پیوستگی در یک نقطه :

۱. مقدار تابع یعنی $f(a)$ را می یابیم (در صورتی که تعریف نشده باشد در مورد پیوستگی نمی توان حرف زد)

۲. حد تابع یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ را می یابیم .

۳. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ تابع در این نقطه پیوسته است .

نکته : تابع در نقاط انتهایی دامنه در صورتی پیوسته است که ، پیوستگی یک طرفه داشته باشد .

تست : اگر $f(x)=\dfrac{1+\cos(\frac{\pi x}{2})}{(x-2)^2}$ مقدار $f(2)$ را چقدر انتخاب کنیم تا در $x=2$، تابع پیوسته باشد ؟

$$\lim_{x\to 2} f(x)\overset{\text{HH}}{=}\lim_{x\to 2}\frac{-\frac{\pi^2}{4}\cos(\frac{\pi x}{2})}{2}=\frac{\pi^2}{8}\Rightarrow f(2)=\frac{\pi^2}{8}$$

تست : تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}[\cot x]+a & x<\frac{\pi}{4}\\ [\sqrt{2}\cos x] & x>\frac{\pi}{4}\\ [2x]+b & x=\frac{\pi}{4}\end{cases}$ در $x=\frac{\pi}{4}$ پیوسته است . مقدار $a+b$ کدام است ؟

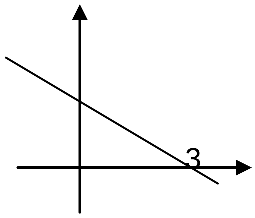
تست : در تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{\cos 13x}-\sqrt[3]{\cos 7x}}{x^2} & x\neq 0\\ k & x=0\end{cases}$ مقدار k چقدر باشد تا در $x=0$ پیوسته باشد ؟

تست : تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4a(\sqrt{x+3}+b)}{|x-1|} & x<1\\ c & x=1\\ [6x^3] & x>1\end{cases}$ در $x=1$ پیوسته است . حاصل $a+b+c$ کدام است ؟

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{۴a(\sqrt{x+۳}-۲)}{۱-x}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۴a(x-۱)}{(۱-x)(\sqrt{x+۳}+۲)}=-a \qquad \Rightarrow \quad -a=۶=c \quad \Rightarrow \quad a+b+c=-۲$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\left[۶x^۳\right]=۶$$

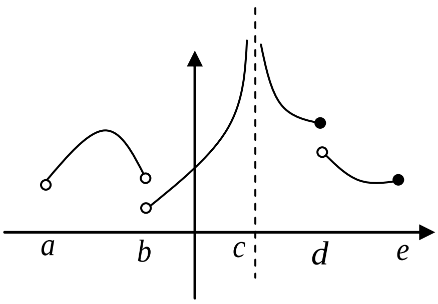
تست : نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۵x+b}{a-x} & x\neq a\\ ۱ & x=a\end{cases}$ شکل مقابل است . $a+b$ کدام است ؟



حل : چون نمودار خط است پس صورت بر مخرج بخش پذیر است

از طرفی $f(۳)=۰ \Rightarrow b=۶$ پس صورت کسر به شکل $(x-۲)(x-۳)$

است . بنابر این $a=۲$ (زیرا اگر $a=۳$ آنگاه $f(۳)=۱$)



تست : تابع مقابل در چند نقط از دامنه اش نا پیوسته است ؟

حل : نقاط a,b,c در دامنه نیست پس با آنها کاری نداریم و در

نقطه e تابع پیوسته است . و تنها نقطه نا پیوستگی d است .

تست : تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}[x]$ از نظر پیوستگی در $x=۰$ چگونه است ؟ (خارج کشور ۹۱)

حل : $x=۰$ در دامنه نیست و در مورد پیوستگی نمی توان حرف زد .

تست : تابع $f(x)=۵[x]-[x]^۲$ در کدام نقطه پیوسته است ؟

۱) صفر   ۲) ۳   ۳) ۲   ۴) ۱

حل : تابع به صورت $y=[x](۵-[x])$ است به ازای ۳ از چپ و راست دارای حد ۶ است و پیوسته است .

