دنباله

دنباله : تابعی که دامنه آن اعداد طبیعی است .

یک دنباله را می توان به صورت صریح بر حسب n نوشت : مانند $a_n = n^۲ + ۲n$

یا می توان آن را به صورت بازگشتی برحسب جملات قبلی خود نوشت : مانند : $a_۱ = ۲$ $a_{n+۱} = ۲a_n - ۳$

تست : دنباله $a_n = \dfrac{۲n-۷}{۵n-۱۴}$ چند جمله منفی دارد ؟

تست : دنباله $a_n = \dfrac{n}{۱۶} + (\dfrac{-۱}{۲})^n$ چند جمله منفی دراد ؟

حل : عبارت برای n زوج همواره مثبت است ولی برای n فرد اگر بخواهد جملات منفی باشد داریم :

$$\frac{n}{۱۶} < (\frac{۱}{۲})^n \Rightarrow n < ۲^{۴-n} \Rightarrow n = ۱$$

تست : چند جمله دنباله $\left\{(-۱)^n n^۲\right\}$ بزرگ تر از ۱۵۰۰ و کوچکتر از ۳۰۰۰ است ؟ (۸ جمله)

تست : در دنباله $۱, \dfrac{-۱}{۲}, ۲, \dfrac{-۲}{۳}, ۳, \dfrac{-۳}{۴}, ...$ نسبت جمله نود و نهم به جمله صدم کدام است ؟

حل : جملات ردیف فرد $a_{۲n-۱} = n$ و جملات ردیف زوج $a_{۲n} = \dfrac{-n}{n+۱}$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow{۲n-۱=۹۹} n = ۵۰ \Rightarrow a_{۹۹} = ۵۰ \\ \xrightarrow{۲n=۱۰۰} n = ۵۰ \Rightarrow a_{۱۰۰} = \dfrac{-۵۰}{۵۱} \end{array}\right\} \Rightarrow\Rightarrow \frac{a_{۹۹}}{a_{۱۰۰}} = -۵۱$$

تست : در دنباله بازگشتی $a_{n+۱} = ۲a_n - ۵$ اگر جمله دوازدهم ۱۷ باشد . جمله دهم کدام است ؟

تست : به ازای کدام مقدار k دنباله $a_{n+1}=k-a_n^{۲}$ و $a_۱=۳$ ثابت است ؟ (کافیست $a_۲=a_۱$ باشد)

تست : در دنباله $a_n=\begin{cases}\frac{۱}{n} & n<۱۰\\ a_{n-۱} & n\geq ۱۰\end{cases}$ جمله صدم کدام است ؟

تست : اگر $a_۱=۲, a_{n+۱}=a_n-۲n$ جمله n ام دنباله کدام است ؟ (جملات اول دنباله را با گزینه ها امتحان می کنیم)

تشریحی : با روش زیر می توان برخی از دنباله های بازگشتی را به صورت صریح نوشت :

$$\begin{aligned}&a_۱=۲\\&a_۲=۲-۲\times۱\\&a_۳=۲-۲\times۱-۲\times۲\\&a_۴=۲-۲\times۱-۲\times۲-۲\times۳\\&\vdots\\&a_n=۲-۲\times۱-۲\times۲-۲\times۳.....-۲\times n=۲-۲(۱+۲+۳+...+n)\Rightarrow a_n=۲-n(n+۱)\end{aligned}$$

تست : دنباله $\begin{cases}a_۱=۲\\ a_n=۲a_{n-۱}-۱\end{cases}$ با کدام دنباله زیر مساوی است ؟ (جملات اول دنباله را با گزینه ها امتحان می کنیم)

۱) $\{n+۱\}$ ۲) $\{۲^{n-۱}+۱\}$ ۳) $\left\{\frac{۵n-n^{۲}}{۲}\right\}$ ۴) $\{۲n-۱\}$

تست : مجموع ۱۰۰ جمله ابتدایی دنباله $a_n=n-۳\left[\frac{n}{۳}\right]+۱$ چقدر است ؟

حل : دنباله به صورت $\underbrace{۲,۳,۱}\,,\underbrace{۲,۳,۱}\,,....$ است که هر سه تا سه تا مجموع ۶ است پس تا جمله ۹۹ ام مجموع ۱۹۸=۶×۳۳ و جمله صدم همان جمله اول یعنی ۲ است که در کل مجموع ۲۰۰ خواهد بود .

تست : مجموع ۲۵۰ جمله اول دنباله $\left\{\cos\frac{n\pi}{۳}\right\}$ کدام است ؟

تست : در دنباله بازگشتی $a_n=a_{n-۱}-a_{n-۲}$ داریم $a_۱=۱$ و $a_۲=۳$ ، مجموع ۱۰۰ جمله اول کدام است ؟

همگرایی دنباله ها :

تعریف : دنباله a_n را همگرا گوییم و می نویسیم $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=L$ هرگاه :

$$\forall\varepsilon>۰\quad \exists M\in\mathbb{N}\quad ;\quad n\ge M\quad\Rightarrow\quad |a_n-L|<\varepsilon$$

تست : در مورد دنباله $a_n=\frac{۵^{n+۱}}{۵^n-۱}$ به ازای هر ε مثبت از عدد طبیعی M به بعد نابرابری $|a_n-۵|<\varepsilon$ را می توان نتیجه گرفت. کوچکترین مقدار M برحسب ε کدام است ؟

$$\left|\frac{۵^{n+۱}}{۵^n-۱}-۵\right|<\varepsilon\Rightarrow\frac{۵}{|۵^n-۱|}<\varepsilon\Rightarrow ۵^n>\frac{۵}{\varepsilon}+۱\Rightarrow n>\log_۵(\frac{۵}{\varepsilon}+۱)\quad\Rightarrow\quad M=\left[\log_۵(\frac{۵}{\varepsilon}+۱)\right]+۱$$

تست : در تعریف $\lim\limits_{n\to+\infty}(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+...+\frac{۱}{۲^n})=۱$ ، حدود M کدام است ؟ ($M\ge[-\log_۲\varepsilon]+۱$)

تست : در دنباله $\left\{\frac{۴n+۱}{۲n-۵}\right\}$ حداقل برای چه مقدار n ، رابطه $۱/۹۹۹<\frac{۴n+۱}{۲n-۵}<۲/۰۰۱$ برقرار است ؟

تست : چند جمله از دنباله $\left\{\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right\}$ در بازه متقارن به مرکز نقطه همگرایی و شعاع $\dfrac{1}{98}$ قرار نمی گیرند ؟

