2)$, $C = (-1, 4)$, و $D = [-1, 3]$ کوچکترین کران بالا، بزرگترین کران پایین، ماکزیمم و مینیمم را بیابید.

تست ۷۶: در کدام مجموعه زیر از اعداد حقیقی، یکی از کران‌های پایین در خود مجموعه است؟

- (۱) $\{x : x|x| \leq -1\}$ (۲) $\{x : [x] = 2\}$
(۳) $\{x : [-x] = -2\}$ (۴) $\{x : 2 - x \geq |x|\}$

سراسری ۸۷

قضیه ۳: م دنباله صعودی و از بالا کراندار، همگراست. **قضیه ۴:** م دنباله نزولی و از پایین کراندار، همگراست.



مثال ۱۶: ثابت کنید دنباله‌های $\left\{ \sin \frac{\pi}{2n} \right\}$ و $\left\{ 1 + \frac{1}{n^2+1} \right\}$ و $\left\{ 1 - \frac{1}{n} \right\}$ همگرا هستند.

تست ۷۷: اگر $0 < a < 1$, $A = \{a, a^2, \dots\}$, در این صورت A :

- (۱) هم \inf و هم \min دارد. (۲) \inf ندارد ولی \min دارد. (۳) نه \inf و نه \min ندارد. (۴) \inf دارد ولی \min ندارد.



قضیه ۵: هر عدد حقیقی حد دنباله‌ای از اعداد گویاست.

قضیه ۶: دنباله $\{b_n\}$ با ضابطه $b_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ صعودی است. قضیه ۷: دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ صعودی است.

قضیه ۸: دنباله $\{a_n\}$ با ضابطه $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ از بالا کراندار است. نتیجه: دنباله $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ همگراست.

نکته ۳۱: داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ و همچنین $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{bn+c}\right)^{dn+e} = e^{\frac{ad}{b}}$

مثال ۱۷: دنباله $\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n$ به چه عددی همگراست؟

تست ۷۸: اگر دنباله $a_n = \left(\frac{n-c}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$ همگرا به \sqrt{e} باشد c کدام است؟ الف) ۱- ب) ۲ ج) ۲- د) $\ln 3$

تست ۷۹: مقدار $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^x$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{e}$ ۲) e ۳) $\frac{1}{e} + 1$ ۴) $e + 1$

تست ۸۰: حد دنباله $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{2n+3}$ وقتی $n \rightarrow \infty$ کدام است؟

- ۱) $2e$ ۲) e^2 ۳) $2e$ ۴) $2e^2$

تست ۸۱: حد دنباله با جمله عمومی $a_n = n(\log(n+1) - \log n)$ وقتی $n \rightarrow \infty$ کدام است؟

- ۱) صفر ۲) $\frac{1}{2} \log e$ ۳) $\log e$ ۴) $\frac{1}{2}$

«(کیفیت فکر تنها ، کیفیت زندگی تان را تعیین می کند.)»



تعریف: به دنباله‌هایی که رابطه آن‌ها بر اساس جملات دیگر آن دنباله بیان می‌شود، دنباله‌های با رابطه بازگشتی گفته می‌شود. در این دنباله‌ها معمولاً یک یا چند جمله اول در فرم مساله بیان می‌شوند. برای یافتن همگرایی این دنباله‌ها از قضایای بالا استفاده می‌شود.

نکته: دنباله $F_n: 1, 1, 2, 3, 5, \dots$ را در نظر می‌گیریم. رابطه بین جملات متوالی این دنباله را بیابید. $\{F_n\}$ یک نمونه از دنباله‌هایی است که به دنباله‌های فیبوناچی معروف‌اند. در این دنباله‌ها، مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = 2F_n + F_{n-1} - 1$ بدست می‌آید.

نکته: اگر F_n دنباله فیبوناچی باشد داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ است.

سوال ۱۸: دنباله $\{a_n\}$ به صورت مقابل تعریف شده است: $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$.

الف) ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ همگراست. ب) حد دنباله $\{a_n\}$ را بدست آورید.

سوال ۸۲: جملات اول و دوم دنباله‌ای به ترتیب ۱ و ۳ هستند. اگر $n \geq 3, a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ باشد، مجموع صد جمله اول دنباله را بیابید.

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۴ (۲) ۵ (۱)

سوال ۸۳: مجموع شانزده جمله اول از دنباله فیبوناچی کدام است؟ ($F_{15} = 610, F_{16} = 987$)

- ۲۴۵۲ (۴) ۲۴۷۲ (۳) ۲۵۴۳ (۲) ۲۵۸۳ (۱)

سوال ۸۴: دنباله‌ی $\{a_n\}$ به صورت $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \sqrt{1 - a_n}$ تعریف شده است، در این صورت $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ برابر است با:

- ۴) وجود ندارد ۲) ۳ ۱) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ۲) $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

سوال ۸۵: در دنباله بازگشتی
$$\begin{cases} a_1 = 2, n < 1 \\ a_{n+1} = \frac{a_n}{5}, n \geq 1 \end{cases}$$
 جمله عمومی دنباله کدام است؟

- (۱) 2×5^{-n} (۲) 20×5^{-n} (۳) 10×5^{-n} (۴) 1×5^{-n}

سوال ۸۶: دنباله $\{u_n\}$ به صورت $u_1 = 1$ و $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ تعریف شده است در این صورت $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ برابر

- (۱) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (۲) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) وجود ندارد.

سوال ۸۷: در دنباله همگرای $\{a_n\}$ به صورت $a_n = \sqrt{2 \sqrt{2 \sqrt{2 \dots \sqrt{2}}}}$ این دنباله:

- (۱) همگرا به ۴ است. (۲) همگرا به صفر است.
(۳) همگرا به ۲ است. (۴) همگرا به $(\sqrt{2})$ است.

سوال ۸۸: اگر F_n دنباله فیبوناچی باشد $\frac{F_n}{F_{n+1}}$ به چه عددی همگراست؟

- (۱) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (۲) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (۴) $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

سوال ۸۹: اگر $s_1 = 2$ و $s_n = s_{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ کدام است؟

- (۱) $3/5$ (۲) 4 (۳) $4/5$ (۴) 5

سوال ۹۰: اگر $S_1 = 1$ و $S_n = S_{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ، حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) 1 (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) 2

هریفا



چیز دنباله‌ها:

دو دنباله دلخواه $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ مفروضند. منظور از دنباله‌ای است که جمله‌ی n ام آن از جمع جملات n ام دو دنباله فوق بدست می‌آید.

برای دنباله‌های $\{a_n - b_n\}$ و $\{a_n b_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ به شرط $b_n \neq 0$ ، تعریف مشابه فوق است.

قضیه ۹۱: اگر دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا باشند و $c \in \mathbb{R}$ یک عدد ثابت دلخواه باشد، دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ ، $\{a_n b_n\}$ و $\{ca_n\}$ همگرا

هستند. همچنین اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ ، دنباله $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ نیز همگرا خواهد بود. علاوه بر آن داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

نکته: اگر دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ واگرا باشند، دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ ، $\{a_n b_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ممکن است همگرا یا واگرا باشند.

$$\{a_n b_n\} \text{ دنباله‌های } a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & , n = 2k \\ n & , n = 2k+1 \end{cases} \text{ و } b_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

تست ۹۱: دنباله‌های

(۱) واگرا و کراندار (۲) واگرا و غیر یکنوا (۳) همگرا و یکنوا (۴) همگرا و غیر یکنوا

تست ۹۲: دنباله $a_n = (-1)^{n+1} \cos n\pi$ را داریم، دنباله $\{b_n\}$ کدام باشد تا $\{a_n + b_n\}$ همگرا باشد؟

(۱) $\cos \frac{n\pi}{2}$ (۲) $\sin \frac{n\pi}{2}$ (۳) $\cos(n\pi)$ (۴) $\sin(n\pi)$

تست ۹۳: اگر $a_n = n \sin \frac{n\pi}{2}$ و $a_n = n \cos \frac{n\pi}{2}$ باشد، کدام یک همگراست؟

(۱) $\{a_n + b_n\}$ (۲) $\{a_n b_n\}$ (۳) $\{a_n - b_n\}$ (۴) $\left\{\frac{a_n}{n + b_n}\right\}$

تست ۹۴: اگر $\{a_n \cdot \cos n\pi\}$ همگرا باشد، a_n کدام می‌تواند همگرا باشد؟

(۱) $a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$ (۲) $a_n = \cos \frac{n! \pi}{2}$ (۳) $a_n = \sin \frac{n! \pi}{2}$ (۴) $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$

«(کسی که می‌ترسد تنگست بخورد، حتما تنگست خواهد خورد.)»

تست ۹۵: چه تعداد از دنباله‌های روبرو به عدد یک همگراست؟ الف) $\left\{ \left[n \sin \frac{1}{n} \right] \right\}$ ب) $\left\{ \left[n \tan \frac{1}{n} \right] \right\}$ ج) $\left\{ \left[\frac{\sin n}{n} \right] \right\}$

۰ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

نکته: اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا و دنباله $\{b_n\}$ واگرا باشند، دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ حتما واگرا و دنباله‌های $\{a_n b_n\}$ و $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ ممکن است همگرا یا واگرا باشند.



تست ۹۶: اگر دنباله $\{a_n\}$ همگرا و دنباله $\{b_n\}$ واگرا باشد، کدام می‌تواند همگرا باشد؟

۱) $a_n + b_n$ ۲) $\frac{b_n}{a_n}$ ۳) $\frac{a_n}{b_n}$ ۴) $(a_n^2 + 1)b_n$

تست ۹۷: اگر دنباله $\left\{ \frac{a_n}{b_n} \right\}$ واگرا و دنباله $\{b_n\}$ همگرا باشد، آن‌گاه دنباله $\{a_n\}$:

۱) همگراست. ۲) واگراست. ۳) می‌تواند همگرا به یک عدد حقیقی یا واگرا باشد. ۴) می‌تواند همگرا به صفر یا واگرا باشد.

تست ۹۸: اگر دنباله $\{a_n + b_n\}$ همگرا و دنباله $\{a_n - b_n\}$ واگرا باشد، در مورد دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ کدام درست است؟

۱) هر دو همگرا ۲) هر دو واگرا ۳) یکی همگرا و یکی واگرا ۴) هر سه گزینه می‌تواند درست باشد.

تست ۹۹: اگر $a_n = \frac{1}{n^2}$ و $b_n = 2n$ و $c_n = \frac{1-2n^2}{n}$ باشد، کدامیک همگراست؟

۱) $\{a_n + b_n\}$ ۲) $\{b_n + c_n\}$ ۳) $\{b_n - c_n\}$ ۴) $\left\{ \frac{c_n}{a_n} \right\}$



نکته: الف) اگر دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو صعودی یا نزولی باشند، ترکیب آن‌ها صعودی است.
 ب) اگر از دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ یکی صعودی و یکی نزولی باشد، ترکیب آن‌ها نزولی است.
 ج) اگر دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو صعودی (نزولی) باشند، $\{a_n + b_n\}$ صعودی (نزولی) است.
 د) اگر دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو صعودی (نزولی) و با جملات مثبت باشند، دنباله $\{a_n b_n\}$ صعودی (نزولی) و با جملات مثبت است.
 ه) اگر دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو صعودی (نزولی) و با جملات منفی باشند، دنباله $\{a_n b_n\}$ نزولی (صعودی) و با جملات مثبت است.

تست ۱۰۰:

دنباله‌ی $(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n+1})$ چگونه است؟
 (۱) صعودی
 (۲) نزولی
 (۳) صعودی و نزولی
 (۴) نه صعودی و نه نزولی



قضیه ۱۰۰ (قضیه فشردگی): اگر دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرا به عدد L باشند و دنباله $\{c_n\}$ طوری باشد که $a_n \leq c_n \leq b_n$ ، $\forall n \in \mathbb{N}$ ، آنگاه دنباله $\{c_n\}$ نیز به عدد L همگراست.
نکته: از قضیه بالا برای اثبات همگرایی برخی دنباله‌ها استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۹:

نشان دهید دنباله‌های $\{\frac{\cos n}{n}\}$ همگراست.

تست ۱۰۱:

حد دنباله $a_n = \left\{ \frac{\sqrt[n]{n!}}{2n^2 + 1} \right\}$ کدام است؟
 (۱) صفر
 (۲) ۱
 (۳) $\frac{1}{2}$
 (۴) وجود ندارد.

تست ۱۰۲:

اگر برای هر n طبیعی $a_n > 0$ و $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{n}{n+1}$ در این صورت دنباله‌ی $\{a_n\}$ چگونه است؟
 (۱) همگرا به صفر
 (۲) همگرا به ۱
 (۳) واگرا
 (۴) بی‌کران

«آنان که پیروز می‌شوند همان‌هایی هستند که از مشهورت دوستان بهره می‌برند.»

دنباله‌ی مثبت $\{a_n\}$ به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ در نامساوی $\frac{a_n - 1}{a_n} > \frac{3n^2 - 1}{3n^2}$ صدق می‌کند. کدام مورد زیر درست است؟

تست ۱۰۳

- (۱) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ (۲) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}$ (۳) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{9}$ (۴) a_n واگرا است.

اگر $\{a_n\}$ یک دنباله با جملات مثبت و $\frac{3 - 2a_n}{a_n} > n$ آن‌گاه:

تست ۱۰۴

- (۱) $\{a_n\}$ همگراست. (۲) $\{a_n\}$ واگراست. (۳) $\{a_n\}$ بی‌کران است. (۴) $a_n > \frac{3}{4}$

اگر دنباله $\{a_n\}$ در شرط $(na_n - n + 1)(na_n - n - 1) \leq 0$ صدق کند، کدام خاصیت زیر را دارد؟

تست ۱۰۵

- (۱) همگرا به -1 (۲) همگرا به 1 (۳) همگرا به صفر (۴) واگرا

دنباله $\left\{ \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2} \right\}$ کدام خاصیت را دارد؟

تست ۱۰۶

- (۱) همگرا به 1 (۲) همگرا به صفر (۳) همگرا به e صفر (۴) واگرا

$$۱- \text{ ثابت کنید الف) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n} = \infty$$

ب) دنباله $\left\{ (-1)^n \frac{n^2 + 1}{n} \right\}$ نه به $+\infty$ و نه به $-\infty$ واگراست.

$$۲- \text{ ثابت کنید هرگاه } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ آنگاه } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$$

۳- فرض کنیم همواره $a_n > 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$. ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

۴- فرض کنیم همواره $a_n < 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0$. ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

$$۵- \text{ فرض کنیم } a_n = \frac{5n^2 - 3n + 11}{2n + 1}, b_n = \frac{n^2 - 1}{6n^3 + 1}, c_n = \frac{3n^2 + 1}{2n^2 + 7}$$

دنباله‌هایی از اعداد باشند. ثابت کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{3}{2}$$

در هر یک از تمرین‌های زیر مشخص کنید که آیا دنباله مورد نظر

(الف) (از بالا یا پایین) کراندار است.

(ب) جملات دنباله مثبت یا منفی اند.

(ج) صعودی یا نزولی است.

(د) همگرا یا واگراست؛ و اگر واگراست به $+\infty$ و یا واگرا به $-\infty$ و یا هیچ‌یک.

$$\left\{ 4 + \frac{(-1)^n}{n} \right\} - 3 \quad \left\{ \frac{2n}{n^2 + 1} \right\} - 2 \quad \left\{ \frac{5n^2}{n^2 + 1} \right\} - 1$$

$$\left\{ \frac{\sin n}{n} \right\} - 6 \quad \left\{ \frac{n^2 - 1}{n} \right\} - 5 \quad \left\{ \sin \frac{1}{n} \right\} - 4$$

$$\left\{ n \cos \frac{(-1)^n}{n} \right\} - 9 \quad \left\{ n \sin \frac{n\pi}{2} \right\} - 8 \quad \left\{ n \cos \frac{n\pi}{2} \right\} - 7$$

۱۰- ثابت کنید $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$. آیا از این می‌توان نتیجه گرفت که $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} = +\infty$

۱۱- همگرایی، واگرایی و واگرایی به $+\infty$ یا $-\infty$ دنباله‌های زیر را بررسی کنید.

$$\left\{ \frac{n}{\sqrt{n+1}} \right\} \text{ (ج)} \quad \left\{ (-1)^n \frac{n+1}{n} \right\} \text{ (ب)} \quad \left\{ \frac{n^2 - 1}{n} \right\} \text{ (الف)}$$

۱۲- اگر دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به ترتیب به اعداد a و b همگرا باشند و همواره

$$a_n \leq b_n, \text{ ثابت کنید: } a \leq b$$

۱۳- فرض کنیم دنباله $\{p_n\}$ همگرا و a و b دو عدد ثابت باشند به قسمی که $p_{n+1} = \frac{bp_n}{a + p_n}$

حد دنباله $\{p_n\}$ را حساب کنید. ($0 < a < b$)

۱۴- دنباله $\{a_n\}$ چنین تعریف شده است:

$$a_1 = 1 \text{ و } a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(الف) ثابت کنید دنباله $\{a_n\}$ همگراست.

(ب) حد دنباله $\{a_n\}$ را به دست آورید.

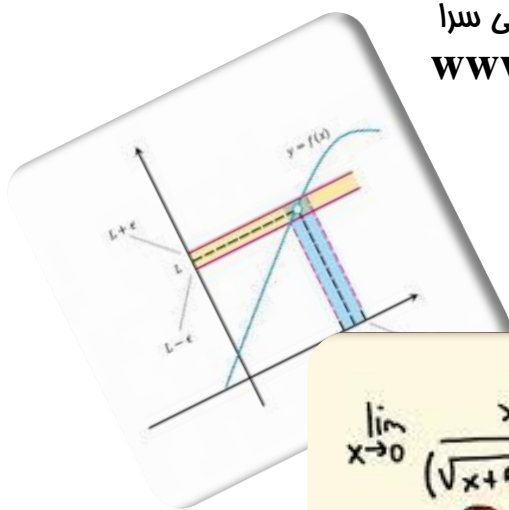
فصل دوم

حد و پیوستگی

تعداد تست: ۲۲۰

تعداد مثال: ۵۶

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\sqrt{x+9}-3)} \cdot \frac{(\sqrt{x+9}+3)}{(\sqrt{x+9}+3)}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+9}+3)}{x+9}$$

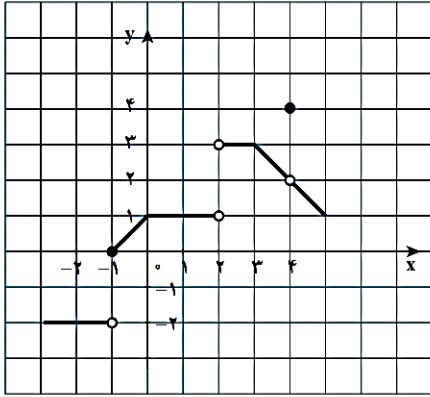


حد توابع:

فرض کنیم تابع f در همسایگی (مختوف) نقطه $x = a$ تعریف شده باشد، حد تابع در این نقطه وجود دارد هرگاه:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad (L \in \mathbb{R})$$

مثال ۱: با توجه به شکل حاصل را در صورت وجود بایبید.



$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$$

مثال ۲: تابع هوی ساید به صورت مقابل تعریف می‌شود. نمودار آن را رسم کرده و مشخص کنید آیا در نقطه $x = 0$ این تابع حد دارد؟

$$H(t) = \begin{cases} 1 & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}$$

مثال ۳: تابع علامت به صورت مقابل تعریف می‌شود. نمودار آن را رسم کرده و مشخص کنید آیا در نقطه $x = 0$ این تابع حد دارد؟

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



نکته: توابع $\text{sgn}(f(x))$ و $H(f(x))$ در مناطقی حد ندارند که در آنها $f(x)$ تغییر علامت دهد.

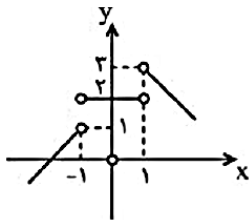
* (پیامبر اکرم(ص): ساعتی اندیشیدن، بهتر از ۷۰ سال عبادت است.)

مثال ۴: توابع $f(x) = \text{sgn}(x^2 - 2x)$, $g(x) = H(x^3 - x^2)$ در چه نقاطی حد ندارند؟

مثال ۲: اگر $S(x)$ تابع علامت باشد، تابع $S(|x| - x^2)$ در چند نقطه حد ندارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (بی شمار)

مثال ۲: با توجه به شکل مقابل، $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ کدام است؟



- ۱) -۲
۲) -۱
۳) ۲
۴) ۱

مثال ۳: تابع $f(x) = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$ در همسایگی ... نقطه‌ی $x = 0$ تعریف شده است و در این نقطه حد راست آن ... و حد چپ آن ... است؟

- ۱) راست-موجود-ناموجود ۲) چپ-ناموجود-موجود ۳) محذوف-موجود-موجود ۴) محذوف-موجود-ناموجود

مثال ۴: به ازای کدام مقدار a ، تابع $f(x) = a[x] + [x+1]$ در $x=1$ حد دارد؟

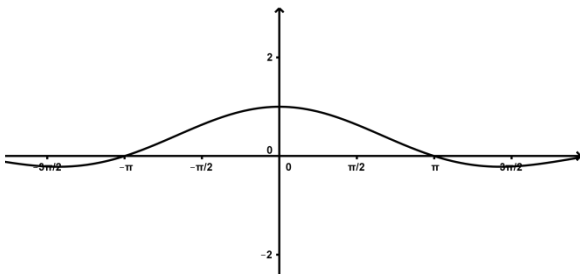
- ۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

مشق ۵: با رسم نمودار حد توابع مقابل را در نقاط $x=1$ در صورت وجود بیابید. آیا می‌توان گفت: $\forall a \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -1$

$$g(x) = [x] + [-x]$$

مشق ۶: ابتدا نمودار تابع $f(x) = x + [x]$ را در بازه $[0, 2]$ رسم کنید و سپس $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ را در صورت وجود

بیابید



مشق ۷: مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right]$ را بیابید.

مشق ۸: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1)^{[x-1]}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) موجود نیست.

مشق ۹: کدام نادرست است؟

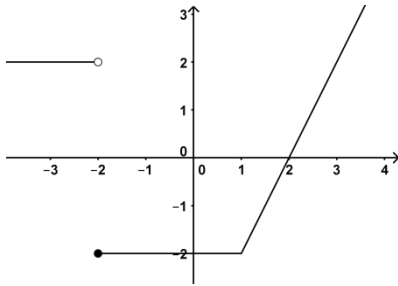
- (۱) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{[x]} = 0$ (۲) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{[x]}$ موجود نیست. (۳) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{[x]} = 0$ (۴) هیچکدام.

مشق ۱۰: در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x > 0 \\ -\sqrt{1+x} & x \leq 0 \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^2 - x)$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) صفر (۴) موجود نیست.

* (از نشانه های فهم عمیق و درست، بردباری، دانش و سکوت است - سکوت درجی از درهای حکمت است.)

با توجه به شکل کدام گزینه نادرست است؟



(۱) $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} |f(x)| = 2$ (۲) $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(|x|) = 0$

(۳) $\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)] = -1$ (۴) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \log(f(x)) = -\infty$

حد عبارت $[\sin(x - \frac{\pi}{3})] \cos^3 x + [\tan^2 x]$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ (نماد [] به مفهوم جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) حد ندارد.

حد عبارت $\sin \frac{x}{2} [\cos \frac{x}{2}] - \cos x [\sin 2x]$ وقتی $x \rightarrow \pi$ کدام است؟ (نماد [] به مفهوم جزء صحیح است.)

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) حد ندارد.

نکته: اگر حد $x \rightarrow a^+$ در این صورت $-x \rightarrow -a^-$ و همچنین $\frac{1}{x} \rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)^-$



اختلاف حدهای چپ و راست تابع $f(x) = \left[\frac{-2x+4}{5} \right]$ در $x=2$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

با فرض $a = -\frac{1}{5}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow a^-} \left[\frac{1}{x} \right]$ کدام است؟

- (۱) -۵ (۲) -۴ (۳) -۶ (۴) -۳

سؤال ۱۳: حاصل $\lim_{x \rightarrow 6^+} \left[4 \sin^2 \frac{\pi}{x} \right]$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) صفر (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) ۳

سؤال ۱۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left[\frac{2x+3}{x-1} \right]$ کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

سؤال ۱۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^-} \left[-\frac{2}{x} \right] + \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^+} [-6x]$ کدام است؟

- (۱) -۱۰ (۲) -۹ (۳) -۸ (۴) -۱۱

نکته: در توابع به فرم $h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{Z} \\ g(x), & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ برای هر عدد حقیقی a داریم: $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.

نکته: در توابع به فرم $h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \mathbb{Q} \\ g(x), & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ برای هر عدد حقیقی a زمانی $\lim_{x \rightarrow a} h(x)$ وجود دارد که:

$\lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ در این صورت داریم: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.

سؤال ۱۶: در تابع $h(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Z} \\ 0, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) + \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} h(x)$ چقدر است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) -۲ (۴) ۱

سؤال ۱۷: اگر $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ باشد، حد توابع f ، $f \circ f$ در نقطه $\sqrt{2}$:

- (۱) موجود است، موجود است. (۲) موجود نیست، موجود است.
(۳) موجود نیست، موجود نیست. (۴) موجود است، موجود نیست.



حدهای یک طرفه: اگر تابعی فقط در همسایگی راست (یا چپ) یک نقطه تعریف شده باشد، منظور از حد تابع همان حد راست (یا حد چپ) تابع می باشد. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

تست ۱۸: حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - [x^2]}{[x] - 2}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) موجود نیست.

تست ۱۹: حدهای $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1}$ و $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{3-x}$ به ترتیب.....

- (۱) صفر - وجود ندارد (۲) وجود ندارد - صفر است (۳) صفر - صفر است (۴) وجود ندارد - وجود ندارد

تست ۲۰: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} [\sqrt{x-1}] \tan \frac{\pi x}{2}$ کدام است؟

- (۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) صفر (۴) مبهم

مثال ۸: ابتدا تابع $f(x) = \frac{x}{[x]}$ را رسم کنید و سپس حد تابع را در $x = 0, 1$ بررسی کنید.



نکته: اگر $u \rightarrow \infty$ ، آنگاه $[u] \sim u$

مثال: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left[\frac{1}{x} \right]$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right]$, $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \right]$ را بیابید.



نکته: می‌دانیم:

$$\frac{a}{\pm} = \pm\infty (a \neq 0), \quad \frac{\cdot}{+} = \frac{\cdot}{-} = \cdot, \quad 1^\infty = 1$$

$$\infty + \infty = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \quad \infty \times \infty = \infty, \quad (-\infty)(-\infty) = \infty, \quad \cdot \times \infty = \cdot$$

اما اگر یکی از حالت‌های زیر اتفاق بیفتد، ابهام اتفاق می‌افتد:

$$\frac{a}{\cdot} (a \in \mathbb{R}), \quad \cdot^\cdot, \quad \frac{\pm}{\cdot}, \quad \infty - \infty, \quad \cdot^\pm \times \infty, \quad (1^\pm)^\infty$$



خاصیت حد توابع:

زمان خاصیت حد توابع دو حالت زیر اتفاق می‌افتد:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \text{ (الف) ابهام وجود ندارد: در این صورت داریم:}$$

ب) ابهام وجود دارد: در این صورت ابتدا به رفع ابهام می‌پردازیم و بعد از رفع ابهام، مانند الف عمل می‌کنیم.

نکته: بسیاری از حدهای دارای ابهام از نوع $\frac{\cdot}{\cdot}$ هستند، که در مسایل تستی برای خاصیت آن‌ها از قاعده هسپیتال استفاده می‌کنیم.

قاعده هسپیتال: اگر داشته باشیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ ، در این صورت برای خاصیت حدهای نظیر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ می‌توانیم از تساوی

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ زیر استفاده کنیم:}$$

در زیر حدهای دارای ابهام را به صورت کامل دسته‌بندی و بررسی می‌کنیم.



۱) حد عبارت‌های گویا: ابتدا صورت و مخرج را تجزیه کرده و پس از ساده کردن عبارت‌های مشابه، حاصل حد را می‌یابیم.

۲) حدهای کسری رادیکالی: با ضرب صورت و مخرج در عبارت رادیکالی و ساده کردن عبارت‌های مشابه، حاصل حد را می‌یابیم.

مثال ۹: حاصل را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x^2 - 5}}{x^2 - 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - x^2}{\sqrt[3]{x^2 + 1} - 1}$$

مثال ۲۱: حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{7}{4}$ (۲) $-\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{5}{4}$

مثال ۲۲: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x}$ کدام است؟

(۱) -1 (۲) 1 (۳) 0 (۴) ∞

مثال ۲۳: حاصل $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{|\cos \pi x|}{1 - \sqrt{2x}}$ کدام است؟

(۱) $-\pi$ (۲) $-\frac{\pi}{2}$ (۳) π (۴) 2π

مثال ۲۴: حد کسر $\frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[5]{x}}$ در نقطه یک کدام گزینه است؟

(۱) $\frac{3}{10}$ (۲) $\frac{10}{3}$ (۳) $\frac{4}{5}$ (۴) $\frac{5}{4}$

مثال ۲۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\sin x + \sin 3x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{6}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

((امام رضا(ع): هر کس از خدا توفیق بخواهد و تلاش نکند ، خود را مسخره کرده است.))

تست ۲۶: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 4x}{\sin 2x - 1}$ کدام است؟

- ۸ (۱) -۸ (۲) ۴ (۳) -۴ (۴)

تست ۲۷: اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + ax + b - 1}{\sqrt{1 + 4x} - 1} = 2$ باشد، $a + b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

تست ۲۸: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3x^2)}{1 - \cos x}$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴)

تست ۲۹: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{3x - \sin^{-1} x}$ کدام است؟

- $-\frac{1}{2}$ (۱) -۱ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴)

تست ۳۰: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{2 - \sqrt{4 - x^2}}$ کدام است؟

سراسری ۸۵

- ۸ (۱) ۱۲ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴)

تست ۳۱: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{tg} \pi x}{x^2 - \sqrt{x}}$ کدام است؟

سراسری ۸۷

- $\frac{\pi}{3}$ (۱) $-\frac{\pi}{3}$ (۲) $\frac{2\pi}{3}$ (۳) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ (۴)

سراسری ۸۸

تست ۳۲: حاصل - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos^2 x}}{1 - \cos x}$ کدام است؟

۴ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۱ (۴)

سراسری ۹۰

تست ۳۳: حد عبارت $\frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟

۲ (۱) -۲ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴)

سراسری ۹۱

تست ۳۴: اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 2^a$ باشد، آنگاه a کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۱)

سراسری ۹۲

تست ۳۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x}$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴) ۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۱)

سراسری ۹۳

تست ۳۶: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ ، کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{3}{4}$ (۲) $-\frac{3}{2}$ (۱)

خارج ۸۵

تست ۳۷: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^3 - x^2 - x + 1}$ کدام است؟

$\frac{\pi^2}{2}$ (۴) $\frac{\pi^2}{4}$ (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{4}$ (۱)

«(امام باقر (ع): از تنگم و نه چه صلگم سهذا، زبا که این ده کلبه هر بدم همه باشتند.)»

تست ۳۸: حاصل $\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{x+19}{x^2+3x-4} + \frac{3}{x+4} \right)$ کدام است؟

خارج ۸۶

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{2}{5}$ (۳)

$-\frac{2}{3}$ (۲)

$-\frac{4}{5}$ (۱)

تست ۳۹: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos \Delta x}}{x^2}$ ، کدام است؟

خارج ۹۴

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

تست ۴۰: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ کدام است؟

خارج ۸۷

$+\infty$ (۴)

$-\infty$ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

تست ۴۱: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos \Delta x}}{x^2}$ ، کدام است؟

خارج ۹۳

۶ (۴)

۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

تست ۴۲: اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} = \frac{3}{2}$ باشد، کدام است؟

ریاضی خارج ۹۵

۵ (۴)

۴ (۳)

-۶ (۲)

-۸ (۱)

نکته: اگر $u \rightarrow 0$ ، از هم‌ارزی مقابل (نامساوی برنولی) می‌توانیم استفاده می‌کنیم: $(1 \pm u)^n \sim 1 \pm nu$ ، $\sqrt[n]{1 \pm u} \sim 1 \pm \frac{1}{n}u$



تست ۴۳: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^2 - (2x+1)^3}{3x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $-\frac{4}{3}$ (۳) -2 (۴) $-\frac{8}{3}$

تست ۴۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+\alpha x} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ کدام است؟

(۱) $\frac{\alpha}{m} + \frac{\beta}{n}$ (۲) $\frac{\beta}{m} - \frac{\alpha}{n}$ (۳) $\frac{\alpha}{m} - \frac{\beta}{n}$ (۴) $\frac{m}{\alpha} + \frac{n}{\beta}$

تست ۴۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)\dots(1+10x) - 1}{5x}$ کدام است؟

(۱) 0 (۲) 10 (۳) 11 (۴) $10!$

تست ۴۶: حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1+\frac{2}{x}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}} \right)$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) 3 (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{2}$

نکته: وقتی $u \rightarrow 1$ هم‌میزی‌های زیر را داریم: $\sqrt[m]{u} - 1 \sim \frac{1}{m}(u-1)$ ، $u^m - 1 \sim m(u-1)$



تست ۴۷: حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[9]{x})}{(x-1)^9}$ کدام است؟

(۱) $-\frac{1}{9!}$ (۲) $-\frac{1}{10!}$ (۳) $10!$ (۴) $9!$

نکته: اگر اجهام تابع به صورت $\frac{\infty}{\infty}$ یا $0 \times \infty$ باشد، برای استفاده از قاعده هویتنال، ابتدا سوال را به صورت $\frac{0}{0}$ تبدیل می‌کنیم.



تست ۴۸: حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \tan x}{2 + \tan^3 x}$ کدام است؟

- (۱) ∞ (۲) صفر (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{3}$

تست ۴۹: حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} (2 - \sqrt{x}) \tan \frac{\pi x}{8}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{4}{\pi}$ (۲) $-\frac{2}{\pi}$ (۳) $\frac{2}{\pi}$ (۴) $\frac{4}{\pi}$

(۳) حد بی‌نهایت: برای محاسبه حدهای نظیر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ که در آن‌ها g به عدد صفر و f به عددی غیر صفر میل می‌کند، به محاسبه حد چپ و راست

تایید به صورت جداگانه می‌پردازیم.

نکته: می‌دانیم: $\frac{a}{\pm} = \pm\infty$ که در آن a عددی حقیقی غیر صفر است.



مثال ۱۰: حدهای مقابل را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3x - 4} =$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x+1}{x+2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x =$$

$$\lim_{x \rightarrow \cdot^+} \cot x =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x] - 1}{x^2 - 1} =$$

نکته: (الف) داریم: $\frac{\cdot}{\cdot} = \frac{\cdot}{\cdot} = \cdot$ (ب) $\frac{\cdot}{+} = \frac{\cdot}{-} = \cdot^+$ (ج) $\frac{\cdot}{+} = \frac{\cdot}{-} = \cdot^-$ (د) $\frac{\cdot}{\cdot} = \cdot$ لذا داریم: $\lim_{x \rightarrow \cdot} \frac{1}{x^2} = \cdot$



تست ۵۰: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[\sin x]}{x}$ کدام است؟

- (۱) $+\infty$ (۲) $-\infty$ (۳) صفر (۴) ۱

* (امام علی (ع): عفت، نفس را مصون می‌دارد و آن را از پستیها دور نگه می‌دارد.)*

تست ۵۱: اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{-2x^2 + ax + b} = -\infty$ ، آن گاه $a - b$ کدام است؟

- ۱) ۶ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

تست ۵۲: اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{2x^2 - ax + b} = +\infty$ باشد، آن گاه کدام گزینه درست است؟

- ۱) $a = -b = 2$ ۲) $a = b = -2$ ۳) $a = b = 4$ ۴) $-a = b = 4$

تست ۵۳: اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{2x^2 + ax + b} = -\infty$ باشد، $a + b$ کدام است؟

- ۱) -۳ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱۲

سراسری ۹۳

نکته: داریم: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a}{x^n} = 0 \quad (n \geq 1)$

۴) حد در بی نهایت: برای محاسبه حد توابع زمانی که متغیر به بی نهایت میل می‌کند، می‌توانیم از بیشترین توان متغیر در صورت و فنرچ فاکتور بگیریم. با توجه به نکته بالا، خواهیم دید که فقط جمله شامل بیشترین توان در صورت و فنرچ باقی خواهد ماند.



مثال ۱۱: حاصل را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 3x + 2}{3x^2 - 1} =$$

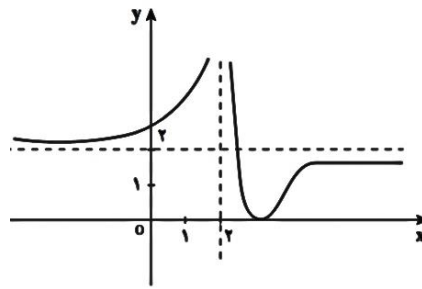
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 3x^3 + 2}{3x^2 - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{4 - x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 4x}}{1 + 3x}$$

مثال ۱۲: نمودار تابع f در شکل زیر نشان داده شده است:

حدهای زیر را حدس بزنید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

مثال ۱۳: مقادیر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ را در صورت وجود، حدس بزنید.