تست : تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱۵}{۵+۲^{\cot \pi x}} & x\neq ۱\\ ۰ & x=۱\end{cases}$ در $x=۱$ چه وضعیتی دارد ؟ (فقط پیوستگی راست)

تست : مجموعه نقاط پیوستگی تابع $f(x)=\frac{\tan x}{1+\sin x}$ کدام است ؟

حل : در واقع دامنه تابع است که برابر $R-\left\{x : x=k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$ است .

تست : تابع $f(x)=\log(\frac{49-x^2}{x^2-2x})$ در چند نقطه به طول صحیح پیوسته است ؟ (۱۰ تا)

تست : اگر تابع $f(x)=\frac{3\sin x+2}{2\sin x+a-1}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد ، حدود a کدام است ؟

حل : اگر مخرج ریشه نداشته باشد در $\mathbb{R}$ پیوسته خواهد بود .

$$2\sin x+a-1\neq 0 \Rightarrow \sin x\neq\frac{1-a}{2}\Rightarrow\left|\frac{1-a}{2}\right|>1\Rightarrow 1-a>2 \quad\vee\quad 1-a<-2 \quad\Rightarrow a\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$$

نقاط ناپیوستگی :

- نقاط منفرد در دامنه ، که معمولا در توابع رادیکالی با ریشه مضاعف زیر آن اتفاق می افتند .

تست : کدام یک از توابع زیر روی دامنه خود پیوسته است ؟

۱) $y=\sqrt{|x|(x-3)}$ ۲) $y=[2x]+[-2x]$ ۳) $y=\tan(\frac{1}{x})$ ۴) $y=\sqrt{x^4-16x^2}$

- نقاط مرزی در توابع چند ضابطه ای می تواند نا پیوسته باشد . (البته باید به پیوستگی خود ضابطه ها نیز توجه شود)

تست : تابع $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}+ax+b}{x+۳} & x\neq -۳\\ ۷ & x=-۳\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است . حاصل $۳a-b$ چقدر است ؟

تست : تابع $y=\begin{cases}ax^{۳}+bx^{۲}+c & x^{۲}\geq |x|\\ ۵x+۲ & x^{۲}<|x|\end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است . حاصل $a^{۲}+b^{۲}+c^{۲}$ چقدر است ؟

حل : با حل نامعادله $|x|\geq x^{۲}$ و $|x|> x^{۲}$ (ترجیحاً به روش هندسی) داریم :

$$y=\begin{cases}ax^{۳}+bx^{۲}+c & : \quad x\leq -۱ \text{ یا } x=۰ \text{ یا } x\geq ۱\\ ۵x+۲ & : \quad -۱<x<۰ \text{ یا } ۰<x<۱\end{cases}$$

اگر شرط پیوستگی را برای $x=-۱,۰,۱$ اعمال کنیم داریم : $a=۵,b=۰,c=۲$

- ریشه های داخلی تابع هویساید می توانند ناپیوسته باشد .

تست : تابع $f\left(x\right)=H([x]\left(x^{۲}-۱\right))$ چند نقطه نا پیوستگی دارد ؟

حل : درون تابع ۳ نقطه مرزی دارد $[x]=۰\to ۰\leq x<۱ \;,\; x^{۲}=۱\Rightarrow x=\pm ۱$ که با بررسی مشخص می شود فقط در $x=-۱$ ناپیوسته است . $\lim\limits_{x\to(-۱)^{+}}H((-۱)\times ۰^{-})=H\left(۰^{+}\right)=۱ \quad , \quad \lim\limits_{x\to(-۱)^{-}}H((-۲)\times ۰^{+})=H\left(۰^{-}\right)=۰$

- ریشه های داخل تابع ساین (زیرا مقدار تابع در ریشه ها (صفر) با مقدار حد در ریشه ها (± ۱) ، برابر نیست)

تست : تابع $f\left(x\right)=\operatorname{sgn}(x^{۲}-\sqrt{|x|})$ چند نقطه نا پیوستگی دارد ؟

حل : $x^{۲}=\sqrt{|x|}\Rightarrow x^{۴}=|x|$ پس ۳ نقطه نا پیوسته دارد .

- توابع شبه دیریکله فقط در نقاطی که دو ضابطه برابر باشند ، پیوسته است .