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{98}\Rightarrow\left|\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\right|<\frac{1}{98}\Rightarrow\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\underbrace{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}_{>0}}<\frac{1}{49}\Rightarrow 49\sqrt{n+1}-49\sqrt{n}<\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

$$24\sqrt{n+1}<25\sqrt{n}\Rightarrow 576(n+1)<625n\Rightarrow n>\frac{576}{49}\simeq 11/...\Rightarrow$$ ۱۱ جمله

تست : برای $n\geq M$ جملات دنباله $a_n=\begin{cases}6-\dfrac{1}{n} & \text{فرد } n\\ \dfrac{6n+10}{n+2} & \text{زوج } n\end{cases}$ در بازه متقارن به مرکز ۶ و شعاع $\dfrac{1}{100}$ قرار دارند. کوچک ترین عدد M کدام است ؟ (ماکسیمم M_1,M_2 جواب خواهد بود)

تست : جمله های دنباله $\left\{\dfrac{2n^2-32}{n^2-41}\right\}$ برای مقادیر $n>71$ در کدام همسایگی قرار می گیرند ؟ (س ۷۷)

$$a_n=\frac{2(n^2-41)+50}{n^2-41}=2+\frac{50}{n^2-41}\xrightarrow{n>71}n^2-41>5000\Rightarrow 0<\frac{50}{n^2-41}<0/001\xrightarrow{+2}2<a_n<2/001$$

واگرایی بینهایت دنباله ها :

$$\lim_{n\to\infty}a_n=+\infty \qquad \forall N>0\quad \exists M\in\mathbb{N}\quad ;\quad n\geq M\quad\Rightarrow\quad a_n>N$$

تست : به ازای $n\geq M$ مقدار جملات دنباله $\left\{\dfrac{n^4}{2n^2+800}\right\}$ از ۱۰۰ بزرگ تر می شوند . حداقل مقدار طبیعی M کدام است؟

تست : اگر برای $n \geq M$ نامساوی $a_n > N$ برای دنباله $a_n = n^۲ + ۴n$ برقرار باشد ، حداقل مقدار طبیعی M کدام است؟

۱) $\left[\sqrt{N+۴}\right]+۱$ ۲) $\left[\sqrt{N+۴}\right]$ ۳) $\left[\sqrt{N+۴}\right]-۱$ ۴) $\left[\sqrt{N+۴}\right]-۲$

محاسبه عدد همگرایی دنباله (همان حد در بی نهایت) :

نکته : دنباله نمایی k^n با شرط $-۱ < k \leq ۱$ همگراست .

تست : به ازای چه مقدار k دنباله $a_n = \dfrac{۴^n + k^n + n^۴}{۳^n + ۲^{۲n} + n^۳}$ همگراست ؟

حل : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{۴^n + k^n}{۴^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} ۱ + \left(\dfrac{k}{۴}\right)^n$ که دنباله با شرط $-۱ < \dfrac{k}{۴} \leq ۱ \Rightarrow -۴ < k \leq ۴$ همگراست.

تست : دنباله $\left\{\left(\dfrac{۳}{۲k-۱}\right)^n\right\}$ همگراست . k چند مقدار صحیح نمی تواند داشته باشد ؟

تست : دنباله های زیر به چه اعدادی همگرا هستند ؟

$$\odot a_n = \frac{۱}{۱-\left[\frac{-۱}{n}\right]} \longrightarrow \frac{۱}{۱-\left[۰^-\right]} = \frac{۱}{۲}$$

$$\odot \left\{\left[\frac{۲}{\pi}\tan^{-۱} n\right]\right\} \longrightarrow \left\{\left[\frac{۲}{\pi}\times\frac{\pi^-}{۲}\right]\right\} \Rightarrow \left[۱^-\right] = ۰$$

$$\odot \left\{\frac{۹^{\left[\frac{n}{۲}\right]}}{۳^n}\right\} \longrightarrow ۳^{۲(\frac{n}{۲}+P)-n} = ۳^{۲p} \begin{cases} \xrightarrow{p=۰} ۱ \\ \xrightarrow{۰<p<۱} ۳^{۲p} \end{cases}$$ واگرا

$\odot a_n=\left[\frac{\sin n}{n}\right]\longrightarrow\left[\cdot^{\pm}\right]$ واگرا

$\odot a_n=\left[\frac{۵n^{۲}+۱۰۰}{n^{۲}+n}\right]-\left[\frac{۴n+۱}{-۲n+۳}\right]\xrightarrow{n=۱۰}\left[۵^{+}\right]-\left[(-۲)^{-}\right]=۵+۳=۸$

$\odot\left\{\log_{(n+۱)}^{۳}\right\}\longrightarrow\frac{۱}{\log_{۳}^{(n+۱)}}=۰$

$\odot\left\{\frac{۱+\log_{۲}n+\log_{۴}n}{۲+\log_{۴}n}\right\}\longrightarrow\frac{۲\log_{۴}n+\log_{۴}n}{\log_{۴}n}=۳$

$\odot\left\{\frac{\left[\log_{۴}^{n}\right]}{\left[\log_{۲}^{۲n}\right]}\right\}\longrightarrow\frac{\log_{۴}^{n}}{\log_{۲}^{۲n}}\Rightarrow\frac{\log_{۴}^{n}}{۲\log_{۴}^{۲n}}\Rightarrow\frac{۱}{۲}$

$\odot\left\{\frac{\log(۸^{n}+۱)}{\log(۲^{n}+۱)}\right\}\longrightarrow\log_{۲^{n}}^{۸^{n}}=\log_{۲}^{۸}=۳$

$\odot a_n=\sqrt{\frac{n^{۳}-۱}{n+۳}}-\sqrt[۳]{\frac{n^{۴}+۲}{n+۳}}\longrightarrow\sqrt{n^{۲}-۳n}-\sqrt[۳]{n^{۳}-۳n^{۲}}\approx\left(n-\frac{۳}{۲}\right)-\left(n-\frac{۳}{۳}\right)=\frac{-۱}{۲}$

$\odot a_n=n\left(\sqrt{n^{۲}+۱}-۲\sqrt{n^{۲}+۲}+\sqrt{n^{۲}+۵}\right)\longrightarrow n\left(\sqrt{n^{۲}+۱}-\sqrt{n^{۲}+۲}+\sqrt{n^{۲}+۵}-\sqrt{n^{۲}+۲}\right)\Rightarrow n\left(\frac{-۱}{۲n}+\frac{۳}{۲n}\right)=۱$

$\odot\left\{n\left(\sqrt{n^{۲}+۱}-n\right)\right\}\longrightarrow n\times\frac{۱}{۲n}=\frac{۱}{۲}$