تست ۵۴: کدام گزینه صحیح است؟

۱) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] = 1$ (ع)

۲) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x}{[x]} \right] = 1$ (ب)

۳) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{[x]}{x} \right] = 1$ (د)

۴) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{[x]} \right] = 1$ (ا)

تست ۵۵: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[x \left[\frac{1}{x} \right] \right]$ کدام است؟

۱) وجود ندارد. (ع)

۲) -۱ (ب)

۳) ۱ (د)

۴) صفر (ا)

نکته: برای تناسب حد در نهایت $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0}$ سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_n} & , m = n \\ \bullet & , m < n \\ \infty & , m > n \end{cases}$$



مثال ۱۴: حاصل را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 5x + 1}{3x^2 - x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 + x + 1}{x^3 - x + 2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 1}}{2x - 3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos \frac{1}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) =$$

مثال ۵۶: حد کسر $\frac{x^{m+3} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1}$ با شرط $n > 3$ ، وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر ۲- است. $m + n$ کدام است؟

۵ (۴)

۴/۵ (۳)

۴ (۲)

۳/۵ (۱)

مثال ۵۷: حد $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\frac{1}{x} \right]$ کدام است؟

-∞ (۴)

+∞ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

مثال ۵۸: اگر $f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{|\tan \pi x|}{1-x\sqrt{x}}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ کدام است؟

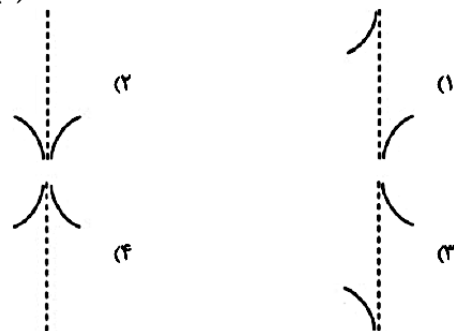
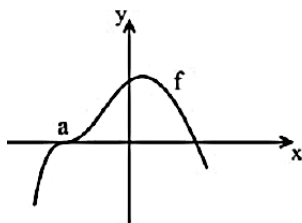
$\frac{\pi}{2}$ (۴)

$-\frac{3\pi}{2}$ (۳)

$\frac{2\pi}{3}$ (۲)

$-\frac{\pi}{6}$ (۱)

مثال ۵۹: اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = \frac{x}{f(x)}$ در همسایگی نقطه‌ی a به کدام صورت است؟



نکته: توابع متناوبه غیر ثابت، در بی نهایت حد ندارند.



تست ۶۱: حد توابع $f(x) = [x] + [-x]$, $g(x) = x - [x]$ وقتی $x \rightarrow +\infty$ کدام است؟

- (۱) صفر، صفر (۲) صفر، فاقد حد (۳) فاقد حد، صفر (۴) فاقد حد، فاقد حد

تست ۶۲: حد عبارت $\frac{1}{x^2} \left(1 - x^2 \left[\frac{1}{x^2}\right]\right)$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟ (نماد [] به مفهوم جزء صحیح است.)
ریاضی ۹۵

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ∞ (۴) حد ندارد.

نکته: هم‌ارزی‌های زیر را داریم:

$$\begin{aligned} (a < b, x \rightarrow +\infty) &\Rightarrow a^x + b^x \sim b^x, & (a < b, x \rightarrow -\infty) &\Rightarrow a^x + b^x \sim a^x \\ (a < b, x \rightarrow 0) &\Rightarrow a^x + b^x \sim a^x \end{aligned}$$



تست ۶۲: حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x-1}}{2^{x-1} + 3^x}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) $\frac{1}{4}$

تست ۶۳: حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{2x+1} + 3^{x-1}}{2^{2x-1} - 3^x}$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $-\frac{1}{3}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{1}{4}$

تست ۶۴: حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 3x^2}{\cos x - 1}$ کدام است؟

- (۱) -۳ (۲) ۳ (۳) -۶ (۴) ۶

نکته: اگر $x \rightarrow \pm\infty$ از هم‌ارزی‌های زیر می‌توانیم استفاده می‌کنیم:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \sim \sqrt{a} \left|x + \frac{b}{2a}\right|, \quad \sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + d} \sim \sqrt[3]{a} \left(x + \frac{b}{3a}\right)$$



نکته: اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - x + 1)$ برابر با ۳ باشد a چقدر است؟

- ۱ (۴) ۲ (۳) ۳ (۲) ۴ (۱)

نکته: اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 3} - ax - b) = 0$ باشد، $a + b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (صفر)

نکته: اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 3} - ax - b) = 0$ ، $a + b$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (صفر)

نکته: حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+4\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{x}}$ کدام است؟

- ۱ (۴) ۲ (۲) ۳ (۰) ۴ (۱)

نکته: اگر $u \rightarrow \infty$ ، $u \sim [u]$ به شرطی که در توان نباشد.



نکته: مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(x^3 \left[\frac{1}{2-x} \right] - 8 \left[\frac{1}{2-x} \right] \right)$ کدام است؟

- ۱ (۱۲) ۲ (۸) ۳ (۸) ۴ (۱۲)

تست ۷۰: حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x - \sin x|}{[2x - \cos x]}$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

نکته: سرعت رشد توابع مختلف به صورت مقابل است: $(a > 0, a \neq 1, b > 0, c > 1)$ $\log_a n < n^b < c^n < n! < n^n$

تعریف و نکته: تعریف می‌کنیم: $\log_e x = \ln x$ و داریم $(e^u)' = u'e^u$, $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$



مثال ۱۵: با توجه به نکته بالا داریم: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x + 4^x}{x!} =$ و همچنین $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n^y} =$

تست ۷۱: حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x}{x^2 + 1}$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) صفر (۳) ∞ (۴) $\frac{1}{2}$

تست ۷۲: حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{1}{e}$ (۳) $-\infty$ (۴) $+\infty$

نکته: داریم: $\lim_{n \rightarrow \infty} C^n = \begin{cases} 0 & |C| < 1 \\ 1 & C = 1 \\ \infty & |C| > 1 \end{cases}$

تست ۷۳: مقدار $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x+1}{4x+2} \right)^{\frac{x^3}{x-1}}$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $-\infty$ (۴) $+\infty$

نکته: توابع $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \mathbb{Z} \\ h(x) & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$, $k(x) = \begin{cases} g(x) & x \in \mathbb{Q} \\ h(x) & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ در بی‌نهایت زمانی حد دارند که حدهای دو تابع g و h در بی‌نهایت موجود و برابر

یکدیگر باشند.



تست ۷۴: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 2x - \log x & x \in \mathbb{Z} \\ a & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ در بی نهایت حد داشته باشد، مقدار a چقدر است؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

تست ۷۵: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ، آن گاه حد تابع در بی نهایت کدام است؟

(۱) ۱ (۲) صفر (۳) موجود نیست (۴) شرایط بحث را ندارد

نکته: اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = 1^\infty$ ، مقدار حد برابر $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)-1)g(x)$ است. (وقتی $x \rightarrow a$ باز هم همین موضوع برقرار است)



تست ۷۶: حد $\lim_{x \rightarrow 1} (4x - 3)^{\frac{1}{x-1}}$ برابر کدام گزینه است؟

(۱) ۱ (۲) ۰ (۳) \sqrt{e} (۴) e^4

تست ۷۷: حد $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$ برابر کدام گزینه است؟

(۱) e (۲) ۰ (۳) \sqrt{e} (۴) e^{-1}

تست ۷۸: حد $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1}\right)^x$ برابر کدام گزینه است؟

(۱) e (۲) ۰ (۳) \sqrt{e} (۴) e^{-1}

تست ۷۹: حد $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{\tan x}}$ برابر کدام گزینه است؟

(۱) ۱ (۲) e (۳) ∞ (۴) حد ندارد

* (امام علی (ع): با هوی نفسانی خود مبارزه کن همانگونه که با دشمنت مبارزه می کنی.)

تست ۸۰: حد $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x})^{x-1}$ برابر کدام گزینه است؟

- (۱) e (۲) e^2 (۳) \sqrt{e} (۴) e^{-1}

۵) حدهای ایهام دار مثلثاتی: در مورد این نوع حدها اگر $u \rightarrow 0$ ، می توانیم از هم‌ارزی‌های زیر استفاده کنیم:

$$\sin u \sim u, \tan u \sim u, \sin^n u \sim u^n, \tan^n u \sim u^n, \sin^{-1} u \sim u, \tan^{-1} u \sim u$$

$$\cos u \sim 1 - \frac{u^2}{2}, \cos^n u \sim 1 - \frac{nu^2}{2}, \left(\cos^{-1} u \sim \sqrt{1-u^2}, u \rightarrow 1 \right)$$

نکته: در مواردی که ایهام با این هم‌ارزی‌ها رفع نشد، از هم‌ارزی‌های زیر می توانیم استفاده کنیم:

$$\sin u \sim u - \frac{u^3}{6}, \tan x \sim u - \frac{u^3}{3}, \sin^{-1} u \sim u + \frac{u^3}{6}, \tan^{-1} u \sim u - \frac{u^3}{3}$$



تست ۸۱: حد کسر $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\tan 4x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{\sin 9x}}$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) 1

تست ۸۲: حد کسر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[x^2] - x^2}{x \tan x}$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) 2 (۳) 1 (۴) -2

تست ۸۳: حد کسر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sqrt[3]{x}-1)}{\cos \frac{\pi x}{2}}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{2}{3\pi}$ (۲) $\frac{3}{2\pi}$ (۳) $-\frac{3}{2\pi}$ (۴) $\frac{2}{3\pi}$

تست ۸۴: حد کسر $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cos^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2}}$ کدام است؟

- (۱) $\sqrt{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $-\sqrt{2}$

تست ۸۵: حد کسر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \tan x - \tan x}{\tan x + x - \sin x}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{13}{10}$ (۳) $\frac{17}{10}$ (۴) $\frac{3}{2}$



تعریف دنباله‌ای حد:

الف) حدهای متناهی:

تعریف: فرض کنیم $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد که در آن D زیر مجموعه‌ای دلخواه از \mathbb{R} است. می‌گوییم تابع f در $x = a$ حدی برابر عدد حقیقی L دارد هرگاه به ازای هر دنباله همگرا به a از اعضای مخالف عدد a از دامنه تابع f ، دنباله $\{f(a_n)\}$ نیز به L همگرا باشد. یعنی:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

تعریف: تابع f را در نظر می‌گیریم. این تابع در نقطه $x = a$ حد راستی نظیر L دارد، هرگاه به ازای هر دنباله از عضوهای دامنه f مانند $\{a_n\}$ که به a همگرا هستند و در آن‌ها $a_n > a$ داشته باشیم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = L$$

تعریف: تابع f را در نظر می‌گیریم. این تابع در نقطه $x = a$ حد چپ نظیر L دارد، هرگاه به ازای هر دنباله از عضوهای دامنه f مانند $\{a_n\}$ که به a همگرا هستند و در آن‌ها $a_n < a$ داشته باشیم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = L$$

ب) حدهای نامتناهی:

تعریف: فرض کنیم f تابعی بر اعداد حقیقی باشد. گوییم حد تابع f در نقطه a از دامنه $+\infty$ است هرگاه به ازای هر دنباله از دامنه f مانند $\{x_n\}$ که همگرا به a و مخالف آن باشد، داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty$. در این حالت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

تعریف: فرض کنیم f تابعی بر اعداد حقیقی باشد. گوییم حد تابع f در نقطه a از دامنه $-\infty$ است هرگاه به ازای هر دنباله از دامنه f مانند $\{x_n\}$ که همگرا به a و مخالف آن باشد، داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = -\infty$. در این حالت می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

نکته ۴۵: مشابه دو تعریف بالا عبارت‌های زیر قابل تعریف هستند.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

شرح ۱۶: به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x-1)^2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-4x}{x} = -\infty$

شرح ۱۷: با استفاده از دنباله‌ها، نشان دهید که هیچ‌یک از حدهای زیر موجود نمی‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{\pi}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}, \lim_{x \rightarrow 1} \cos \frac{1}{x-1}$$

شرح ۱۸: کدام دنباله‌های زیر نشان می‌دهد که $\lim_{x \rightarrow 0} \tan \frac{1}{x}$ وجود ندارد؟

$$\left\{ \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{3}} \right\}, \left\{ \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{3}} \right\} \quad (۱) \quad \left\{ \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{4}} \right\}, \left\{ \frac{1}{n\pi - \frac{\pi}{4}} \right\} \quad (۲) \quad \left\{ \frac{1}{3n\pi} \right\}, \left\{ \frac{1}{2n\pi} \right\} \quad (۳) \quad \left\{ \frac{1}{n\pi} \right\}, \left\{ \frac{1}{2n\pi} \right\} \quad (۴)$$

مثال ۱۸: ثابت کنید توابع زیر در نقطه صفر حد ندارند.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x-1 & x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

مثال ۸۷: برای آن که نشان دهیم تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ در $x=2$ حد ندارد، از دو دنباله‌ی $\{2 + \frac{1}{n}\}$ و $\{\frac{2n+a}{n}\}$ استفاده می‌کنیم. در این صورت a کدام عدد نمی‌تواند باشد؟

$$(1) -\sqrt{3} \quad (2) 7 \quad (3) \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4) \sqrt{5}$$

مثال ۸۸: دنباله‌های $\{\sqrt{2} + \frac{1}{n}\}$ و $\{\frac{a_n}{n}\}$ برای اثبات عدم وجود حد تابع $f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = \sqrt{2}$ استفاده شده‌اند. کدام دنباله‌ی زیر می‌تواند باشد؟

$$(1) \left\lfloor \frac{\sqrt{2}}{n} \right\rfloor \quad (2) \frac{1}{\sqrt{2} + \frac{1}{n}} \quad (3) \sqrt{2}n \quad (4) \lfloor \sqrt{2}n \rfloor$$

قوانین حد توابع:



اگر توابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند، آنگاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

این قوانین قابل تعمیم به n تابع ($n \in \mathbb{N}$) نیز می‌باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0), \quad \lim_{x \rightarrow a} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

و همچنین اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ باشد داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f^n(x) = L^n, \quad \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} \quad (L > 0 \vee n = 2k+1)$$

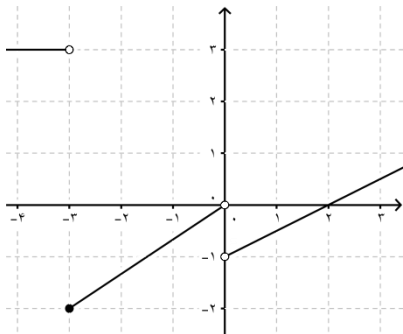
مثله ۸۹: به کمک قضیه (۱) ثابت کنید: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ اگر و تنها اگر $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0$

مثله ۹۰: اگر تابع f در نقطه‌ی $x = 1$ حد داشته باشد و $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{f(x) + 1} = 1$ ، آن گاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

(۱) -۳ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴) ۳

مثله ۹۱: اگر $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ ، کدامیک در $x = 0$ حد ندارد؟

(۱) $f + g$ (۲) $f - g$ (۳) fg (۴) $\frac{f}{g}$



مثله ۹۱: با توجه به شکل مقابل حاصل حد $\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f \circ f(x)$ کدام است؟

(۱) ۳ (۲) $+\infty$ (۳) ۲ (۴) $\frac{1}{2}$

مثله ۹۲: اگر $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ، $g(x) = [x]$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} g \circ f(x)$ کدام است؟

(۱) -۲ (۲) صفر (۳) -۱ (۴) ۱



قضیه فشردگی: اگر تابع f در یک همسایگی (محدوفه) نقطه‌ای مانند a ، بین دو تابع g و h قرار بگیرد و داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad \text{در این صورت خواهیم داشت:} \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$$

مشق ۲۰: حاصل حدهای مقابل را بیابید.

۱) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x}$, ۲) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \sin \frac{1}{x}$

۳) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \frac{1}{x}$

۴) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{\pi}{x}$

۵) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left(\left[\frac{1}{x} \right] + \left[\frac{2}{x} \right] + \dots + \left[\frac{n}{x} \right] \right)$

مشق ۲۱: ۱- نشان دهید که اگر $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$

۲- اگر به ازای هر $x \neq 0$ داشته باشیم $3 - x^2 \leq f(x) \leq 3 + x^2$ ، مطلوب است $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

تست ۹۳: اگر $\cos(\pi x) < f(x) < 2x - x^2 - 2$ ، $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

(۱) موجود نیست. (۲) ۱ (۳) صفر (۴) -۱

تست ۹۴: در بازه $(0, 2)$ همواره $\frac{\sin \pi x}{1-x} \leq f(x) \leq 4 \tan^{-1}(x^2 - 2x + 2)$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟

(۱) صفر (۲) π (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) نامشخص



تعریف: فرض کنیم f یک تابع دلخواه و $A \subseteq D_f$ باشد. گوئیم تابع f بر مجموعه A کراندار است هرگاه:

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ \text{ s.t. } \forall x \in A \quad |f(x)| \leq M$$

نکته: توابعی نظیر $y = \sqrt{1-x^2}$ ، $y = \cos u$ ، $y = \sin u$ کراندار هستند.

قانون: اگر تابع g در همسایگی فنوف a کراندار باشد و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0$.

مثال ۲۲: حدهای زیر را محاسبه کنید. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 1) \sin \frac{1}{x-1}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 [x]$

مثال ۲۳: برای تابع دیریکله $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{Q}^c \end{cases}$ ثابت کنید: $\lim_{x \rightarrow 0} xD(x) = 0$.

تست ۹۵: فرض کنید $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ و $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \geq 2 \\ 2 - 2x & x < 2 \end{cases}$. در این صورت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)D(x)$ کدام است؟
 (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) صفر (۴) وجود ندارد.

تست ۹۶: اگر تابع با ضابطه $f(x) = (x^2 - ax) \sin \frac{1}{x-1}$ در $x = 1$ حد داشته باشد، a کدام است؟
 (۱) وجود ندارد. (۲) هر مقدار دلخواه (۳) صفر (۴) ۱

تست ۹۷: تابع $f(x) = (x^2 + ax + b) \cos \frac{1}{x^2 - 1}$ در همه جا حد داشته دارد، $a - b$ را بیابید؟
 (۱) ۱ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

تست ۹۸: اگر $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ و $g(x) = \frac{x}{6} - \cos x$ ، آن‌گاه fg در چند نقطه حد دارد؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)



نکته: برای محاسبه‌ی حد تابع $y = [f(x)]$ در نقطه $x = x_0$ دو حالت در نظر می‌گیریم:

الف: اگر $f(x_0) \notin \mathbb{Z}$ ، حد با مقدار تابع در این نقطه برابر است.

ب: اگر $f(x_0) = k \in \mathbb{Z}$ و:

۱. تابع در همسایگی این نقطه صعودی باشد داریم: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x)] = k$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} [f(x)] = k - 1$

۲. تابع در همسایگی این نقطه نزولی باشد داریم: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x)] = k - 1$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} [f(x)] = k$

۳. تابع در این نقطه دارای ماکزیمم نسبی باشد داریم: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0^-} [f(x)] = k - 1$

۴. تابع در این نقطه دارای مینیمم نسبی باشد داریم: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0^-} [f(x)] = k$

مثال ۲۴: حد تابع $f(x) = [x^3]$ را در نقطه $x = 1$ واقع بر این تابع را بیابید.



نکته: فرض کنیم تابع $y = [f(x)]$ در $x = a$ ماکزیمم یا مینیمم نسبی نباشد و همچنین $f(x) \in \mathbb{Z}$ ، می‌دانیم در این صورت تابع در این نقطه حد

ندارد، ولی اگر $y = g(x)[f(x)]$ و $g(a) = 0$ باشد، آن‌گاه تابع در این نقطه حد دارد.

تست ۹۹: تابع $y = (x^4 - 3x^2 + 2)[x^2]$ در چند نقطه از $(-2, 2)$ حد ندارد؟

۱ (۵) ۲ (۴) ۳ (۳) ۴ (۲) ۵ (۱)

تست ۱۰۰: تابع $y = \left[\frac{x}{2} \right] \left[\frac{x}{3} \right]$ در چند نقطه از $[0, 4]$ حد ندارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

تست ۱۰۱: تابع $f(x) = (x^2 - 2x + 2)[x]$ در چند نقطه‌ی $a \in \mathbb{Z}$ دارای حد است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) بی‌شمار

پیوستگی توابع:

تعریف: تابع f در نقطه $x = a$ از دامنه‌اش پیوسته است، هرگاه حد $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجود و برابر $f(a)$ باشد.



مثال ۲۵: پیوستگی توابع زیر را در نقاط خواسته شده تعیین کنید.

$$1) f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & x > 3 \\ x^2 + x - 2 & x \leq 3 \end{cases}, x = 3$$

$$2) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 4, & x = 1 \end{cases}$$

مثال ۲۶: مقدار a و b را طوری بیابید که تابع f را در نقطه $x = 2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a[x] - 1 & x < 2 \\ -2 & x = 2 \\ a \sin(x - 2) + bx & x > 2 \end{cases}$$

«(امام جواد(ع): کسی که به غیر خدا تکیه کند، خدا وی را به همراهی بخارند.))»

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < x < a \\ 1 - \frac{x}{4} & x \geq a \end{cases}$$

همواره پیوسته است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) هیچ مقدار a

تست ۱۰۲:

ریاضی خارج ۹۵



تعریف: تابع f در نقطه $x = a$ پیوستگی راست (چپ) دارد، هرگاه حد $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ($\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$)

نکته: اگر تابع f فقط در همسایگی چپ (راست) نقطه $x = a$ تعریف شده باشد، و در این نقطه پیوستگی چپ (راست) داشته باشد، در این نقطه پیوسته در نظر گرفته می‌شود.

نکته: پیوستگی تابع در نقاط مفرد (قطعی که تابع در خود آن‌ها تعریف شده باشد ولی در هیچ همسایگی آن‌ها تعریف نشده باشد) و همچنین نقاط خارج دامنه آن قابل بحث نیست.

مثال ۲۷: پیوستگی تابع $f(x) = \frac{1}{[x] - 2}$ در نقاط $x = 2, x = 3$ بررسی کنید.

تست ۱۰۳: تابع $y = [x^2]$ در $x = 0$ چگونه است؟

- ۱) فقط پیوسته راست ۲) فقط پیوسته چپ ۳) پیوسته از چپ و راست ۴) ناپیوسته از چپ و راست

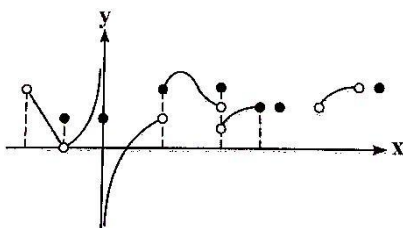
تست ۱۰۴: تعداد نقاط ناپیوسته تابع با ضابطه $f(x) = [x^2]$ در بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵) ۶ (۶)

ریاضی ۹۵

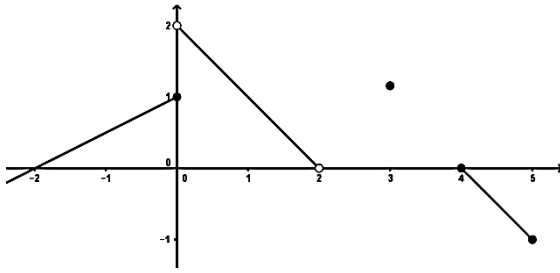
تست ۱۰۵: در شکل روبرو در چند نقطه از دامنه تابع نمی‌توان از پیوستگی صحبت کرد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



تست ۱۰۶: تابع زیر در چند نقطه از دامنه‌اش ناپیوستگی دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (هیچ نقطه)



شکل ۳۷: پیوستگی توابع زیر در نقاط خواسته شده بررسی کنید.

۱) $f(x) = [x]$, $\forall x \in \mathbb{Z}$

۲) $f(x) = [\sin x]$, $x = \pi$

۳) $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & x > 0 \\ x + x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, $x = 0$

تست ۱۰۷: تابع f با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 0$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

(۲) از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته

(۴) از چپ پیوسته - از راست پیوسته

(۱) از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته

(۳) از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته

پیوستگی توابع مثلثاتی:

توابع $y = \cos(f(x))$, $y = \sin(f(x))$ در D_f پیوسته‌اند.

تابع $y = \tan(f(x))$ در $\left\{ x \mid x \in D_f, f(x) \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$ و $y = \cot(f(x))$ در $\left\{ x \mid x \in D_f, f(x) \neq k\pi \right\}$ پیوسته است.



شکل ۲۸: توابع $f(x) = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}$ و $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \sin x}$ و $f(x) = \tan \sqrt{x}$ در چه نقاطی پیوسته‌اند؟



پیوستگی در نقاط انتهایی:

تعریف: تابع f در نقطه‌ی انتهایی چپ دامنه‌اش پیوسته است، هر گاه در آن پیوسته راست باشد و همچنین تابع f در نقطه‌ی انتهایی راست دامنه‌اش پیوسته است، هر گاه در آن پیوسته چپ باشد.

پیوستگی تابع روی بازه و تابع پیوسته:

تعریف: می‌گوییم تابع f روی بازه I پیوسته است، اگر در هر نقطه از این بازه پیوسته باشد.

تعریف: می‌گوییم تابع f پیوسته است، اگر در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد.

نکته: توابع چند جمله‌ای روی مجموعه \mathbb{R} پیوسته‌اند. و همچنین توابع گویا در تمام نقاط دامنه‌شان پیوسته‌اند.

مثال ۲۹: پیوستگی توابع $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ و $g(x) = 2x + \sqrt{1-x^2}$ و $f(x) = \sqrt{x-3}$ را در نقاط انتهایی دامنه‌اش بررسی کنید.

مثال ۳۰: توابع $f(x) = x + \frac{x^3}{2}$ و $g(x) = \frac{6x-1}{x^2-13x+36}$ در چه نقاطی پیوسته‌اند؟

تست ۱۰۸: تابع $y = \frac{|x-1|}{x-1}$ در نقطه $x=1$ چگونه است؟

- (۱) پیوسته (۲) ناپیوسته (۳) از راست پیوسته (۴) پیوستگی قابل بحث ندارد.

تست ۱۰۹: کدام گزینه در مورد تابع $y = \sqrt{x^2-x^4}$ در $x=0$ صحیح است؟

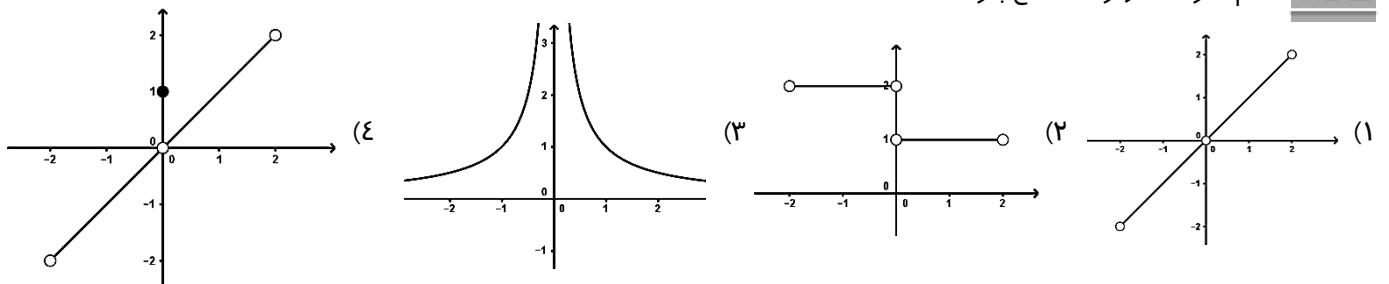
- (۱) پیوسته (۲) از چپ پیوسته (۳) از راست پیوسته (۴) پیوستگی قابل بحث ندارد.

سوال ۱۱۰: تابع $f(x) = (-1)^{[x]}(x - [x])$ در بازه $[0, 1]$ کدام ویژگی را دارد؟

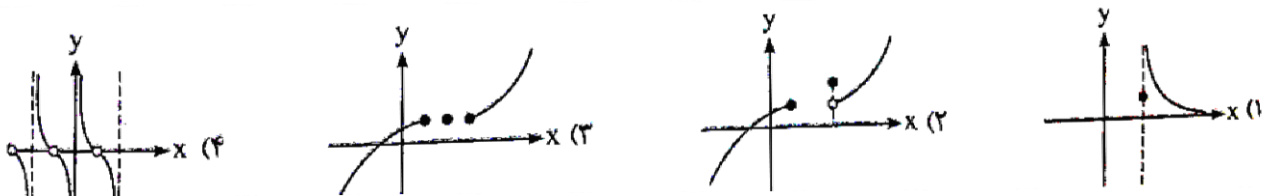
- (۱) در نقطه ابتدایی و انتهایی ناپیوسته
(۲) در نقطه ابتدایی پیوسته در انتهایی ناپیوسته
(۳) در نقطه ابتدایی ناپیوسته در انتهایی پیوسته
(۴) در نقطه ابتدایی و انتهایی پیوسته

سوال ۱۱۱: پیوستگی توابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ و $f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x^2+x}}$ را در دامنه‌شان بررسی کنید.

سوال ۱۱۲: کدام نمودار مربوط به تابع پیوسته نیست؟



سوال ۱۱۳: کدام یک تابعی پیوسته است؟



سوال ۱۱۴: کدام یک پیوسته نیست؟

- (۱) $y = \sqrt{1-x^2}$ (۲) $y = \frac{1}{x}$ (۳) $y = x - [x]$ (۴) $y = x|x|$

سوال ۱۱۵: تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ g(x) & x < 0 \end{cases}$ مفروض است. کدام باشد تا f تابعی پیوسته باشد؟

- (۱) $g(x) = [x]$ (۲) $g(x) = |x-1|$ (۳) $g(x) = |\sin^{-1} x|$ (۴) $g(x) = [x - \sin x]$

تست ۱۱۵: اگر تابع $f(x) = (x^3 + ax + b)H(x^2 - 1)$ روی \mathbb{R} پیوسته باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟ (تابع H تابع هوی ساید)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

تست ۱۱۶: تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} - \frac{a}{x^2-9}, & x \neq 3 \\ b, & x = 3 \end{cases}$ در $x = 3$ پیوسته است. مقدار ab کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

تست ۱۱۷: به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = \begin{cases} ax+1, & [x] > 1 \\ \frac{x-\sqrt{2x}}{x-2}, & [x] \leq 1 \end{cases}$ تابعی پیوسته است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

کدام بیان درباره پیوستگی تابع درست است؟

- ۱) اگر تابعی در بازه (a, b) یکنوا و کراندار باشد، در این بازه پیوسته است.
۲) اگر تابعی در بازه $[a, b]$ کراندار و دارای ماکسیمم و می‌نیمم باشد، در این بازه پیوسته است.
۳) اگر تابعی در بازه (a, b) پیوسته باشد در این بازه کراندار و ماکسیمم و می‌نیمم مطلق دارد.
۴) اگر تابعی در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد در این بازه کراندار و ماکسیمم و می‌نیمم مطلق دارد.

تست ۱۱۹: اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax+b & ; |x| \geq 1 \\ x[x] & ; |x| < 1 \end{cases}$ روی \mathbb{R} پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x = 3$ را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

تست ۱۲۰: تابع با ضابطه $f(x) = (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{4} x$ ، در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی، چگونه است؟

- ۱) فقط در اعداد زوج پیوسته ۲) فقط در اعداد فرد پیوسته ۳) همواره ناپیوسته ۴) همواره پیوسته

اگر $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \notin \mathbb{Z} \\ f(x) - 1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ آنگاه تعداد نقاط ناپیوسته‌ی تابع g روی بازه $[-4, 4]$ ، کدام است؟

تست ۱۲۱:
سراسری ۹۲

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) صفر

اگر f, g و $f+g$ هر دو در نقطه x_0 پیوسته باشند، آنگاه کدام بیان درست است؟

تست ۱۲۲:
سراسری ۹۰

- (۱) الزاماً تابع $f \circ g$ در x_0 پیوسته است.
(۲) f, g ممکن است در x_0 پیوسته نباشند.
(۳) f یا g ممکن است در x_0 پیوسته نباشند.
(۴) الزاماً f و g هر دو در x_0 پیوسته‌اند.

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} a(1 + \sqrt{1-x}) & ; x > 2 \\ x^2 - 2x & ; x \leq 2 \end{cases}$ همواره پیوسته است؟

تست ۱۲۳:
سراسری ۹۴

- (۱) ۱/۲ (۲) ۱/۶ (۳) ۲/۴ (۴) ۳/۲

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x[x] & , |x| < 1 \\ ax + b & , |x| \geq 1 \end{cases}$ بر روی \mathbb{R} پیوسته است. مقدار a کدام است؟

تست ۱۲۴:
خارج ۸۵

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

اگر $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & ; x < 0 \\ 2x & ; x \geq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -2x & ; x < 0 \\ 1 & ; x \geq 0 \end{cases}$ ، کدام تابع در $x = 0$ پیوسته است؟

تست ۱۲۵:
خارج ۸۶

- (۱) $f + g$ (۲) $f \circ f$ (۳) $g \circ f$ (۴) $f \circ g$

اگر $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ و $g(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0^-} (g \circ f)(x)$ کدام است؟

تست ۱۲۶:
خارج ۸۶

- (۱) -۳ (۲) -۱ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) ۲

«(تصور هندسی مسائل بنیادیه مفید است، زیرا هیچ چیز عینی‌تر از شکل برای ما نیست؛ شکل را می‌توان احساس کرد و دید.)»*

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} 2 - \sqrt{3-x} & x < -1 \\ x+1 & x \geq -1 \end{cases}$ بر روی \mathbb{R} پیوسته است؟

تست ۱۲۷:

خرج ۸۷

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 - \cos \pi x}{x - 4\sqrt{x} + 4}$ کدام است؟

تست ۱۲۸:

خرج ۸۷

- (۱) صفر (۲) 4π (۳) $4\pi^2$ (۴) $8\pi^2$

به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{1-x} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$ بر روی \mathbb{R} پیوسته است؟

تست ۱۲۹:

خرج ۸۸

- (۱) $-\pi$ (۲) π (۳) ۱ (۴) هیچ مقدار a

به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi}{x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته است؟

تست ۱۳۰:

خرج ۹۰

- (۱) -۱ (۲) صفر (۳) ۱ (۴) هیچ مقدار a

تابع با ضابطه‌ی $f(x) = (-1)^{[x]} \sin \pi x$ ، در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟

تست ۱۳۱:

خرج ۹۳

- (۱) همواره پیوسته (۲) فقط در اعداد فرد پیوسته (۳) فقط در اعداد زوج پیوسته (۴) از چپ پیوسته، از راست ناپیوسته

تست ۱۳۲: به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x} - \sqrt{x+1}}{x-3} & ; x > 3 \\ ax - 2a - \frac{3}{8} & ; x \leq 3 \end{cases}$$

در نقطه $x = 3$ پیوسته است؟

خارج ۹۴

است؟

- (۱) ۲
(۲) ۳
(۳) هر چه باشد a

- (۱) ۲
(۲) هیچ مقدار a

نکته: اگر تابع f در $x = a$ ناپیوسته ولی در یک همسایگی آن کراندار باشد، و همچنین تابع g در همان همسایگی پیوسته و دارای حدی برابر f باشد، تابع $f(x)g(x)$ در $x = a$ پیوسته است.



تست ۱۳۳: اگر تابع $f(x) = (x^2 - bx + a) \operatorname{sgn}(x^2 + x - 2)$ روی \mathbb{R} پیوسته باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

(۱) -۱ (۲) -۳ (۳) ۳ (۴) ۱

تست ۱۳۴: تابع f با ضابطه $f(x) = (x-2) \left[\frac{1}{3}x - 1 \right]$ روی بازه $(0, 9)$ در چند نقطه، ناپیوسته است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

سراسری ۸۵

نکته: تابع $h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{Z} \\ g(x) & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ در اعداد غیر صحیح زمانی پیوسته است که تابع $g(x)$ در آن نقاط پیوسته باشد و در عدد صحیح a زمانی پیوسته است که $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = f(a)$ یعنی h در اعداد صحیح فقط در نقاطی پیوسته است که ریشه $f(x) = g(x)$ باشند.



تست ۱۳۵: تابع $f(x) = \begin{cases} \lfloor \sqrt{x} \rfloor & x \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{x} & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ در چه عددی پیوسته است؟

(۱) ۲ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) هیچکدام

* (امام علی (ع): ناراضی پدر و مادر، کمر تهنیتی را به دنبال دارد و آدمی را به ذلت می‌کشاند.) *

تست ۱۳۶: تابع

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x - 7 & x \notin \mathbb{Z} \\ \cdot & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

در چه عددی پیوسته است؟

۱ (۱) ۲ (۲) -۱ (۳) -۲ (۴)



نکته: اگر تابع $h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{Q} \\ g(x) & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ باشد و هر دو ضابطه این تابع، توابعی پیوسته باشند، آنگاه $h(x)$ در ریشه‌های $f(x) = g(x)$ پیوسته است.

همچنین تابع در نقطه a زمانی پیوسته است که حد تابع و مقدار تابع در این نقطه برابر باشند.

مثال ۲۲: توابع زیر در چه نقاطی پیوسته‌اند.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ \cdot & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{و} \quad f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 2-x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

تست ۱۳۷: تابع

$$h(x) = \begin{cases} \left[x + \frac{1}{4} \right] & x \in \mathbb{Q} \\ [x] - [-x] & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

در چه نقطه‌ای پیوسته است؟

۱ (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $\frac{5}{6}$ (۴)

تست ۱۳۸: تابع

$$h(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x} & x \in \mathbb{Q} \\ \frac{5}{4} & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

در چند نقطه‌ای پیوسته است؟

هیچ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (بیشمار)

تست ۱۳۹: تابع

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ \cdot, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

در چند نقطه پیوسته است؟

صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) بی‌شمار (۴)



نکته: تابع f در $x = a$ ناپیوستگی رفع شدنی دارد هرگاه حد تابع موجود باشد، ولی برابر مقدار تابع در این نقطه نباشد. تابع f در $x = a$ ناپیوستگی رفع نشدنی (اساسی) دارد هرگاه حد تابع موجود نباشد.