تست : تابع $f(x)=\begin{cases}\sin \pi x & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$ در کدام نقاط پیوسته است ؟

تست : تابع $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\in Q\\ 3x & x\notin Q\end{cases}$ مفروض است . تابع $(x^3-4x)f(x)$ در چند نقطه پیوسته است ؟

- نقاط صحیح کننده داخل تابع $[f(x)]$ مگر آنکه طول نقاط مینیمم یا عامل صفر کننده پشت براکت باشند .

تست : تابع $y=[x^3-12x]$ در $x=3,x=2$ از نظر پیوستگی به ترتیب چگونه اند ؟

حل : در هردو نقطه داخل براکت صحیح است ولی در ۲ مینیمم دارد :

$$y'=3x^2-12\Rightarrow y'(2)=0\Rightarrow \begin{array}{c|c}\multicolumn{2}{c}{2}\\ \hline - \searrow & + \nearrow\end{array}$$

تست : کدام یک از توابع زیر در $x=2$ حد دارد ولی پیوسته نیست ؟

۱) $y=[x]^2-4[x]$ ۲) $y=[x^3]-[x]$ ۳) $y=[x^3-x]$ ۴) $y=[4x-x^2]$

حل : در گزینه ۴ ، ریشه مشتق۲ است که طول نقطه ماکسیمم است پس فقط حد دارد

تست : تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=[x^2]$ را در $(-2,3)$ بدست آورید .

حل : ۱۲ نقطه که تابع در $x=0$ چون دارای مینیمم است پیوسته است . لذا ۱۱ نقطه نا پیوسته دارد .

$$x^2=k\Rightarrow x=\pm\sqrt{k}\Rightarrow x=0,\pm1,\pm\sqrt{2},\pm\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\sqrt{8}$$

تست : تابع $\left[\sqrt{3x}\right]\dfrac{2x-24}{x+1}=y$ در بازه $[3,48]$ چند نقطه ناپیوستگی دارد ؟

حل : ۱۰ نقطه که نقطه ابتدا نقطه مینیمم است و از ۹ نقطه باقیمانده $x=12$ ریشه ضریب است . پس ۸ نقطه نا پیوستگی دارد.

$$\sqrt{3x}=k \Rightarrow x=\frac{k^2}{3}\longrightarrow 3\le \frac{k^2}{3}\le 48 \Rightarrow 3\le k\le 12$$

تست : تابع $f(x)=\left(x^2-4\right)\left[\dfrac{x}{2}-1\right]$ روی بازه $(0,9)$ در چند نقطه ناپیوسته است ؟

تست : تابع $f(x)=[x]+\left[x+\dfrac{1}{3}\right]+\left[x+\dfrac{2}{3}\right]$ در بازه $[0,20]$ چند نقطه نا پیوستگی دارد ؟

تست : تابع $f(x)=\begin{cases}[2x] & |x|<2\\ x+1 & |x|\ge 2\end{cases}$ در چند نقطه نا پیوسته است ؟

حل : ضابطه اول در دامنه خود در نقاط $\left\{\dfrac{-3}{2},-1,\dfrac{-1}{2},0,\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2}\right\}$ نا پیوسته است . و در نقاط مرزی $2,-2$ نیز با بررسی مشخص می شود که فقط در $x=-2$ نا پیوسته است .لذا ۸ نقطه نا پیوستگی دارد .

تست : تابع $f(x)=(-1)^{[x]}\sin\dfrac{\pi}{2}x$ در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی چگونه است ؟

حل : عبارت اول نا پیوسته است بنابر این برای آنکه پیوسته باشد باید ضریب آن یعنی تابع سینوسی صفر شود .لذا به ازای $x=2k$ یعنی اعداد زوج مقدار سینوس صفر و تابع پیوسته است .