$\odot a_n=n\sqrt[۳]{\frac{n+۳}{n+۲}}-n\longrightarrow n+\frac{۳-۲}{۳}-n=\frac{۱}{۳}$

$\odot a_n=n^{۲}\left(\sqrt{\frac{۴n^{۲}-۱}{n^{۲}+۱}}-۲\right)\longrightarrow ۲n^{۲}\sqrt{\frac{n^{۲}-\frac{۱}{۴}}{n^{۲}+۱}}-۲n^{۲}\Rightarrow ۲\left(n^{۲}+\frac{-\frac{۵}{۴}}{۲}\right)-۲n\Rightarrow-\frac{۵}{۴}$

$\odot a_n=\frac{(n+۱)^{۲۰}-(n-۱)^{۲۰}}{۲۰n^{۱۹}}\longrightarrow\frac{۲۰(۱+۱)n^{۱۹}}{۲۰n^{۱۹}}=۲$

$\odot a_n=\frac{\left(n^{۲}+۲n-۱\right)^{۳}-\left(n^{۲}-n-۱\right)^{۳}}{(۲n+۱)(n+۱)^{۴}}\longrightarrow\frac{۳(۲n-۱+n+۱)(n^{۲})^{۲}}{۲n^{۵}}=\frac{۹}{۲}$

$\odot a_n=\frac{\left(n+\sqrt{n}+۱\right)^{۲}-\left(n+۲\sqrt{n}+۱\right)^{۲}}{\left(۲\sqrt{n}+۱\right)^{۲}\left(\sqrt{n}+۳\right)}\longrightarrow\frac{۲\left(\sqrt{n}+۱-۲\sqrt{n}-۱\right)}{۴n\sqrt{n}}=\frac{-۱}{۲}$

$$\odot a_n=\underbrace{\left(\sqrt{n}-\left[\sqrt{n}\right]\right)}_{۰\le\ <۱}\underbrace{\sin^{-۱}\left(\frac{۱}{n}\right)}_{۰}\longrightarrow ۰$$

$$\odot\left\{\left(\frac{n^{۳}+۱}{۲n^{۲}+۳}\right)\sin^{-۱}\left(\frac{۴}{n+۱}\right)\right\}\longrightarrow \frac{n}{۲}\times\frac{۴}{n}=۲$$

$$\odot a_n=n^{۲}\left(\cos\left(\frac{۱}{n}\right)-\cos\left(\frac{۱}{۲n}\right)\right)\longrightarrow n^{۲}\left(۱-\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{n})^{۲}-۱+\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲n})^{۲}\right)=\frac{-۱}{۲}+\frac{۱}{۸}=\frac{-۳}{۸}$$

$$\odot\left\{n^{۳}\left(\frac{۱}{n}-\sin(\frac{۱}{n})\right)\right\}\longrightarrow n^{۳}\left(\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{n^{۳}}\right)=\frac{۱}{۶}$$

$\odot a_n=\cos\frac{۱}{۲}\cos\frac{۱}{۴}\cos\frac{۱}{۸}\ldots\cos\frac{۱}{۲^n}\longrightarrow\frac{\sin ۱}{۱}=\sin ۱$ دلیل آن در یکی از تستهای زیر بیان شده است .

$$\odot\left\{\frac{(۲n+۱)!+۲^n}{n(۲n)!+۳^n}\right\}\longrightarrow\left(\frac{۲}{۳}\right)^n\to ۰$$

$$\odot\left\{\sqrt{۲}\sqrt[۴]{۲}\sqrt[۸]{۲}\ldots.\sqrt[۲^n]{۲}\right\}\xrightarrow{n\to\infty}۲^{(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\ldots)}=۲^{۱}\Rightarrow ۲$$

$$\odot\left\{\sqrt[n]{n+۱}\right\}\longrightarrow(n+۱)^{\frac{۱}{n}}\Rightarrow(\infty)^{۰}=۱$$

$$\odot a_n=\left(\tan\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{۱}{n}\right)\right)^{\cot\left(\frac{\pi}{۲}+\frac{۱}{n}\right)}\longrightarrow(\infty)^{۰}=۱$$

$$\odot\left\{\frac{۲^{۳n+۲}+۸^{n+۱}}{۲^{۳n+۱}+۸^n}\right\}\longrightarrow\frac{۲^{۳n+۲}+۲^{۳n+۳}}{۲^{۳n+۱}+۲^{۳n}}=\frac{۳\times ۲^{۳n+۲}}{۳\times ۲^{۳n}}=۲^{۲}=۴$$

$$\odot\left\{\left(۸^n+۳^{۲n}\right)^{\frac{۱}{۲n}}\right\}\longrightarrow ۳^{۲n\times\frac{۱}{۲n}}\Rightarrow ۳$$

$\odot a_n=\dfrac{۱+۲+۳\ldots+\boxed{n^{۲}}}{۱+۲+۳+\ldots+۲\text{n}}\xrightarrow{\approx}\dfrac{\frac{(n^{۲})^{۲}}{۲}}{\frac{(۲n)^{۲}}{۲}}=\dfrac{n^{۲}}{۴}\Rightarrow\infty$ واگرا

$$\odot a_n=\frac{\sqrt{۱}+\sqrt{۲}+\ldots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\xrightarrow{\approx}\frac{\frac{۲}{۳}n^{\frac{۳}{۲}}}{n^{\frac{۳}{۲}}}\Rightarrow\frac{۲}{۳}$$

$$\odot a_n=\frac{۲}{n^{۲}}+\frac{۴}{n^{۲}}+\ldots+\frac{۲n}{n^{۲}}\longrightarrow\frac{۱}{n^{۲}}(۲+۴+\ldots+۲\text{n})\xrightarrow{\approx}\frac{n^{۲}}{n^{۲}}=۱$$

$$\odot a_n=\frac{[\pi]+[۲\pi]+...+[n\pi]}{n^۲}\longrightarrow\frac{\pi(۱+۲+۳+...+n)}{n^۲}=\frac{\pi\times\frac{n^۲}{۲}}{n^۲}=\frac{\pi}{۲}$$

$$\odot a_n=\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۱}}+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۲}}+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+۳}}+...+\frac{۱}{\sqrt{n^۲+n}}\longrightarrow\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n}+\frac{۱}{n}+...+\frac{۱}{n}=\frac{n}{n}=۱$$

$$\odot\left\{\left(\frac{۲n+۱}{۲n-۱}\right)^n\right\}\longrightarrow e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{۲n}{۲n-۱}}=e$$

$$\odot\left\{\left(\cos\frac{۲}{n}\right)^{n^۲+۱}\right\}\longrightarrow\left(۱-\frac{۱}{۲}\left(\frac{۲}{n}\right)^۲\right)^{n^۲+۱}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{-۲}{n^۲}(n^۲+۱)}=e^{-۲}$$

$$\odot a_n=n\left(\ln(n+۱)-\operatorname{lng} n\right)\longrightarrow n\ln\frac{n+۱}{n}=\ln\left(\frac{n+۱}{n}\right)^n\to\ln e=۱$$