تست ۱۴۰: کدام تابع در نقطه $x = 0$ ناپیوستگی رفع نشدنی دارد؟

(۱) $f(x) = [x] + [-x]$ (۲) $f(x) = x[x]$ (۳) $f(x) = x - [x]$ (۴) $f(x) = [-x^2]$

تست ۱۴۱: کدام تابع در نقطه $x = 0$ ناپیوستگی رفع نشدنی دارد؟

(۱) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ (۲) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ (۳) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ (۴) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$



مفهوم پیوستگی توابع در یک نقطه بر اساس همگرایی دنباله‌ها:

تعریف: تابع $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $x = a$ از دامنه تابع پیوسته است، هرگاه به ازای هر دنباله همگرا به a از D_f ، دنباله $f(a_n)$ به $f(a)$ همگرا باشد.

قضیه ۱: اگر توابع f و g در نقطه $a \in D_f \cap D_g$ پیوسته باشند، آنگاه توابع زیر نیز در این نقطه پیوسته‌اند:

$$f \pm g, fg, cf \quad (c \in \mathbb{R}), \frac{f}{g} \quad (g(a) \neq 0)$$

نکته: عکس قضیه فوق (روما برقرار نیست. یعنی ممکن است مثلا تابع $y = f + g$ ولی هیچکدام از دو تابع f و g پیوسته نباشند.

مثال ۳۳: نشان دهید دو تابع زیر در $x = 0$ پیوسته نیستند، ولی ضرب آن‌ها در این نقطه پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ گویا,} & x \neq 0 \\ 0, & x \text{ گنگ,} \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x \text{ گویا,} & x \neq 0 \\ 1, & x \text{ گنگ,} \end{cases}$$

«(نبوغ عبارت است از یک درصد الهام و نود و نه درصد عرق ریختن.)»



نکته: اگر توابع f و g در قطعه‌ای $a \in D_{f \cap g}$ و در یک همسایگی مشترک از آن تعریف شده باشند و تابع f در a پیوسته و تابع g در این قطعه ناپیوسته

باشد، آنگاه توابع $\frac{g}{f}$ ، $f \pm g$ قطعا در این قطعه ناپیوسته هستند ولی پیوستگی fg و $\frac{f}{g}$ باید بررسی شود

قانون ۳: اگر تابع f در b پیوسته باشد و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(b)$

نتیجه ۱: اگر شرایط قانون ۳ برقرار باشد، تابع $f \circ g$ در $x = a$ پیوسته است.

نتیجه ۲: ترکیب دو تابع پیوسته، ناپیوسته نیست.

تست ۱۴۲: فرض کنید توابع f و g روی دامنه یکسانی تعریف شده باشند و تابع f در $x = a$ پیوسته و تابع g در $x = a$ ناپیوسته باشد،

در این صورت در این نقطه:

(۱) $f + g$ می‌تواند پیوسته باشد. (۲) $f - g$ می‌تواند پیوسته باشد. (۳) g/f پیوسته نمی‌باشد. (۴) fg قطعا ناپیوسته است.

تست ۱۴۳: اگر $f + g$ و $f - g$ هر دو در نقطه‌ی x_0 پیوسته باشند، آنگاه کدام بیان درست است؟
(۱) الزاماً تابع $f \circ g$ در x_0 پیوسته است.
(۲) $f \cdot g$ ممکن است در x_0 پیوسته نباشد.
(۳) f یا g ممکن است در x_0 پیوسته نباشند.
(۴) الزاماً f و g هر دو در x_0 پیوسته‌اند.

تست ۱۴۴: اگر $f(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right)$ و $g(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ ، آنگاه حاصل $\lim_{x \rightarrow -} (g \circ f)(x)$ کدام است؟

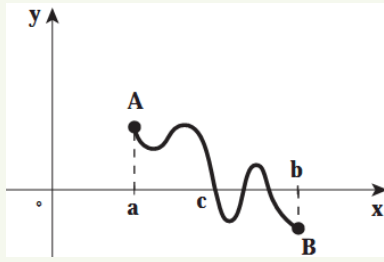
(۱) -۳ (۲) -۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

تست ۱۴۵: اگر $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ ، کدام تابع در $x = 0$ پیوسته است؟

(۱) $f + g$ (۲) $f \circ f$ (۳) $g \circ f$ (۴) $f \circ g$



ویژگی‌های مهم تابع‌های پیوسته:



الف) قضیه بولزانو: اگر تابع f در $[a, b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b) < 0$ ،

آن‌گاه حداقل یک عدد مانند c در بازه $[a, b]$ است به طوری که $f(c) = 0$.

یعنی f در این بازه حداقل یک ریشه دارد.

نکته: در قضیه فوق اگر در این بازه تابع صعودی یا نزولی باشد، دقیقاً یک c وجود دارد.

مثال ۳۴: نشان دهید تابع $f(x) = x^2 + x - 3$ در $(1, 2)$ و تابع $g(x) = x - \cos x$ در بازه $(0, 1)$ حداقل یک ریشه دارند.

مثال ۳۵: معادله $x^2 - (m+1)x + 2m - 3 = 0$ در بازه $[-1, 1]$ حداقل یک ریشه دارد. حدود m را بیابید.

مثال ۳۶: اگر تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته و k عددی بین $f(a)$ و $f(b)$ ، $f(a) < f(b)$ ، و $g(x) = f(x) - k$ ، نشان دهید، وجود دارد $c \in (a, b)$ که $g(c) = 0$.

مثال ۱۴۶: جواب معادله $\sin x = \frac{x}{3}$ در کدام بازه قرار دارد؟

- (۱) $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$ (۲) $(\frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4})$ (۳) $(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6})$ (۴) $(\frac{5\pi}{6}, \pi)$

مثال ۱۴۷: معادله $\sin x - x^2 + x + 1 = 0$ در بازه $(-\pi, \pi)$

- (۱) ریشه ندارد. (۲) دقیقاً یک ریشه دارد. (۳) دقیقاً دو ریشه دارد. (۴) دقیقاً سه ریشه دارد.

تست ۱۴۸: اگر تابع f در بازه $[0, 1]$ پیوسته باشد و $f(0) = 1$ و $f(1) = 0$ ، آن گاه معادله $f(x) = x$ در بازه $(0, 1)$ چند جواب دارد؟

- (۱) صفر جواب (۲) دقیقاً یک جواب (۳) حداقل یک جواب (۴) حداقل دو جواب

مشق ۴۷: ثابت کنید که اگر $P(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه فرد باشد، آنگاه معادله $P(x) = 0$ حداقل دارای یک ریشه حقیقی است.

تست ۱۴۹: اگر تابع f تابعی یکنوا و پیوسته روی \mathbb{R} باشد و $f(1) = -2$ و $f(-4) = 3$ ، آن گاه معادله $f^{-1}(x) = 0$ قطعاً در کدام بازه

حداقل یک ریشه دارد؟

- (۱) $(-4, 1)$ (۲) $(-1, 4)$ (۳) $(-3, 2)$ (۴) $(-2, 3)$

تست ۱۵۰: کوچکترین ریشه معادله $x^4 - 4x + 1 = 0$ در کدام بازه است؟

- (۱) $(0, \frac{1}{4})$ (۲) $(1, \frac{3}{2})$ (۳) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$ (۴) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ سراسری ۸۵

تست ۱۵۱: با کدام مجموعه مقادیر a ، یکی از ریشه‌های معادله $ax^2 + 2x^2 - x + 4 = 0$ در بازه $(0, 1)$ قرار می‌گیرد؟

- (۱) $\alpha < -\frac{3}{4}$ (۲) $\alpha < -3$ (۳) $\alpha < -\frac{5}{2}$ (۴) $\alpha < -5$ سراسری ۸۸

تست ۱۵۲: ریشه‌ی معادله‌ی $x^3 + 2x - 2 = 0$ در کدام بازه است؟

- (۱) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ (۲) $(\frac{7}{8}, 1)$ (۳) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ (۴) $(\frac{3}{4}, \frac{7}{8})$ سراسری ۸۹

تست ۱۵۳:

یکی از ریشه‌های حقیقی معادله‌ی در $x^3 + 2x^2 - 4x - 3 = 0$ کدام بازه است؟

سراسری ۹۴

(۴) $(0, \frac{1}{2})$

(۳) $(-\frac{1}{2}, 0)$

(۲) $(-1, -\frac{3}{4})$

(۱) $(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2})$

تست ۱۵۴:

یکی از ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(a+2)x^2 - 7x + 4 = a$ ، بین دو عدد ۱ و -۱ است. مجموعه مقادیر a کدام است؟

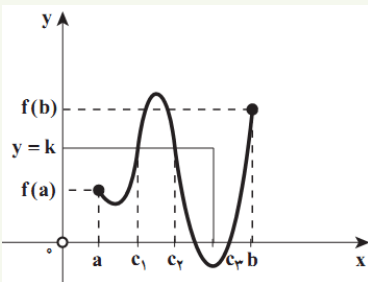
خارج ۸۸

(۴) \mathbb{R}

(۳) \emptyset

(۲) $\{a : a > 4\}$

(۱) $\{a : a < -2\}$



قضیه ه (قضیه مقدار میانی): اگر تابع f در $[a, b]$ پیوسته باشد و k عددی بین $f(a)$

و $f(b)$ باشد، آنگاه حداقل یک عدد مانند c در بازه (a, b) وجود دارد که $f(c) = k$.

نکته: در قضیه فوق اگر در این بازه تابع صعودی یا نزولی باشد، دقیقاً یک c وجود دارد.



شکل ۳۷: نشان دهید که خط $y = 2$ نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2(x-3)^2 + x$ را در قطع می‌کند.

شکل ۳۸: آیا تابع $f(x) = \frac{x^3}{4} + \sin \pi x + 4$ در بازه $[-2, 2]$ مقدار ۵ را می‌تواند داشته باشد.

شکل ۳۹: نشان دهید که خط $y = 4$ نمودار تابع $f(x) = (x-3)(x-5) + x$ را در قطع می‌کند.

* (در تمجید از دانش همین بس که هر کس به آن رسید بزرگ شد.)*

مثال ۴۰: نشان دهید معادله $x^5 + x^4 + 2x^3 - x + 2 = 0$ در بازه $[-2, 0]$ و معادله $x^3 - x - 1 = 0$ در بازه $[1, 2]$ دارای جواب هستند.

مثال ۴۱: ثابت کنید معادله $\sin x - x^2 + x + 1 = 0$ حداقل دو ریشه در بازه $[-\pi, \pi]$ دارد.

مثال ۴۵: کدام خط زیر تابع $f(x) = \gamma(x-1)(x-2) + \frac{x}{\gamma}$ را در بازه $(1, 2)$ قطع می کند؟

$y = \frac{3}{4}$ (۴) $y = \frac{1}{\gamma}$ (۳) $y = \frac{3}{\gamma}$ (۲) $y = \frac{5}{4}$ (۱)

مثال ۴۶: اگر تابع f بر $[a, b]$ پیوسته و $f(a) = b$ و $f(b) = a$ باشد، آن گاه کدام یک از خطوط زیر نمودار تابع را الزاما در نقطه‌ای

در بازه (a, b) قطع می کند؟ (۱) $y = a + b$ (۲) $y = \frac{a+b}{\gamma}$ (۳) $y = a - b$ (۴) $y = \frac{a-b}{\gamma}$

پیوستگی تابع وارون یک تابع پیوسته:

قهنبه ۶: فرض کنید f تابعی یک به یک و پیوسته باشد، در این صورت تابع f^{-1} نیز یک به یک و پیوسته است.



مثال ۴۲: نمودار توابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ را همراه با وارونشان رسم کنید.

نمودار و دامنه تابع وارون، توابع زیر را در صفحه مختصات رسم کنید.

مثال ۴۳:

$$f(x) = \tan x, -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \quad \text{الف)}$$

$$g(x) = \cot x, 0 < x < \pi \quad \text{ب)}$$

فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x-1, & 1 < x < 2 \\ 2x-4, & 3 < x < 4 \end{cases}$ تابع f^{-1} در چند نقطه از دامنه اش ناپیوسته است، نمودار f^{-1} را رسم کنید.

مثال ۴۴:

اگر $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ 3x-1 & x \leq 1 \end{cases}$ آن گاه تابع f^{-1} در چند نقطه ناپیوسته است؟

تست ۱۵۷:

- هیچ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

دامنه معکوس تابع $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{1-x}$ برابر است:

تست ۱۵۸:

- (۱) $[-1, 1]$ (۲) $[0, 1]$ (۳) $[-1, 2]$ (۴) $[-1, +\infty)$

توجه:

(۱) چنانچه قائم تابع:

خط $x = a$ چنانچه قائم تابع f نامیده می شود، هرگاه لااقل یکی از حکم های زیر درست باشد:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

نکته: الف) در توابع کسری ریشه های فخرج چنانچه قائمند اگر اولاً ریشه صورت نباشند (و اگر بودند بعد از رفع ابهام باز هم حد به بی نهایت میل کند)، ثانیاً در همسایگی آن‌ها تابع تعریف شده باشد.

ب) در تابع $y = \log f(x)$ چنانچه قائم ریشه های $f(x)$ اند به شرطی که $f(x) \rightarrow 0^+$.

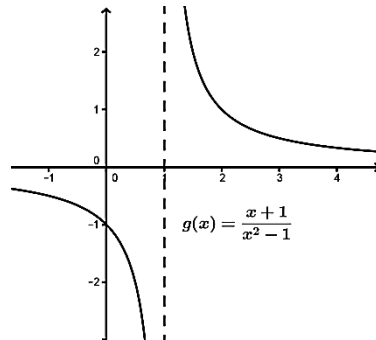
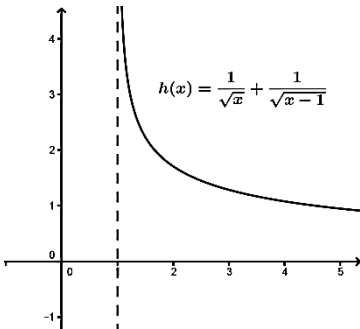
ج) در توابع $y = \log \frac{f}{g}$ ریشه های غیر مشترک صورت و فخرج به شرطی که در یک همسایگی آن‌ها تابع تعریف شده باشد، چنانچه قائمند.

د) توابع با برد متناهی نظیر $y = \sin x$ ، $y = \sin \frac{1}{x}$ و $y = \sqrt{9-x^2}$ چنانچه قائم ندارند.

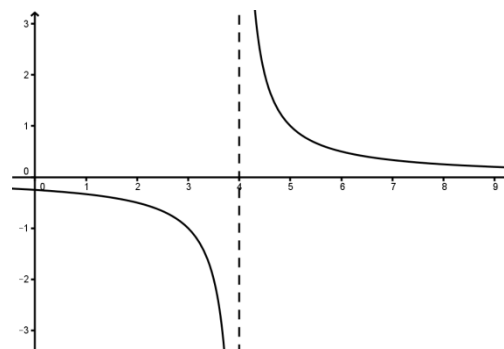
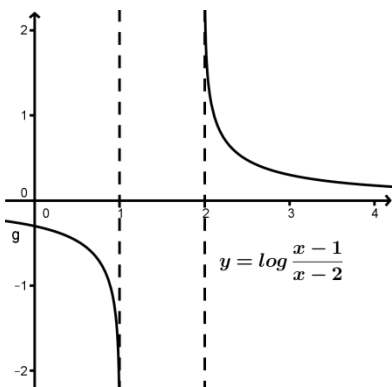


مثال ۴۵: مجانب‌های قائم توابع مقابل را در صورت وجود بیابید.

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x^2-1}, \quad f(x) = \tan x \quad (-\pi \leq x \leq +\pi)$$



مثال ۴۶: مجانب‌های قائم توابع $y = \log \frac{x-1}{x-2}$ و $y = \frac{3x}{x^2-4x}$ را بیابید.



تست ۱۵۹: چند تابع از توابع زیر، مجانب قائم دارند؟

(د) $y = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

(ج) $y = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}$
۴ (ع)

(ب) $y = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$
۳ (ح)

(الف) $y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$
۲ (ز) ۱ (ط)

تست ۱۶۰: کدام یک از خطوط زیر معادله مجانب قائم تابع $y = \frac{x-\pi}{1-\sin x}$ می‌باشد؟

(۲) $x = \frac{\pi}{2}$

(۱) $x = 1$

(۴) تابع مجانب قائم ندارد.

(۳) $x = \frac{3\pi}{2}$

تست ۱۶۱: تابع $f(x) = \frac{1}{2x - [2x]}$ در فاصله $[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ چند مجانب قائم دارد؟

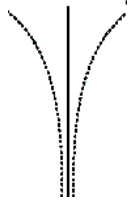
۳ (ع)

۲ (ح)

۱ (ز)

صفر (ط)

تست ۱۶۲: اگر $f(x) = \frac{a[x]-1}{2-x}$ در اطراف مجانب قائم خود به صورت زیر باشد حدود a کدام است؟



(۲) $a > \frac{1}{4}$

(۱) $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$

(۴) $\frac{1}{2} < a < 1$

(۳) $\frac{1}{2} < a < \frac{1}{4}$

تست ۱۶۳: منحنی توابع $y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ و $y = \frac{1}{[x]+[-x]}$ به ترتیب چند مجانب قائم دارند؟

(۱) هیچ، بی شمار (۲) بی شمار، هیچ (۳) بی شمار، بی شمار (۴) هیچ، هیچ

تست ۱۶۴: تابع $y = \frac{x^2+1}{x-1} \cdot \sin x$ چند مجانب قائم دارد؟

(۱) هیچ (۲) ۷ (۳) ۱۰ (۴) بی شمار

تست ۱۶۵: کدام یک از توابع زیر مجانب قائم دارد؟

(۴) $y = \text{Arccos} \frac{1}{x-1}$

(۳) $y = \sin \frac{1}{x}$

(۲) $y = \log(x-2)$

(۱) $y = \frac{1}{[x]}$

تست ۱۶۶: چند مجانب قائم دارد؟ $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2-x}{x-4}$

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

تست ۱۶۷: چند مجانب قائم دارد؟ $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x^2+x-1)(x^2+x+1)}$

(۱) ۴ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۰

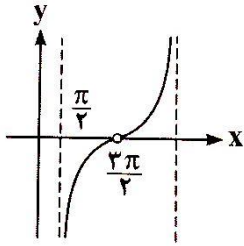
تست ۱۶۸: چند مجانب قائم دارد؟ $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-[x]}$ با دامنه $[0, 2]$

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۰

«(امام علی علیه السلام: عزت پیوسته بی قراری می کند تا آن که به خانه ای درآید که اهل آن چشم طمع به دست مردم نداشتند باشند و در آن جا

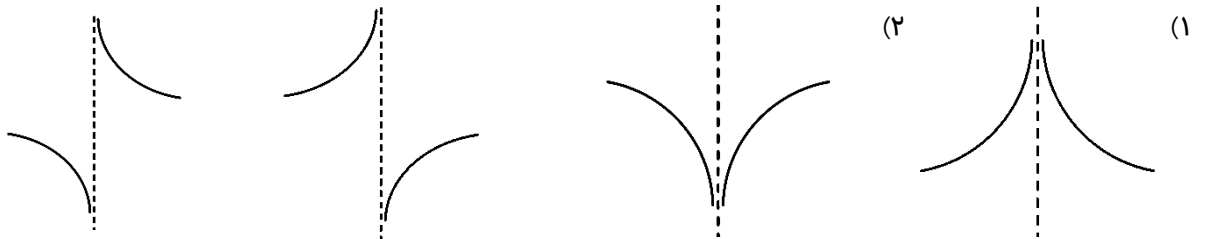
مستقر می شهود.)»

تست ۱۶۹: شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{1 + a \sin x}{b + \cos x}$ است. $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ کدام است؟



- (۱) $1 - \sqrt{3}$ (۲) $2 - \sqrt{3}$ (۳) $1 + \sqrt{3}$ (۴) $2 + \sqrt{3}$

تست ۱۷۰: نمودار تابع $y = \frac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم به کدام صورت است؟



تست ۱۷۱: نمودار تابع $f(x) = \log\left(\frac{|x|}{x^2-4}\right)$ چند مجانب قائم دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

تست ۱۷۲: تابع $y = \frac{1}{x - [x] - 1}$ در بازه $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ چند مجانب قائم دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

مثال ۴۷: اگر به ازای هر $x > 10$ ، $\frac{2x-1}{x} < f(x) < \frac{2x^2+3x}{x^2}$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ را پیدا کنید.



۲) مجانِب افقی: خط $y=L$ را مجانِب افقی نمودار تابع f می نامند به شرطی که $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ و یا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$.

نکته ۴۷: برای یافتن نقاط تقاطع توابع با مجانِب های افقی آن ها کافی است معادله تابع و مجانِب افقی را مساوی هم قرار دهیم.

نکته ۴۸: توابع با دامنه متناهی نظیر $y = \frac{1}{\sqrt{3-x^2}}$ و $y = \cos^{-1} x$ مجانِب افقی ندارند و همچنین هر تابع مجانِب افقی دارد.

نکته ۴۹: برای بررسی نمودار تابع $y=f(x)$ در مجانِب افقی اش نظیر $y=b$ ، کفایت از حد $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x)-b)$ استفاده کنیم

مثال ۴۸: مجانِب های افقی توابع زیر را بیابید.

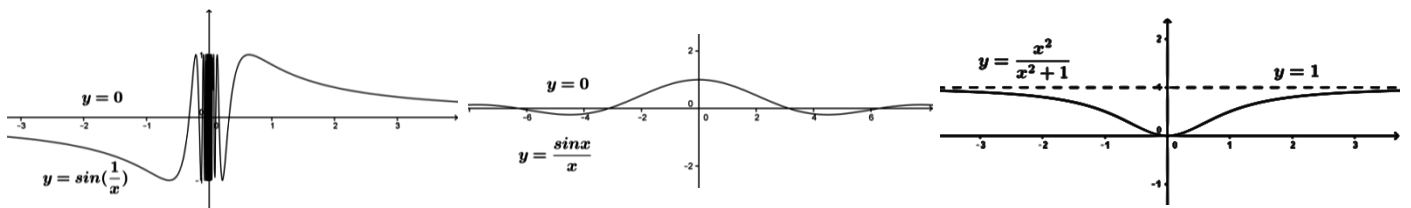
$$y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y = \frac{2x+1}{x-2}$$

مثال ۴۹: محل تقاطع توابع $y = \frac{x^2}{x^2+1}$ و $y = \frac{\sin x}{x}$ و $y = \sin \frac{1}{x}$ با مجانِب افقی شان را بیابید.



تست ۱۷۳: کدامیک مجانِب افقی دارد؟

(۴) $y = \sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$ (۳)

(۲) $y = x + \frac{x}{x-1}$

(۱) $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{x-2}}$

$y = \sin^{-1}\left(\frac{|x|}{x+1}\right)$

تست ۱۷۴: کدامیک مجانِب افقی دارد؟

(۴) $y = 2x + \sqrt{4x^2 - 1}$

(۳) $y = x + \sqrt{x}$

(۲) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{7-x}$

(۱) $y = \frac{x + \sqrt{1-x^4}}{x^5 + 3}$

* (امام علی (ع): مومن سکوت می‌کند تا سالم ماند و سخن می‌گوید تا سود برد.)*

تست ۱۷۵:

نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{2|x|+3}{x-2}$ چند مجانب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

تست ۱۷۶:

منحنی تابع $y = \frac{\sqrt{-x}}{x^2-1}$ چند خط مجانب دارد؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) صفر

تست ۱۷۷:

منحنی تابع $y = \frac{\sqrt{2-x^2}}{x-5}$ چند مجانب دارد؟

- ۱ (۱) صفر ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

تست ۱۷۸:

اگر مجانب‌های تابع $y = a + \frac{x+1}{ax+b}$ در نقطه $(3, 2)$ متقاطع باشند، $a+b$ کدام است؟

- ۲ (۱) -۲ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴)

تست ۱۷۹:

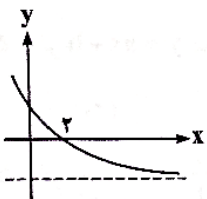
نمودار تابع $y = \frac{x^2-|x|}{x^2+|x|}$ در اطراف مجانب افقی آن، به کدام صورت است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

تست ۱۸۰:

شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax + \sqrt{x^2 + bx + 4}$ است. $a+b$ کدام است؟

- ۲ (۱) -۲ (۳) ۱ (۲) -۳ (۴)



تست ۱۸۱:

شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + bx + c}}$ است. دو تایی مرتب (a, b) کدام است؟

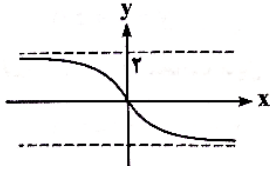
(سراسری ریاضی ۷۹)

(۱) $(2, -4)$

(۲) $(-2, 4)$

(۳) $(-2, 0)$

(۴) $(2, 0)$



تست ۱۸۲:

شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{ax+b}{x-1}\right)$ است. دو تایی مرتب (a, b) کدام است؟

(سراسری ریاضی ۸۹)

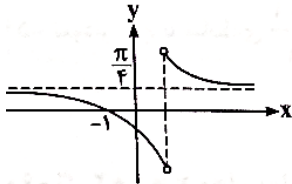
کدام است؟

(۱) $(1, 1)$

(۲) $(1, -1)$

(۳) $(0, 1)$

(۴) $(-1, 0)$



تست ۱۸۳:

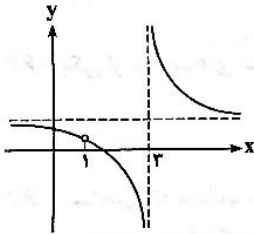
نمودار $y = \frac{x^2 - ax + 2}{x^2 + bx + c}$ به صورت مقابل است. حاصل $\frac{bc}{a}$ کدام است؟

(۱) -4

(۲) 4

(۳) -3

(۴) 3



تست ۱۸۴:

دو تابع $f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 2}$ و $g(x) = \frac{x^2}{x - 1}$ مفروض اند. اگر A و B محل تلاقی مجانب‌های افقی و قائم منحنی تابع

سراسری ۸۵

$(g - f)$ و O مبدأ مختصات باشد، مساحت مثلث OAB کدام است؟

(۱) 3

(۲) 4

(۳) 5

(۴) 6

تست ۱۸۵:

معادله مجانب افقی نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{x^2 \operatorname{Arctg} x}{2x + 2x^2}$ است؟

سراسری ۸۶

(۱) $y = \frac{\pi}{4}$

(۲) $y = \frac{\pi}{2}$

(۳) $y = \frac{\pi}{3}$

(۴) $y = \pi$

تست ۱۸۶:

تابع با ضابطه $y = ax + b + \frac{x^2}{2x - 1}$ هموگرافیکی است که محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند. $a + b$ کدام است؟

سراسری ۸۷

(۱) 2

(۲) -2

(۳) $\frac{1}{2}$

(۴) $-\frac{1}{2}$

تست ۱۸۷:

خط به معادله $y = x + 4$ محور تقارن منحنی تابع $y = \frac{(2a-1)x+2}{2x+a}$ است. عرض از مبدا محور تقارن دیگر

سراسری ۸۹

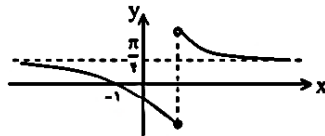
آن کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

تست ۱۸۸:

شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \text{Arctg} \frac{ax+b}{x-1}$ است. دو تایی مرتب (a, b) کدام است؟

سراسری ۸۹



(۱) (۱, ۱)

(۲) (۱, -۱)

(۳) (۰, ۱)

(۴) (-۱, ۰)

تست ۱۸۹:

نقطه تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f-g$ کدام است؟ $f(x) = \frac{x+11}{x^2-3x-4}$ و $g(x) = \frac{3}{x-4}$

سراسری ۹۰

- (۱) (-۱, ۰) (۲) (۴, -۱) (۳) (-۱, ۲) (۴) (۴, ۰)

تست ۱۹۰:

خط به معادله $y = \frac{3}{2}$ مجانب افقی نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2x - 1 + \sqrt{ax^2 + bx}$ است. b کدام است؟

خارج ۸۷

- (۱) -۱۰ (۲) -۵ (۳) ۵ (۴) ۱۰

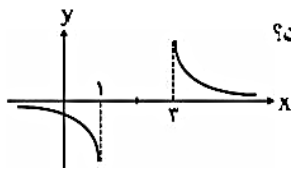
تست ۱۹۱:

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{(x-1)^2}$ ، خط مجانب افقی خود را در نقطه A قطع می‌کند. فاصله نقطه A از خط مجانب قائم

خارج ۸۸

کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲



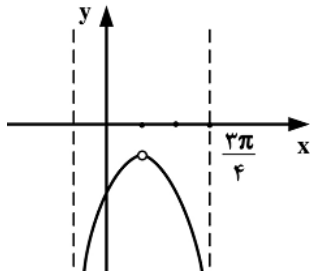
شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \text{Arcsin} \frac{ax+b}{x-2}$ است. دو تایی مرتب (a, b) کدام است؟

- (۲) $(1, 0)$
(۴) $(0, 1)$

- (۱) $(0, -1)$
(۳) $(1, 1)$

تست ۱۹۲:

خارج ۱۹



شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $f(x) = \frac{a \sin x - \cos x}{b + \cos 2x}$ است. a کدام است؟

- (۱) $-\sqrt{2}$
(۲) ۱
(۳) $\sqrt{2}$
(۴) ۲

تست ۱۹۳:

خارج ۹۳



حد بی نهایت در بی نهایت و چنانچه مایل:

تعریف: برای تابع f داریم $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، هرگاه به ازای هر دنباله از نقاط دامنه f مانند $\{x_n\}$ و اگر $x_n \rightarrow +\infty$ ، دنباله $\{f(x_n)\}$ به $+\infty$ و اگر $x_n \rightarrow -\infty$ ، دنباله $\{f(x_n)\}$ به $-\infty$ میل کند.

نکته: حالت $\infty - \infty$ جزء حالات ابهام در توابع است و برای رفع آن در مسایل رادیکالی، از ضرب در مزدوج عبارت در سوال تشریحی و در از هم آری سوال تستی استفاده می‌کنیم.

(۳) چنانچه مایل:

تعریف: خط $y = mx + b$ که $m \neq 0$ چنانچه مایل تابع f است هرگاه حداقل یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0 \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

نکته: اگر شرط بالا برقرار باشد، برای یافتن چنانچه مایل از روش زیر استفاده می‌کنیم:

ابتدا با استفاده از رابطه‌های زیر m و b را می‌یابیم. در این صورت $y = mx + b$ چنانچه مایل تابع خواهد بود.

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] \quad \text{یا} \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] \quad \text{و} \quad m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{یا} \quad m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

مثال ۵۰: به کمک تعریف نشان دهید: $\lim_{x \rightarrow -\infty} cx^2 = -\infty$ ($c \in \mathbb{R}^-$)

مش ۵۱: حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 + 4}}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{x^2 + 3x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x} - 1}$$

مش ۵۲: حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - 1 - 2x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

مش ۵۳: معادله مجانب مایل توابع مقابل را بیابید.

$$۱) y = 2x + \sqrt{x^2 + 3}$$

$$۲) y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3}$$

$$۳) y = x - \sqrt{x^2 + 2x}$$



نکته: تنها توابع کسری با صورت و فخرج چندجمله‌ای در صورتی بجانب مایل دارند که درجه صورتشان فقط یک واحد بیشتر از درجه فخرج باشد. در این صورت بعد از تقسیم صورت بر فخرج، خارج قسمت بدست آمده بجانب مایل می باشد. همچنین از روابط زیر نیز می توان بجانب های مایل تابع را بدست آورد.

$$y = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{cx^{n-1} + dx^{n-2} + \dots} \Rightarrow y = \frac{a}{c}x - \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{c^2}$$

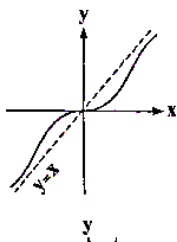
مثال ۵۴: معادله جانب مایل تابع $y = \frac{3x^2 + x - 1}{x + 4}$ را بیابید.

تست ۱۹۴: عرض نقطه تقاطع جانب های منحنی $y = \frac{x^3}{x^2 - 4x + 4}$ کدام است؟

- (۱) -۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

تست ۱۹۵: اگر $y = x + 2$ جانب مایل تابع $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x - 1}$ باشد، $a - b$ کدام است؟

- (۱) -۱ (۲) ۲ (۳) صفر (۴) -۳



تست ۱۹۶: شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه $y = \frac{ax^2 + bx^2}{x^2 + 1}$ است. زوج مرتب (a, b) کدام

است؟ (سراسری ریاضی ۷۷)

- (۱) (-۱, ۱)

- (۲) (۱, ۱)

- (۱) (-۱, ۰)

- (۳) (۱, ۰)



نکته: در توابع $y = mx + h + \sqrt{ax^2 + bx + c}$ خطوط $y = mx + h + \sqrt{a} \left| x + \frac{b}{2a} \right|$ با شرط $m^2 \neq a, a > 0$ ، مجانب‌های مایل تابع و با شرط $m^2 = a, a > 0$ ، مجانب‌های مایل و افقی تابع هستند. همچنین در توابع $y = mx + h + \sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + d}$ با فرض $a \neq 0$ ، تابع تنها دارای یک مجانب افقی یا مایل به معادله $y = mx + h + \sqrt[3]{a} \left(x + \frac{b}{3a} \right)$ می‌باشد.

مثال ۵۵: معادله مجانب‌های توابع $y = 2x + 3 + \sqrt{4x^2 - 1}$ ، $y = x + 1 - \sqrt{8x^3 + 4x}$ را بیابید.

تست ۱۹۶: اگر تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x - \sqrt{ax^2 - x} + 1$ دارای مجانبی موازی محور x ‌ها باشد، مجانب مایل آن کدام است؟

- (۱) $x + \frac{1}{2}$ (۲) $x - \frac{1}{2}$ (۳) $2x + \frac{1}{2}$ (۴) $2x - \frac{1}{2}$

تست ۱۹۷: خط مجانب منحنی به معادله $y = \sqrt[3]{8x^3 + 2x^2}$ محور y ‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟ ریاضی ۹۵

(۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{5}{6}$

تست ۱۹۸: فاصله‌ی نقاط منحنی تابع $y = \sqrt{x^3 - 3x^2 + 5}$ از خط به معادله‌ی $y = x + h$ وقتی $x \rightarrow \infty$ به صفر میل می‌کند. h کدام است؟ (آزمایشی سلیمش ۸)

(۱) -۳ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۳

تست ۱۹۹: به‌ازای چه مقدار a ، شیب مجانب مایل تابع $y = ax + \sqrt{x^2 - 7x}$ برابر -۱ می‌شود؟

(۱) -۱ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) -۲

تست ۲۰۰:

اگر تابع با ضابطه $f(x) = 2x - \sqrt{ax^2 - 6x + 7}$ دارای مجانبی موازی محور x ها باشد، عرض از مبدأ مجانب مایل آن کدام است؟

- (آزمون‌های گاه ۸۸) $-\frac{3}{2}$ (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) ۳ (۳) -3 (۴)

تست ۲۰۱:

اگر مجانب‌های مایل تابع $y = (a-1)x + 1 + \sqrt{5x^2 + 2x + 1}$ بر هم عمود باشند، مجموعه مقادیر a کدام است؟

- {-۳, ۱} (۱) {۱, ۳} (۲) {۱, -۱} (۳) {-۳, ۱} (۴)

تست ۲۰۲:

مجانب مایل منحنی $y = \sqrt{x^2 + 2x} + \frac{x^2 + x + 1}{x}$ محور x ها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

- $(-\frac{1}{3}, 0)$ (۱) $(-\frac{3}{4}, 0)$ (۲) $(-2, 0)$ (۳) $(-1, 0)$ (۴)

تست ۲۰۳:

تابع $f(x) = |x| + \frac{x}{x^2 - 1}$ دارای:

- (۱) مجانب افقی است.
(۲) چهار خط مجانب دارد.
(۳) دارای دو خط مجانب قائم و یک مجانب مایل است.
(۴) یک مجانب قائم و دو مجانب مایل است.

تست ۲۰۴:

نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$ نسبت به مجانب مایل خود، چگونه است؟

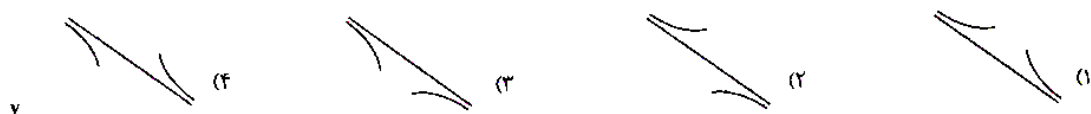
(آزمون‌های گاه ۸۸)

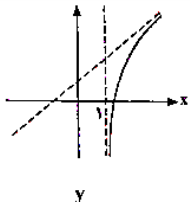


تست ۲۰۵:

نمودار تابع $f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x^2 + 4}$ نسبت به خط مجانب مایل خود، کدام وضعیت را دارد؟

(آزمون‌های گاه ۸۹)





شکل مقابل، قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + a}{x + b}$ است. مقادیر a و b به کدام صورت‌اند؟

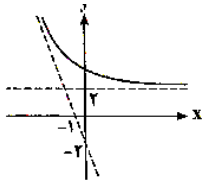
(سراسری تیرماه خرداد ۹۰ کشور)

(۲) $a < b = -1$

(۱) $a > b = -1$

(۴) $b < a = -1$

(۳) $b > a = -1$



شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax + \sqrt{x^2 + bx + 5}$ است. دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟

(سراسری ریاضی خرداد ۹۰ کشور)

(۲) $(-1, 4)$

(۱) $(-1, -4)$

(۴) $(1, 4)$

(۳) $(1, -4)$

خطوط مجانب نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 4}$ در نقاط A و B متقاطع‌اند. اندازه پاره خط AB کدام است؟

(۴) $2\sqrt{2}$

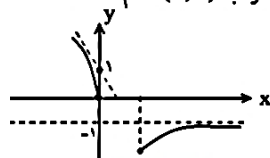
(۳) 4

(۲) $2\sqrt{2}$

(۱) 2

سراسری ۸۸

شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax + \sqrt{x^2 + bx}$ است. دوتایی مرتب (a, b) کدام است؟



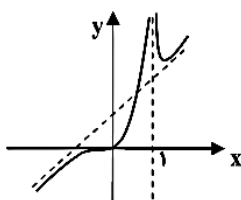
(۱) $(-1, -2)$

(۲) $(-1, 2)$

(۳) $(1, -2)$

(۴) $(1, 2)$

سراسری ۸۹



شکل رو به رو نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + ax^2}{x^2 + bx + c}$ است. عدد $(bc - a)$ کدام است؟

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۱

(۴) ۲

سراسری ۹۲

«(امام باقر (ع): از تنبلی و بی‌حوصلگی بپرهیز، زیرا که این دو کلید هر بدی هستند.)»