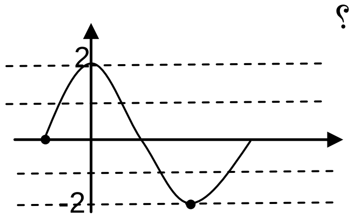
تست : به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\left[[x]-x\right] & x\notin\mathbb{Z}\\ a & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$ همواره پیوسته است ؟

حل : ضابطه بالا تابع ثابت ۱- است پس باید $a=-۱$

تست : تعداد نقاط نا پیوستگی تابع $f(x)=\sin(x-[x])\pi$ روی بازه $(۲,۶)$ کدام است ؟

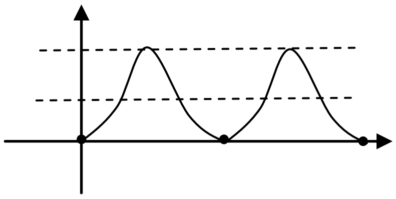
حل : تابع داخلی در نقاط ۳و۴و۵ نا پیوسته است .ولی با بررسی این نقاط برای $f(x)$ متوجه می شویم تابع در این نقاط (در واقع در کل نقاط صحیح) پیوسته است .

تست : شکل زیر نمودار تابع $f(x)$ است تابع $[f(x)]$ زیر در چند نقطه ناپیوسته است ؟



حل : خطهای $y=k\in\mathbb{Z}$ تابع را در ۹ نقطه قطع می کند.

ولی دو نقطه از این ۹ تا مینیمم هستند لذا ۷ نقطه ناپیوسته است .

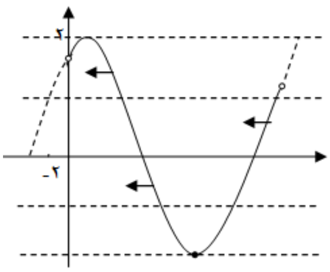


تست : تابع $y=[۲\sin^۲ x]$ چند نقطه ناپیوستگی در $[۰,۲\pi]$ دارد ؟

حل : خطهای $y=k\in\mathbb{Z}$ تابع را در ۹ نقطه قطع می کند.

ولی سه نقطه مینیمم هستند لذا ۶ نقطه ناپیوسته است .

تست : تابع $y=(۴x-۳\pi)[\sqrt{۲}(\sin x+\cos x)]$ چند نقطه ناپیوستگی در $(۰,۲\pi)$ دارد ؟ (آ ۸۸)

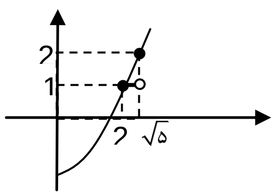


حل : با رسم تابع $y=\left[۲\sin\left(x+\frac{\pi}{۴}\right)\right]$ مشخص می شود که تابع

۸ نقطه برخورد دارد که یکی مینیمم و یکی هم ریشه ضریب است .

پس ۶ نقطه ناپیوسته است .

تست : تابع با ضابطه $y=[x^۲-۳]$ روی بازه $[۲,۲+k)$ پیوسته است ، بیشترین مقدار k کدام است ؟



حل : $۲+k=\sqrt{۵}\Rightarrow \boxed{k=\sqrt{۵}-۲}$

روش تستی : اگر ۲ را درون براکت بگذاریم حاصل ۱ می شود پس دنبال عدد دیگری هستیم که با قرار دادن در براکت، حاصل ۲ (عدد صحیح بعدی) شود . و آن عدد $\sqrt{5}$ است .

تست : تابع $y=[\sin 2\pi x]$ در بازه $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}+a\right)$ پیوسته است . بیشترین مقدار a کدام است ؟

روش تستی : اگر $\frac{1}{2}$ را درون براکت بگذاریم حاصل ۰ می شود پس دنبال عدد دیگری هستیم که با قرار دادن در براکت، حاصل ۱ شود . و آن عدد ۱ است .

تست : تابع $f(x)=[\log(x+1)]$ در بازه $[9,k)$ پیوسته است . بیشترین مقدار k کدام است ؟

روش تستی : اگر ۹ را درون براکت بگذاریم حاصل ۱ می شود پس دنبال عدد دیگری هستیم که با قرار دادن در براکت، حاصل ۲ شود . و آن عدد ۹۹ است .