تست : اگر $a_n=\begin{cases}\frac{۲n+۱}{n} & n<۵^{۱۰۰}\\ \frac{(-۱)^n n^۲}{n^۳+۱} & n\ge ۵^{۱۰۰}\end{cases}$ آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ کدام است ؟(فقط ضابطه پایین به بی نهایت میل می کند)

تست : اگر $a_n=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{n+۲} & n<۵\\ a_{n-۱} & n\ge ۵\end{cases}$ آنگاه $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ کدام است ؟

تست : حاصل حد دنباله $\left\{\cos\left(n^۲+n\right)\pi\right\}$ کدام است ؟

حل : می دانیم حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی مضرب ۲ است لذا :

$$\lim_{n\to\infty}\cos n(n+۱)\pi=\lim_{n\to\infty}\cos ۲k\,\pi=۱$$

تست : دنباله $\left\{\frac{(-۱)^n\sqrt{n+۱}}{\sqrt[۶]{n^k}}\right\}$ همگراست . K چند عدد طبیعی نمی تواند باشد ؟

حل : دنباله $(-۱)^n$ واگرا ولی کراندار است پس باید توان مخرج بیشتر باشد تا حد صفر شود :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{\frac{۱}{۲}}}{n^{\frac{k}{۶}}}=۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}<\frac{k}{۶}\Rightarrow k>۳\quad\Rightarrow k\ne ۱,۲,۳$$

تست : دنباله $\{a_n\}$ دارای جملات مثبت است . اگر $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = ۳k - k^۲$ و $\lim_{n\to+\infty} a_{n+۲} = ۴-۲k$ آنگاه مقدار $\lim_{n\to+\infty} a_{۲n+۳}$ کدام است ؟

حل : دنباله های $\{a_{۲n+۳}\},\{a_{n+۲}\},\{a_n\}$ همه به یک عدد همگرا هستند پس :

$$۴-۲k = ۳k-k^۲ \Rightarrow k=۱,۴ \Rightarrow \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a_{۲n+۳} = -۴ \\ \lim_{n\to+\infty} a_{۲n+۳} = ۲ \end{cases} \xrightarrow{a_n>۰} \lim_{n\to+\infty} a_{۲n+۳} = ۲$$

تست : دنباله $a_n = \left[\dfrac{۲^{۲n+۱}+۳^{n+۱}}{۲^{۲n}+۳^{n+۲}}\right]$ به چه عددی همگراست ؟

حل : حد داخل براکت ۲ است پس باید با دقت بررسی شود ولی با جایگذاری عدد بزرگ محاسبه سخت می شود پس باید $a_n - ۲$ در بی نهایت تعیین علامت شود

$$\frac{۲^{۲n+۱}+۳^{n+۱}}{۲^{۲n}+۳^{n+۲}} - ۲ = \frac{-۵\times ۳^{n+۱}}{۴^n} \xrightarrow{+\infty} ۰^- \quad \Rightarrow \left[۲^-\right] = ۱$$

تست : دنباله های $\left\{\left[\dfrac{n+(-۱)^n}{n+۱}\right]\right\}$ و $\left\{\left[\dfrac{n+(-۱)^n}{n+۲}\right]\right\}$ به ترتیب چگونه اند ؟

حل : در دنباله اول برای n زوج مقدار ۱ و برای فرد $۰=\left[۱^-\right]$ پس واگراست . ولی برای دنباله دوم همگرا به صفر است.

تست : کدام دنباله واگراست ؟ (س ۸۷)

۱) $\left\{\dfrac{n-\sin n}{n+\sin n}\right\}$ ۲) $\left\{\left(n^۲\right)^{(-۱)^{۲n-۱}}\right\}$ ۳) $\left\{\sin\left(۴n+۱\right)\dfrac{\pi}{۲}\right\}$ ۴) $\left\{\left[۱-\dfrac{(-۱)^n}{n}\right]\right\}$

حل : حد گزینه اول ۱ است . گزینه دوم به صورت $\left(n^۲\right)^{-۱} = \dfrac{۱}{n^۲}$ است و حد آن صفر است . گزینه سوم نیز به صورت $\sin\left(۲n\pi+\dfrac{\pi}{۲}\right) = \sin\dfrac{\pi}{۲} = ۱$ است . و گزینه آخر برای n زوج و n فرد مقادیر متفاوتی می دهد .

تست : اگر $۲ < a_n < \dfrac{۴n+۳-a_n}{۲n}$ ، مقدار همگرایی دنباله کدام است ؟

$$a_n < \frac{۴n+۳-a_n}{۲n} \Rightarrow ۲na_n < ۴n+۳-a_n \Rightarrow a_n < \frac{۴n+۳}{۲n+۱} \qquad \Rightarrow ۲ < a_n < \frac{۴n+۳}{۲n+۱} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = ۲$$

تست : دنباله $\{a_n\}$ که در آن $a_n = a_{n-۱}(\cos\frac{x}{۲^n})$ و $a_۰ = ۱$. به ازای $x = \frac{\pi}{۶}$ به کدام عدد همگراست ؟

حل : دنباله به صورت $a_n = \cos\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۴}....\cos\frac{x}{۲^{n-۱}}\cos\frac{x}{۲^n}$ است که می توان نوشت :

$$a_n = \frac{\sin\frac{x}{۲^n}\times\cos\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۴}....\cos\frac{x}{۲^{n-۱}}\cos\frac{x}{۲^n}}{\sin\frac{x}{۲^n}} = \frac{\frac{۱}{۲}\sin\frac{x}{۲^{n-۱}}\times\cos\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۴}....\cos\frac{x}{۲^{n-۱}}}{\sin\frac{x}{۲^n}} =$$

$$\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲\sin\frac{x}{۲^{n-۲}}\times\cos\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۴}...}{\sin\frac{x}{۲^n}} = \frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)^n\sin x}{\sin\frac{x}{۲^n}} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۶}} \frac{۳}{\pi}$$

تست : کدام دنباله همگراست ؟

۱) $\sin(n\pi+\frac{\pi}{۴})+\cos(n\pi+\frac{\pi}{۴})$ ۲) $\sin(n\pi+\frac{\pi}{۴})+\cos(n\pi-\frac{\pi}{۴})$