امتداد مجانب‌های نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}$ ، نیمساز ناحیه اول و سوم را در دو نقطه A و B قطع می‌کند. اندازه AB کدام است؟

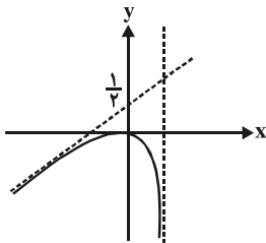
تست ۲۱۱: سراسری ۹۴

- ۲√۲ (۱) ۴ (۲) ۲√۵ (۳) ۴√۲ (۴)

دو تابع $f(x) = \frac{x+1}{x+\sqrt{x}}$ و $g(x) = \frac{1-x}{x-\sqrt{x}}$ مفروض‌اند. تعداد مجانب‌های نمودار تابع $(f+g)$ کدام است؟

تست ۲۱۲: خارج ۸۵

- ۰ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)



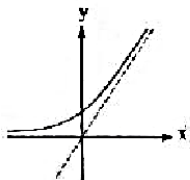
شکل مقابل، نمودار پیوسته از تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax}{2x + b}$ است. کدام است b؟

تست ۲۱۳: خارج ۸۵

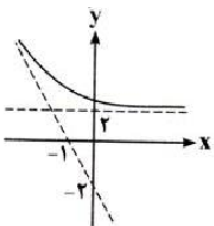
- ۲ (۱) $-\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۴) -۱ (۳)

اگر شکل مقابل، نمودار تابع $f(x) = ax + \sqrt{x^2 + bx + c}$ باشد، آنگاه a و b و c چگونه‌اند؟

تست ۲۱۴: خارج ۸۶



- $a = -1, b = 0, c < 0$ (۲) $a = -1, b < 0, c > 0$ (۱)
 $a = 1, b = 0, c > 0$ (۴) $a = 1, b > 0, c = 0$ (۳)



شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax + \sqrt{x^2 + bx + 5}$ است. دو تایی مرتب (a, b) کدام است؟

تست ۲۱۵: خارج ۹۰

- (-۱, ۴) (۲) (-۱, -۴) (۱)
(۱, ۴) (۴) (۱, -۴) (۳)

تست ۲۱۶: امتداد مجانب‌های نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ در نقاط A و B با عرض‌های مثبت متقاطع

خارج ۹۴

هستند. اندازه AB کدام است؟

۳ (۴)

$\sqrt{5}$ (۳)

۲ (۲)

$\sqrt{2}$ (۱)

نکته: مجانب مایل توابع $y = x\sqrt{\frac{x+a}{x+b}}$ به صورت $y = x + \frac{a-b}{2}$ است.



تست ۲۱۷: معادله مجانب مایل نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x^2}{x-2}}$ وقتی $x \rightarrow -\infty$ کدام یک است؟

سراسری ۸۷

۱) $2y - 2x - 2 = 0$ (۱) ۲) $2y + 2x - 2 = 0$ (۲) ۳) $2y - 2x + 2 = 0$ (۳) ۴) $2y + 2x + 2 = 0$ (۴)

تست ۲۱۸: اضلاع مثلثی منطبق بر محور x ها و مجانب‌های منحنی به معادله $y = (x-1)\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ است. مساحت این مثلث کدام است؟

خارج ۹۰

۴/۵ (۴)

۴ (۳)

۳/۵ (۲)

۳ (۱)

تست ۲۱۹: اگر $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ باشد، مجانب‌های نمودار تابع $y = xf(x)$ با کدام عرض متقاطع هستند؟

خارج ۹۵

۳/۵ (۴)

۳/۲۵ (۳)

۳ (۲)

۲/۵ (۱)

* (امام علی (ع): سخن چون دهاست، اندکش سودمند و زیادش کشنده است.)*

مجانِب‌های تابع وارون یک تابع:



نکته: اگر خط $x = a$ مجانب قائم تابع f باشد، $y = a$ مجانب افقی تابع f^{-1} است و اگر $y = a$ مجانب افقی تابع f باشد، $x = a$ مجانب قائم تابع f^{-1} است. همچنین اگر $y = ax + b$ مجانب مایل تابع f باشد، خط $y = \frac{x-b}{a}$ (وارون $y = ax + b$) مجانب مایل تابع f^{-1} است.

مثال ۵۶: مجانب های وارون تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ را بیابید.

تست ۲۰: هرگاه $0 = 1 - xf(x) + 2f(x) + 3x$ ، مجانب قائم $f^{-1}(x)$ کدام است؟

$x = 3 \quad (4)$

$x = -2 \quad (3)$

$x = -3 \quad (2)$

$x = 2 \quad (1)$

(تمارین کتاب)

۱- نقاط ناپیوستگی تابع f را پیدا کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x > 1 \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$$

$$۲- \text{تابع } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases} \text{ داده شده است. مقدار } a \text{ را چنان انتخاب کنید}$$

که تابع در $x=0$ پیوسته باشد.

$$۳- \text{به ازای چه مقدار } a, \text{ تابع } f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases} \text{ در } x=0 \text{ پیوسته است.}$$

۴- عددهای a و b را چنان انتخاب کنید که تابع f در نقطه $x=0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a + [x], & x < 0 \\ b, & x = 0 \\ \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}, & x > 0 \end{cases}$$

۵- تابع $f(x) = \left[\frac{x}{\pi}\right]$ در چه نقاطی ناپیوسته است؟۶- نقاط پیوستگی تابع $f(x) = [\sin x]$ را در بازه $[-2\pi, 2\pi]$ مشخص کنید.۷- اگر تابع f در نقطه‌ای پیوسته باشد، ثابت کنید تابع $|f|$ نیز در آن نقطه پیوسته است. آیا

عکس این مطلب نیز درست است؟

۸- دو تابع مثال بزنید که هر دو در یک نقطه ناپیوسته باشند ولی مجموع آنها در آن نقطه

پیوسته باشد.

۹- دو تابع مثال بزنید که هر دو در یک نقطه ناپیوسته باشند ولی ضرب آنها در آن نقطه

پیوسته باشد.

۱۰- با برهان خلف، ثابت کنید:

اگر تابع f در نقطه a پیوسته و تابع g در نقطه a ناپیوسته باشد آنگاه $f+g$ در a ناپیوسته است.

۱۱- با استفاده از قضایای حد و پیوستگی ثابت کنید تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$ روی \mathbb{R} پیوسته است.

۱۲- تابع $f(x) = [x^2]$ روی بازه $[2, 2+k]$ پیوسته است، بزرگ‌ترین مقدار k را بیابید.

۱۳- تابع $f(x) = \begin{cases} 4, & x^2 = |x| \\ x+2, & x^2 \neq |x| \end{cases}$ در چند نقطه از دامنه‌اش ناپیوسته است؟

۱۴- تابع $f(x) = \frac{4 - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1} - 1}$ در چند نقطه از دامنه‌اش پیوسته است؟

۱۵- نمودار تابع $f(x) = [x] - x + \sin\left(\frac{\pi}{4}[x]\right)$ را در بازه $[2, 5]$ رسم کرده و مشخص کنید، تابع در چند نقطه از این بازه ناپیوسته است.

۱۶- پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x^2, & x^2 \geq 2|x| \\ 2|x|, & x^2 < 2|x| \end{cases}$ را روی \mathbb{R} بررسی کنید.

۱۷- عددهای a و b را چنان انتخاب کنید که تابع $f(x) = (x^2 - bx + a) \operatorname{sgn}(x^2 + x - 2)$ روی \mathbb{R} پیوسته باشد. (sgn تابع علامت است)

۱- حدهای زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \cot x \text{ (ب)} & \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]-2}{x-2} \text{ (ب)} & \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2} \text{ (الف)} \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-1)^{[x]+1}}{x^2-4} \text{ (ج)} & \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x-2}{x^2-2x-8} \text{ (ث)} & \lim_{x \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \tan x \text{ (ت)} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) \text{ (ح)} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\cot x} \text{ (ج)} \end{array}$$

۲- در نظریه نسبیت جرم ذره‌ای با سرعت V برابر است با $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ که در آن m_0 جرم سکون ذره است و c سرعت نور وقتی که $V \rightarrow c^-$ چه اتفاقی می‌افتد؟

۳- حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+5x-1}{2x^2-1} \text{ (ب)} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{x-3} \text{ (الف)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2+2x}) \text{ (ت)} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x^2+3x-1} \text{ (ب)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2+x+1}{x^2+x+3} \right] \text{ (ج)} & \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2-3x}) \text{ (ث)} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{8x^3+2x^2-2x}) \text{ (ح)} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \tan^{-1} x}{2-x} \text{ (ج)} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) \text{ (د)} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+3}} \text{ (خ)} \end{array}$$

۴- حدود زیر را پیدا کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}} \text{ (ب)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3-x+1}{x^2+x-1} \text{ (الف)}$$

۵- ثابت کنید که اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و g در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left(\frac{1}{x} + [x]\right) \text{ و سپس } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = +\infty \text{ را پیدا کنید.}$$

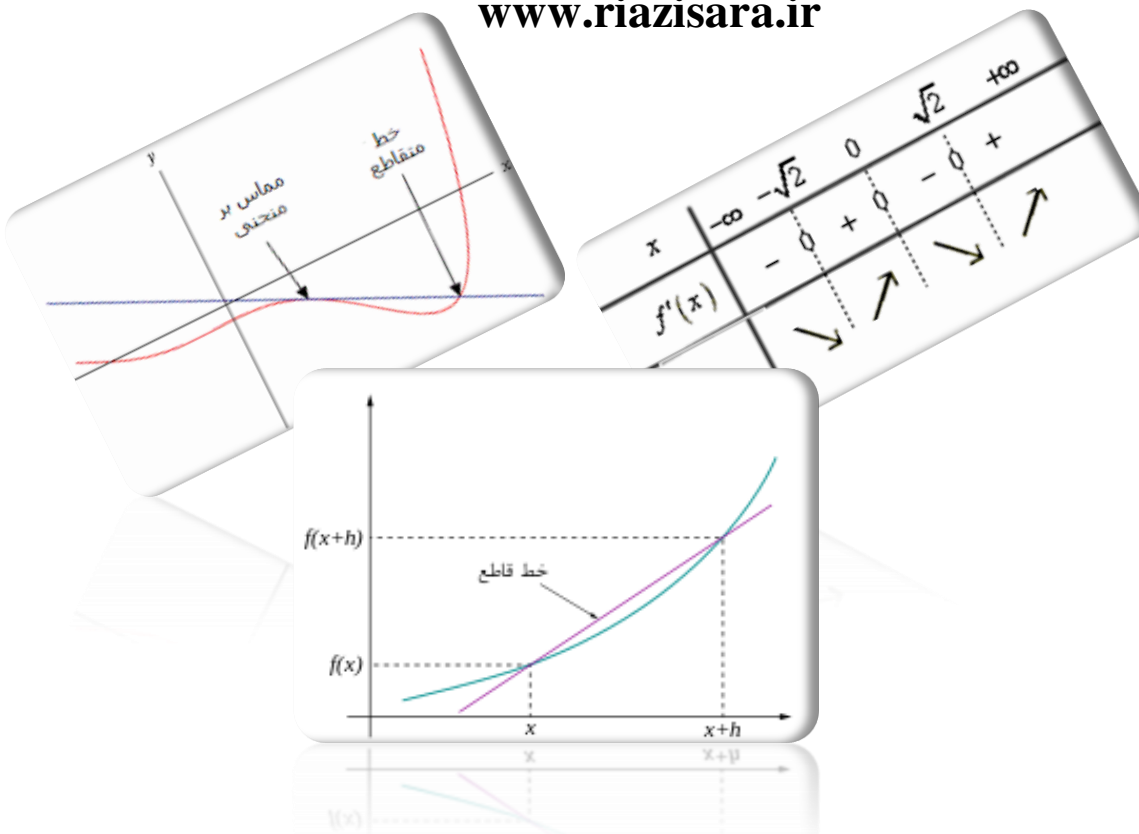
فصل سوم

مشتق و کاربردهای آن

تعداد تست: ۱۵۸

تعداد مثال: ۶۵

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



آهنگ متوسط و لحظه‌ای تابع



الف) آهنگ متوسط تغییر تابع f نسبت به x روی بازه $[a, a + \Delta x]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

ب) آهنگ آنی (لحظه‌ای) تغییر تابع f نسبت به x در $x = a$ (در صورت وجود حد) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}, \quad f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x ، در نقطه $x = 1$ با نمو

تجربی خارج ۹۴

۰٫۴۴، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟

- ۱) $\frac{1}{30}$
 ۲) $\frac{1}{24}$
 ۳) $\frac{1}{12}$
 ۴) $\frac{1}{6}$

در تابعی با ضابطه $f(t) = \frac{240}{t}$ ، آهنگ آنی تغییر f در لحظه $t = 4$ ، چقدر از آهنگ متوسط تغییر f از لحظه $t = 3$ تا

سراسری ۸۰

$t = 5$ بیشتر است؟

- ۱) ۱
 ۲) $\frac{1}{2}$
 ۳) ۲
 ۴) $\frac{3}{2}$

۳: اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{2}$
 ۲) $\frac{1}{6}$
 ۳) $\frac{1}{2}$
 ۴) ۹

نکته: اگر تابع f در نقطه $x = a$ مشتق‌پذیر باشد، داریم: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+mh) - f(a+nh)}{h} = (m-n)f'(a)$



۴: اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-2h)}{h}$ کدام است؟

- ۱) ۲
 ۲) ۴
 ۳) -۲
 ۴) -۴

«هیچ وقت به گمان اینکه وقت دارید نشتینید زیرا در عمل خواهید دید که همیشه وقت کم و کوتاه است.»

مثال: اگر $f'(2) = 5$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(2+3h) - f^2(2-h)}{(h^2 - h)f(2)}$ کدام است؟

۵ (۴) ۱۰ (۳) ۲۰ (۲) -۴۰ (۱)

مثال: اگر $f(x) = \frac{3}{x-2}$ ، حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(3 + \frac{1}{n}\right) - f\left(3 - \frac{5}{n}\right)$ کدام است؟

۳ (۴) ۱۸ (۳) -۶ (۲) ۶ (۱)

مفهوم مشتق در نقطه: تابع f و نقطه درونی $x = a$ از دامنه آن را در نظر می‌گیریم. منظور از شیب $f'(a)$ یعنی در زمانی که $x = a$ است، با افزودن شده یک واحد دیگر به x ، مقدار تابع به اندازه $f'(a)$ تغییر می‌کند. به عبارت دیگر $f'(a) \approx f(a+1) - f(a)$.



آهنگ تغییر در علم اقتصاد: تابع $C(x)$ را تابع هزینه می‌نامند که در آن $C(x)$ کل مبلغی می‌باشد که کارخانه برای تولید x کالا می‌پردازد. همچنین به مقدار $C'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x}$ هزینه نهایی تولید کالا می‌گویند.



نکته: هزینه متوسط تولید x واحد کالا برابر $\frac{C(x)}{x}$ و هزینه نهایی تولید کالای $(x+1)$ ام برابر $C'(x)$ است، همچنین درآمد حاصل از فروش x کالا را با $R(x)$ نشان می‌دهند و لذا درآمد متوسط تولید x کالا برابر $\frac{R(x)}{x}$ و درآمد نهایی تولید کالای $(x+1)$ ام برابر x است.



مثال: هزینه ساخت x یخچال به صورت $C(x) = 800000 + 40000x - 500x^2$ می‌باشد. هزینه نهایی تولید ۱۰۱مین یخچال چقدر است؟ معنی آن چیست؟ مبلغ دقیق تولید یخچال ۱۰۱ چقدر است؟

سراسری ۸۶
کتاب ۷: اگر هزینه چاپ تعداد x کتاب حبابان به صورت $C(x) = 800000 + 150x + 75000\sqrt{x}$ باشد. هزینه چاپ

۱۰۰۱ آمین کتاب برابر کدام است؟

۴) ۴۲۵

۳) ۴۰۰

۲) ۳۷۵

۱) ۳۵۰

شیب خط مماس و معادله خط مماس و قائم بر منحنی:

شیب خط مماس در نقطه $x = a$ ، برابر مقدار مشتق تابع در این نقطه است. یعنی $m = f'(a)$ و همچنین شیب خط قائم بر منحنی در این نقطه

$$\text{برابر } m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{f'(a)} \text{ است.}$$

نکته: فرض کنید منحنی f بر بازه بازی شامل نقطه $x = a$ تعریف شده باشد. معادله خط مماس بر منحنی در این نقطه در صورت وجود این

مماس، از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$



موضوع ۲: معادله خط مماس بر منحنی $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، $g(x) = x^2 - 1$ را در نقطه‌ای با طول ۱ را بیابید.

کتاب ۸: - خط گذرا بر دو نقطه‌ی $(1, 2)$ و $(-1, 3)$ ، بر منحنی پیوسته‌ی $y = f(x)$ در نقطه‌ی $x = 3$ مماس است. حد عبارت $\frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x}$

خارج ۹۳ وقتی $x \rightarrow 3$ ، کدام است؟

۴) ۵

۳) ۴

۲) ۳

۱) ۲

مشتق چپ و راست و مشتق پذیری



نکته: به $f'_-(x) = \lim_{x \rightarrow x^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ مشتق چپ تابع و به $f'_+(x) = \lim_{x \rightarrow x^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ مشتق راست تابع در نقطه $x = x_0$ می‌گوییم. اگر $f'_+(a) = f'_-(a)$ در $x = a$ مشتق پذیر می‌باشد.

سوال ۹: اگر $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ ، $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h^2) - f(0)}{h^2}$ کدام است؟

۸ (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۲ (۴)

سوال ۱۰: اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & , x < 1 \\ x^3 - \sqrt{x} & , x \geq 1 \end{cases}$ مقدار $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{h}$ کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

سوال ۱۱: مشتق چپ تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

سراسری ۸۹

۱ (۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲ (۲) $-\sqrt{2}$ ۳ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴ (۴) $\sqrt{2}$



نکته: شرط لازم برای وجود $f'_+(a)$ ، پیوستگی راست تابع در این نقطه و شرط لازم برای وجود $f'_-(a)$ ، پیوستگی چپ تابع در این نقطه است.

نکته: مانند تعریف حد و پیوستگی توابع، اگر تابع f در همسایگی چپ (راست) نقطه $x = a$ تعریف شده باشد و در این نقطه مشتق چپ (راست) داشته باشد، در این صورت $f'_-(a) = f'_+(a)$.

«آدمی ساخته می افکار خویش است، فردا همان خواهد شد که امروز می اندیشیده است.»

مثله ۱۲: اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x > 0 \\ x^2 + 1 & x \leq 0 \end{cases}$ ، آن گاه در $x = 0$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) فقط مشتق راست موجود
(۲) فقط مشتق چپ موجود
(۳) مشتق راست و چپ موجود
(۴) مشتق راست و چپ ناموجود

مثله ۱۳: معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 2 \\ \sqrt{x}, & x < 2 \end{cases}$ را در نقاط $x = 0, 2$ بیابید.

مثله ۱۳: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx; & x < 1 \\ 2\sqrt{4x-3}; & x \geq 1 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\frac{3}{2}$ (۴) ۲

مثله ۱۴: اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 1 + a \cos \pi x; & x > 1 \\ bx^2 + x; & x \leq 1 \end{cases}$ بر روی \mathbb{R} مشتق پذیر باشد، a کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) -۱ (۴) $\frac{1}{2}$

مثله ۱۵: اختلاف بین مشتق چپ و راست تابع $f(x) = \begin{cases} x \tan^{-1}(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

- (۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{4\pi}{3}$ (۴) $\frac{3\pi}{4}$

مشق ۳: مشتق پذیری توابع زیر را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

مشق ۴: آیا $f(x) = x[x^3 - x]$ ، $g(x) = x^2[x]$ در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر هستند؟

مشق ۵: مشتق پذیری تابع $f(x) = |x|$ و مشتق های مراتب بالاتر آن را روی \mathbb{R} بررسی کنید.

مشق ۱۶: تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - 5 & , x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & , x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر است. b کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

مشق ۱۷: اگر $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & ; x < 0 \end{cases}$ مشتق اول و دوم تابع $f^{-1}(x)$ در نقطه $x = 0$ چگونه است؟

سراسری ۸۵

- (۱) مشتق اول دارد - مشتق دوم ندارد.
 (۲) مشتق اول دارد - مشتق دوم ندارد.
 (۳) مشتق اول ندارد - مشتق دوم دارد.
 (۴) مشتق اول ندارد - مشتق دوم ندارد.

* (استفاده از وقتتان در جهانی تعیین کننده خطمشی و استاندارد زندگی آتی شماست.))

تابع با ضابطه $y = x\sqrt{x^2}$ از نظر پیوستگی و مشتق پذیری در صفر چگونه است؟

- (۱) پیوسته و مشتق پذیر است.
(۲) پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست.
(۳) نه پیوسته است و نه مشتق پذیر
(۴) فقط از راست پیوسته و از راست مشتق پذیر است.

تست ۱۸:

سراسری ۸۷

- تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ گویا} \\ 0 & x \text{ گنگ} \end{cases}$ در چند نقطه مشتق دارد؟

- (۱) 1 (2) بیشمار (3) 2 (4) هیچ نقطه

تست ۱۹:

سراسری ۸۸

اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ x-1 & x < 1 \end{cases}$ باشد، حاصل حد $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1-h) - f(1)}{\Delta h}$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{5}$ (۲) $-\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{2}{5}$ (۴) $-\frac{2}{5}$

تست ۲۰:

- در تابع با ضابطه $f(c) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & x < 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است، $f(1 - \sqrt{2})$ کدام می باشد؟

- (۱) $3 - \sqrt{2}$ (۲) $2 - \sqrt{2}$ (۳) $2 - 2\sqrt{2}$ (۴) $3 - 2\sqrt{2}$

تست ۲۱:

خارج ۹۲



فرمول‌های مشتق: با استفاده از فرمول‌های زیر به محاسبه مشتق توابع می‌پردازیم: $(a, n \in \mathbb{R})$

$$1. y = a \Rightarrow y' = 0$$

$$2. y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}, y = ax^n \Rightarrow y' = nax^{n-1}$$

$$3. y = f \pm g \Rightarrow y' = f' \pm g' \quad \Rightarrow \quad \text{EX: } y = 5x^y - 2x + 9 \Rightarrow y' =$$

$$4. y = fg \Rightarrow y' = f'g + fg'$$

$$5. y = \frac{f}{g} \Rightarrow y' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$6. y = f^n \Rightarrow y' = nf'f^{n-1}$$

$$\text{EX: } \begin{cases} y = x^2(2 - 3x^2)^3 \Rightarrow y' = \\ y = \frac{x^2}{3x-1} \Rightarrow y' = \end{cases}$$

$$7. y = \sqrt{f} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{f}}$$

$$8. y = \sqrt[m]{f^n} \Rightarrow y' = \frac{nf'}{m\sqrt[m]{f^{m-n}}}$$

$$\text{EX: } \begin{cases} y = x\sqrt{x^2-1} \Rightarrow y' = \\ y = \sqrt[3]{1-x^2} \Rightarrow y' = \end{cases}$$

$$9. y = \sin u \Rightarrow y' = u' \cos u$$

$$10. y = \cos u \Rightarrow y' = -u' \sin u$$

$$11. y = \tan u \Rightarrow y' = u'(1 + \tan^2 u)$$

$$12. y = \cot u \Rightarrow y' = -u'(1 + \cot^2 u)$$

$$\text{EX: } \begin{cases} y = 2 \sin(x^2 + 1) + \sqrt{\cot 3x} \Rightarrow y' = \\ y = \tan^2 x^2 - 2 \cos \sqrt{x} \Rightarrow y' = \end{cases}$$

$$13. y = e^u \Rightarrow y' = u'e^u$$

$$14. y = a^u \Rightarrow y' = u'a^u \ln a$$

$$15. y = \ln|u| \Rightarrow y' = \frac{u'}{u}$$

$$16. y = \log_a u \Rightarrow y' = \frac{u'}{u \ln a}$$

$$\text{EX: } \begin{cases} y = e^{x^2-1} + \ln \sqrt{x} + \sqrt{e^{3x}} + 2^x \Rightarrow y' = \\ y = \ln^2(x^2+1) + x^2 e^x \Rightarrow y' = \\ y = (x+2)^x \Rightarrow y' = \\ y = \ln \frac{\sqrt{x+2}}{3x+1} \Rightarrow y' = \end{cases}$$

$$17. y = \sin^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$18. y = \cos^{-1} u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$19. y = \tan^{-1} u \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$20. y = \cot^{-1} u \Rightarrow y' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

$$\text{EX: } \begin{cases} y = \sin^{-1}(x^2+1) - 2\sqrt{\cot^{-1} 3x} \Rightarrow y' = \\ y = \cos^{-1} \sqrt{x} + x \tan^{-1} x \Rightarrow y' = \end{cases}$$



۲۱. $y = \frac{au+b}{cu+d} \Rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2} u'$ (مشتق توابع هموگرافیک و شبه هموگرافیک)

EX: $\begin{cases} y = \frac{5x+2}{2x-1} \Rightarrow y' = \\ y = \frac{5\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-2} \Rightarrow y' = \end{cases}$

۲۲. $y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'} \Rightarrow y' = \frac{(ab'-a'b)x^2 + (ac'-a'c)(2x) + (bc'-b'c)}{(a'x^2+b'x+c')^2}$

EX: $\begin{cases} y = \frac{x^2+2}{x^2-2x} \Rightarrow y' = \\ y = \frac{2x-3}{3x^2+x+1} \Rightarrow y' = \end{cases}$

سراسری ۹۳

مشتق تابع $y = \cos^2(\tan^{-1} x)$ ، به ازای $x = 1$ ، کدام است؟

۱ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$-\frac{1}{4}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

سراسری ۹۳

سراسری ۸۸

سراسری ۹۳

مشتق عبارت $\left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2}\right)^2$ به ازای $x = -8$ کدام است؟

-1 (۴)

1 (۳)

$-\frac{1}{4}$ (۲)

2 (۱)

سراسری ۸۸

سراسری ۸۸

با فرض اینکه $f(x) = \sqrt[9]{x^2}$ ، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(1+h) - f^2(1)}{h}$ را به دست آورید.

مشق ۶

سؤال ۲۴:

اگر $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ ، آن گاه حاصل Δy^f کدام است؟

(۱) $-\Delta(3x^2 - 2) \sqrt{(x^2 - 2x)^4}$

(۲) $2 - 3x^2$

(۳) $3x^2 - 2$

(۴) $\Delta(3x^2 - 2) \sqrt{(x^2 - 2x)^4}$

سؤال ۲۵:

اگر $f(x) = x - \sqrt{x^2 - x}$ ، $g(x) = x + \sqrt{x^2 - x}$ ، آن گاه حاصل $f'(9) \cdot g(9) + f(9) \cdot g'(9)$ کدام است؟

(۱) ۳

(۲) $\frac{1}{18}$

(۳) ۱

(۴) $\frac{1}{3}$

سؤال ۲۷: اگر $f(x) = \cos x \cos 2x \cos 4x$ باشد، حاصل $\cos x f'(x) + \sin x f'(x)$ را بیابید.

سؤال ۳۶:

اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ، حاصل $f'(x) \cdot g'(f(x))$ کدام است؟

خارج ۹۲

(۱) -۱

(۲) ۱

(۳) x

(۴) $\frac{1}{2}x$

سؤال ۳۷:

اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(2x + \Delta h) - f^2(2x)}{h} = 4x + 6$ باشد حاصل $f(2) \cdot f'(2)$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) -۱

(۴) ۰

سؤال ۳۸:

اگر تابع $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{\sin x}}$ باشد، حاصل $3f^2 f' \sin x + f^3 \cos x$ کدام است؟

(۱) $\frac{x}{2}$

(۲) $3x$

(۳) $x^2 - 1$

(۴) $2x$

* (امام رضا(ع): ارزشمندترین مرحله خرد، خودشناسی است.)*

مثال ۸: مشتق بگیرید.

$$y = \sin^3(\Delta x - 1) + 3 \cos^{-1} x$$

$$y = \tan \Delta x \cos^2 x + \cot^{-1} x$$

مشتق توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح

نکته: برای محاسبه مشتق توابع قدرمطلق، می‌توانیم ابتدا با تعیین علامت عبارت، قدرمطلق را حذف کنیم و سپس مشتق بگیریم و یا از رابطه

$$y = |f| \Rightarrow y' = \frac{ff'}{|f|}$$

زیر استفاده کنیم:

نکته: برای محاسبه مشتق توابع دارای جزء صحیح، می‌توانیم جزء صحیح را به عنوان یک ضریب در نظر گرفته و مشتق بگیریم و یا ابتدا با توجه به فرض مساله مقدار عبارت جزء صحیح را بیابیم و سپس مشتق بگیریم.



مثال ۲۹: در تابع با ضابطه $f(x) = x\sqrt{x} + |x-1|$ ، مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ کدام است؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

مثال ۳۰: اگر $f(x) = (x-2)[3x-2]$ ، حاصل $f'_-(2) - f'_+(2)$ کدام است؟

- صفر (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴)

مثال ۳۱: اگر $f(x) = |x^2 - 4|[-x^3]$ ، حاصل $f'_+(2) - f'_-(2)$ کدام است؟

- ۴ (۱) -۴ (۲) ۶۸ (۳) -۶۸ (۴)

سئوال ۳۲:

مشتق راست تابع با ضابطه $f(x) = ([x] - |x|)\sqrt[3]{9x}$ در نقطه $x = -3$ ، کدام است؟

سراسری ۹۳

- (۱) $-\frac{16}{3}$ (۲) -5 (۳) -4 (۴) $\frac{7}{3}$

سئوال ۳۳:

مشتق چپ تابع $f(x) = 2x + |x^2 - 5|$ در $x = \sqrt{5}$ چقدر است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$ (۲) $-2\sqrt{5}$ (۳) $2 - 2\sqrt{5}$ (۴) $2 + 2\sqrt{5}$

سئوال ۳۴:

مشتق تابع $y = |x| + |x+1| + \dots + |x+99|$ در $x = -\frac{9}{2}$ چه قدر است؟

- (۱) 90 (۲) -90 (۳) 100 (۴) -100

سئوال ۳۵:

تابع با ضابطه $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right]$ در کدام بازه مشتق پذیر است؟

سراسری ۹۱

- (۱) $[0, 1]$ (۲) $(-1, 0)$ (۳) $(1, +\infty)$ (۴) $(-\infty, -1)$

سئوال ۳۶:

اگر $f(x) = \frac{(x^2 + 3)\left[\frac{3}{x}\right]}{x^2 + 1}$ ، آن گاه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h) - f(3)}{h}$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) $-\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{24}$ (۴) وجود ندارد.

اگر $f(x) = x^3 - |2x^2|x$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{2}) - f'_-(\sqrt{2})$ کدام است؟

نکته ۳۷:

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱) تجربی خارج ۹۴

مشتق عبارت شامل عامل صفرشونده

نکته: اگر $h(x) = f(x)g(x)$ و $f(a) = 0$ داریم: $h'(a) = f'(a)g(a)$.

نکته ۱۹: اگر عامل صفرشونده مضاعف باشد، حاصل مشتق صفر می‌شود. $h(x) = (x-a)^2 g(x) \Rightarrow h'(a) = 0$.



اگر $f(x) = \frac{x + \sqrt{2x}}{x-1} \cot \frac{\pi}{x}$ حاصل، $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}$ کدام است؟

نکته ۳۸:

π (۴)

$\frac{\pi}{2}$ (۳)

$-\frac{\pi}{2}$ (۲)

$-\pi$ (۱)

اگر $f(x) = \frac{\tan x (\sqrt{x^2 + 4} - x)}{x^2 - 1}$ ، $f'(0)$ کدام است؟

نکته ۳۹:

-۴ (۴)

$-\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

۶ (۱)

اگر $f(x) = (x^2 - x - 2) \sqrt[3]{x^2 - 7x}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است؟

نکته ۴۰:

سراسری ۹۲

$-\frac{3}{4}$ (۴)

$-\frac{3}{2}$ (۳)

-۳ (۲)

-۶ (۱)

* ((در لذتی که آمیخته به فساد است، خوشحال نباشید و به این فکر کنید که لذت نهمانده ولی فساد مهمانده.))

سراسری ۸۳: ۴۱ - مشتق تابع $f(x) = \frac{(x-1) \cdot \sqrt{3x-2}}{(5x-3)^4}$ در نقطه $x=1$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{16}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{3}{20}$ ۴) $\frac{5}{16}$

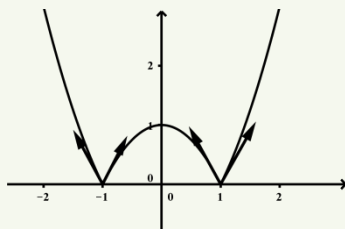


نکته ۱۹: اگر نقطه $x=a$ ریشه مضاعف مرتبه دوم تابع $f(x)$ باشد (یعنی $f(x) = (x-a)^2 \cdot g(x)$ بخش پذیر باشد)، آنگاه $f(a) = f'(a) = 0$ است. این موضوع قابل تعمیم برای ریشه‌های مضاعف مراتب بالاتر نیز هست.

سراسری ۴۲: ۱ اگر $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x^2 - 2x + 1$ بخش پذیر باشد، $2a + b$ کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۱ ۳) -۳ ۴) ۱

نقطه گوشه



تعریف: اگر در نقطه دلخواه $x = x_0$ مشتق چپ و راست موجود و نابرابر باشند و یا اینکه حداکثر یکی $+\infty$ یا $-\infty$ شود، به این نقطه، **نقطه گوشه (زاویه دار)** گفته می‌شود. مثلا نقاط به طول $x = \pm 1$ ، نقاط گوشه برای تابع مقابل هستند.

نکته ۱۳:

اگر x_0 یک نقطه گوشه باشد و m و m' به ترتیب برابر مشتق راست و چپ (ماس راست و چپ) تابع در این نقطه باشند، زاویه بین این دو از رابطه روبرو

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

حاسبه می‌شود:

یا اگر $mm' < 0$ باشد، نقطه گوشه ماکزیمم و یا مینیمم نسبی تابع است.



سؤال ۴۳: زاویه‌ای که مماس بر منحنی $y = x^2 + x - 2$ در محل تقاطع آن با قسمت منفی به ترتیب محور طول‌ها و عرض‌ها می‌سازد، برابر کدام گزینه است؟

- (۱) $\tan^{-1}(3), \tan^{-1}(-\frac{1}{3})$ (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

سؤال ۴۴: زاویه بین خطوط مماس بر منحنی $y = |\tan x|$ در نقطه $x = 0$ کدام است؟

- (۱) 0 (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{3}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

سؤال ۴۵: مماس‌های رسم شده بر منحنی $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & , x \geq 0 \\ x^2 & , x < 0 \end{cases}$ در مبدا مختصات با هم چه زاویه‌ای می‌سازند؟

- (۱) 90° (۲) 60° (۳) 30° (۴) 45°

سؤال ۴۶: اگر θ زاویه‌ی بین مماس چپ و مماس راست، نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = [x + \frac{1}{x}]x + x^2$ ، در نقطه‌ی $x = \frac{1}{4}$ باشد، $\tan \theta$ کدام است؟

- سراسری ۹۴ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

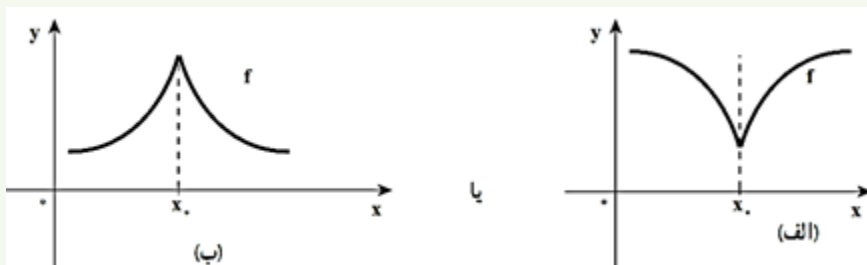
سؤال ۴۷: تابع $f(x) = (-1)^{[x]} \cos \frac{\pi x}{2}$ در بازه‌ی $[0, 4]$ چند نقطه گوشه دارد؟ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) ۵

سراسری خارج ۸۲

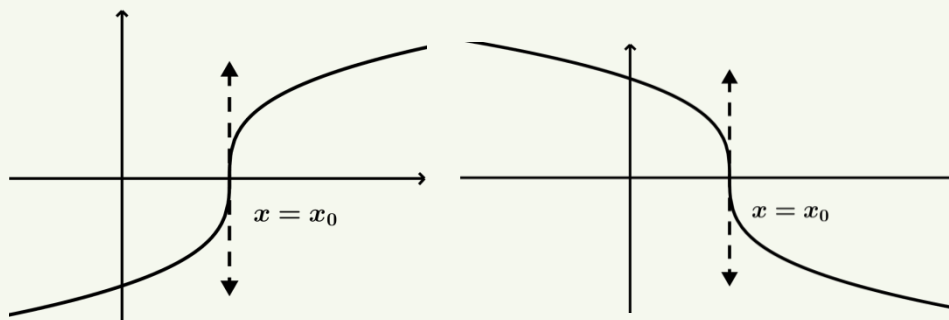
«(امام جواد (ع): سه چیز را هر کس دارا باشد پشیمان نشود: عجله نکردن، مشورت کردن، توکل بر خداوند هنگام تصمیم‌گیری.)»



تعریف: اگر تابع f در نقطه $x = x_0$ دارای مشتق‌های راست و چپ نامتناهی با علامت‌های متفاوت باشد، به این نقطه، نقطه بارگشت می‌گوییم. (به دو فرم ماکزیمم و مینیمم)



تعریف: اگر تابع f در نقطه $x = x_0$ دارای مشتق‌های راست و چپ نامتناهی با علامت‌های یکسان باشد، تابع در این نقطه ماس قائم دارد. (به دو فرم صعودی و نزولی)

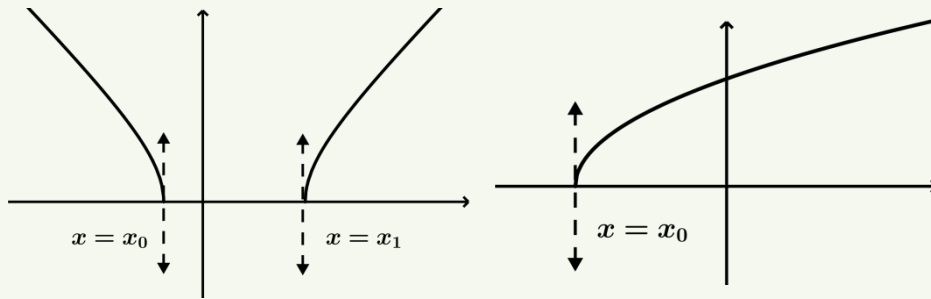


مثال ۹: به کمک تعریف، مشتق چپ و راست توابع $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، $g(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ را در $x=1$ بیابید. $x=1$ چه نقطه‌ای برای این توابع است؟

مثال ۱۰: نقطه $x=0$ چه نقطه‌ای برای تابع $f(x) = x^{\frac{5}{3}} - 1 \cdot x^{\frac{2}{3}}$ ، $g(x) = 2x^{\frac{1}{5}} - x^{\frac{6}{5}}$ است؟



تعریف: اگر تابع f در نقطه $x = x_0$ دارای پیوستگی یک طرفه باشد و مشتق یک طرفه آن ∞ شود، به این نقطه، نقطه توقف تابع می‌گوییم.



نکته ۳۱: در توابع رادیکالی با فرجه زوج، ریشه‌های ساده زیر رادیکال، طول نقطه توقف تابع هستند.

مثال ۱۱: نشان دهید نقطه $x = 0$ نقطه توقف تابع $f(x) = \sqrt{x}$ است.

مثال ۱۲: در تابع $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ نقاط نقاط توقف تابع هستند.



یادآوری: اگر حد چپ و راست یک تابع نامبر باشد، می‌گوییم تابع در این نقطه ناپیوستگی اساسی (رفع نشدنی) دارد.

نکته ۱۷: در نقطه تماس (عطیف) قائم نمودار تابع مشتق، ناپیوستگی مضاعف اساسی و در نقطه بازگشتی، ناپیوستگی ساده اساسی دارد.

نکته ۱۵: توابع به صورت $f(x) = \sqrt[n]{x-a}^{m+1}$ که در آن $m \leq n$ در نقطه $x = a$ دارای تماس (عطیف) قائم هستند و همچنین توابع به صورت

$f(x) = \sqrt[n]{|x-a|}$ یا $f(x) = \sqrt[n]{x-a}^m$ در نقطه $x = a$ بازگشتی هستند.

مثال ۱۳: ریشه‌های عبارت مقابل از لحاظ مشتق پذیری چگونه‌اند.
 $g(x) = \sqrt[5]{(x+3)^2(x-1)^6(2x-1)^3} |7+x|(x+5)$

تست ۴۸: توابع $y = \sqrt{x}$ ، $y = \sqrt[3]{x^4}$ در صفر به ترتیب چگونه‌اند؟

(۱) مشتق پذیر، مشتق پذیر

(۲) مشتق پذیر، مشتق ناپذیر

(۳) مشتق ناپذیر، مشتق ناپذیر

(۴) مشتق ناپذیر، مشتق پذیر

تست ۴۹: تابع $f(x) = \sqrt{x(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 5x + 6)}$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

نکته: تابع $y = |f(x)|$ در ریشه‌های ساده $f(x)$ مشتق‌پذیر نیست، ولی در ریشه‌های مضاعف $f(x)$ مشتق‌پذیر می‌باشد.نکته: تابع $y = g(x)|f(x)|$ که در آن‌ها f و g مشتق‌پذیر باشند، در ریشه‌های مشترک f و g مشتق‌پذیرند.تست ۵۰: برای تابع $f(x) = |x|\sqrt{2+x}$ در $x=0$ ، کدام گزینه درست است؟

- (۱) مشتق چپ و راست موجود و برابر
(۲) مشتق چپ و راست موجود و نابرابر
(۳) مشتق چپ و راست وجود ندارد.
(۴) مشتق راست موجود است، ولی مشتق چپ وجود ندارد.

تست ۵۱: دامنه مشتق پذیری $y = (x^3 - 8)(x^2 - 4)x^2$ کدام است؟

(۱) $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$ (۲) $\mathbb{R} - \{-2\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{2\}$ (۴) $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

تست ۵۲: تابع $y = |x^3| + |x^3 + 2x^2 + x|$ در چند نقطه دارای گوشه است؟

۰ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

«فکر کردن درباره موفقیت، ذهن را به سوی نقطه‌های موفقیت آمیز رهنمون می‌کند.»

سؤال ۵۳: به ازای کدام مقدار a تابع $f(x) = x|x-1| + a|x-1|$ در $x=1$ مشتق پذیر است؟

- ۱ (۱) ۰ (۲) -۱ (۳) ۴ (همه مقادیر)

سؤال ۵۴:

تعداد نقاط مشتق ناپذیری تابع $f(x) = ||x|-1|$ بر روی R کدام است؟

- ۰ (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

سراسری ۸۵



نکته: فرض کنیم f تابعی پیوسته باشد. اگر $f(a)$ عددی صحیح باشد، آنگاه تابع $[f(x)]$ در نقطه $x=a$ مشتق ناپذیر است مگر این نقطه یک نقطه مینیمم نسبی تابع باشد، ولی اگر $f(a)$ عددی صحیح نباشد، آنگاه تابع $[f(x)]$ در نقطه $x=a$ مشتق پذیر است.

نکته: اگر تابع $g(x)$ در نقطه صحیح $x=a$ دارای ریشه مکرر از مرتبه حداقل دو باشد، آنگاه تابع $f(x) = g(x)[x]$ در این نقطه مشتق پذیر است.

سؤال ۱۴: تابع $y = [-x^2]$ در بازه $(-2, 2)$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

- الف (۳) ب (۴) ج (۷) د (۶)

سؤال ۱۵: تابع $y = (x^2 - 2x + 1)[x^2]$ در بازه $(-2, 2)$ در چند نقطه مشتق ناپذیر است؟

- الف (۵) ب (۶) ج (۷) د (۴)

تست ۵۵: اگر تابع $y = (x^3 + ax + b)[x]$ دارای مشتق باشد، $a + b$ کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) ۲ ۳) -۳ ۴) ۴

تست ۵۶: اگر تابع $f(x) = (x^3 + ax^2 + bx + c)[x]$ در $x = 1$ دارای مشتق اول و دوم باشد، آن گاه $a + 2b + c$ ک است؟

- ۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

تست ۵۷: کدام تابع در $x = 0$ پیوسته است، ولی مشتق پذیر نیست؟

- ۱) $f(x) = x^2[x]$ ۲) $f(x) = x|x|$
 ۳) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ۴) $f(x) = |x|[x]$

تست ۵۸: تابع $y = \left[\frac{1}{x} \right]$ در کدام بازه مشتق پذیر است؟

- ۱) $(-\infty, -1)$ ۲) $(-1, 0)$ ۳) $[1, +\infty)$ ۴) $[0, 1]$

تست ۵۹: تابع با ضابطه $f(x) = \left[x + \frac{1}{3} \right] + [x]$ روی بازه $(0, 3)$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

خلاصه نقاط مشتق ناپذیری:



نکته: در هر یک از حالت‌های زیر تابع در نقطه $x = x_0$ مشتق ناپذیر است:

(الف) تابع در این نقطه ناپیوسته باشد.

(ب) مشتق چپ و راست موجود و نابرابر باشد و یا حداکثر یک کدام نامتناهی باشد. (نقطه گوشه)

(پ) مشتق چپ و راست نامتناهی و برابر باشد. (مهاس قائم)



قضیه ۱: اگر تابع f در نقطه a مشتق پذیر باشد، آنگاه در این نقطه پیوسته می باشد.

نتیجه: اگر تابع f در نقطه a پیوسته نباشد، در این نقطه مشتق پذیر نمی باشد.

نکته: عکس قضیه لزوما برقرار نمی باشد.

مثلا: چون تابع $y = x^2 - 3x$ در همه نقاط دامنه اش مشتق پذیر است، لذا بنا به قضیه فوق در تمام نقاط دامنه اش پیوسته نیز می باشد. اما

با اینکه تابع $f(x) = |x - 2|$ در نقطه $x = 2$ پیوسته است، اما در این نقطه مشتق پذیر نمی باشد.

مثال ۱۶:

مقادیر a و b را به قسمی تعیین کنید که تابع $f(x) = \begin{cases} (x+1)^3, & x \leq 0 \\ ax + a + b, & x > 0 \end{cases}$ در $x=0$ مشتق پذیر باشد.

منحنی‌های مماس و متقاطع



نکته: به معادله حاصل از مساوی قرار دادن دو تابع، معادله تقاطع آن‌ها می‌گوییم.

نکته ۲۳: ریشه‌های ساده معادله تقاطع دو تابع، محل تقاطع و ریشه‌های مضاعف از مرتبه زوج معادله تقاطع، محل مماس بودن آن‌ها را مشخص می‌کند.

نکته ۲۴: اگر دو تابع در نقطه $x = a$ بر یکدیگر مماس باشند، دلتای معادله تقاطع صفر می‌باشد و همچنین خواهیم داشت $f(a) = g(a), f'(a) = g'(a)$

«(هر آرزویی بدون پژوهش و تلاش، به سرانجام نخواهد رسید.)»

به ازای کدام مقدار m خط به معادله $y = 2x - 4$ بر منحنی به معادله $y = (m + 3)x^2 + mx$ مماس است؟

۱۱, ۴ (۴)

۲۲, -۲ (۳)

۲۲, ۲ (۲)

-۲, ۱۸ (۱)

سراسری ۹۰

به ازای کدام مقدار a نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = ax^2 + 4x$ بر هم مماسند؟

-۱ (۴)

-۲ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)

سراسری ۹۱

به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a ، منحنی به معادله $y = \left(\frac{1}{2}x + a\right)(x^2 - 4)$ بر محور x ها در یک نقطه مماس

است؟

{-۲, ۲} (۴)

{-۱, ۱} (۳)

{۱} (۲)

 \emptyset (۱)

سراسری ۸۴

منحنی به معادله $(x - 1)(x^2 - ax + a) = 0$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند، مجموعه مقادیر a به کدام صورت است؟

 $a > 4$ (۴) $0 < a < 4$ (۳) $0 < a < 2$ (۲) $-4 < a < 0$ (۱)

سراسری ۸۴

معادله خط مماس و قائم بر منحنی از نقطه‌ای روی آن



نکته ۲۴: معادله خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ در $x = a$ واقع بر آن، از رابطه $y - f(a) = f'(a)(x - a)$ بدست می‌آید.

نکته ۲۵: معادله خط قائم بر منحنی $y = f(x)$ در $x = a$ واقع بر آن، از رابطه $y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a)$ بدست می‌آید.

معادله خط‌های مماس و قائم بر منحنی $y = \frac{\cos x}{2 + \sin x}$ در نقطه $(\frac{1}{4}, 0)$ را پیدا کنید.

مثال ۱۷

خط $y = 2x + 1$ در نقطه $x = 1$ بر منحنی پیوسته $y = f(x)$ مماس است مقدار

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + 3f(x) - 18}{x - 1}$$

را حساب کنید.

مثال ۱۸

معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y = \frac{x}{x^2 + 6}$ را در نقطه‌ی $(2, 0)$ پیدا کنید.

مثال ۱۹

خط مماس بر نمودار تابع $y + \frac{\pi}{4} = \text{Arctg} \sqrt{3x - 5}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور y ها را با کدام

عرض قطع می‌کند؟

$$\frac{3}{2}(4)$$

$$\frac{2}{3}(3)$$

$$-\frac{2}{3}(2)$$

$$-\frac{3}{2}(1)$$

مثال ۲۰

سراسری ۸۶



نکته: اگر معادله حرکت جسمی را بر اساس زمان داشته باشیم، با گرفتن مشتق از این معادله، معادله سرعت و با گرفتن مشتق از معادله سرعت معادله شتاب جسم بر اساس زمان بدست می‌آید.

مثال ۲۰: معادله حرکت جسمی به صورت $x(t) = 6 \sin t$ است که در آن زمان و مکان به ترتیب بر حسب ثانیه و سانتی‌متر هستند. معادله سرعت و شتاب این جسم را بیابید.

معادله خط مماس و قائم بر منحنی از نقطه‌ای خارج آن



نکته: معادله خط مماس بر منحنی $y = f(x)$ از نقطه (a, b) خارج آن، از رابطه $y - b = m(x - a)$ بدست می‌آید که در آن m را می‌توانیم به یکی از دو روش زیر بیابیم،

الف) فرض می‌کنیم محل تماس خط مماس و تابع $(\alpha, f(\alpha))$ باشد، در آن صورت ابتدا از تساوی $\frac{f(\alpha) - b}{\alpha - a} = f'(\alpha)$ مقدار α و سپس $m = f'(\alpha)$ بدست می‌آید.

ب) فرض می‌کنیم شیب خط مورد نظر m باشد، پس معادله خط مماس $y - b = m(x - a)$ خواهد بود. چون این خط بر منحنی مماس است، پس از صفر قرار دادن دلتای معادله تقاطع این دو تابع، مقدار m محاسبه می‌شود.

مثال ۲۱: از $A = (1, 1)$ دو مماس بر منحنی $f(x) = x^2 + 1$ رسم شده است، معادلات این دو مماس را به دست آورید.

تعمیر: اگر خط $y = x + a$ در ناحیه اول بر منحنی $y = x^3 - 2x + 3$ مماس باشد، مقدار a کدام است؟

- ۲ (۱) ۱ (۲) -۲ (۳) -۱ (۴)

«(مرتب از خودتان بپرسید: آیا کاری که در حال حاضر انجام می‌دهم نقطه در رسیدن به مهم‌ترین هدفم دارد؟)»

از نقطه $A(0, -1)$ دو خط مماس بر منحنی تابع $y = x^2 + x$ رسم شده است، شیب مثبت این مماس کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

سراسری ۸۵

از نقطه $A(2, 9)$ دو خط مماس بر منحنی $y = -x^2 + 2x + 5$ رسم شده است. تانژانت زاویه بین این دو خط مماس، کدام است؟

$\frac{7}{6}$ (۴)

$\frac{8}{11}$ (۳)

$\frac{7}{10}$ (۲)

$\frac{5}{12}$ (۱)

سراسری ۹۳

از نقطه $A(2, -1)$ دو خط مماس بر منحنی $y = \frac{1}{2}x^2 - x$ رسم شده است. زاویه بین این دو خط مماس، کدام است؟

$\tan^{-1} 2$ (۴)

$\frac{\pi}{2}$ (۳)

$\frac{\pi}{3}$ (۲)

$\frac{\pi}{4}$ (۱)

سراسری ۹۰

۱۱۰- از نقطه $A(0, -2)$ دو خط مماس بر منحنی به معادله $y = x^2 - 1$ رسم شده است. مساحت مثلث با رأس‌های A و دو نقطه‌ی تماس کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

$\frac{5}{2}$ (۲)

۲ (۱)

خارج ۹۰

مشتق مراتب بالاتر



با گرفتن مکرر مشتق از تابع، می‌توانیم به مشتقات درجات بالاتر برسیم. برای راحتی کار می‌توانیم از نکات زیر استفاده کنیم:

$$y = x^n \Rightarrow y^{(n)} = n!, y^{(n-1)} = n!x, y^{(m)} = n(n-1)(n-2)\dots(n-m-1)!x^{n-m} \quad 1$$

$$f(x) = \frac{1}{ax+b} \Rightarrow f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}} \quad 2$$

$$f(x) = \sin ax \Rightarrow f^{(n)}(x) = a^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right), f(x) = \cos ax \Rightarrow f^{(n)}(x) = a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) \quad 3$$

۴: مشتق چهارم توابع $\sin x$ و $\cos x$ برابر خودشان است.

نکته: شرط لازم برای وجود مشتق در یک نقطه، پیوستگی تابع در آن است.

مثال ۲۲: مشتق پنجم تابع $y = x^5 - 4x^3 + 6$ را بیابید.

مثال ۲۳: مشتق چهارم تابع $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 3)$ را در $x = 1$ حساب کنید.

مثال ۷۰: اگر $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ در این صورت $f^{(3)}(1)$ چقدر است؟

۴(صفر

۶۴ (۳

۸۴(۲

۷۲(۱

سوال ۷۱:

مشتق هفتم تابع $y = \frac{3x+8}{x+1}$ در نقطه $x=0$ چقدر است؟

سوال ۷۲:

مشتق یازدهم تابع $y = \frac{1}{1-x^2}$ در $(x=0)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{11!}$ (۲) $11!$ (۳) صفر (۴) $\frac{10}{11!}$

سوال ۷۳:

مقدار مشتق مرتبه پانزدهم $y = \frac{1}{\pi^{14}} \sin^2 x$ در $x = \frac{\pi}{6}$ چقدر است؟

- (۱) -۲ (۲) -۱ (۳) ۱ (۴) ۲

سوال ۷۴:

مشتق بیست و دوم تابع $f(x) = 2 \cos^2 x + \sin^2 x$ کدام است؟

- (۱) $-2^{22} \sin x \cos x$ (۲) $2^{22} \cos 2x$ (۳) $2^{22} - 2^{22} \sin^2 x$ (۴) $2^{22} \sin^2 x - 2^{22}$

سوال ۷۵:

اگر $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3x & x \geq 0 \\ x^2 + 3x & x < 0 \end{cases}$ آن گاه $f^{(5)}(0)$ کدام است؟

- (۱) ۳! (۲) ۴! (۳) صفر (۴) وجود ندارد

«تلاش برای خنثی‌سازی مهمی آدم‌ها، کلید همه تنگناهاست.»

تست ۷۶: در تابع $f(x) = \begin{cases} |x^3| & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ مشتق از کدام مرتبه به بعد در نقطه صفر وجود ندارد؟

۴ (۴) ۳ (۳) ۲ (۲) ۱ (۱)

تست ۷۷: تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \sin x & x \geq 0 \\ ax^n & x < 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ مشتق مرتبه سوم دارد. a کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{8}$ (۱)

قاعده زنجیری و مشتق توابع مرکب

قانون: فرض کنید تابع g در نقطه $x = x_0$ و تابع f در $g(x_0)$ مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابع مرکب $f \circ g$ در نقطه $x = x_0$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) f'(g(x))$$

به عبارت دیگر اگر داشته باشیم $y = f(u)$ که در آن u تابعی بر اساس x باشد در آن صورت داریم:

$$y'_x = f'_u u'_x \quad \text{یعنی} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

ملاحظه ۲۴: الف) نشان دهید اگر تابعی مشتق‌پذیر و زوج باشد، تابع مشتق آن تابعی فرد می‌باشد و برعکس.



ب) مشتق بگیرید.

$$1) y = \sqrt{\sin(x^3)} \quad , \quad 2) y = \cos^3 \sqrt{3-x}$$

$$3) y = \sin^3(4x-1) \quad , \quad 4) y = \cot^3 \frac{x-1}{3+x}$$

تست ۷۸:

اگر مشتق تابع $f(x)$ برابر با $\frac{1}{x}$ باشد آن مشتق تابع $f(ax)$ کدام است؟

$$\frac{a^2}{x} \quad (4) \quad \frac{1}{ax} \quad (3) \quad \frac{a}{x} \quad (2) \quad \frac{1}{x} \quad (1)$$

تست ۷۹:

اگر مشتق تابع $f(x)$ برابر با $\tan x$ باشد آن گاه مشتق $y=f(ax)$ کدام است؟

$$a \tan ax \quad (4) \quad \tan x \quad (3) \quad \tan ax \quad (2) \quad a \tan x \quad (1)$$

تست ۸۰:

دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = 3x + |x|$ و $g(x) = \frac{3}{4}x + a|x|$ مفروض‌اند. به ازای کدام مقدار a ، تابع $g \circ f$ در مبدا مختصات،

مشتق پذیر است؟

$$a \text{ هیچ مقدار } a \quad (4) \quad \frac{1}{2} \quad (3) \quad -\frac{1}{2} \quad (2) \quad -\frac{1}{4} \quad (1)$$

تست ۸۱:

اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{3}{2}$ آن گاه مشتق $f\left(\frac{1}{x}\right)$ در $x = \frac{1}{3}$ کدام است؟

$$\frac{1}{6} \quad (4) \quad -\frac{1}{6} \quad (3) \quad \frac{27}{2} \quad (2) \quad -\frac{27}{2} \quad (1)$$

سؤال ۸۲:

اگر مشتق $f(\operatorname{tg}x)$ برابر $\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}x}$ باشد، آن گاه مشتق $f(\operatorname{Sin}x)$ کدام است؟

$\frac{1 + \operatorname{Sin}^2 x}{\operatorname{Sin}x}$ (۲) cot gx (۱)
 $\operatorname{tg}x$ (۴) (1 + \operatorname{Sin}^2 x) \operatorname{Cot}gx (۳)

سؤال ۸۳:

هر گاه تابع f فرد باشد و داشته باشیم: $f'(3) = -2$ ، آن گاه $f'(-3)$ کدام است؟

2 (۴) -1 (۳) -2 (۲) 1 (۱)

سؤال ۸۴:

اگر $y = \sqrt{2u} - \frac{1}{u}$ و $u = \sin^p x - \cos^p x$ ، مقدار $\frac{dy}{dx}$ به ازای $\frac{\pi}{4}$ کدام است؟

15 (۴) 12 (۳) 10 (۲) 9 (۱)

سؤال ۸۵:

اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ مشتق تابع $f(\tan x)$ با شرط $|x| < \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

$\operatorname{Cos}x$ (۴) \operatorname{Sin}x (۳) \frac{1}{\operatorname{Cos}x} (۲) \frac{1}{\operatorname{Sin}x} (۱)

سؤال ۸۶:

اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = -\frac{1}{3}$ ، مشتق $f(\sqrt{|x| + 3})$ در نقطه $x = -1$ کدام است؟

$-\frac{1}{12}$ (۴) -\frac{1}{6} (۳) \frac{1}{12} (۲) \frac{1}{6} (۱)

تست ۸۷:

اگر $f(x) = \frac{3}{y} - \sqrt{x+2}$ ، مشتق تابع $f(xf(x))$ در نقطه‌ی $x = 2$ کدام است؟

سراسری ۸۹

- (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) ۱

تست ۸۸:

اگر $g(x) = \frac{1}{4}\sqrt{5x-9}$ و $f(x) = \sin^2 \pi x$ مشتق تابع $f \circ g$ به ازای $x=2$ کدام است؟

سراسری ۹۱

- (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{5}{8}$ (۳) $\frac{3}{4}\pi$ (۴) $\frac{5}{8}\pi$

تست ۸۹:

اگر $f(x) = \frac{x^3-2}{1+x^3}$ ، $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، حاصل $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ کدام است؟

سراسری ۹۲

- (۱) $\frac{3}{x}$ (۲) $\frac{3}{x^2}$ (۳) $\frac{1}{3x}$ (۴) $\frac{x-3}{x^2}$

تست ۹۰:

مشتق $f(\sqrt[3]{6x+2})$ در نقطه $x=1$ برابر ۲- است. شیب خط قائم بر نمودار f در نقطه‌ای به طول ۲ کدام است؟

سراسری ۸۶

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) ۳ (۴) ۴

مشتق گیری ضمنی:

برای محاسبه مشتق در توابعی که محاسبه y بر اساس x مشکل است، از مشتق گیری ضمنی استفاده می‌شود.

روش اول برای مشتق گیری از این توابع استفاده از همان قواعد قبلی مشتق گیری است. دقت کنید در این حالت

$$(y^n)' = ny^{n-1}y', \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

روش دیگر محاسبه مشتق ضمنی استفاده از رابطه $\frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}$ است. در صورت این فرمول y را عدد و مشتق x را

یک و در خروج نیز x را عدد و مشتق y را یک در نظر میگیریم.



مشق ۲۵: برای توابع مقابل $y' = \frac{dy}{dx}$ را بیابید.

۱) $x^2 + y^2 + \sin(x + y^2) - 4 = 0$.

۲) $x^2y - 4y^2 + \frac{x}{y} = 0$.

۳) $e^{xy} + \Delta y^2 + \cos xy = 0$.

۴) $\sin \frac{y}{x} + e^{(y-\Delta x^2)} = \Delta x$

مشق ۲۶: الف) اگر $\cos \sqrt{y} = y^2 \sin x$ ، $\frac{dy}{dx}$ را پیدا کنید.
ب) اگر $x + y^2 + 1 = y + x^2 + xy^2$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ را در نقطه (۱، ۱) پیدا کنید.

پ) معادله خط مماس بر منحنی $x^2 + y^2 = 6xy$ را در نقطه $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ پیدا کنید.

مشق ۲۷: در رابطه ضمنی $\cos(x + y) + (x - y)^2 = \cos xy$ حاصل $y'(\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi})$ کدام است؟

۱ (۱) -۱ (۲) $\frac{1}{\pi}$ (۳) π (۴)

سؤال ۹۲: مشتق تابع $y = \sqrt{x}\sqrt{x}\sqrt{x}\dots$ چقدر است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) \sqrt{x} (۴) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

سؤال ۹۳: در نمودار منحنی $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$ ، در کدام نقطه خط مماس بر نمودار منحنی موازی خط $y = -x$ است؟

- (۱) $x = 2$ (۲) $x = \sqrt{2}$ (۳) $x = 4$ (۴) $x = 1$

سؤال ۹۴: در رابطه ضمنی $\sqrt{y} + \sqrt[4]{y} + \sqrt[5]{y} = xy^3$ حاصل $x'(1)$ کدام است؟

- (۱) $\frac{156}{27}$ (۲) $-\frac{27}{156}$ (۳) $\frac{161}{20}$ (۴) $-\frac{161}{20}$

سؤال ۹۵: معادله خط مماس بر نمودار تابع با ضابطه $y = x^{x-1}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

- (۱) $y = x$ (۲) $y = x + 1$ (۳) $x = 1$ (۴) $y = 1$

سؤال ۹۶: از رابطه $x^2y - y^2 - 2\sqrt{x} + 4 = 0$ ، مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ در نقطه $(1, 2)$ کدام است؟ مشتق

- (۱) $\frac{7}{6}$ (۲) $\frac{8}{6}$ (۳) $\frac{11}{6}$ (۴) $\frac{13}{6}$

سراسری ۹۴

مشتق تابع وارون:



قضیه: بازه I و تابع $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ را که در آن به ازای همه نقاط درونی بازه I تابع f مشتق‌پذیر و مشتق آن در همه جا مثبت یا همه جا منفی باشد را در نظر می‌گیریم. در این صورت تابع f^{-1} در همه نقاط درونی دامنه‌اش مشتق‌پذیر است و به ازای هر نقطه درونی از دامنه f^{-1} مانند $b = f(a)$ داریم: $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

مثال ۲۷: اگر $y = x^3 - 7$ باشد، در صورت وجود مقدار $(f^{-1})'(1)$ ، $(f^{-1})'(-6)$ را بیابید.

مثال ۲۸: فرض کنید $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ مقدار $(f^{-1})'(1)$ را در صورت وجود پیدا کنید.

مثال ۲۹: فرض کنید f^{-1} تابع وارون تابع مشتق‌پذیر f باشد و $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$ اگر $f(1) = 2$ و $f'(1) = \frac{1}{8}$ ، $g'(2)$ را بیابید.

مثال ۳۰: تابع $f(x) = \sin x$ را با دامنه $D = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ در نظر بگیرید. مشتق تابع $f^{-1} = \sin^{-1}$ را به ازای هر x ، عضو بازه باز $(-1, 1)$ بیابید.

شیب خط مماس بر وارون تابع $y = x^3 + 2x - 1$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر تابع وارون کدام است؟

تست ۹۷:

- ۱) ۵ ۲) $\frac{1}{5}$ ۳) ۱۶ ۴) $\frac{1}{16}$

اگر $f(x) = x^3 - 3x$, $x > 1$ ، اندازه مشتق تابع $f^{-1}(x)$ در نقطه تلاقی آن با $f(x)$ کدام است؟

تست ۹۸:

- ۱) $\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) ۳ ۴) ۹

اگر f تابعی در \mathbb{R} مشتق پذیر و معکوس پذیر باشد و $f'(x) = \sqrt{7 - 2f(x) + f^2(x)}$ ، آنگاه $(f^{-1})'(x)$ کدام است؟

تست ۹۹:

- ۱) $\frac{1}{\sqrt{7 - 2x + x^2}}$ ۲) $\sqrt{7 - 2x + x^2}$ ۳) $\frac{-2 + 2x}{2\sqrt{7 - 2x + x^2}}$ ۴) $\frac{\sqrt{7 - 2x + x^2}}{-1 + 2x}$

اگر f^{-1} وارون تابع مشتق پذیر f باشد. $g(x) = \sqrt{2x} f^{-1}(x)$ ، $f(4) = 2$ و $f'(4) = \frac{1}{3}$ ، آنگاه $g'(2)$ کدام است؟

تست ۱۰۰:

- ۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

خارج ۹۳

اگر $x > -2$ ، $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ ، خط قائم بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن، محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

تست ۱۰۱:

- ۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

خارج ۹۲

«هیچ چیز جز یک هدف مشخص نمی تواند رهان انسان را آزاد سازد.»

اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ و خط به معادله $4y + 5x = a$ قائم بر نمودار تابع f^{-1} باشد، آنگاه a کدام است؟

۴۸ (۴)

۴۶ (۳)

۳۶ (۲)

۳۴ (۱)

تست ۱۰۲:
سراسری ۸۶

اگر $f(x) = x^3 - 2x$; $x > 1$ و خط به معادله $10y = x + m$ مماس بر نمودار تابع f^{-1} باشد، آنگاه m کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۴ (۲)

۱۲ (۱)

تست ۱۰۳:
سراسری ۸۹

اگر $f(x) = xe^x$; $x > 0$ ، آنگاه خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه‌ای به طول e واقع بر آن، محور y را با کدام عرض قطع می‌کند؟

$\frac{1}{e}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)

تست ۱۰۴:
سراسری ۹۲

خط مماس بر منحنی تابع f ، در نقطه‌ای به طول ۳ واقع بر آن، به معادله $2y + x = 7$ می‌باشد. اگر $g(x) = \frac{1}{x} f^{-1}(x)$ ، آنگاه $g'(2)$ ، کدام است؟

$\frac{1}{4}$ (۴)

$-\frac{3}{4}$ (۳)

$-\frac{5}{4}$ (۲)

$-\frac{7}{4}$ (۱)

تست ۱۰۵:
سراسری ۹۳

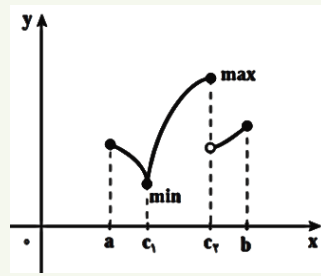
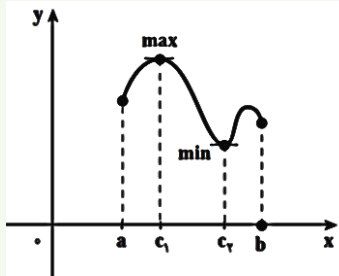
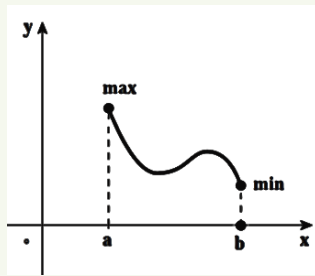
اگر $f(x) = x^2 - x^2 + 2x$ باشد، معادله‌ی خط قائم بر منحنی تابع f^{-1} ، در نقطه‌ی $x = 2$ واقع بر آن کدام است؟
 (۱) $y + 3x = 7$ (۲) $y - 3x = -5$ (۳) $2y + x = 5$ (۴) $3y - x = 1$

اکسترمم مطلق

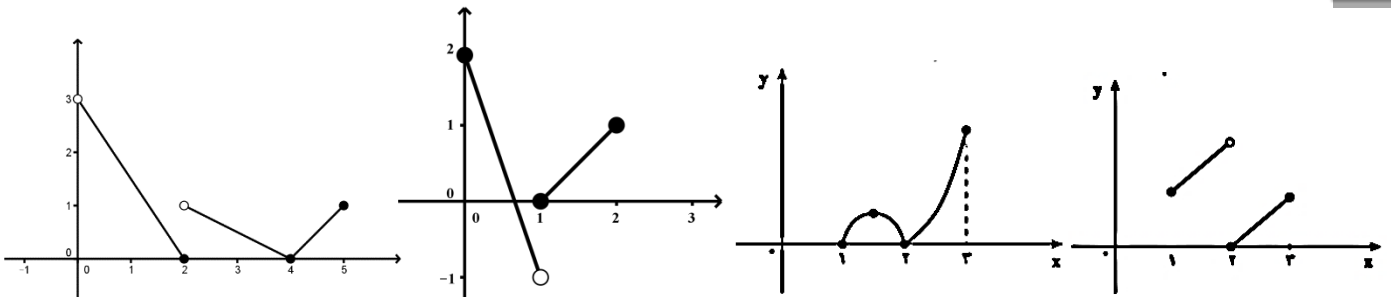


تعریف: تابع f با دامنه D و قطعه‌ی c از دامنه‌ی آن را در نظر می‌گیریم. می‌گوییم $f(c)$ مقدار ماکسیمم مطلق تابع f روی دامنه‌اش است اگر $\forall x \in D f(x) \leq f(c)$. همچنین می‌گوییم $f(c)$ مقدار مینیمم مطلق تابع f روی دامنه‌اش است اگر $\forall x \in D f(c) \leq f(x)$.
نکته: هر یک از حالت‌های بالا که اتفاق بیافتد، به $f(c)$ اکسترمم مطلق تابع f می‌گوییم.

قضیه ۱ (مقدار اکسترمم مطلق): اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه در این بازه دارای ماکسیمم و مینیمم مطلق است.



مشق ۳۱: نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق را در شکل‌های مقابل بیابید.



نقطه درونی



تعریف: نقطه درونی $x \in D_f$ را نقطه‌ی بحرانی تابع f می‌گوییم، هرگاه مشتق در این نقطه موجود نباشد یا برابر صفر باشد.

نکته: نقاط بازگشت، عطف قائم، گوشه، عطف افقی و نقاط ناپیوستگی همگی بحرانی هستند.

نکته: توابع $y = \text{sgn}(x)$ ، $y = [x]$ در همه نقاط بحرانی هستند.

قضیه نقطه بحرانی: اگر تابع f روی بازه I تعریف شده باشد بطوری که C نقطه درونی بازه و $f(C)$ اکستریم آن باشد، آنگاه باید نقطه‌ی C نقطه بحرانی تابع باشد.

نکته: عکس قضیه فوق صحیح نمی‌باشد.

مشق ۳۲: نقاط بحرانی توابع $y = -2x^3 + 3x^2$ و $y = \sqrt{1-x^2}$ را بیابید.

مشق ۳۳: نشان دهید نقطه $x=0$ برای توابع $y = \sqrt[3]{x}$ ، $y = x^3$ نقطه بحرانی است ولی در هیچ کدام نقطه اکستریم نمی‌باشد.

مشق ۳۴: نقاط بحرانی تابع $f(x) = x^3 - 3x + 1$ را در بازه $[-1, 1]$ بیابید.