۳) $\sin(n\pi+\frac{\pi}{۴})\cos(n\pi+\frac{\pi}{۴})$ ۴) $\sin(\frac{n\pi}{۲})+\cos(n\pi+\frac{\pi}{۴})$

حل : گزینه ۳ یک دنباله ثابت است بنابر این همگراست :

$$\sin(n\pi+\frac{\pi}{۴})\cos(n\pi+\frac{\pi}{۴}) = \frac{۱}{۲}\sin(۲n\pi+\frac{\pi}{۲}) = \frac{۱}{۲}$$

تست : اگر دنباله های $\{a_n+b_n\}$ و $\{a_n-b_n\}$ به ترتیب به $L_۱$ و $L_۲$ همگرا باشند .دنباله $\{a_n^۲+b_n^۲\}$ همگراست به :

$$(a_n+b_n)^۲+(a_n-b_n)^۲ = ۲(a_n^۲+b_n^۲) \Rightarrow a_n^۲+b_n^۲ \to \frac{L_۱^۲+L_۲^۲}{۲}$$

تست : اگر دنباله های $\{۳a_n+۴b_n\}$ و $\{a_n-۲b_n\}$ به ترتیب به ۴- و ۷ همگرا باشند . دنباله $\{a_n\}$ به کدام عدد همگراست ؟

یکنوایی دنباله ها :

روش اول : مناسب برای یافتن محدوده یکنوایی دنباله های ساده

الف) دنباله $\{a_n\}$ صعودی است اگر به ازای هر n : $a_{n+1}-a_n \geq 0$

ب) دنباله $\{a_n\}$ نزولی است اگر به ازای هر n : $a_{n+1}-a_n \leq 0$

برای دنباله های توانی – فاکتوریلی می توان نوشت :

الف) دنباله $\{a_n\}$ صعودی است اگر به ازای هر n : $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$

ب) دنباله $\{a_n\}$ نزولی است اگر به ازای هر n : $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$

تست : دنباله $a_n = 5\sqrt{n-1}-kn$ نزولی است . حداقل k کدام است ؟

$$a_{n+1}-a_n = 5\sqrt{n}-kn-k-5\sqrt{n-1}+kn = 5\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)-k \leq 0 \Rightarrow k \geq \frac{5}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

باید به ازای هر n این رابطه برقرار باشد که اگر برای $n=1$ برقرار باشد برای بقیه نیز برقرار است : $k \geq 5$

تست : دنباله $a_n = 3^n - bn$ صعودی است . حداکثر مقدار b کدام است ؟

تست : دنباله $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$ از نظر یکنوایی چگونه است ؟

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}(\frac{n+1}{n}) \leq 1$ نزولی

تست : دنباله $\left\{\frac{10^n}{(n-1)!}\right\}$ از نظر یکنوایی چگونه است ؟

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10}{n}$ غیر یکنواست

روش دوم : مناسب برای اعمال جبری بین توابع یکنوای شناخته شده :

۱) دنباله های $\{a_n\},\{-a_n\}$ از نظر یکنوایی عکس هم هستند .

۲) دنباله های $\{a_n\},\left\{\frac{۱}{a_n}\right\}$ از نظر همگرایی عکس هم هستند .

۳) اگر دنباله های a_n,b_n صعودی (نزولی) باشند ، a_n+b_n نیز صعودی (نزولی) خواهد بود .

۴) اگر دنباله های a_n,b_n صعودی و مثبت باشند ، a_nb_n نیز صعودی خواهد بود .

۵) اگر در ترکیب توابع ، صعودی را + و نزولی را − در نظر بگیریم یکنوایی تابع مرکب مشخص می شود .

نکته : در توابع کسری که مجانب قائم بزرگ تر از ۱ باشد ، تابع یکنوا نیست . و کمترین و بیشترین مقدار دنباله در اطراف مجانب قائم اتفاق می افتد .

تست : چند تا از دنباله های زیر صعودی هستند ؟

۱) $\{n^۳+\sqrt{n}\}$ ۲) $\{۲^n\times n^۲\}$ ۳) $\left\{\frac{۱}{۲^n}-\log n\right\}$ ۴) $\{n^۲+۴n+۳\}$

تست : چند تا از دنباله های زیر صعودی هستند ؟

۱) $\left\{\sin^{-۱}\left(\frac{-۱}{n}\right)\right\}$ ۲) $\{\cot^{-۱}(۲^n)\}$ ۳) $\{\sqrt[۳]{۱-n^۳}\}$ ۴) $\{-\sqrt[۳]{n^۲-۱}\}$

تست : کدام دنباله صعودی است ؟

۱) $\left\{\frac{n-۶}{۲n-۵}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{۳n+۴}{۲n+۱}\right\}$ ۳) $\left\{\frac{n+۴}{n+۳}\right\}$ ۴) $\left\{\left[\frac{n+۲}{n+۱}\right]\right\}$

حل : گزینه اول ریشه مخرج بزرگتر از ۱ دارد و غیر یکنواست و گزینه آخر دنباله ثابت ۱ است که هم صعودی و هم نزولی است و دو گزینه دیگر نزولی هستند زیرا $ad-bc<۰$

تست : دنباله $a_n=\frac{۲n^۲+۱۳}{n^۲+۶}$ از نظر یکنوایی چگونه است ؟

تست : دنباله $\left\{\frac{۲n+۳}{an-۳}\right\}$ غیر یکنواست . a چند مقدار صحیح می تواند باشد ؟

$\frac{۳}{a}>۱\Rightarrow ۰<\frac{a}{۳}<۱\Rightarrow ۰<a<۳\Rightarrow a=۱,۲$

تست : دنباله $\left\{\cos^{-۱}\left(\frac{۲n+b}{۳n+۱}\right)\right\}$ نزولی است ، حدود b کدام است ؟

تست : قدر مطلق تفاضل بیشترین و کمترین مقدار جملات دنباله $\left\{\frac{۴n-۱}{۲n-۱۳}\right\}$ کدام است ؟

حل : مخرج درای ریشه ۶/۵ است و بیشترین و کمترین مقدار دنباله فوق به ازای $n=۶,n=۷$ که مقادیر ۲۳- و ۲۷ حاصل می شود . قدر مطلق تفاضل آنها ۵۰ است .

تست : بزرگترین جمله دنباله $\left\{(-۱)^n\frac{۲n+۵}{۲n-۹}\right\}$ کدام است ؟

حل : برای n زوج جملات دنباله مثبت خواهد بود و بزرگترین جمله را باید از بین آنها یافت . دنباله به صورت $\left\{\frac{۲n+۵}{۲n-۹}\right\}$ خواهد بود که بزرگترین جمله در سمت راست مجانب قائم رخ می دهد که $a_۶=\frac{۱۷}{۳}$ است.