مسئله ۱۰۷: نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x) = (x-1)|x^2 + x - 2|$ ، سه رأس مثلثی هستند، مساحت مثلث کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۴/۵ (۲)

۴ (۱)

خارج ۹۲

مجموعه طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = |x - 2|\sqrt{x^2}$ کدام است؟

- (۱) $\{0, \frac{4}{5}, 2\}$ (۲) $\{0, \frac{2}{3}, 2\}$ (۳) $\{0, 1\}$ (۴) $\{\frac{2}{3}, 2\}$

- تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = |x^3 - x|$ روی بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۶

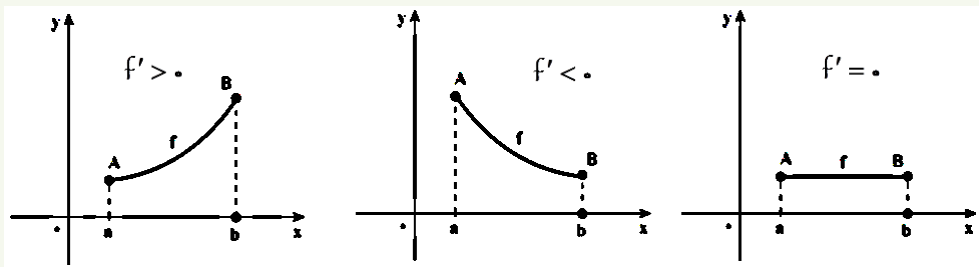
توابع صعودی و نزولی

قضیه ۳: فرض کنیم تابع f بر $[a, b]$ پیوسته و بر (a, b) مشتق‌پذیر باشد، در این صورت داریم:

الف) اگر برای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم $f'(x) > 0$ ، آنگاه تابع f بر $[a, b]$ صعودی آید است.

ب) اگر برای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم $f'(x) < 0$ ، آنگاه تابع f بر $[a, b]$ نزولی آید است.

پ) اگر برای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم $f'(x) = 0$ ، آنگاه تابع f بر $[a, b]$ ثابت است.



مشروع ۳۵: صعودی یا نزولی بودن تابع $y = x^3 - x^2 - x + 1$ را بررسی کنید.

تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ در چه بازه‌ای صعودی اکید و در چه بازه‌ای نزولی اکید است؟

اکسترمم نسبی

تعریف: تابع f و نقطه c از دامنه آن را در نظر می‌گیریم. اگر یک همسایگی از این نقطه موجود باشد که به ازای هر x از این همسایگی داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$ ، آن‌گاه $f(c)$ ماکسیمم نسبی تابع و اگر به ازای هر x از این همسایگی داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$ ، آن‌گاه $f(c)$ مینیمم نسبی تابع نامیده می‌شود. اگر هر یک از دو حالت قبل اتفاق بیافتد، $f(c)$ یک اکسترمم نسبی تابع می‌باشد.



آزمون مشتق اول

نکته: اگر تابع f بر بازه (a, b) پیوسته، $(c, f(c))$ یک نقطه بحرانی تابع و این تابع بر این بازه بحر احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد. آن‌گاه:

الف) $f(c)$ ماکسیمم نسبی تابع است اگر قبل از c مقدار مشتق مثبت و بعد از آن منفی باشد.

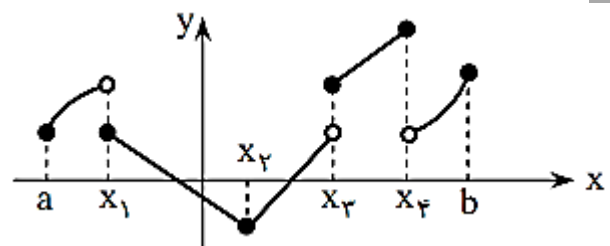
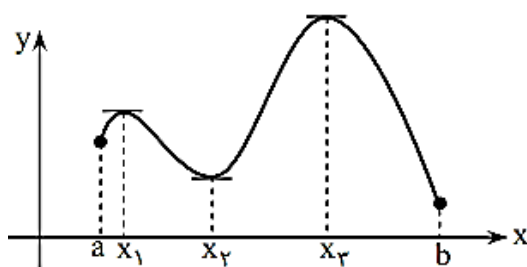
ب) $f(c)$ مینیمم نسبی تابع است اگر قبل از c مقدار مشتق منفی و بعد از آن مثبت باشد.

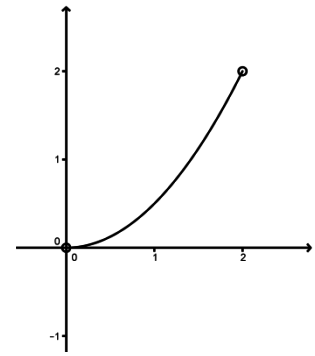
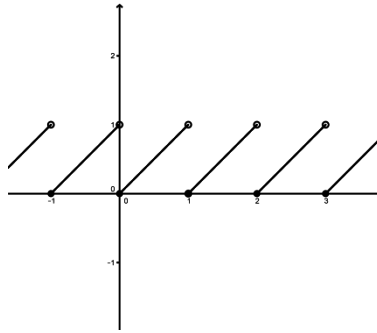
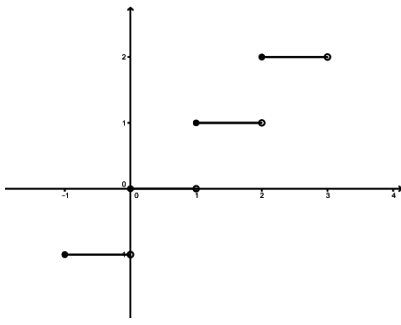
نکاتی در مورد اکسترمم‌های نسبی:

۱. نقاط انتهایی و ابتدایی دامنه، اکسترمم نسبی هستند.
۲. در نقاط اکسترمم نسبی تابع لزوماً پیوسته و مشتق‌پذیر نمی‌باشد.
۳. هر نقطه از توابع ثابت هم، مینیمم و هم ماکزیمم نسبی است.
۴. گاهی نقاط اکسترمم نسبی، اکسترمم مطلق هم هستند.
۵. همه نقاط اکسترمم نسبی نقاط بحرانی اند ولی عکس این موضوع لزوماً برقرار نمی‌باشد.
۶. نقاط توقف و بازگشت، همیشه نقطه اکسترمم نسبی نیز می‌باشد.



مشق ۳۷: اکسترمم‌های نسبی و مطلق را در نمودارهای زیر مشخص کنید.



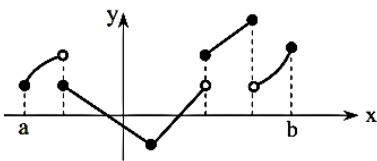


مقادیر اکسترم موضعی تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{\sin^2 x}$ را روی بازه $(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3})$ پیدا کنید.

مشق ۳۸

مقدارهای ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{3}x - 2\cos x$ را روی بازه $(0, 2\pi)$ پیدا کنید.

مشق ۳۹



شکل مقابل نمودار تابع f در بازه $[a, b]$ است. تعداد نقاط اکسترم نسبی f کدام است؟

- | | |
|-------|-------|
| ۱ (۱) | ۳ (۳) |
| ۲ (۲) | ۴ (۴) |

مشق ۴۰

نقاط $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ به ترتیب در تابع $f(x) = \sin^2 x - \sin x$ چه نوع نقاطی هستند؟

(۱) می نیمم نسبی - ماکزیمم نسبی (۲) می نیمم نسبی - می نیمم نسبی (۳) ماکزیمم نسبی - می نیمم نسبی (۴) ماکزیمم نسبی - ماکزیمم نسبی

مشق ۴۱

سئوال ۱۱۲:

مقدار می نیمم نسبی تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \sin x}$ در بازه $[0, 2\pi]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۴) -1

سئوال ۱۱۳:

تابع $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x + 2}$ به ترتیب چند ماکزیمم نسبی و چند می نیمم نسبی دارد؟

- (۱) $1-1$ (۲) $2-2$ (۳) $1-3$ (۴) $2-1$

سئوال ۱۱۴:

به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، طول یکی از نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 - 8x$ ، در بازه $(1, 4)$ قرار می گیرد؟

- (۱) $-3 < a < 1/5$ (۲) $-3 < a < 2/5$ (۳) $-5 < a < 1/5$ (۴) $-5 < a < 2/5$

خارج ۹۲

سئوال ۱۱۵:

نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = \cos^2 x - \cos x$ روی بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ چگونه اند؟

- (۱) یک نقطه ماکسیمم - یک نقطه می نیمم
(۲) یک نقطه ماکسیمم - دو نقطه می نیمم
(۳) دو نقطه ماکسیمم - یک نقطه می نیمم
(۴) دو نقطه ماکسیمم - دو نقطه می نیمم

سراسری ۸۵

سئوال ۱۱۶:

کدام بیان برای تابع با ضابطه $f(x) = x|x^2 - 2|$ بر دامنه $[-1, 1]$ نادرست است؟

- (۱) می نیمم مطلق دارد.
(۲) ماکسیمم مطلق دارد.
(۳) دو نقطه اکسترمم نسبی دارد.
(۴) فاقد اکسترمم نسبی

سراسری ۸۷

تست ۱۱۷:

سراسری ۸۸

- می‌نیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = x - \sqrt{x^3 - 3x^2}$ بر روی R کدام است؟

- (1) -1 (2) صفر (3) $-\frac{1}{3}$ (4) $\frac{1}{3}$

تست ۱۱۸:

سراسری ۹۲

- کمترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = x + \sqrt{x^2 - x^3}$ ، کدام است؟

- (1) $-\frac{1}{9}$ (2) $-\frac{1}{6}$ (3) $-\frac{1}{3}$ (4) صفر

تست ۱۱۹:

سراسری ۸۸

- اگر c نقطه اکسترمم مطلق تابع f روی دامنه آن باشد و تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، الزاماً تابع f در نقطه c ، کدام وضعیت را دارد؟

- (1) پیوسته (2) خط مماس افقی (3) مشتق پذیر (4) اکسترمم نسبی

تست ۱۲۰:

سراسری ۸۹

- تابع با ضابطه $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$ در نقطه $(-2, 1)$ دارای اکسترمم نسبی است. عدد a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟

- (1) $-\frac{4}{3}$ ، می‌نیمم (2) $-\frac{4}{3}$ ، ماکسیمم (3) $\frac{4}{3}$ ، می‌نیمم (4) $\frac{4}{3}$ ، ماکسیمم

تست ۱۲۱:

سراسری ۸۹

- تابع f روی $[a, b]$ تعریف شده و $a < c < b$ است. کدام بیان نادرست است؟

- (1) اگر c نقطه اکسترمم نسبی و $f'(c)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه خط مماس بر منحنی در c افقی است.
 (2) اگر c نقطه بحرانی باشد، آن‌گاه c نقطه اکسترمم نسبی است.
 (3) اگر c نقطه اکسترمم نسبی باشد، آن‌گاه c نقطه بحرانی است.
 (4) اگر c نقطه اکسترمم مطلق باشد، آن‌گاه c نقطه بحرانی است.

سراسری ۹۱

اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = 2^x$ ، آنگاه تابع gof از نظر اکسترمم نسبی کدام نوع را دارد؟

(۴) فاقد ماکسیمم - فاقد می نیمم

(۳) فاقد ماکسیمم - می نیمم

(۲) ماکسیمم - فاقد می نیمم

(۱) ماکسیمم - می نیمم

نکته: اگر تابع کسری $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ در $x = c$ مشتق پذیر باشد و اکسترمم نسبی داشته باشد $(h'(c) \neq 0)$ ، مختصات نقطه‌ی اکسترمم تابع، هم در تابع و هم در هوبیتال آن صبق می‌کند.



اگر نقطه‌ی $A(2, 3)$ نقطه‌ی می نیمم نسبی نمودار تابع $y = \frac{x^2 + a}{(x + b)^2}$ باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

-۸ (۴)

۸ (۳)

صفر (۲)

۴ (۱)

عرض اکسترمم نسبی

نکته: برای شناسایی عرض اکسترمم نسبی، روش اول گرفتن مشتق است. اما روش دوم از مساوی صفر قرار دادن دلتای معادله حاصل از حل معادله $f(x) = y$ بر اساس متغیر x است.



مثال ۴۰: عرض نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ را به دو روش بیابید.

مجموع مقادیر ماکزیمم و می نیمم نسبی در تابع $f(x) = \frac{x^2 + 4ax - 5}{2x + 3}$ برابر ۲ است، مقدار a کدام است؟

- $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳)- $\frac{5}{4}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۱)

«(تئاس گاهی به انسان کمک می کند، اما تلاش همیتنه .)»

آزمون مشتق دوم

اگر تابع f بر بازه باز I مشتق پذیر، c درونی I داشته باشیم $f'(c) = 0$ ، آنگاه:
الف) اگر در این بازه $f''(c)$ موجود و مثبت باشد، f در c ماکسیمم موضعی دارد.
ب) اگر در این بازه $f''(c)$ موجود و منفی باشد، f در c مینیمم موضعی دارد.



به فرض آنکه $f(x) = x^2 e^{-x}$ ، با اعمال آزمون مشتق اکسترم های موضعی f را بیابید و نمودار f را رسم کنید.

مشق ۴۱:

به فرض آنکه $f(x) = x^2 - 2x^3$ ، با اعمال آزمون مشتق دوم، مقادیر اکسترم های موضعی f را بیابید و نمودار f را رسم کنید.

مشق ۴۲:

بهینه سازی

نکته: با استفاده از مشتق، می توانیم بیشترین و کمترین مقدار یک تابع را محاسبه کنیم. به این ترتیب که با گرفتن مشتق اول و مساوی صفر قرار دادن آن، طول نقطه و سپس با قرار دادن آن در تابع اصلی عرض آن را می یابیم.
نکته: اگر در تابع تعداد مجهولات بیشتر از یک باشد، در ابتدا با توجه به فرض مساله، مجهولات را بر حسب یکی از آنها محاسبه می کنیم.



مشق ۴۳: بیشترین مقدار تابع $f(x) = x - 3x^2$ را بیابید.

مشق ۴۳:

سؤال ۱۲۵: اگر $x + y = 4$ باشد بیشترین مقدار $x^2 y$ کدام است؟ ($x, y > 0$)

$$\frac{256}{27} \quad (4)$$

$$\frac{64}{27} \quad (3)$$

$$16 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

سؤال ۱۲۶: کوتاه‌ترین فاصله مبدا مختصات از نقاط منحنی به معادله $y = \frac{2}{x^2}$ کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$\sqrt{2} \quad (3)$$

$$\sqrt{3} \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

سراسری ۸۸

سؤال ۱۲۷: کوتاه‌ترین فاصله بین نقاط منحنی به معادله $y = \frac{1}{3}x^2 - 2$ و نقطه ثابت $(0, 11)$ کدام است؟

$$6 \quad (4)$$

$$4\sqrt{2} \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

سراسری ۷۹

سؤال ۱۲۸: بزرگترین حجم مخروط، از بین مخروطهایی که مجموع شعاع قاعده و ارتفاع آنها برابر واحد باشد کدام است؟

$$\frac{4\pi}{27} \quad (4)$$

$$\frac{3\pi}{32} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{12} \quad (2)$$

$$\frac{4\pi}{81} \quad (1)$$

سراسری ۸۰

سؤال ۱۲۹: دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است، اگر حاصلضرب آنها می‌نیم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

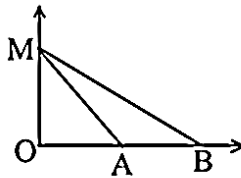
$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (1)$$

سراسری ۸۱



در شکل مقابل دو نقطه A و B به ترتیب به طولهای ۴ و ۹ بر روی محور افقی قرار دارند، نقطه M با کدام ارتفاع روی محور قائم انتخاب شود تا زاویه $\angle AMB$ بیشترین مقدار خود را داشته باشد؟

۶ (۲)
۷/۲ (۴)

۵/۴ (۱)
۶/۵ (۳)

تست ۳۰:

سراسری ۸۱

بیشترین مساحت از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مجموع یک ضلع زاویه قائمه و وتر آن برابر ۶ باشد کدام است؟

$3\sqrt{2}$ (۴)

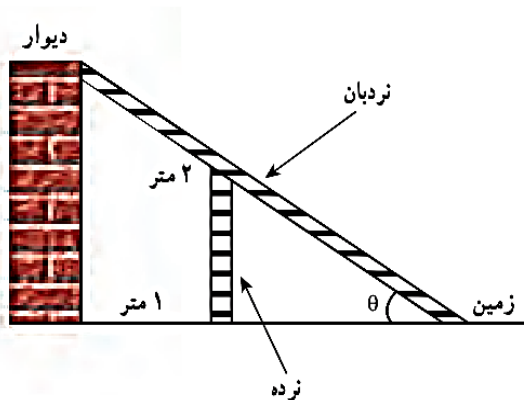
۴ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲)

۳ (۱)

تست ۳۱:

سراسری ۸۲

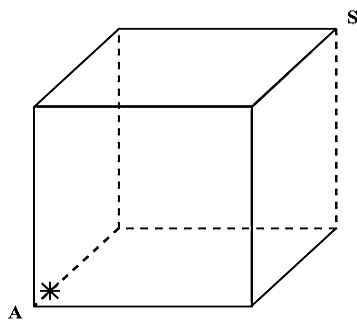


در شکل ۳-۳۱ یک نرده

به ارتفاع ۲ متر و به طور قائم بر زمین، به فاصله ۱ متر از یک دیوار قائم قرار دارد. طول کوتاه‌ترین نردبانی را تعیین کنید که از روی نرده به ارتفاع ۲ متر گذشته و یک سر آن روی زمین و خارج نرده و سر دیگر آن مماس بر دیوار قائم باشد.

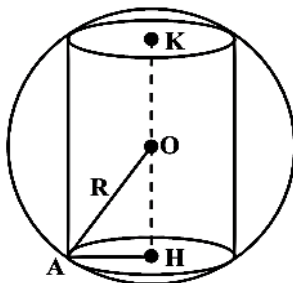
مشق ۴۴:

نشان دهید که در بین همه مثلث‌های متساوی‌الساقینی که محیط یکسانی دارند، مثلث متساوی‌الاضلاع دارای بیشترین مساحت است.



(مسئله کوتاه‌ترین مسیر عنکبوت) مطابق شکل ۳-۳۳ یک عنکبوت در گوشه S از سقف اتاق مکعب شکل که هر ضلع آن ۳ متر است قرار دارد و می‌خواهد یک سوسک که در گوشه مقابل او (A) روی کف اتاق خوابیده است را شکار کند. عنکبوت مجبور است روی سقف اتاق حرکت کند (نمی‌تواند پرواز کند) و سپس روی دیوارها یا کف اتاق راه برود، او می‌خواهد کوتاه‌ترین مسیر برای شکار سوسک را پیدا کند. او را راهنمایی کنید. فراموش نکنید که معمولاً موجودات به‌طور غریزی کوتاه‌ترین مسیر را انتخاب می‌کنند.

می‌خواهیم در کره‌ای به شعاع R یک استوانه دوار قائم محاط کنیم که بزرگ‌ترین حجم را داشته باشد، در این صورت شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را بیابید.



مشتق دوم و تقعر نمودار تابع



تعریف: اگر نمودار f در بازه I بالای همگی مماس‌هایش باشد آن‌گاه تقعر نمودار تابع رو به بالا و اگر زیر همگی مماس‌هایش باشد تقعر منحنی رو به پایین است.
قهریه: اگر $f''(x)$ روی یک بازه موجود و مثبت باشد، جهت تقعر تابع در این بازه رو به بالا و اگر منفی باشد جهت تقعر تابع رو به پایین خواهد بود.

مثال ۴۸: جهت تقعر را در تابع $y = x^3 - 4x + 1$ مشخص کنید.

مثال ۴۹: تابع f با ضابطه $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$ روی چه بازه‌هایی صعودی اکید یا نزولی اکید و روی چه بازه‌هایی تقعر رو به بالا یا مقعر رو به پایین است.

مثال ۵۰: تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ روی چه بازه‌هایی صعودی اکید یا نزولی اکید است و روی چه بازه‌هایی نمودار f تقعر رو به بالا دارد یا مقعر رو به پایین است.

در کدام بازه تابع با ضابطه $f(x) = e^{x-2x^2}$ ، صعودی و تقعر نمودار آن، رو به پایین است؟

- (۱) $(-\infty, \frac{1}{4})$ (۲) $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ (۳) $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ (۴) $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

تست ۱۳۲:
خارج ۹۳

در کدام بازه، تابع با ضابطه $f(x) = x^3 e^{-x}$ ، صعودی و تقعر نمودار آن رو به بالا است؟

- (۱) $(0, 3 - \sqrt{3})$ (۲) $(3 - \sqrt{3}, 3)$ (۳) $(3, 3 + \sqrt{3})$ (۴) $(3 + \sqrt{3}, +\infty)$

نمودار تابع $y = |x| e^{-x}$ ، در کدام بازه نزولی و تقعر آن رو به پایین است؟

- (۱) $(-\infty, 2)$ (۲) $(0, 1)$ (۳) $(1, 2)$ (۴) $(2, +\infty)$

نقطه عطف



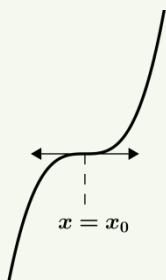
تعریف: فرض کنیم تابع f در $x = c \in D_f$ پیوسته باشد، در این نقطه خط مماس بر تابع موجود و در دو طرف آن جهت تقعر تابع عوض شود. در این صورت نقطه $(c, f(c))$ نقطه عطف تابع است.

نکته: شرط وجود نقطه عطفی مانند $x = c \in D_f$ برای تابع f ، آن است که تابع در این نقطه مشتق‌پذیر باشد (تابع در این نقطه دارای خط مماس باشد) و مشتق دوم در این نقطه برابر صفر باشد و یا موجود نباشد و همچنین جهت تقعر تابع در دو سمت آن تغییر کند.

نکته: سه حالت برای نقطه عطف اتفاق می‌افتد:

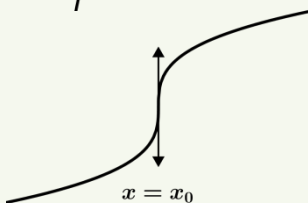
الف) اگر تابع f در $x = x_0$ عطف افقی داشته باشد، آنگاه $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$.

در این حالت مشتق اول، ریشه مضاعف دارد، یعنی تابع دارای عاملی به صورت $(x - x_0)^2$ خواهد بود.



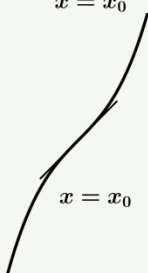
ب) اگر تابع f در $x = x_0$ عطف قائم داشته باشد، آنگاه $f'(x_0) = f''(x_0) = +\infty$.

و یا $f'(x_0) = f''(x_0) = -\infty$.



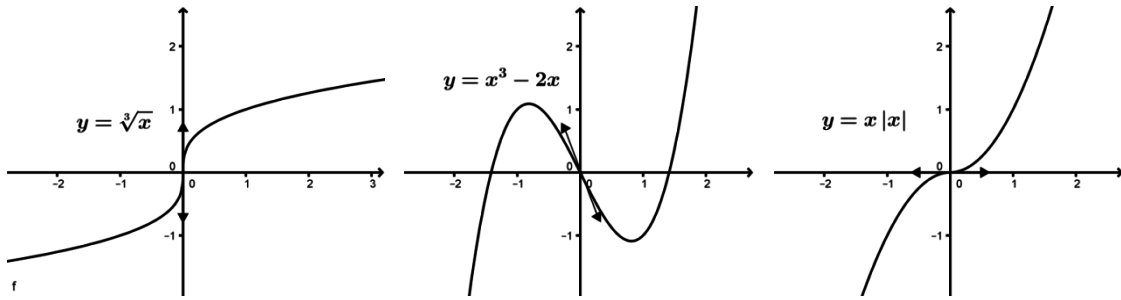
پ) اگر تابع f در $x = x_0$ عطف مایل داشته باشد، آنگاه $f''(x_0) = 0$ که در این

حالت $m = f'(x_0)$ خواهد بود.



* (امام علی (ع): سه چیز حافظه را زیاد میکند و بلغم را از بین می برد: قرائت قرآن، خوردن عسل و جودن کندر.) *
در نمودارهای زیر، سه حالت عطف افقی، عطف مایل و عطف قائم را مشاهده می کنید.

شکل ۵۱:

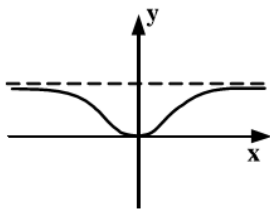


جهت تعریف نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x}$ را در دامنه اش بررسی نموده و نقطه عطف آنرا به دست آورید.

شکل ۵۲:

جهت تعریف نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^4 - 4x^2$ را در دامنه اش بررسی نموده و نقاط عطف آنرا به دست آورید.

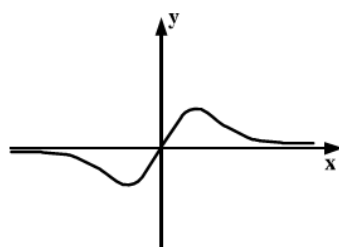
شکل ۵۳:



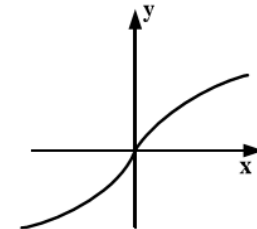
شکل روبه رو نمودار تابع $y = f(x)$ است. نمودار $f'(x)$ به کدام صورت است؟

شکل ۱۴۰:

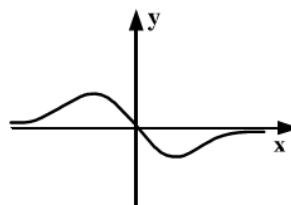
خارج ۹۳



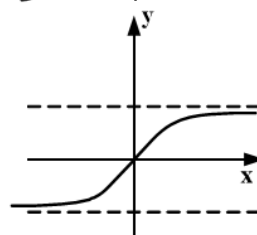
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

مجموعه طول نقاط عطف نمودار تابع با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x^2 & ; x > -1 \\ -13 - \frac{9}{x} & ; x < -1 \end{cases}$$

کدام است؟

(۱) $\{-1\}$ (۲) $\{1\}$ (۳) $\{-1, 1\}$ (۴) \emptyset

تست ۱۴۱:

سراسری ۸۹

مجموعه طول نقاط عطف منحنی به معادله $y = x|x^2 - 4x|$ ، کدام است؟

(۱) $\{\frac{4}{3}\}$ (۲) $\{0, \frac{4}{3}, 4\}$ (۳) $\{\frac{4}{3}, 4\}$ (۴) $\{0, \frac{4}{3}\}$

تست ۱۴۲:

سراسری ۹۲

ارتباط دو طرفه بین نمودار تابع و تابع مشتق آن

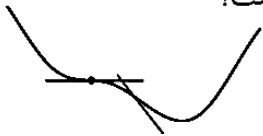
f'	f
مثبت	صعودی
منفی	نزولی
صفر	ثابت
صفر یا وجود ندارد	قطعه اکسترمم
صعودی	تغیر به سمت بالا
نزولی	تغیر به سمت پایین
اکسترمم	عطف مایل
ریشه مضاعف	عطف افقی
بجانب قائم	بازگشت یا عطف قائم
میل به صفر در بینهایت	بجانب افقی



تست ۱۴۳:

سراسری ۸۲

شکل مقابل نمودار تابع f است مقادیر اکسترمم نسبی تابع مشتق f' از راست به چپ چگونه است؟



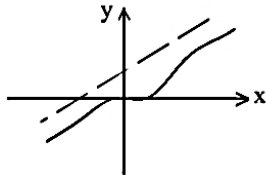
- (۲) می نیمم منفی - ماکزیمم منفی
(۴) می نیمم منفی - ماکزیمم صفر

- (۱) می نیمم مثبت - ماکزیمم مثبت
(۳) می نیمم صفر - ماکزیمم مثبت

تست ۱۴۴:

سراسری ۸۵

شکل مقابل نمودار تابع $y = \frac{x^3 + ax^2}{x^2 - 2x + b}$ است، b کدام است؟



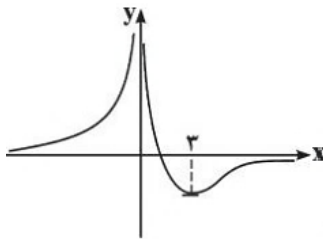
- (۲) ۲
(۴) ۴

- (۱) ۱
(۳) ۳

تست ۱۴۵:

سراسری ۹۰

شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax+3}{x^2+bx}$ است. دوتایی (a, b) کدام است؟



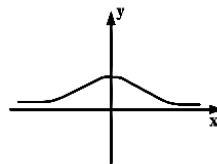
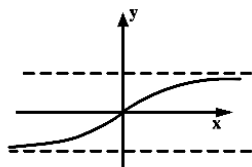
- (۲) $(2, 0)$
(۴) $(2, 2)$

- (۱) $(-2, -2)$
(۲) $(-2, 0)$

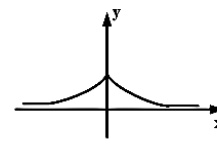
تست ۱۴۶:

سراسری ۹۳

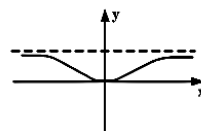
شکل روبه رو نمودار تابع $y = f(x)$ است. نمودار $f'(x)$ به کدام صورت است؟



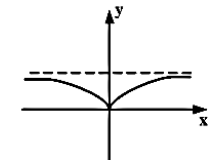
(۲)



(۱)



(۴)

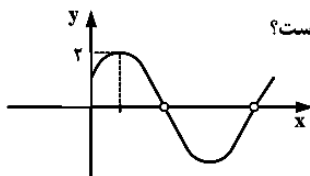


(۳)

تست ۱۴۷:

سراسری ۹۳

شکل مقابل نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{a \sin 2x + b}{\sin x + \cos x}$ ، در یک دوره تناوب است. a کدام است؟



- (۲) ۱
(۴) ۲

- (۱) -۱
(۳) $\sqrt{2}$

سئوال ۱۴۸:

سراسری ۹۴

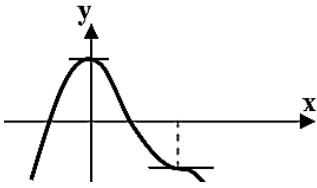
شکل روبه رو، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -x^4 + 8x^3 + ax^2 + b$ است. a کدام است؟

(۲) -۱۵

(۱) -۱۸

(۴) -۹

(۳) -۱۲



سئوال ۱۴۹:

خارج ۹۴

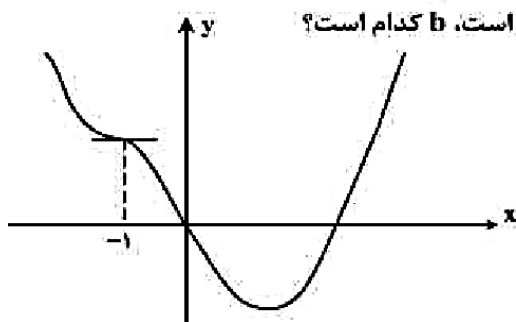
شکل زیر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx$ است. b کدام است؟

(۱) -۱۱

(۲) -۱۵

(۳) -۹

(۴) -۸



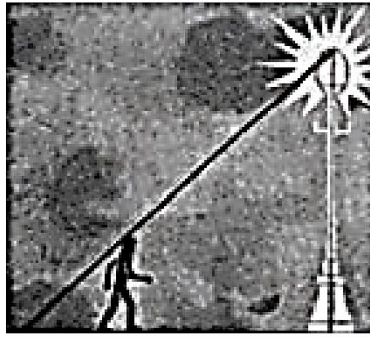
آهنگ‌های تغییر وابسته

اگر در مساله‌ای دو کمیت نسبت به هم وابسته وجود داشته باشند که خود با تغییر متغیر سوم دچار تغییر شوند، از طرفین معادله‌ای که این دو را به یکدیگر نسبت می‌دهد، نسبت به متغیر سوم مشتق می‌گیریم.
مثلاً اگر با گذشت زمان حجم یک کره افزایش یابد، شعاع آن نیز افزایش می‌یابد.

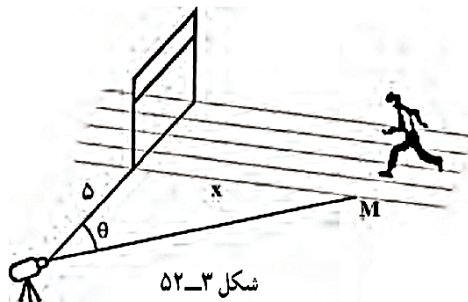


بالنی را از هوا بر می‌کنیم، به طوری که حجم آن با آهنگ 80 سانتی متر مکعب بر ثانیه افزایش می‌یابد، وقتی شعاع بالن 20 سانتی متر است، شعاع بالن با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟

سئوال ۵۴:



مردی که قدش ۱۸۰ سانتی متر است با سرعت $۰/۴$ متر بر ثانیه روی زمین مسطحی به سمت تیر چراغ برق قدم می‌زند. اگر لامپ چراغ برق از زمین ۴ متر ارتفاع داشته باشد طول سایه مرد وقتی که در فاصله $۲/۴$ متری تیر چراغ برق قرار دارد با چه سرعتی کاهش می‌یابد؟ در این زمان سایه سر او با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

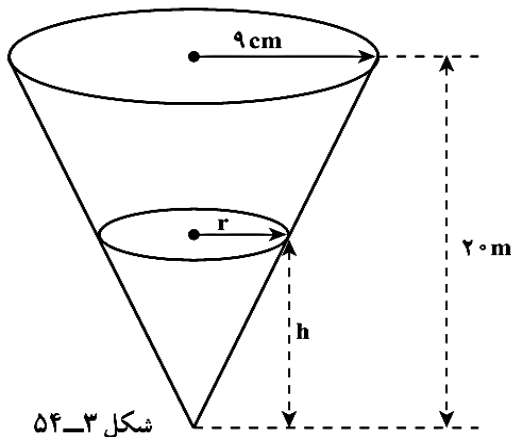


شکل ۵۲-۳

شکل ۵۲-۳، یک دوربین تلویزیون را (که در ۵ متری خط پایان روی یک مسیر مستقیم قرار دارد) نشان می‌دهد که دونه المپیک M را تعقیب می‌کند.

وقتی دونه در ۵ متری خط پایان است با

سرعت ۱۰ متر بر ثانیه می‌دود. سرعت چرخش دوربین در این لحظه چقدر است؟



شکل ۵۴-۳

ظرف قیفی شکل با ارتفاع ۲۰ سانتی متر و شعاع قاعده ۹ سانتی متر چنان قرار گرفته است که رأس آن در پایین است و ظرف به شکل مخروط دوار است. (شکل ۵۴-۳)

فرض کنید آب با سرعت $۱/۸$ سانتی متر مکعب بر ثانیه در این ظرف ریخته شود آهنگ افزایش ارتفاع آب را وقتی ارتفاع آب ۶ سانتی متر است پیدا کنید.

بیشترین مساحت از مستطیل‌هایی که دو رأس آن بر روی نیم بیضی به معادله $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ و دو رأس دیگر آن بر روی محور x ‌ها باشند، کدام است؟

۸ (۴)

$4\sqrt{3}$ (۳)

$3\sqrt{5}$ (۲)

۶ (۱)

دو ضلع از مستطیلی منطبق بر محورهای مختصات و رأس چهارم آن واقع بر منحنی به معادله $y = (x-2)^2$ بازه $[0, 2]$ است، بیش‌ترین مساحت این مستطیل کدام است؟

$\frac{11}{9}$ (۴)

$\frac{32}{27}$ (۳)

$\frac{10}{9}$ (۲)

$\frac{28}{27}$ (۱)

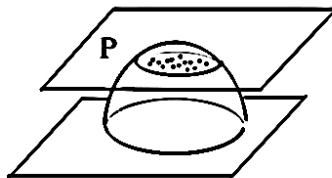
مستطیل‌های محاط در یک دایره به قطر ۶ واحد را حول یک ضلع خود دوران می‌دهیم تا استوانه‌های قائم ایجاد شود. وقتی حجم این استوانه‌ها بیش‌ترین مقدار را دارد، ارتفاع آن کدام است؟

$3\sqrt{2}$ (۴)

$2\sqrt{6}$ (۳)

$2\sqrt{3}$ (۲)

۴ (۱)



در یک نیمکره به شعاع ۲۵ واحد، صفحه P همواره موازی صفحه قاعده با سرعت 0.4 از آن دور می‌شود، در حالی که فاصله‌ی دو صفحه ۱۲ واحد است، سرعت کاهش مساحت دایره مقطع صفحه P و نیمکره کدام است؟

0.72π (۲)

0.48π (۱)

0.96π (۴)

0.84π (۳)

تست ۱۵۴: کوتاه ترین فاصله مبداء مختصات از نقاط منحنی به معادله $y = \frac{2}{x^2}$ کدام است؟

سراسری ۸۸

1 (1)

2 (2)

3 (3)

4 (4)

تست ۱۵۵:

سراسری ۸۹

نقطه‌ای بر روی منحنی به معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x+y} = 5$ در حرکت است. در لحظه‌ای که ذره از نقطه $(4, 5)$

عبور می‌کند، اگر سرعت افزایش x برابر $0/2$ واحد در ثانیه باشد، سرعت تغییر y کدام است؟

1 (1)

2 (2)

3 (3)

4 (4)

تست ۱۵۶:

سراسری ۹۱

اگر $a > 0$ و ثابت، و x متغیر باشد، می‌نیمم مقدار $\frac{2a+x}{\sqrt[4]{a^3x}}$ کدام است؟

1 (1)

2 (2)

3 (3)

4 (4)

تست ۱۵۷:

سراسری ۹۴

در مثلث ABC ضلع $BC = 20$ و ارتفاع $AH = 12$ واحد است. خط Δ موازی BC با سرعت ثابت $0/2$ واحد در ثانیه از آن دور می‌شود.

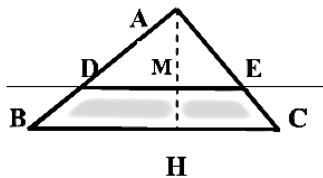
سرعت افزایش مساحت ذوزنقه در لحظه‌ای که فاصله دو خط موازی ۹ واحد باشد کدام است؟

1 (1)

2 (2)

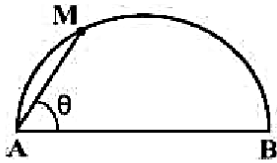
3 (3)

4 (4)



نقطه M بر روی نیم دایره‌ای به قطر $AB = 10$ ، با سرعت ثابت 0.2 واحد در ثانیه از نقطه A دور می‌شود. سرعت کاهش زاویه $\theta = \widehat{MAB}$ در لحظه‌ی $t = 6$ ، کدام است؟

خارج ۹۴



- (۱) 0.25
(۲) 0.40
(۳) 0.45
(۴) 0.50

رسم نمودار توابع

برای رسم نمودار توابع، از موارد آمده زیر استفاده می‌کنیم:



۱. دامنه، زوج یا فرد بودن و دوره تناوب تابع.
۲. محل برخورد تابع با محورهای مختصات و بجانب‌های تابع.
۳. محاسبه مشتق اول و دوم برای یافتن نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی و عطف تابع، صعودی یا نزولی بودن تابع در نقاط مختلف دامنه و جهت تغییر تابع.
۴. تنظیم جدول برای اطلاعات فوق و نهایتاً رسم تابع.

جدول رفتار و نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 - 8x^2 + 7$ را رسم کنید.

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ را رسم کنید.

مشق ۵۹:

جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{x-2}{x}$ را رسم کنید.

مشق ۶۰:

جدول رفتار نمودار تابع $y = \frac{x^2-3x}{x-4}$ را رسم کنید.

مشق ۶۱:

مشق ۶۲: جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$ را رسم کنید.

مشق ۶۳: جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ را رسم کنید.

مشق ۶۴: جدول رفتار و نمودار تابع $y = x + \sqrt{x^2 - 1}$ را رسم کنید.

مشق ۶۵: جدول رفتار و نمودار تابع f با ضابطه $y = \sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ را رسم کنید.

مسائل کتاب

۱- معادلات خط‌های مماس و قائم بر منحنی $y = \sqrt{x}$ را در نقطه $(1, 1)$ بیابید. (بامحاسبه شیب مماس به کمک تعریف)

۲- نقاطی از منحنی $y = \frac{1}{x}$ را که در آنها خط مماس بر خط $y = 2x$ عمود است بیابید. (بامحاسبه شیب مماس به کمک تعریف)

۳- آیا تابع‌های زیر در نقطه مشخص شده خط مماس دارند؟

اگر پاسخ مثبت است معادله خط مماس را بیابید.

الف) $f(x) = \sin x$ در $x = 0$ ب) $g(x) = |\sin x|$ در $x = 0$

۴- آیا تابع‌های زیر در نقطه مشخص شده خط مماس دارند؟

اگر پاسخ مثبت است معادله خط مماس را بیابید.

الف) $f(x) = |x|$ در $x = 1$ ب) $g(x) = |x^2 - 1|$ در $x = 1$

پ) $e(x) = \sqrt[3]{x}$ در $x = 0$ ت) $t(x) = x \operatorname{sgn}(x)$ در $x = 0$

- ۱- حجم یک مکعب به طول ضلع x عبارت است از $V=x^3$ ، آهنگ تغییر حجم مکعب نسبت به x را وقتی $x=4$ است بیابید.
- ۲- آهنگ تغییر مساحت دایره را نسبت به قطر آن بیابید.
- ۳- فرض کنید آنفلوآنزا در یک منطقه شیوع پیدا کرده است و مسئولین اداره بهداشتی تعداد افراد مبتلا به بیماری در زمان t (برحسب روز از زمان شیوع) را برابر $P(t)=60t^2-t^3$ تخمین می‌زنند، با شرط اینکه $0 \leq t \leq 40$.
- الف) آهنگ تغییر پخش آنفلوآنزا را در $t=30$ پیدا کنید.
- ب) چه زمانی آهنگ پخش آنفلوآنزا ۹۰۰ نفر در روز است؟
- ۴- فرض کنید تابع هزینه تولید x واحد از محصولی $C(x)=0.5x^3-3x$ و سطح تولید روزانه ۱۰۰ واحد است
- الف) هزینه افزایش تولید از ۱۰۰ به ۱۰۱ واحد در روز چقدر است؟
- ب) هزینه نهایی در این سطح تولید چقدر است؟
- ۵- فرض کنید که درآمد حاصل از تولید x واحد از محصولی $R(x)=0.1x^2-3x$ ، درآمد نهایی «آهنگ آبی تغییر درآمد» را در سطح تولید ۱۸۰۰ واحد حساب کنید.

۱- فرض کنید تابع f در $x=1$ مشتق پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h} = 3$ ، مقدارهای $f(1)$ و $f'(1)$ را به دست آورید.

۲- فرض کنید $f(x) = \begin{cases} x^3, & |x| \geq 1 \\ 2x^2 - 1, & |x| < 1 \end{cases}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - 1}{h}$ را بیابید.

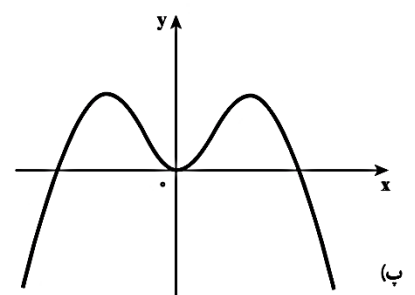
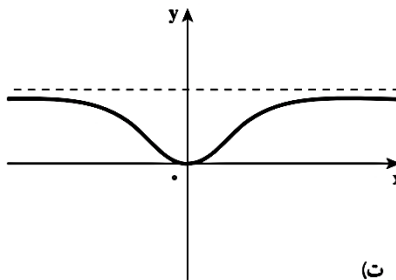
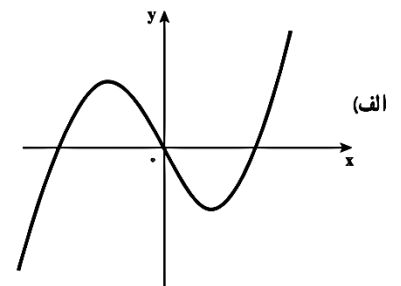
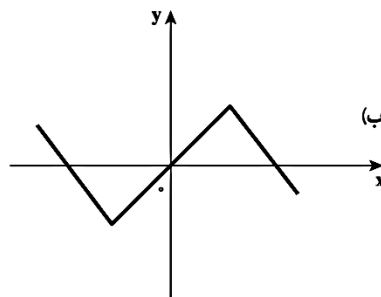
۳- فرض کنید $f(x) = \sin x \left[\cos \frac{x}{2} \right]$ ، مشتق چپ و مشتق راست تابع f را در نقطه $x = \pi$ حساب کنید.

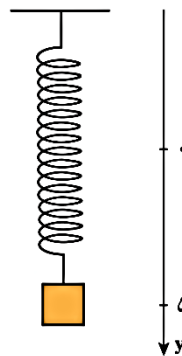
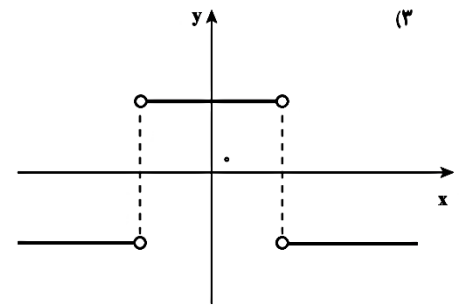
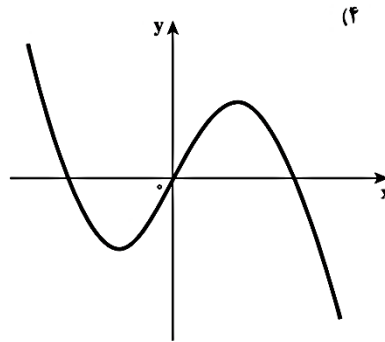
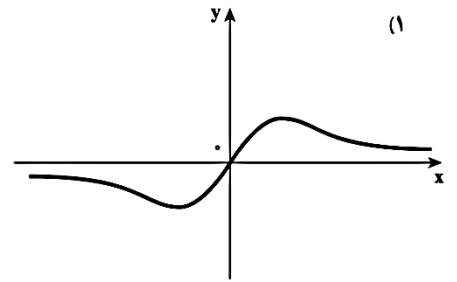
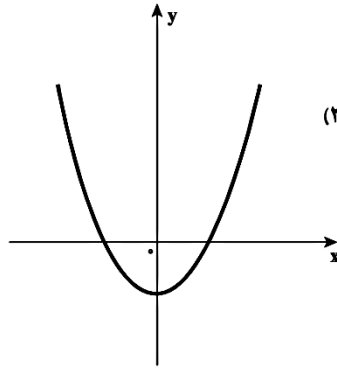
۴- الف ثابت کنید: اگر f در a مشتق پذیر باشد، حد زیر موجود و برابر با $f'(a)$ است

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$$

ب) نشان دهید که اگر حد در قسمت الف وجود داشته باشد، لزومی ندارد که تابع در نقطه a مشتق پذیر باشد.

۵- نمودار هر یک از تابع‌های قسمت‌های (الف) تا (ت) را به نمودار مشتقش در قسمت‌های (۱) تا (۴) متناظر کنید و ضمناً دلیل انتخاب خود را بیان کنید.





۶- اگر $f(x) = \sqrt{x}g(x)$ ، $g(4)=8$ ، $g'(4)=7$ ، مقدار $f'(4)$ به دست آورید.

۷- جسمی به انتهای فنری آویزان است، آن را به اندازه ۵ سانتی متر پایین کشیده و در لحظه $t=0$ رهاش می کنیم (مطابق شکل رسم شده جهت رو به پایین، جهت مثبت است) موقعیت این جسم در زمان t از رابطه $y = f(t) = 5 \cos t$ به دست می آید. سرعت و شتاب این جسم را در زمان t پیدا کنید و سپس به کمک نتایج به دست آمده حرکت جسم را تحلیل کنید.

۸- فرض کنید $f(x) = x^6 - 2x^4 - x + 1$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+h) - f'(1)}{h}$ را به دست آورید.

۹- اگر $f(x) = \frac{x+1}{x} \operatorname{sgn}(x^2 - x + 1)$ ، $f'(x)$ را حساب کنید.

۱۰- ضابطه تابع درجه دوم f را چنان انتخاب کنید که $f(1) = 2$ و $f'(1) = 3$ و $f''(1) = 4$

باشد.

۱۱- نقطه‌ای روی نمودار تابع $y = x^2 + x$ پیدا کنید که در آن نقطه، خط مماس بر منحنی تابع،

موازی قاطعی باشد که دو نقطه با طول‌های $x = 1$ و $x = 3$ واقع بر منحنی تابع را به هم وصل کند.

۱۲- معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{1+2\sin x}{\sin x}$ را در نقطه $(\frac{\pi}{6}, 4)$ به دست

آورید.

۱۳- به ازای چه مقادیری از a ، b ، c و تابع $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ ax^2 + bx + c, & x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$

مشتق مرتبه دوم دارد؟

۱۴- الف) با محاسبه مشتق اول و دوم و سوم تابع $f(x) = \sin x$ ، مشتق \ln تابع f را حدس

بزنید و سپس درستی حدس خود را به استقراء ثابت کنید.

ب) با استفاده از قسمت الف، دستور مشتق n ام تابع $f(x) = \cos x$ را به دست آورید.

۱- در هر مورد $f'(x)$ را پیدا کنید.

ب) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2}$

الف) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x}{x^2 + 1}}$

ت) $f(x) = \sin \sqrt[3]{x}$

پ) $f(x) = \sin(\cos x)$

ث) $f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$

۲- نقاطی از منحنی $y = \tan(2x)$ ، $(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4})$ ، را تعیین کنید که در آنها مماس بر منحنی با خط $y = 4x$ موازی باشد.

۳- ثابت کنید:

الف) اگر تابع f زوج و مشتق پذیر باشد آنگاه تابع مشتقش فرد است.

ب) اگر تابع f فرد و مشتق پذیر باشد آنگاه تابع مشتقش زوج است.

۴- با فرض اینکه تابع f زوج و تابع g فرد و $f'(1) = 2$ و $g'(1) = 3$ ، مقدار $(f+g)'(-1)$ را حساب کنید.

۵- با فرض این که تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مشتق پذیر از مرتبه دوم باشد و به ازای هر عدد حقیقی x ، $g(x) = f(2-x)$ و $f'(2) = 2$ مقدار $g''(0)$ را حساب کنید.

۶- اگر f تابعی چندجمله‌ای از درجه n و تابع $f \circ f'$ از درجه 12 باشد مقدار $n^2 + 4n$ را حساب کنید.

۷- اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ، آنگاه مشتق تابع باضابطه $y = f(\cot x)$ را با شرط $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ حساب کنید.

۸- معادله خط مماس بر منحنی $y = \sin(x^\circ)$ در نقطه‌ای با طول $x = 45$ را به دست آورید.

(از رابطه $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ نتیجه می‌شود، x° مساوی $\frac{\pi}{180}x$ رادیان است)

۹- با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید، برای هر عدد صحیح مثبت n ، تساوی‌های زیر

برقرارند:

$$\frac{d^n}{dx^n} \sin(ax) = a^n \sin(ax + \frac{n\pi}{2}) \quad \text{الف)}$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \cos(ax) = a^n \cos(ax + \frac{n\pi}{2}) \quad \text{ب)}$$

۱۰- معادله خط مماس بر نمودار تابع وارون، تابع $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ را در نقطه $(4, 2)$ به دست آورید.

۱۱- تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در \mathbb{R} وارون پذیر و مشتق پذیر است و $f'(x) = \sqrt{9+f^2(x)}$ ، مقدار $(f^{-1})'(4)$ را پیدا کنید.

۱۲- معادله خط مماس بر نمودار $x^2 + y^2 = 3xy$ در نقطه $A(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ را بیابید و نشان دهید خط قائم بر منحنی در نقطه A از مبدأ مختصات می‌گذرد.

۱۳- خط $y = ax + b$ نمودار $x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$ را در نقاط M و N قطع می‌کند. a و b را چنان حساب کنید که مماس در نقاط M و N خط عمود بر محور x باشد.

۱۴- در هر مورد $f'(x)$ را پیدا کنید.

$$f(x) = \ln|x^2 - 1| \quad \text{ب)}$$

$$f(x) = e^{\tan x} \quad \text{الف)}$$

$$f(x) = \ln|\cos x| \quad \text{ت)}$$

$$f(x) = \ln|\sin x| \quad \text{ب)}$$

۱۵- معادله خط مماس بر منحنی $y = \frac{\ln x}{x}$ را در نقطه $(1, 0)$ پیدا کنید.

۱۶- مشتق دوم تابع f با ضابطه $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ ، (به ازای هر عدد حقیقی x) را حساب کنید.

۱۷- در چه نقاطی نمودار $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ دارای مماس افقی است.

۱۸- مشتق تابع وارون، تابع f با ضابطه $f(x) = 2x + \ln x$ را در $x=3$ به دست آورید.

۱۹- (مدلسازی یک بیماری همه گیر) تعداد (y) افرادی که به یک ویروس بسیار مسری مبتلا

شده اند به وسیله منحنی تدارکاتی $y = \frac{L}{1 + Me^{-kt}}$ مدلسازی شده است که در آن t از لحظه بروز بیماری، برحسب ماه اندازه گیری می شود.

در ابتدا تعداد مبتلایان ۲۰۰ نفر بود و یک ماه بعد، این تعداد به ۱۰۰۰ نفر افزایش یافت. سرانجام تعداد مبتلایان در عدد ۱۰۰۰۰ ثابت ماند. پارامترهای L و M و K را تعیین کنید و مشخص کنید تعداد مبتلایان ۳ ماه بعد از بروز بیماری چند نفر هستند و آهنگ رشد در آن لحظه چقدر بوده است.

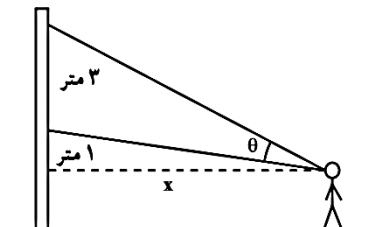
۱- مجموع دو عدد مثبت برابر ۹ است. بزرگ ترین مقدار ممکن برای حاصل ضرب آنها را

پیدا کنید.

۲- حاصل ضرب دو عدد مثبت برابر ۸ است. کمترین مقدار ممکن برای مجموع آنها را پیدا کنید.

۳- مساحت بزرگ ترین مستطیلی را بیابید که در نیم دایره ای به شعاع R محاط شده است و یک

ضلع مستطیل روی قطر نیم دایره قرار دارد.



۴- (بهترین دید از یک نقاشی دیواری)

شخصی باید در چه فاصله ای از یک نقاشی دیواری

به ارتفاع ۳ متر بایستد تا بهترین دید را از آن داشته

باشد (شکل روبه رو)، با این فرض که پایین نقاشی ۱ متر

بالتر از خط دید شخص است.

۵- قرار است محوطه ای مستطیلی شکل برای نگهداری گوسفندها ساخته شود، یک طرف این

محوطه دیوار طولی است که از قبل وجود داشته است و سه طرف دیگر آن را باید نرده گذاری کنیم.

اگر ۱۵۰ متر نرده در اختیار داشته باشیم، بیشترین مساحت ممکن برای محوطه مورد نظر چقدر است؟

۱- اگر تابع f دارای ماکزیمم مطلق بوده و $g(x)=|f(x)|$ باشد، آیا g حتماً ماکزیمم مطلق دارد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۲- نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x)=x|x^2-1|$ را پیدا کنید.

۳- نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x)=|x-1|\sqrt{x^2}$ را پیدا کنید.

۴- نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم مطلق توابع زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } f(x)=x^3-3x+1, -\frac{3}{4} \leq x \leq 3$$

$$\text{ب) } f(x)=\sin^2 x + 2 \cos x, 0 \leq x \leq 2\pi$$

۵- ارتفاع یک توپ (به متر) در لحظه t (به ثانیه) از تابع مکان به معادله $S(t)=30t-5t^2$ به دست

می آید. بازه زمانی بازی را بیابید که بر آن توپ به بالا می رود و بازه زمانی بازی را بیابید که بر آن توپ

پایین می آید. ارتفاع ماکسیمم توپ چقدر است؟

۶- جهت تقعر منحنی f با ضابطه $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ را به کمک قضیه تقعر بررسی نموده و نقطه

عطف تابع را در صورت وجود پیدا کنید.

۷- به ازای چه مقادیری از a ، تقعر منحنی f با ضابطه $f(x)=x^4+ax^3+3x^2$ همواره رو به بالا

است.

۸- نشان دهید که نقطه عطف تابع f با ضابطه $f(x)=x(x-6)^2$ وسط پاره خطی است که نقاط

ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع را به هم وصل می کند.

۹- در یکنوایی و مقادیر اکسترمم تابع f با ضابطه $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ بحث کنید. چرا در

$x=\pm 2$ مماس های عمود بر محور طول ها وجود دارند؟

۱۰- غلظت c یک داروی شیمیایی در جریان خون t ساعت پس از تزریق در ماهیچه مساوی

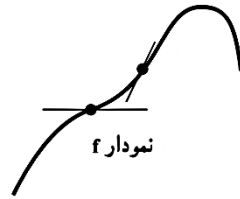
است با:

$$c = \frac{3t}{27+t^3}$$

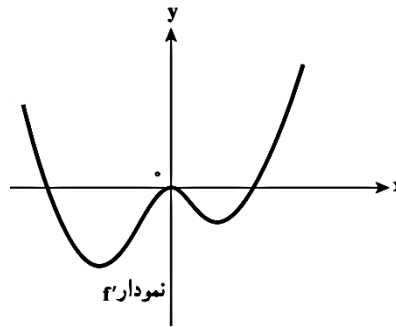
چه وقت غلظت ماکزیمم است؟

۱۱- یک تابع چند جمله ای از درجه ۳ بیابید که در $(2,4)$ ماکسیمم نسبی، در $(4,2)$ مینیمم

نسبی داشته باشد.



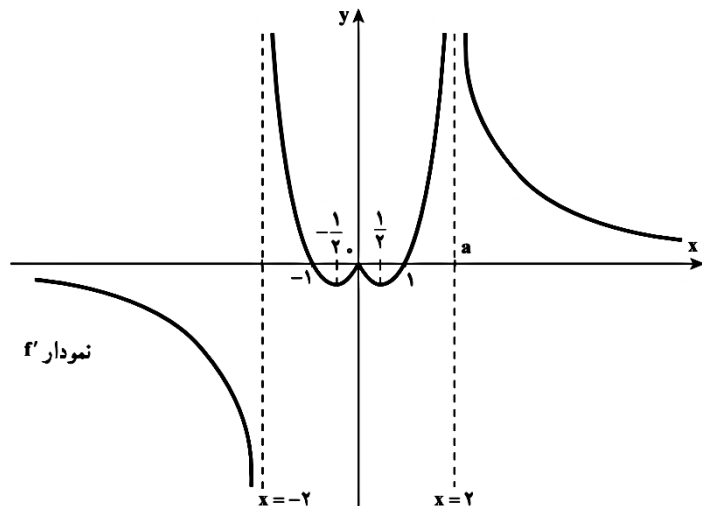
۱۲- شکل مقابل نمودار تابع f است در مورد مقادیر اکسترمم نسبی f' (تابع مشتق f) بحث کنید.



۱۳- شکل مقابل نمودار تابع مشتق، تابع f است تابع f چند نقطه عطف دارد؟ دلیل خود را بیان کنید.

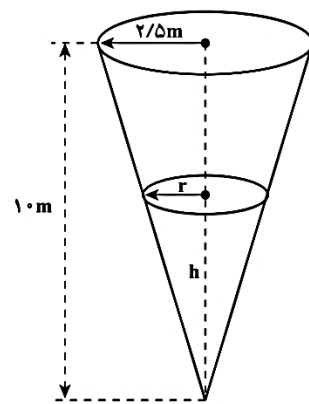
۱۴- تابع f با ضابطه $f(x) = xe^x$ را در نظر بگیرید با استفاده از هر نوع اطلاعاتی که می‌توانید از خود تابع و مشتق‌های اول و دوم آن به دست آورید، نمودار f را رسم کنید.

۱۵- نمودار تابع f' (تابع مشتق، تابع همواره پیوسته f) به شکل زیر می‌باشد. تابع f در چه نقاطی ماکسیمم نسبی و یا مینیمم نسبی دارد؟ و نقاط عطف تابع f را در صورت وجود مشخص کنید.



- ۱- جسمی با سرعت ۸ سانتی متر بر ثانیه به عدسی نزدیک می‌گردد، اگر نسبت فاصله‌های جسم و تصویر آن از عدسی $\frac{2}{\sqrt{2}}$ باشد، تصویر جسم با چه سرعتی و در کدام جهت تغییر می‌کند؟ (در عدسی‌های نازک رابطه $\frac{1}{s} + \frac{1}{S} = \frac{1}{f}$ برقرار است، که در آن s فاصله جسم از عدسی و S فاصله تصویر از عدسی و f فاصله کانونی عدسی است)
- ۲- مخزنی استوانه‌ای به شعاع ۳ متر را با آهنگ ۲ متر مکعب بر دقیقه از آب پر می‌کنند. ارتفاع آب با چه آهنگی بالا می‌آید؟
- ۳- شعاع کره‌ای با آهنگ ۳ میلی متر بر ثانیه بزرگ می‌شود. در لحظه‌ای که قطر کره ۶۰ میلی متر است، حجم کره با چه آهنگی افزایش می‌یابد.

- ۴- اگر ارتفاع بادبادک شما از زمین ۲۰ متر باشد و فاصله افقی آن از شما ۳۰ متر و با آهنگ ۸ متر در دقیقه به طور افقی از شما دور شود طول ریسمان با چه آهنگی افزایش می‌یابد؟



- ۵- آب با سرعت ۹ متر مکعب بر ساعت وارد منبعی می‌شود که نشستی دارد. این منبع به شکل مخروطی است که رأس آن به طرف پایین است و عمق آن ۱۰ متر و قطر قاعده آن ۵ متر است. وقتی عمق آب ۵ متر است، سطح آن با آهنگ ۱۸ سانتی متر بر ساعت بالا می‌رود، در این لحظه آب با چه آهنگی به خارج نشست می‌کند؟

۱- جدول رفتار و نمودار توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

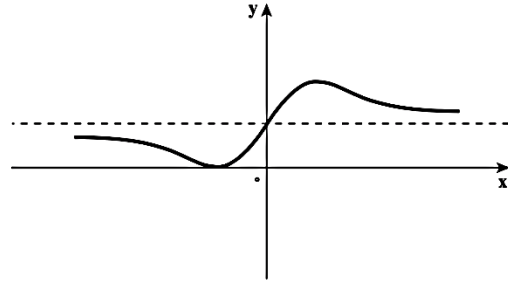
$$\text{الف) } y = \frac{x^2 - 4x + 8}{x - 2} \quad \text{ب) } y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 2x - 3}$$

$$\text{پ) } y = x + \sqrt{x^2 - 3x + 2} \quad \text{ت) } y = \sin x + \sqrt{3} \cos x, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

$$\text{ث) } y = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$$

۲- a و b را چنان اعدادی انتخاب کنید که نمودار تابع f با ضابطه $y = \frac{x^2 + ax + 1}{2x^2 + b}$ به صورت

زیر باشد.



سراسری ۹۵

۱۱۲- به ازای کدام مقادیر m خط به معادله $(m+2)y = mx$ موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y = \sqrt{1+x^2}$ است؟
 (۱) $m > -1$ (۲) $m < -1$ (۳) $m > 1$ (۴) $m < 1$

۱۱۸- خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = (x+2)e^{1-x}$ در نقطه $x=1$ با خطی که این نقطه تماس را به مبدأ مختصات وصل کند زاویه α می‌سازد. $\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $5/7$ (۲) 1 (۳) $5/7$ (۴) 2

۱۱۹- خط به معادله $y = 3x - 2$ در نقطه $x = 2$ بر منحنی پیوسته $y = f(x)$ مماس است. حاصل

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - 4f(x)}{x - 2}$$

کدام است؟

- (۱) 2 (۲) 6 (۳) 12 (۴) 15

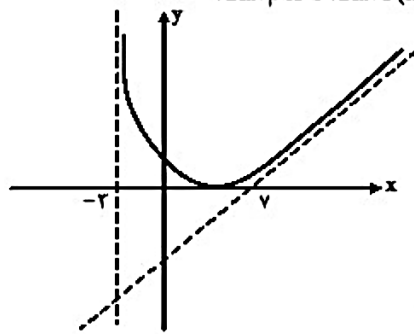
۱۲۰- طول نقطه عطف نمودار تابع $y = (\Delta - x)\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

- (۱) -1 (۲) صفر (۳) 1 (۴) 2

۱۲۱- در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{3}$ با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) 1 (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{2}$

۱۲۲- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع یا ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x + c}$ است. b کدام است؟



- (۱) 1
(۲) 4
(۳) 6
(۴) 9

۱۲۳- مقدار میانگین تابع $f(x) = \frac{x^2 - 2}{4}$ بر بازه $[2, 4]$ کدام است؟

خارج ۹۵

۱۱۲- به ازای کدام مقادیر m ، خط به معادله $y = (m-2)x + 3$ موازی یکی از خطوط مماس بر منحنی $y = \tan^{-1} \frac{1}{x}$ است؟

- (۱) $0 < m < 1$ (۲) $0 < m < 2$ (۳) $1 < m < 2$ (۴) $2 < m < 3$

۱۱۷- به ازای کدام مقدار a خط به معادله $y = -3x + 2$ بر منحنی به معادله $y = \frac{x^2 + a}{x - 2}$ مماس است؟

- (۱) -1 (۲) صفر (۳) 1 (۴) 2

۱۱۸- امتداد خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{3}$ با نیمساز ربع سوم زاویه α می‌سازد.

$\tan \alpha$ کدام است؟

- (۱) $0/15$ (۲) $0/2$ (۳) $0/25$ (۴) $0/3$

۱۱۹- تابع f در $x=2$ مشتق‌پذیر است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{3}{2}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در

$x=2$ کدام است؟

- (۱) $2/5$ (۲) 3 (۳) $2/5$ (۴) 4

۱۲۰- طول نقطهٔ ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $y = (x-1)^2 \sqrt{x^2}$ ، کدام است؟

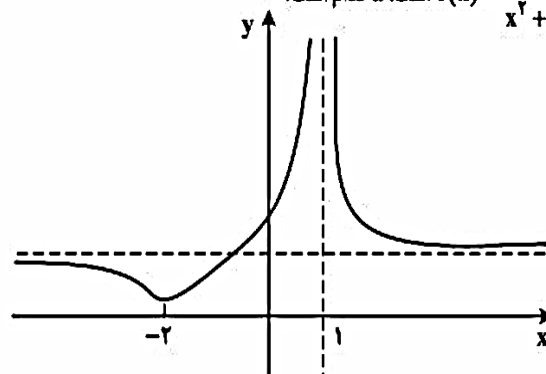
- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{2}{3}$

۱۲۱- اندازهٔ زاویه حادهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه با سرعت ثابت $\frac{1}{30}$ رادیان بر ثانیه کاهش می‌یابد. اگر طول وتر آن ثابت و

برابر 10 واحد باشد. وقتی اندازهٔ این زاویه حاده به $\frac{\pi}{6}$ برسد. سرعت تغییر مساحت مثلث قائم‌الزاویه، کدام است؟

- (۱) 1 (۲) $1/25$ (۳) $1/5$ (۴) $1/75$

۱۲۲- شکل زیر، نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + a}{x^2 + bx + c}$ است. a کدام است؟



(۱) -2

(۲) 1

(۳) 2

(۴) 3

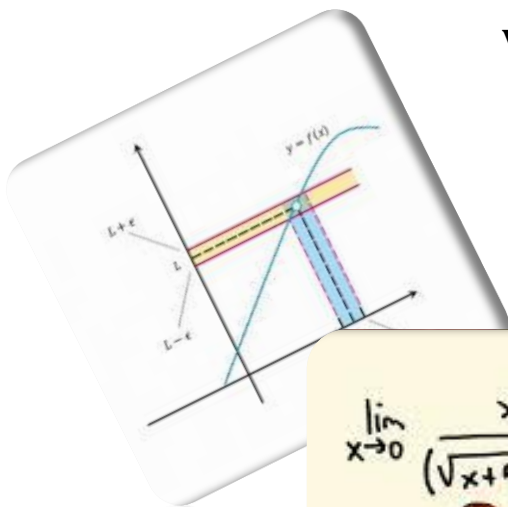
فصل چهارم

انتگرال

تعداد تست: ۴۳

تعداد مثال: ۲۷

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\sqrt{x+9} - 3)} \cdot \frac{(\sqrt{x+9} + 3)}{(\sqrt{x+9} + 3)}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+9} + 3)}{(\sqrt{x+9} - 3)(\sqrt{x+9} + 3)}$$

Hands pointing to the equation on a piece of paper.



نکته: از نماد سیگما برای راحتی کار در نحوه نوشتن جمع دنباله‌ای از عبارات استفاده می‌شود. برای مثال می‌نویسیم:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i}$$

نکته: در حالت کلی برای عدد طبیعی n داریم:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{i=1}^n i &= 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, & 2) \sum_{i=1}^n i^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ 3) \sum_{i=1}^n i^3 &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, & 4) \sum_{i=1}^n (f(i) + g(i)) &= \sum_{i=1}^n f(i) + \sum_{i=1}^n g(i) \\ 5) \sum_{i=1}^n k &= nk, & 6) \sum_{i=m}^n i &= \sum_{i=0}^{n-m} (i+m), & 7) \sum_{i=m}^n (f(i+1) - f(i)) &= f(n+1) - f(m) \end{aligned}$$

مثال ۱: در صورت امکان عبارات زیر را ساده کنید.

$$\sum_{i=1}^n (i+1)^2 =$$

$$\sum_{i=3}^1 i(2i-1) =$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{j^2}{n^3} =$$

مثال ۲: عبارت $\sum_{i=3}^{17} \sqrt{1+i^2}$ را به صورت $\sum_{i=1}^n f(i)$ بنویسید.
عبارت $\sum_{i=a+1}^{12} f(b+i)^3$ را به صورت $\sum_{i=1}^n f(i)$ بنویسید.

مثال ۳: جمع‌های زیر را با استفاده از نماد Σ بنویسید.

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 100x^{99}$$

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{10}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{n}{2^n}$$



نکته: در حالت کلی برای عدد طبیعی n داریم:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

مجموع ۲۴ جمله‌ی اول از سری $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}}$ برای کدام است؟

۰/۹ (۴)

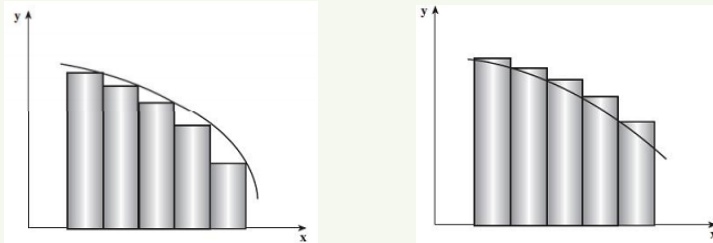
۰/۸۵ (۳)

۰/۸ (۲)

۰/۲۵ (۱)



محاسبه مساحت به عنوان حد مجموع: یکی از روش‌ها برای محاسبه سطح زیر یک منحنی، تقسیم کردن ناحیه زیر منحنی به مستطیل‌هایی است که بتوانیم به کمک آن‌ها مساحت این ناحیه را بیابیم. به نمودارهای زیر توجه کنید:



مشاهده می‌شود در هر یک از شکل‌های فوق با مقداری خطا رو به رو خواهیم شد. حال اگر تعداد این تقسیمات را زیاد کنیم می‌توانیم به میزان قابل قبولی از خطا برسیم که قابل صرف نظر کردن است. حال به دنبال یافتن یک رابطه کلی برای محاسبه مساحت زیر سطح منحنی‌ها هستیم. تابع f را به صورت مقابل در نظر می‌گیریم و فرض کنیم خواهیم مساحت زیر سطح آن و محدود به محور x ها و خطوط $x = a, x = b$ را محاسبه کنیم.

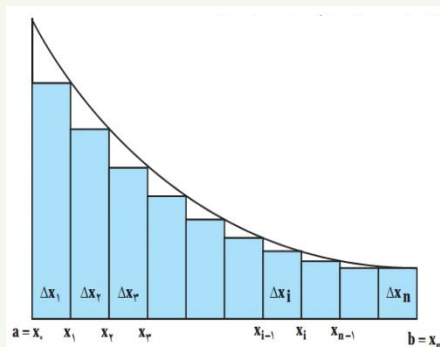
در نمودارهای فوق اگر همه تقسیمات را برابر Δx در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}, x_i = a + i\Delta x = a + \frac{i}{n}(b-a)$$

حال مجموع مساحت‌های همه مستطیل‌های فوق را می‌توانیم به شکل زیر نشان دهیم:

$$S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x$$

حال اگر تعداد تقسیمات فوق یعنی n را به بی‌نهایت میل دهیم، تقریباً به مساحت مطلوب (A) دست یافته‌ایم. $A = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$:



مساحت زیر منحنی $y = 3x + 1$ و بالای محور x ها و محدود به خطوط $x = 3, x = 0$ را بیابید. **مثله ۴:**

مساحت زیر منحنی $y = x^2 - 3$ و بالای محور x ها و محدود به خطوط $x = 2, x = 0$ را بیابید. **مثله ۵:**

مساحت زیر منحنی $y = 3x + 4$ و بالای محور x ها و محدود به خطوط $x = 2, x = -1$ را بیابید. **مثله ۶:**

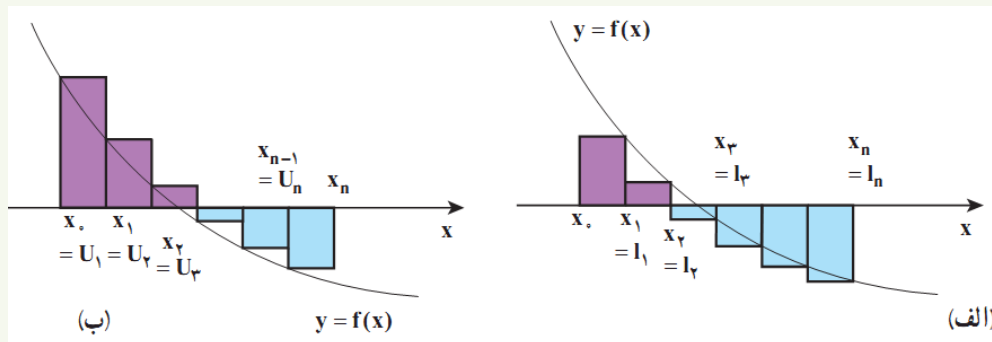
مساحت بالای $y = x^2 - 1$ و زیر محور $y = 0$ را بیابید. **مثله ۷:**



انتگرال معین:

مجموع بالا و پایین تابع f و محدوده $[a, b]$ را برای تناسبه مساحت زیر سطح آن در نظر می‌گیریم. فرض کنیم مجموعه‌ای از اعداد حقیقی $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ داشته باشیم به طوری که $x_n = b, x_0 = a, \Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n}$. فرض کنیم تابع f یک تابع نزولی به شکل زیر باشد و u_i ها اضلاع مستطیل‌های بزرگ (شکل ب) و l_i ها اضلاع مستطیل‌های کوچک (شکل الف) باشند. در این صورت برای هر بازه نظیر $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ خواهیم داشت $f(u_i) \leq f(x) \leq f(l_i)$.

به عبارت $U_n = \Delta x \sum_{i=1}^n f(u_i)$ مجموع بالا و به $L_n = \Delta x \sum_{i=1}^n f(l_i)$ مجموع پایین می‌گوییم.