تست : دنباله $\left\{\left(\frac{۳-a}{۲}\right)^n\right\}$ نزولی است . a چند مقدار طبیعی می تواند داشته ؟

حل : دنباله k^n نزولی است اگر $۰\le k\le ۱$ پس: $۰\le\frac{۳-a}{۲}\le ۱\Rightarrow ۱\le a\le ۳\Rightarrow a=\{۱,۲,۳\}$

تست : دنباله $a_n=\frac{b^{۲n}}{۹^{n+۱}}$ صعودی اکید است . b چند عدد صحیح می تواند باشد ؟

حل : دنباله به صورت $a_n=\frac{۱}{۹}\left(\frac{b^۲}{۹}\right)^n$ است و با شرط $\frac{b^۲}{۹}>۱$ اکیداً صعودی است : $b>۳$ یا $b<-۳$

روش سوم (مقایسه جملات) : مناسب برای دنباله های نامتعارف به خصوص مثلثاتی

با یافتن چند جمله اول و جمله آخر دنباله ، می توان صعودی یا نزولی بودن دنباله را حدس زد.

تست : دنباله $a_n=\cos(\frac{\cos n\pi}{n^۲})$ از نظر یکنوایی چگونه است ؟

حل : دنباله صعودی است زیرا : $a_n=\cos(\frac{(-۱)^n}{n^۲})=\cos(\frac{۱}{n^۲})\xrightarrow{n=۱,۲,...,+\infty}\cos۱<\cos\frac{۱}{۴}<...<\cos۰$

تست : کدام دنباله نزولی است ؟

۱) $\left\{\cos(\frac{\pi}{n})\right\}$ ۲) $\left\{\cos(\frac{\pi(n-۴)}{n+۱})\right\}$ ۳) $\left\{\sin(\frac{\pi}{۲n})\right\}$ ۴) $\left\{\sin(\frac{۳\pi}{n})\right\}$

حل :

۱) $-۱,۰,\frac{۱}{۲},...,۱$ دنباله صعودی است .

۲) $...,\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{-۱}{۲},۰$ دنباله غیر یکنوا است .

۳) $۱,\frac{\sqrt{۲}}{۲},\frac{۱}{۲},...,۰$ دنباله نزولی است .

۴) $...,۰,\frac{-۱}{۲},۰$ دنباله غیر یکنوا است .

تست : کدام دنباله نزولی است ؟

۱) $\left\{\frac{-n^۳}{۳^n}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{۳^n}{n^۴}\right\}$ ۳) $\left\{\frac{۲^{n-۳}}{n!}\right\}$ ۴) $\left\{\frac{n!}{۲^{n+۵}}\right\}$

حل :

۱) $-\frac{۱}{۳},-\frac{۸}{۹},-۱,-\frac{۶۴}{۸۱},...$ دنباله غیر یکنوا است .

۲) $۳,\frac{۹}{۱۶},\frac{۱}{۳},\frac{۸۱}{۲۵۶},...,+\infty$ دنباله غیر یکنوا است .

۳) $\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۶},\frac{۱}{۱۲},...,+\infty$ دنباله غیر یکنوا است .

۴) $\frac{۱}{۲^۶},\frac{۲}{۲^۷},\frac{۶}{۲^۸},...,۰$ دنباله نزولی است .

تست : چند تا از دنباله های زیر یکنوا هستند ؟

۱) $\left\{n-\sqrt{n}\right\}$ ۲) $\left\{۲n-\sqrt{n}\right\}$ ۳) $\left\{n-۴\sqrt{n}\right\}$ ۴) $\left\{n-۳\sqrt{n}\right\}$

نکته : در تست هایی که گزینه ها غیر یکنوا ندارد، فقط جمله اول و آخر برای تشخیص یکنوایی کفایت می کند .

تست : اگر $a_n=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۳^۲}+...+\frac{۱}{۳^n}$ و $b_n=a_n+\frac{۱}{n}$ دنباله $\{a_n\},\{b_n\}$ به ترتیب چگونه اند ؟

۱) صعودی ، صعودی ۲) نزولی ، نزولی ۳) صعودی ، نزولی ۴) نزولی ، صعودی

تست : دنباله $a_n=\sqrt{n^۲+۴n+۵}-n$:

۱) صعودی و همگرا ۲) نزولی و همگرا ۳) صعودی و واگرا ۴) نزولی و واگرا

تست : دنباله $a_n=\frac{\log(n^۵+۱)}{\log(n^۳+۱)}$:

۱) صعودی و همگرا ۲) نزولی و همگرا ۳) صعودی و واگرا ۴) نزولی و واگرا

تست : کوچکترین جمله دنباله $a_n=n^۳-۱۲n^۲+۱۲۸$ کدام است ؟ (خاص)

$$f'(n)=۳n^۲-۲۴n=۰\Rightarrow n=۸\Rightarrow f(۸)=۲^۹-۱۲\times۲^۶+۲^۷=۲^۶\left(۲^۳-۱۲+۲\right)=-۱۲۸$$

کرانداری :

الف) از پایین کراندار : تمام جملات دنباله از عددی ثابت بزرگ تر باشند $(m \le a_n)$ مثال : $a_n = n$

ب) از بالا کراندار : تمام جملات دنباله از عددی ثابت کوچک تر باشند . $(a_n \le M)$ مثال : $a_n = \frac{۱}{n}$

ج) دنباله کراندار : تمام جملات دنباله بین دو عدد ثابت باشند . $(|a_n| \le k)$ مثال : $a_n = \frac{(-۱)^n}{n}$

نکته مهم : اگر حد دنباله ای بی نهایت نشود ، کراندار است و در غیر این صورت بی کران است .

تست : دنباله $\left\{\frac{n+۳}{n+۲}\right\}$ چگونه است ؟

۱) کراندار است . ۲) فقط از پایین کراندار است . ۳) فقط از بالا کراندار است . ۴) صعودی است .