نکته ۲: دیدیم که اگر تابع نزولی باشد $u_1 = x_0, u_2 = x_1, \dots, u_n = x_{n-1}$ و همچنین $l_1 = x_1, l_2 = x_2, \dots, l_n = x_n$ در توابع صعودی این موضوع برعکس است، یعنی $u_1 = x_1, u_2 = x_2, \dots, u_n = x_n$ و $l_1 = x_0, l_2 = x_1, \dots, l_n = x_{n-1}$.

مثال ۸: مجموع بالا و پایین را برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ بر بازه $[1, 3]$ برای $n = 4$ بیابید.

مثال ۹: مجموع بالا و پایین را برای تابع $f(x) = x^2 + 1$ بر بازه $[0, 3]$ برای $n = 3$ بیابید.

تست ۲: مجموعه بالای تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in Q \\ 0 & , x \notin Q \end{cases}$ در بازه $[-1, 1]$ چقدر بیشتر از مجموع پایین آن است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

تست ۳: تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x & ; \text{گویا } x \\ 2 & ; \text{گنگ } x \end{cases}$ بر بازه $[0, 3]$ مفروض است. افرازی از این بازه را در نظر بگیرید که در آن به سه قسمت مساوی تقسیم کند. $U_3(f)$ در بازه $[0, 3]$ کدام است؟

تست ۳

سراسری ۸۶

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)

تست ۴: در محاسبه تقریبی $\int_0^1 \frac{x}{x+1} dx$ ، مجموع پایین ریمان برای $n = 4$ کدام است؟

تست ۴

سراسری ۸۸

۱۱۳ (۴)
۴۲۰۵۹ (۳)
۲۱۰۶۱ (۲)
۲۱۰۱۰۱ (۱)
۴۲۰

تعریف: تابع f بر بازه $[a, b]$ انتگرال پذیر است، هرگاه حد مجموع‌های عددی بالا و پایین این تابع هر دو به یک عدد نظیر A همگرا باشند. در این صورت می‌توانیم انتگرال از a تا b تابع $f(x)$ برابر A است و می‌نویسیم $A = \int_a^b f(x) dx$.



مشق ۱۰: نشان دهید تابع $f(x) = x^2 - 1$ بر بازه $[0, a]$ انتگرال پذیر است.

مشق ۱۰

مثال ۱۱: $\int_0^a x dx$ را که در آن $a > 0$ ، محاسبه کنید.

مثال ۱۲: تابع f را بر بازه $[-1, 1]$ چنین تعریف می‌کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ 1-x, & x < 0 \end{cases}$$

ثابت کنید $\int_{-1}^1 f(x) dx$ وجود دارد و مقدار آن را به دست آورید. (نمودار تابع را رسم کنید).

مثال ۱۳: تابع f بر بازه $[0, 1]$ چنین تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ثابت کنید انتگرال معین $\int_0^1 f(x) dx$ وجود ندارد.

قهویه ۱: هر تابع پیوسته بر یک بازه بسته، انتگرال پذیر است.

نتیجه: برای محاسبه انتگرال یک تابع پیوسته، کافیت فقط حد یکی از دنباله‌های $\{U_n\}$ یا $\{L_n\}$ را محاسبه کنیم.

قهویه ۲: هرگاه تابع f بر $[a, b]$ پیوسته باشد و m و M به ترتیب مقادیر ماکسیمم و مینیمم مطلق f بر این بازه باشند، آنگاه

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$



اثبات:



قضیه ۳: برای هر تابع انتگرال پذیر f داریم $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

قضیه ۵: اگر f و g دو تابع انتگرال پذیر بر بازه $[a, b]$ باشند و برای هر $a \leq x \leq b$ داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$ آن گاه داریم:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

قضیه ۴: اگر f و g دو تابع انتگرال پذیر بر بازه $[a, b]$ و اعداد حقیقی c_1 و c_2 داریم

$$\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x)) dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx$$



قضیه ۶: (قضیه مقدار میانگین در انتگرالها) هر گاه تابع f بر $[a, b]$ پیوسته باشد، نقطه‌ای مانند $c \in [a, b]$ هست به طوری که

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$$

اثبات:



قضیه ۷: (قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال) فرض کنیم تابع f بر بازه I شامل عدد حقیقی a پیوسته باشد، در این صورت داریم:

الف) اگر تابع F را بر I با ضابطه $F(x) = \int_a^x f(t) dx$ تعریف کنیم، آن گاه تابع F مشتق پذیر است و $F'(x) = f(x)$ ، یعنی تابع اولیه

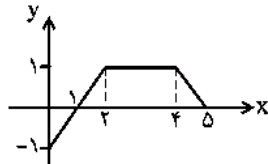
$$f \text{ است. به عبارت دیگر: } \frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dx \right) = f(x)$$

ب) اگر G تابع اولیه دیگری برای f باشد که $G'(x) = f(x)$ ، آن گاه برای هر دو نقطه $a, b \in I$ داریم:

$$\int_a^b f(t) dx = G(b) - G(a)$$

تست ۵:

اگر نمودار تابع f شکل مقابل باشد و $F' = f$ و $F(0) = 1$ آن گاه $F(5)$ کدام است؟



$\frac{11}{2}$ (۳)
 $\frac{5}{2}$ (۴)

$\frac{7}{2}$ (۱)
 $\frac{3}{2}$ (۲)

فرمول‌های انتگرال گیری:

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c \quad (r \neq -1), \quad \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} = \ln|x| + c, \quad \int a dx = ax + c \quad ۱.$$

$$\int (f \pm g) dx = \int f dx \pm \int g dx, \quad \int c f dx = c \int f dx \quad ۲.$$



مثال ۱۴: حاصل را بیابید.

$\int x^3 dx =$, $\int 3 dx =$, $\int (x+5) dx =$, $\int 5x^2 dx =$

$\int \frac{x^2}{5} dx =$, $\int \left(4 - \frac{1}{x}\right) dx =$, $\int \frac{x^4 + 3x}{x} dx =$

$\int (2x+1)^2 dx =$, $\int \frac{4x-3}{x} dx =$

تست ۶:

حاصل $f(x) = \int \sqrt{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[4]{x} dx$ کدام است؟

$\frac{24}{21}$ (۴)

$\frac{24}{51}$ (۳)

$\frac{24}{31}$ (۲)

$\frac{24}{41}$ (۱)

تست ۷:

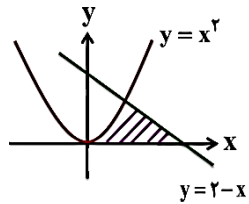
مساحت ناحیه‌ی محصور بین نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \begin{cases} x, & -2 \leq x \leq 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ محور x ها و دو خط $x = -2$ و $x = 3$ کدام است؟

۹ (۲)

۸ (۱)

۱۱ (۴)

۱۰ (۳)



با توجه به شکل زیر، مساحت ناحیه‌ی سایه زده چقدر است؟

(۱) $\frac{4}{3}$

(۲) $\frac{7}{6}$

(۳) $\frac{5}{6}$

(۴) $\frac{2}{3}$

نکته: برای محاسبه انتگرال‌های معین شامل قدر مطلق و جزء صحیح، ابتدا انتگرال را به بازه‌های به طول مناسبه افراز می‌کنیم.



تست ۹: مقدار $\int_{\frac{7\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} [\cos x] dx$ کدام است؟

(۱) صفر

(۲) $\frac{7\pi}{12}$

(۳) $-\frac{\pi}{4}$

(۴) $-\frac{7\pi}{12}$

تست ۱۰: مقدار انتگرال معین $\int_{-1}^3 (x + [x]) dx$ کدام است؟

(۱) ۵

(۲) ۵/۵

(۳) ۶

(۴) ۶/۵

تست ۱۱: حاصل $\int_0^3 x^2 [x] dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{55}{3}$

(۲) ۱۵

(۳) $\frac{26}{3}$

(۴) $\frac{49}{3}$

تست ۱۲: حاصل $\int_{-1}^1 (1 - [x]) \cos \frac{\pi}{4} x dx$ چند برابر $\frac{1}{\pi}$ است؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۲

(۴) ۶

سراسری ۸۵

تست ۱۳: حاصل $\int_{-2}^1 (x[x] - 1) dx$ کدام است؟
سراسری ۸۷

- (۱) ۳ (۲) ۴/۵ (۳) ۵ (۴) ۵/۵

تست ۱۴: حاصل $\int_1^{16} [\sqrt{x}] dx$ ، کدام است؟ (نماد [] به مفهوم جزء صحیح است).
سراسری ۹۳

- (۱) ۳۰ (۲) ۳۱ (۳) ۳۲ (۴) ۳۴

تست ۱۵: حاصل انتگرال $\int_0^4 \left[\frac{x}{2} \right] \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx$ کدام است

- سراسری ۹۴
(۱) $4 - 2\sqrt{2} - \ln 2$ (۲) $4 - 2\sqrt{2} + \ln 2$ (۳) $2 + \sqrt{2} - \ln 2$ (۴) $2 - \sqrt{2} + \ln 2$

تست ۱۶: حاصل انتگرال $\int_0^2 \frac{x^2 - [x]}{x+1} dx$ ، کدام است؟

- خارج ۹۴
(۱) $\ln 2$ (۲) $1 - \ln 2$ (۳) $\frac{1}{3} + \ln 2$ (۴) $1 + \ln 2$

تست ۱۷: حاصل $\int_0^9 |\sqrt{x} - 2| dx$ ، کدام است؟

- خارج ۹۳
(۱) صفر (۲) $\frac{8}{3}$ (۳) ۴ (۴) $\frac{16}{3}$

تست ۱۸:

حاصل انتگرال $\int_1^4 \sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + 1} dx$ کدام است؟

سراسری ۹۲

۷ (۴)

۶ (۳)

۵ (۲)

۴ (۱)



$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c \quad \text{و} \quad \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c \quad ۳$$

مثال ۱۵: حاصل را بیابید.

$$\int (\sin 5x + \cos 2x) dx =$$

$$\int (x - \sin 3x) dx =$$

$$\int (x^7 + 4 \cos x + 2) dx =$$

$$\int \sin^2 x dx =$$

تست ۱۹:

حاصل $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ کدام است؟

$\frac{\pi-3}{8}$ (۴)

$\frac{\pi-2}{8}$ (۳)

$\frac{4-\pi}{8}$ (۲)

$\frac{\pi}{8}$ (۱)

تست ۲۰:

با شرط $x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}$ حاصل $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$ ، کدام است؟

تجربی ۹۲

$-\sin x - \cos x + c$ (۴)

$-\sin x + \cos x + c$ (۳)

$\sin x - \cos x + c$ (۲)

$\sin x + \cos x + c$ (۱)

تست ۲۱:

با شرط $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ حاصل $\int \sqrt{1 + \tan^2 x} \sin 2x dx$ ، کدام است؟

خارج ۹۲

$2 \sin x + c$ (۴)

$2 \cos x + c$ (۳)

$-2 \sin x + c$ (۲)

$-2 \cos x + c$ (۱)

تست ۲۲: حاصل $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ کدام است؟

$\frac{\pi-3}{8}$ (۴)

$\frac{\pi-2}{8}$ (۳)

$\frac{3-\pi}{8}$ (۲)

$\frac{\pi}{8}$ (۱)

تست ۲۳: سطح محدود به منحنی تابع با ضابطه $f(x) = 2 \sin x \cos 2x$ و محور x ها در بازه $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ کدام است؟

$\frac{1}{8}$ (۴)

$\frac{3}{8}$ (۳)

$\frac{1}{4}$ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

سراسری ۸۷

تست ۲۴: حاصل $\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx$ ، کدام است؟

1 (4)

2 (3)

$2\sqrt{2}$ (2)

1 صفر

سراسری ۸۸

تست ۲۵: مساحت زیر منحنی $y = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ و بالای محور x ها در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ کدام است؟

$2\sqrt{3}$ (۴)

$2\sqrt{3} - 1$ (۳)

$4 - \sqrt{3}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

سراسری ۸۹

$\int (1 + \cot^2 ax) dx = -\frac{1}{a} \cot ax + c$ ، $\int (1 + \tan^2 ax) dx = \frac{1}{a} \tan ax + c$. ۸

$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + c$. ۹

$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + c \Rightarrow \int \tan ax dx = -\ln|\cos ax| + c$ ، $\int \cot ax dx = \ln|\sin ax| + c$. ۵



مثال ۱۶: حاصل را بیابید.

$$\int (\sqrt{x} + \tan^2 x) dx =$$

$$\int \sqrt{x} (1 + \cot^2 3x) dx =$$

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 2e^{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) dx =$$

$$\int \frac{3 + e^{\sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}}} dx =$$

$$\int_1^2 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + e^{-x}) dx =$$

$$\int \left(\frac{2}{x} - e^{4x} \right) dx =$$

مثال ۲۶: حاصل $\int \ln^2 e^{\sqrt{x}} dx$ کدام است؟

۴ (۴)

۲ (۳)

$\frac{3}{2}$ (۲)

۱ (۱)

مثال ۲۷: حاصل $\int_1^2 (e^x - e^{-x})^2 dx$ کدام است؟

$\frac{e^2 + 2e - 1}{2e}$ (۴)

$\frac{e^2 - 2e - 1}{2e}$ (۳)

$\frac{e^2 - 2e - 1}{2e}$ (۲)

$\frac{e^2 + 2e - 1}{2e}$ (۱)

نکته: $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + c$, $\int \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} = -\cos^{-1} u + c$, $\int \frac{u'}{1+u^2} = \tan^{-1} u + c$, $\int \frac{-u'}{1+u^2} = \cot^{-1} u + c$



مثال ۱۷: حاصل را بیابید.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx =$$

$$\int \frac{-3x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx =$$

مثال ۲۸: اگر $F(x) = \int \frac{2x + \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$ ، با شرط $F(0) = 0$ مقدار $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{2}}{12}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

$\frac{5}{4}$ (۲)

$\frac{5\pi}{12}$ (۱)

سراسری ۸۸



تعریف: برای تابع دلخواه f مقدار میانگین یا متوسط تابع بر بازه $[a, b]$ را به صورت مقابل تعریف می‌شود: $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

مثال ۱۸: مقدار میانگین تابع $f(x) = e^{-x}$ را بر بازه $[0, 1]$ به دست آورید.

مثال ۱۹: مقدار میانگین تابع $f(x) = e^{-x} + \cos x$ را بر بازه $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ به دست آورید.

مثال ۲۰: مقدار میانگین تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ را بر بازه $[0, \pi]$ حساب کنید.

تست ۲۹: با توجه به شکل مقابل اگر مساحت دو ناحیه سایه زده با هم برابر باشند، عدد C کدام است؟

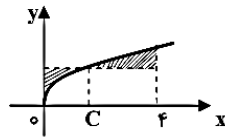
سراسری ۸۶

۱) $2\sqrt{3}$
۲) ۲
۳) $3\sqrt{2}$
۴) ۵

تست ۳۰: با استفاده از قضیه مقدار میانگین برای انتگرال‌ها، به ازای کدام مقدار C مساحت دو ناحیه سایه زده شکل مقابل، برابرند؟

سراسری ۸۷

۱) $\frac{5}{3}$
۲) $\frac{7}{3}$
۳) $\frac{9}{4}$
۴) $\frac{16}{9}$

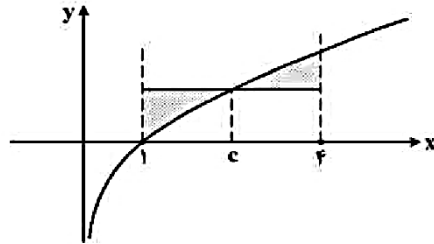


در شکل زیر، مساحت دو ناحیه سایه زده برابرند، کدام است C؟

- سراسری ۹۲
- (۱) $\frac{4}{3}$
(۲) $\frac{16}{9}$
(۳) 2
(۴) $\frac{9}{4}$

تست ۳۱:

در شکل روبه‌رو، نمودار تابع $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ رسم شده است. اگر مساحت دو ناحیه سایه زده برابر باشند،



کدام است f(c)؟

- خارج ۹۴
- (۱) $\frac{7}{9}$
(۲) $\frac{5}{6}$
(۳) $\frac{8}{9}$
(۴) $\frac{4}{3}$

تست ۳۲:

میانگین تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$ ، بر بازه $[1, 3]$ ، کدام است؟

(۴) $\frac{5}{4}$

(۳) $\frac{4}{3}$

(۲) $3 - \ln 3$

(۱) $2 - \ln \sqrt{3}$

خارج ۹۳

تست ۳۳:



نکته ۳: فرض کنیم f بر $[-a, a]$ انتگرال پذیر باشد. در این صورت:

$$\int_{-a+b}^{a+b} f(x-b) dx = 0 \quad (\text{الف})$$

با اگر f تابعی زوج باشد $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ یا اگر f تابعی فرد باشد $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

نکته ۴: برای هر تابع انتگرال پذیر بر بازه $[a, b]$ نظیر f خواهیم داشت $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$.

مثال ۲۱: حاصل را بیابید.

$$\int_{-2}^2 (x^2 \sin x) dx =$$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{x + \sin x}{\tan x} \right) dx =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{x}{4} dx =$$

$$\int_{-3}^3 (|x| + 6) dx =$$

مساحت ناحیه محدود به منحنی تابع با ضابطه $y = (1 + \sin 2x) \cos x$ و محور x و دو خط به معادلات $x = -\frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟

تست ۳۴:

سراسری ۸۶

۱ (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) ۲ (۳) $1 + \sqrt{3}$ (۴)

مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $y = x^2 |x|$ و خط به معادله $y = 8$ ، کدام است؟

تست ۳۵:

سراسری ۹۳

۱۶ (۱) ۱۸ (۲) ۲۲ (۳) ۲۴ (۴)

مساحت زیر منحنی $y = \sin 2x (1 + \cos^2 x)$ در بازه $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ و محدود به محور x کدام است؟

تست ۳۶:

سراسری ۹۰

۱ (۱) ۲ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $\frac{5}{4}$ (۴)

مساحت ناحیه محدود به منحنی تابع با ضابطه $y = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$ و محور x و دو خط به معادلات $x = -\frac{\pi}{3}$ و $x = \frac{\pi}{3}$ کدام است؟

تست ۳۷:

سراسری ۹۱

۱ (۱) $2\sqrt{3} - 2$ (۲) $\sqrt{3} + 1$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴)

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a} + c$$

نکته: در حالت کلی داریم:



مثال ۲۲: حاصل را بیابید.

$$\int (3x+1)^5 dx =$$

$$\int (1-5x)^3 dx =$$

مثال ۲۸: اگر $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}} = A(2x+1)^k$ باشد، کدام است A؟

- (۱) $\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{4}{3}$
(۳) $\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{3}{4}$

مثال ۲۳:

انتگرال‌های معین ۱-۹ را محاسبه کنید:

۱- $\int_1^e x^x dx$

۲- $\int_0^1 \sqrt{x} dx$

۳- $\int_0^\pi (1 + \sin t) dt$

۴- $\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{dx}{x}$

۵- $\int_{-\frac{1}{e}}^{-1} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) dx$

۶- $\int_1^e \left(\frac{2}{x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx$

۷- $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$

۸- $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin x| dx$

۹- $\int_{-\pi}^{\pi} e^x dx$

مثال ۲۴:

انتگرال‌های معین زیر را محاسبه کنید.

$\int_0^1 x\sqrt{x} dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \tan x) dx$

$\int_0^1 |\sqrt{x}-1| dx$

$\int_0^1 |3x-1|[3x] dx$

مثال ۲۵: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

$$\int \sin 4x \cos 2x dx$$

$$\int \frac{x^2 + \sqrt{x} + 1}{2x^2} dx$$

$$\int \frac{1 + e^{2x}}{e^x} dx$$

$$\int \sqrt{(1 - \sqrt{x})^2 + 4\sqrt{x}} dx$$

مثال ۲۶: انتگرال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{(x+2)^2}{x} dx$

ب) $\int \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x}} dx$

نکته: در حالت کلی داریم: $\frac{d}{dx} \left(\int_{f(x)}^{g(x)} h(t) dt \right) = g'(x)h(g(x)) - f'(x)h(f(x))$



مثال ۲۷: مشتق بگیرید.

$$\left(\int_1^{x^2} (4t-1) dt \right)' = \left(\int_{\sqrt{x}}^1 (\sin t - t) dt \right)'$$

$$\left(x^2 \int_1^{x-1} \left(\frac{e^{\sin t}}{\cos t} \right) dt \right)'$$

مثال ۲۸: اگر $\int_a^x f(t) dt = 2x^2 - 8$ باشد، آنگاه مقدار مثبت عدد ثابت a کدام است؟

۱) ۴

۲) $\sqrt{2}$

۳) ۲

۴) ۱

تست ۴۰: اگر $f(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\tan x} \frac{(t-1)dt}{t^2+2t+3}$ مقدار مشتق $f(x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ کدام است؟

سراسری ۸۵

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{4}{3}$

تست ۴۱: اگر $F(x) = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{1-t^2}$ مقدار $F''(\frac{\pi}{6})$ کدام است؟

سراسری ۹۰

- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{4}$

تست ۴۲: اگر $f(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+t^3}$ معادله مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول ۱ واقع بر آن کدام است؟

سراسری ۹۱

- (۱) $y=2x-2$ (۲) $y=2x-1$ (۳) $2y=x-2$ (۴) $2y=x-1$

تست ۴۳: اگر $G(x) = x^2 \int_2^{\sqrt{x}} \frac{\ln(t+2)}{t^2}$ باشد، $G'(4)$ چند برابر $\ln 2$ است؟

سراسری ۹۴

- (۱) ۱ (۲) $1/5$ (۳) ۲ (۴) ۳

سؤالات امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته : ریاضی فیزیک	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۵۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :	دوره ی پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان : ۱۳۹۵/۳/۹	تعداد صفحه : ۱
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خردادماه سال ۱۳۹۵		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://acc.medu.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

توجه : استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی ، جذر و درصد) بلامانع است.		
۱	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید : الف) کسر گویای مساوی با عدد اعشاری $0/234$ برابر است با ب) حد دنباله $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ برابر می شود. ج) طبق اصل موضوع تمامیت در باب اعداد حقیقی، یک مجموعه ناتهی از اعداد حقیقی که دارای کران بالا باشد دارای است. د) از جمله شماره به بعد ، فاصله جملات دنباله $a_n = \frac{n+1}{n+3}$ تا 1 کمتر از $\frac{1}{20}$ می شود.	۲
۲	به کمک تعریف دنباله ای حد ، ثابت کنید تابع $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ در نقطه صفر حد ندارد.	۲
۳	هزینه ساخت x ماشین لباسشویی $c(x)$ تومان است که در آن $c(x) = 7000000 + 400000x - 400x^2$ می باشد. هزینه تولید ۱۰۱ امین ماشین لباسشویی چقدر است و معنی آن را توضیح دهید.	۱
۴	با استفاده از تعریف مشتق ، نشان دهید مبداءمختصات یک گوشه برای تابع زیر می باشد و اندازه زاویه ایجاد شده در گوشه را به دست آورید. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$	۱/۵
۵	ضابطه تابع درجه دوم f را چنان انتخاب کنید که $f(2) = 7$ و $f'(2) = 8$ و $f''(2) = 6$ باشد.	۱/۵
۶	مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $y = \ln(\sqrt{x^2 + 2})$ ب) $y = e^{2x} \sin \pi x$	۱/۷۵
۷	معادله خط مماس بر نمودار $x^2 + y^2 = 4xy - 3$ را در نقطه $(1, 2)$ بنویسید.	۱/۲۵
۸	نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = \sin^2 x + 2\cos x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ به دست آورید.	۲
۹	بالنی را از هوا پر می کنیم به طوری که حجم آن با آهنگ ۵۰ سانتی مترمکعب بر ثانیه افزایش می یابد ، وقتی شعاع بالن ۱۰ سانتی متر است ، شعاع بالن با چه آهنگی افزایش می یابد؟	۱
۱۰	جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ را رسم کنید.	۲
۱۱	محاسبه $\sum_{k=1}^{20} (2k^2 - 3)$ را انجام دهید.	۱/۵
۱۲	مشتق تابع $F(x) = \int_0^x e^{2t} dt$ را به دست آورید.	۰/۷۵
۱۳	انتگرال های معین و نامعین زیر را بیابید. الف) $\int (\sin 2x - 3 \cos 5x + \frac{1}{x}) dx$ ب) $\int_0^1 [2x] dx$	۱/۷۵
۲۰	موفق باشید	جمع نمره

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته : ریاضی فیزیک	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۵۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :	دوره پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان : ۱۳۹۵/۶/۶	تعداد صفحه : ۱
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزادسراسر کشور در نوبت شهریور ماه سال ۱۳۹۵		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

توجه : استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی ، جذر و درصد) بلامانع است.		
۱	در بازه متقارن $(2, 8)$ ، نقطه میانی و شعاع بازه را بیابید.	۱
۲	به روش ϵ ثابت کنید دنباله $\left\{ \frac{6n+1}{2n} \right\}_{n=1}$ به عدد ۳ همگراست.	۱
۳	با استفاده از قضیه بولزانو ثابت کنید معادله $-x^6 - 2x^3 + 1 = 0$ در بازه $[0, 1]$ جواب دارد.	۱
۴	مجاذب مایل نمودار تابع $y = \frac{2x^2 - x + 4}{x + 1}$ را در صورت وجود بیابید.	۱
۵	آهنگ تغییر حجم کره ای به شعاع r را نسبت به r وقتی که $r = 3$ است بیابید.	۱
۶	تابع f در نقطه a پیوسته است ثابت کنید تابع $g(x) = (x-a)f(x)$ در نقطه a مشتق پذیر است.	۱
۷	درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید: الف) اگر تابع f در a مشتق پذیر باشد آنگاه در a پیوسته است. ب) نقطه $x = 0$ یک نقطه گوشه برای تابع $f(x) = x $ است. ج) اگر تابع f زوج و مشتق پذیر باشد آنگاه تابع مشتقش نیز زوج است.	۰/۷۵
۸	از نقطه $A(4, 8)$ دو خط مماس بر منحنی $f(x) = x^2 - x$ رسم شده است . معادلات این دو خط مماس را بیابید.	۱/۵
۹	مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). الف) $y = \ln \sin 2x $ ب) $x^3 + y^5 - 3x^2y = 0$	۱/۷۵
۱۰	فرض کنید $f(x) = x^3 - 8$ ، مقدار $(f^{-1})'(0)$ را در صورت وجود، بیابید.	۱
۱۱	مجموع دو عدد مثبت برابر 20 است ، بزرگترین مقدار ممکن برای حاصلضرب آن ها را پیدا کنید.	۱/۵
۱۲	در تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، a ، b و c را طوری بیابید که نقطه $(-1, 1)$ مینیمم نسبی آن باشد و منحنی تابع از نقطه $(2, 2)$ بگذرد.	۱/۵
۱۳	جدول رفتار و نمودار تابع $y = x^3 - 3x$ را رسم کنید.	۲
۱۴	با استفاده از افرازشهای مناسب، مساحت ناحیه ای را بیابید که تحت خط مستقیم به معادله $y = 3x + 1$ بوده و محدود به خطوط $x = 0$ و $x = 2$ می باشد.	۱/۵
۱۵	بدون محاسبه انتگرال ، کران بالا و پایینی برای $\int_1^3 (x^2 - 3x^2 + 1) dx$ بیابید.	۱
۱۶	انتگرال های معین و نامعین زیر را بیابید.	۱/۵
	الف) $\int (e^{3x} + x^5) dx$ ب) $\int_0^{\pi} \cos x dx$	
۲۰	جمع نمره	موفق باشید

سؤالات امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته : ریاضی فیزیک	ساعت شروع : ۱۰ صبح	مدت امتحان : ۱۵۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :	دوره پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان : ۱۳۹۵/۱۰/۱۱	تعداد صفحات : ۱
دانش آموزان بزرگسال و داوطلبان آزادسراسر کشور در نوبت دی ماه سال ۱۳۹۵		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

توجه : استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی ، جذر و درصد) بلامانع است.

۱	اگر اشتراک دو بازه $(2, 5)$ و $(\frac{3}{4}, 4)$ یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع r باشد، مقدار a و r را بیابید.	۱
۲	در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید: الف) حد دنباله $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{2n}$ برابر است. ب) اگر دنباله $\{a_n\}$ که چنین تعریف شده است: $a_1 = 1$ و $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ همگرا باشد، آنگاه حد دنباله $\{a_n\}$ برابر است.	۱
۳	یکنوایی و کرانداری دنباله $\left\{ \frac{(-1)^n}{n+2} \right\}$ را بررسی کنید.	۱
۴	به کمک تعریف دنباله‌ای حد، ثابت کنید تابع $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ در $x = 0$ حد ندارد.	۱/۵
۵	حدهای توابع رو به رو را محاسبه کنید: الف) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+9x}-1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-1}$	۱/۵
۶	حجم آب یک منبع آب، t دقیقه پس از شروع تخلیه، بر حسب لیتر برابر است با: $v(t) = 250(16-t)^2$ ، آهنگ لحظه‌ای تخلیه آب بعد از ۴ دقیقه چقدر است و آن را توصیف کنید.	۱
۷	معادله خط مماس بر تابع $y = \frac{x}{x^2+6}$ را در نقطه $(2, 0/2)$ پیدا کنید.	۱/۵
۸	به ازای چه مقادیری از a ، b و c تابع $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ ax^2 + bx + c, & x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق مرتبه دوم دارد؟	۱/۵
۹	مشتق بگیرد. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). ب) $x^2 + y^2 - 6xy = 0$ الف) $y = e^{\cos x}$	۱
۱۰	فرض کنید $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 1$ ، مقدار $(f^{-1})'(1)$ را در صورت وجود بیابید.	۱
۱۱	به کمک آزمون مشتق مرتبه دوم نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع $f(x) = \sqrt{2}x - 2\cos x$ را روی بازه $(0, 2\pi)$ پیدا کنید.	۱/۵
۱۲	شعاع کره‌ای با آهنگ ۳ سانتی متر بر ثانیه بزرگ می‌شود. در لحظه‌ای که شعاع کره ۶۰ سانتی متر است، حجم کره با چه آهنگی افزایش می‌یابد.	۱
۱۳	جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{x^2}{x^2-1}$ را رسم کنید.	۲
۱۴	با استفاده از افزایش مناسب، مساحت ناحیه تحت $y = x^2$ بالای $y = 0$ و محدود به خطوط $x = 1$ و $x = 3$ را محاسبه کنید.	۱/۵
۱۵	مقدار متوسط تابع $f(x) = x^2 + x$ را در بازه $[1, 3]$ پیدا کنید.	۱
۱۶	انتگرال‌های معین و نامعین رو به رو را بیابید الف) $\int (e^{2x} + \cos x) dx$ ب) $\int \frac{dx}{x^2}$	۱
۲۰	جمع نمره	موفق باشید

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته : ریاضی فیزیک	ساعت شروع : ۸ صبح	مدت امتحان : ۱۵۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :	دوره ی پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان : ۱۳۹۶ / ۳ / ۶	تعداد صفحه : ۱
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت خردادماه سال ۱۳۹۶		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://aee.medu.ir	

ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)	نمره
------	-------------------------	------

توجه : استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی ، جذر و درصد) بلامانع است.		
۱	جواب‌هایی از نابرابری $ x^2 - 1 < 3$ را به دست آورید که در بازه متقارن $\left(2 - \frac{1}{10}, 2 + \frac{1}{10}\right)$ باشد.	۱
۰/۷۵	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید : الف) مرکز بازه متقارن $(-6, 4)$ برابر است با ب) دنباله $\left\{ 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\}$ همگرا به عدد است . ج) اینفیمم دنباله $\left\{ 2 + \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ برابر با می‌باشد.	۲
۱/۲۵	با استفاده از تعریف حد دنباله‌ها ثابت کنید : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n^2} = 0$	۳
۱	حدود m را طوری تعیین کنید که معادله $x^2 + 2x + m = 0$ در بازه $(0, 1)$ حداقل دارای یک ریشه باشد.	۴
۱	مجانب مایل تابع $f(x) = 2x + \sqrt{x^2 + 3}$ را وقتی $x \rightarrow +\infty$ به دست آورید.	۵
۱	پیوستگی تابع $f(x) = [\sin x]$ را در نقطه $x = \pi$ بررسی کنید.	۶
۱	بالنی را از هوا پر می‌کنیم آهنگ تغییر حجم بالن هنگامی که شعاع آن ۱۵ سانتیمتر است را بیابید.	۷
۱/۵	مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x-2}$ را در $x = 2$ بررسی کنید سپس معادله خط مماس بر منحنی را در نقطه $x = 2$ بنویسید.	۸
۱/۵	از $A(0, -1)$ دو مماس بر منحنی $f(x) = x^2 + x$ رسم شده است معادلات این دو خط مماس را به دست آورید.	۹
۱	مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $y = \ln(\sin x)$ ب) $\cos \sqrt{y} = y^2 \sin x$	۱۰
۱	فرض کنید f^{-1} تابع وارون تابع مشتق پذیر f باشد و $g(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$ اگر $f(1) = 2$ و $f'(1) = \frac{1}{8}$ مقدار $g'(2)$ را بیابید.	۱۱
۱	به کمک آزمون مشتق مرتبه اول نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی تابع $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}$ را روی بازه $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$ پیدا کنید.	۱۲
۱/۵	جهت تقعر نمودار f با ضابطه $f(x) = x^4 - 4x^2$ را در دامنه اش مشخص کنید و نقاط عطف آن را در صورت وجود به دست آورید.	۱۳
۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}$ را رسم کنید.	۱۴
۱/۵	با استفاده از افراز مناسب، مساحت ناحیه‌ای تحت $f(x) = x + 2$ بالای $y = 0$ از $x = -2$ تا $x = 0$ را حساب کنید.	۱۵
۱	بدون محاسبه مستقیم انتگرال، نامساوی داده شده را ثابت کنید. $3 \leq \int_0^2 \frac{x^2 + 5}{x^2 + 2} dx \leq 5$	۱۶
۱	انتگرال معین و نامعین زیر را بیابید. الف) $\int (e^x + \cos x) dx$ ب) $\int_1^2 x \sqrt{x} dx$	۱۷
۲۰	جمع نمره	موفق باشید

باسمه تعالی

سؤالات امتحان نهایی درس : حساب دیفرانسیل و انتگرال	رشته : ریاضی فیزیک	تعداد صفحه : ۱	مدت امتحان : ۱۵۰ دقیقه
نام و نام خانوادگی :	دوره ی پیش دانشگاهی	تاریخ امتحان : ۱۳۹۶/۶/۸	ساعت شروع : ۸ صبح
دانش آموزان روزانه، بزرگسال و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت شهریورماه سال ۱۳۹۶		مرکز سنجش آموزش و پرورش http://ace.medu.ir	
ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)		
نمره			

توجه : استفاده از ماشین حساب ساده (دارای چهار عمل اصلی ، جذر و درصد) بلامانع است.			
۱	جواب نامعادله $x^2 - 7x + 10 < 0$ را به صورت بازه بنویسید سپس مرکز و شعاع بازه را مشخص کنید.	۱	
۰/۷۵	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید : الف) اگر برای هر عدد حقیقی h مثبت داشته باشیم $0 \leq x - 2 < h$ مقدار x برابر با است ب) دنباله $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} \right\}$ همگرا به عدد است . ج) کوچکترین عضو کران بالای بازه ی $[-2, 6]$ برابر با است	۲	
۱/۲۵	دنباله ی $\left\{ (-1)^n \frac{n}{n+1} \right\}$ مفروض است یکنوایی و همگرایی این دنباله را بررسی کنید.	۳	
۱/۵	با کمک حد دنباله ثابت کنید تابع $f(x) = \begin{cases} x+3 & x > 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ حد ندارد.	۴	
۱/۵	به کمک قضیه بولزانو ثابت کنید معادله $\sin x - x^2 + x + 1 = 0$ حداقل یک ریشه در بازه $[0, \pi]$ دارد.	۵	
۱	فرض کنید درآمد حاصل از تولید x واحد از محصولی $R(x) = 0.1x^2 - 3x$ ، درآمد نهایی را در سطح تولید ۱۸۰۰ واحد حساب کنید.	۶	
۱/۵	به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = x x-1 $ را در $x = 1$ بررسی کنید.	۷	
۱/۵	نقاطی از منحنی $y = \tan x$ را در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ چنان تعیین کنید که مماس بر منحنی با خط $y = 2x$ موازی باشد.	۸	
۱	معادله خط مماس بر منحنی $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ را در نقطه $A(1, 1)$ واقع بر منحنی را بدست آورید.	۹	
۱	مشتق بگیرید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $y = \ln(x^2 + 4x)$ ب) $y = \sqrt{x} e^{3x}$	۱۰	
۱	نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{3}x + 2\cos x$ را روی بازه $(0, 2\pi)$ بدست آورید.	۱۱	
۱/۵	اکستریم های مطلق تابع $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$ را در بازه $[-2, 1]$ بدست آورید.	۱۲	
۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را رسم کنید.	۱۳	
۱/۵	الف) جمع $\sum_{j=1}^n \frac{j^2}{n^3}$ را بسط دهید. ب) جمع روبرو را با استفاده از نماد \sum بنویسید. $A = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots + 100x^{101}$	۱۴	
۱/۲۵	مقدار میانگین $f(x) = 2x + \sqrt{x}$ را بر بازه $[0, 9]$ بدست آورید.	۱۵	
۰/۷۵	حاصل انتگرال نامعین $\int (\sin 2x + \frac{1}{x} + e^{5x}) dx$ را بیابید.	۱۶	
۲۰	جمع نمره	موفق باشید	



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://t.me/riazisara>



(@riazisara)