تست : کدام دنباله صعودی و کراندار است ؟ (س ۷۷)

۱) $a_n = \frac{n^۲+۱}{n+۲}$ ۲) $a_n = \frac{n^۲+۲}{n+۱}$ ۳) $a_n = \cos\frac{\pi}{n}$ ۴) $a_n = \cos\frac{n\pi}{۲}$

تست : کدام دنباله بی کران است ؟

۱) $\left\{n\sin(\frac{۱}{n})\right\}$ ۲) $\left\{\frac{n\cos(n\pi)}{n^۲+۱}\right\}$ ۳) $\left\{n^۲\sin\left[\frac{۳\pi}{n}\right]\right\}$ ۴) $\left\{n^۲\sin(\frac{۳n\pi}{۲})\right\}$

تست : دنباله $\{\sin n - \cos n\}$ چگونه است ؟

۱) یکنوا و کراندار ۲) غیر یکنوا و کراندار ۳) یکنوا و بیکران ۴) غیر یکنوا و بیکران

تست : دنباله $a_n = \left[\frac{\sin n}{n+\cos n}\right]$:

۱) واگرا و کراندار ۲) همگرا و کراندار ۳) واگرا و بی کران ۴) همگرا و بی کران

تست : دنباله $\left\{\sqrt[3]{n^3+6n^2+1}-n\right\}$ چگونه است ؟

۱) کراندار – صعودی ۲) کراندار – نزولی ۳) بی کران- نزولی ۴) بی کران- صعودی

تست : دنباله $\left\{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right\}$ چگونه است ؟ (س ۹۰)

۱) بیکران - یکنوا ۲) کراندار – غیر یکنوا ۳) کراندار - نزولی ۴) کراندار - صعودی

حل :کراندار است و با تقسیم صورت مخرج دنباله بر $\sqrt{n}$ می توان دنباله را به صورت $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$ نوشت که $1+\frac{1}{n}$ نزولی

پس کل دنباله صعودی خواهد بود .

تست : چند تا از دنباله های زیر کراندار هستند ؟

۱) $\left\{\sin^{-1}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$ ۲) $\left\{\sin\left(2^n\right)\right\}$ ۳) $\{\log n-[\log n]\}$

نکته مهم : در توابع یکنوای همگرا ، کران بالا و پایین همان جملات اول و حد دنباله هستند .

تست : کوچک ترین کران بالای دنباله $a_n=\frac{3n^2-2n}{4n^2+5}$ کدام است ؟ (س ۸۷)

حل : دنباله صعودی و همگرا است پس کوچکترین کران بالا $\frac{3}{4}$ است .

تست : دنباله $a_n=\frac{۱-۵n}{n+۱}$ مفروض است . اگر نا مساوی $|a_n|\le k$ برای همه مقادیر طبیعی n برقرار باشد . کوچکترین مقدار k کدام است ؟

حل : دنباله همگرا و نزولی است پس $-۵<a_n\le -۲$ لذا $|a_n|\le ۵$

تست : اگر همه جملات دنباله $a_n=\sqrt{n+۱۳}-\sqrt{n-۲}$ به ازای $n>۵۰$ در بازه $(a,b]$ قرار بگیرند . کمترین مقدار $b-a$ کدام است ؟

حل : دنباله فوق همگرا به صفر و به ازای $n\ge ۵۱$ نزولی است لذا $۰<a_n\le ۱$ لذا $b-a=۱$

تست : دنباله $a_n=\log\frac{۱}{n+۱}$ از بالا و پایین : (آ ۸۱)

۱) کراندار – کراندار ۲) بیکران – کراندار ۳) کراندار – بیکران ۴) بیکران – کراندار

حل : دنباله $\frac{۱}{n+۱}$ نزولی و همگراست پس کران آن $۰<\frac{۱}{n+۱}\le\frac{۱}{۲}$ است و $-\infty<\log\frac{۱}{n+۱}\le\log\frac{۱}{۲}$ پس دنباله فوق فقط از بالا کراندار است .

تست : کدام دنباله از بالا کراندار و از پایین بی کران است ؟

۱) $a_n=\log\frac{۱}{n}$ ۲) $a_n=\sin\frac{\pi}{n}$ ۳) $a_n=\cot\frac{\pi}{n}$ ۴) $a_n=\cos\frac{n\pi}{۲}$

تست : بزرگ ترین کران پایین دنباله $a_n=\frac{۳^n}{n^۳}$ کدام است ؟

حل :این دنباله همگرا نیست لذا باید جملات را نوشت : $\underbrace{۳,\frac{۹}{۸}}_{\searrow},\boxed{۱},\underbrace{\frac{۸۱}{۶۴},\ldots}_{\nearrow}$ پس $a_n\ge ۱$ بنابر این بزرگترین کران پایین ۱ است .

تست : اگر دنباله $\{a_n\}$ نزولی و همگرا و مثبت باشد ، کوچکترین کران بالای دنباله $\{(-۱)^n a_n\}$ کدام است ؟

حل : جملات دنباله داده شده یکی در میان منفی و مثبت هستند پس کران بالا عددی مثبت است که به ازای n زوج حاصل می شود . که به ازای n زوج دنباله به صورت $\{a_n\}$ است. و چون این دنباله نزولی است بزرگترین جمله آن با شماره زوج ،جمله دوم است $a_۲$.

تست : اگر دنباله $\{a_n\}$ نزولی و بی کران و منفی باشد ، دنباله $b_n = \frac{a_n}{a_n - ۱}$ چگونه است ؟

حل : از شرایط بیان شده مشخص می شود $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ در نتیجه $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \frac{a_n}{a_n} = ۱$ پس دنباله b_n کراندار است .از طرفی $b_n = \frac{۱}{۱-\frac{۱}{a_n}}$ که مخرج نزولی در نتیجه دنباله b_n صعودی است .

تست : اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله های کراندار و $\{c_n\}$ بی کران باشد ، کدام نادرست است ؟

۱) دنباله $\{a_n + b_n - c_n\}$ بی کران است .

۲) دنباله $\{a_n b_n c_n\}$ بی کران است .

۳)دنباله $\left\{\frac{a_n + b_n}{c_n}\right\}$ کراندار است .

۴) دنباله $\{a_n b_n + c_n\}$ کراندار است .

تست : دنباله $\left\{\left(\frac{۲b+۷}{۸}\right)^n\right\}$ کراندار است . b چند مقدار صحیح می تواند داشته باشد ؟

حل : دنباله نمایی با شرط $-۱ \le k \le ۱$ کراندار است.....

تست : دنباله $a_۱ = ۳$ و $a_{n+۱} = k a_n$ کراندار و یکنوای اکید است . محدوده k کدام است ؟

حل : جملات دنباله را می نویسیم :

$$۳, ۳k, ۳k^۲, \ldots \Rightarrow a_n = ۳k^{n-۱} \Rightarrow ۰ < k < ۱$$

سوپریمم : کوچکترین کران بالا را می نامند. که اگر سوپریمم در خود مجموعه موجود باشد آن را ماکزیمم می گویند.

اینفیمم : بزرگترین کران پایین را می نامند. که اگر اینفیمم در خود مجموعه موجود باشد آن را مینیمم می گویند.

تست : تفاضل بزرگ ترین کران پایین و ماکسیمم مجموعه $A=\left\{\frac{۱۰}{\sqrt{n+۲۴}}\middle| n\in\mathbb{N}\right\}$ کدام است ؟

حل : دنباله فوق نزولی بوده و همگراست پس جملات دنباله در بازه $[۰,۲)$ قرار می گیرد و $MaxA-\inf A=۲-۰=۲$

تست : در کدام مجموعه یکی از کران های پایین در خود مجموعه است ؟ (س ۸۷)

۱) $\{x: x|x|\le -۱\}$ ۲) $\{x:[x]=۲\}$ ۳) $\{x:[-x]=-۲\}$ ۴) $\{x: ۲-x\ge |x|\}$

تست : کوچک ترین کران بالای مجموعه $A=\left\{x-\frac{۱}{k}[kx]\middle| x\in\mathbb{R}\right\}, k>۰$ کدام است ؟

تست : اگر $A=\left\{nx+\frac{۱}{nx}\middle| ۰<x\le ۱\right\}$ آ آنگاه :

۱) فقط از بالا کراندار ۲) فقط از پایین کراندار

۳)از بالا و پایین کراندار ۴) از بالا و پایین بیکران

تست : کوچک ترین کران بالای $A=\left\{n\in\mathbb{Z}\middle| n=-x^۲-۸x, x\in\mathbb{R}\right\}$ کدام است ؟

$n=-(x+۴)^۲+۱۶\Rightarrow n\le ۱۶$

تست : ماکزیمم $\{n\,|\,n\in\mathbb{Z}, n|x|+n\le |x|\}$ کدام است ؟

حل : دقت شود در این جا سوپریمم خواسته نشده است بلکه ماکزیمم را خواسته که باید در خود مجموعه باشد .

$$n \le \frac{|x|}{|x|+۱} < ۱ \xrightarrow{n\in\mathbb{Z}} n \le ۰$$

تست : کوچکترین کران بالا و بزرگ ترین کران پایین مجموعه $A=\left\{\frac{۱-(-۱)^n}{n} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$ کدام است ؟

حل : دنباله به صورت $a_n=\begin{cases}\frac{۲}{n} & n \text{ فرد} \\ ۰ & n \text{ زوج}\end{cases}$ است و $\inf A=۰, \sup A=۲$ است .

تست : مجموع ماکسیمم و مینیمم مجموعه $A=\left\{(-۱)^n\left(\frac{n+۲}{n^۲}\right) \mid n\in\mathbb{N}\right\}$ کدام است ؟

تست : کوچک ترین کران بالای $A=\left\{۴-\frac{۴}{n}+\frac{۱}{n^۲} \mid n\in\mathbb{N}\right\}$ کدام است ؟

حل : دنباله را به صورت $a_n=\frac{۴n^۲-۴n+۱}{n^۲}=\frac{(۲n-۱)^۲}{n^۲}=\left(\frac{۲n-۱}{n}\right)^۲$ می توان ساده کرد که دنباله ای صعودی با جملات مثبت است و همگرا به ۴ است . پس سوپریمم آن ۴ است .

قضیه وایر اشتراس : هر دنباله یکنوا و کراندار همگراست .

الف) هر دنباله صعودی و از بالا کراندار ، همگراست .

ب) هر دنباله نزولی و از پایین کراندار ، همگراست .

تست : دنباله $a_{n+۱}=\sqrt{۲a_n+۱۵}$ با شرط $a_۱=۴$:

۱) صعودی و واگرا ۲) نزولی و همگرا ۳) صعودی و همگرا ۴) نزولی و واگرا

حل : با نوشتن جملات دنباله مشخص می شود صعودی و از بالا کراندار است .دنباله همگرا به $L=۵$ است.

تقریب زدن رادیکال : $\sqrt{x_۰+\Delta x}\simeq\sqrt{x_۰}+\dfrac{\Delta x}{۲\sqrt{x_۰}}$

$۴,\sqrt{۲۳}\simeq ۴/۸,\sqrt{۲۴/۶}=۴/۹۶,\dots\to ۵$

تست : کدام دنباله بازگشتی زیر همگراست ؟

۱) $\begin{cases}a_{n+۱}=\dfrac{۳a_n+۱}{۲}\\ a_۱=۱\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}a_{n+۱}=۹-a_n\\ a_۱=۵\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}a_{n+۱}=\dfrac{۳a_n+۱}{۴}\\ a_۱=۵\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}a_{n+۱}=\dfrac{۱}{۱-a_n}\\ a_۱=۰/۱\end{cases}$

تست : دنباله $a_{n+۱}=\dfrac{۱+۳a_n}{۶}$ و $a_۱=۴$ به کدام عدد همگراست ؟

تست : دنباله $a_{n+۱}=\sqrt{۱-a_n}$ و $a_۱=۱$ تعریف شده است . مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ کدام است ؟ (واگراست)

تست : دنباله $p_{n+۱}=-\dfrac{p_n}{۱+p_n}$ با شرط $p_۱=۱$ به کدام عدد همگراست ؟ (واگراست)

تست : دنباله $\left\{۲\sqrt{۳+\underbrace{۲\sqrt{۳+۲\sqrt{۳+\dots}}}_{a_n}}\right\}$ همگرا به کدام است ؟.

تست : مقدار همگرایی دنباله $\sqrt{۳},\sqrt{۳\sqrt{۳}},\sqrt{۳\sqrt{۳\sqrt{۳}}},\dots$ کدام است ؟

قضیه : هر عدد حقیقی حد دنباله ای از اعداد گویاست.

اثبات : اگر b گنگ باشد دارای بسط نامختوم $b=a_۰/a_۱a_۲\dots$ است . که اگر دنباله زیر را فرض کنیم

$b_1 = a_0 / a_1 \quad , \quad b_2 = a_0 / a_1 a_2 \quad .... \quad b_n = a_0 / a_1 a_2 .... a_n$

هر جمله دنباله فوق مختوم است ، گویاست و چون $0 < |b - b_n| < \frac{1}{10^n}$ طبق قضیه فشردگی دنباله $\{b_n\}$ همگرا به b است .

تست : کدام یک دنباله ای از اعداد گویا همگرا به عدد گنگ است ؟

۱) $\left\{\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{n}\right\}$ ۲) $\left\{\left[\frac{2n+1}{\sqrt{2}n}\right]\right\}$ ۳) $\left\{\frac{\left[\sqrt{2}n+1\right]}{n}\right\}$ ✓ ۴) $\left\{\left[\frac{\sqrt{2}n+3}{n}\right]\right\}$