نکته : اگر مجموع با تفاضل توابع براکتی را داشته باشیم ، در نقاط صحیح کننده غیر مشترک حتماً ناپیوسته هستند ولی در نقاط مشترک باید بررسی شوند . (در حالت ضربی اگر یکی از آنها صفر شود ، در آن نقاط نیز پیوسته است)

تست : تابع $f(x)=[2x]+[3x]$ در بازه $(-1,1)$ در چند نقطه ناپیوسته است ؟

حل : نقاط ناپیوستگی $[2x]$ برابر : $\left\{\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2}\right\}$ نقاط ناپیوستگی $[3x]$ برابر : $\left\{\frac{-2}{3},\frac{-1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right\}$

در نقاط غیر مشترک حتماً نا پیوسته خواهد بود(زیرا در مجموع دو تابع اگر یکی نا پیوسته باشد حاصل نیز ناپیوسته خواهد بود) ولی در نقاط مشترک باید بررسی شود . که پس از بررسی متوجه می شویم تابع در $x=0$ نیز ناپیوسته است لذا نقاط ناپیوستگی عبارت اند از : $\left\{\frac{-2}{3},\frac{-1}{2},\frac{-1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right\}$

تست : تابع $f(x)=[2x][3x]$ در بازه $(-1,1)$ در چند نقطه ناپیوسته است ؟

حل: در نقاطی از $\left\{\frac{-۲}{۳},\frac{-۱}{۲},\frac{-۱}{۳},۰,\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳}\right\}$ که مقدار یکی از براکت ها دیگری را صفر کند پیوسته است .در غیر این صورت نا پیوسته است .پس در نقطه $x=\frac{۱}{۳}$ و $x=۰$ پیوسته است . لذا ۵ نقطه نا پیوسته دارد .

تست : تابع $y=\left[\frac{۳x}{۲}\right]-\left[\frac{۴x}{۳}\right]$ در بازه $[۵,۷]$ چند نقطه نا پیوستگی دارد ؟

حل : اولی در ضرایب صحیح $\frac{۲}{۳}$ یعنی : $\left\{\frac{۱۶}{۳},\frac{۱۸}{۳},\frac{۲۰}{۳}\right\}$ مقادیر صحیح دارد . و دومی در ضرایب صحیح $\frac{۳}{۴}$ یعنی $\left\{\frac{۲۱}{۴},\frac{۲۴}{۴},\frac{۲۷}{۴}\right\}$ مقادیر صحیح دارد . در نقطه مشترک $x=۶$ مشخص می شود که تابع پیوسته است. ۴ نقطه ناپیوسته دارد .

تست : تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x)=x-[x]+\sin(\frac{\pi}{۲}[x])$ در بازه $[۳,۶]$ کدام است ؟

حل : نقاط ناپیوستگی هر دو تابع $y=\sin(\frac{\pi}{۲}[x])$ و $y=x-[x]$ برابر $\{۳,۴,۵,۶\}$است پس باید در همه نقاط پیوستگی بررسی شود .که پس از بررسی متوجه می شویم تابع فقط در $x=۶$ ناپیوسته است.

تست : تابع $f(x)=\log[۲x]+\log(۴-x)$ در چند نقطه از دامنه اش نا پیوسته است ؟

$$[۲x]>۰\Rightarrow ۲x\geq ۱\Rightarrow x\geq\frac{۱}{۲}\quad,\quad ۴-x>۰\Rightarrow x<۴\quad\xrightarrow{\cap}\frac{۱}{۲}\leq x<۴$$

تابع براکت در نقاط $\left\{\frac{۱}{۲},۱,\frac{۳}{۲},۲,\frac{۵}{۲},۳,\frac{۷}{۲}\right\}$ صحیح است که در نقطه ابتدا مینیمم دارد . ۶ نقطه نا پیوسته است .

تعریف دنباله ای پیوستگی :

می گوییم f در a پیوسته است، هرگاه $f(a_n)\to f(a)\quad\Rightarrow\quad a_n\to a\quad;\quad \forall a_n\in D_f$

تست : تابع f در $x=۵$ از چپ پیوسته و دارای حد راست ۲ است . اگر $f(۵)=-۱$ باشد ، دنباله $\left\{f\left(\frac{۵n^۲+۷}{n^۲+n}\right)\right\}$ به چه عددی همگراست؟

حل : تابع در $x=۵$ از چپ پیوسته است داریم $f(۵)=-۱$ پس $\lim_{x\to ۵^-} f(x)=f(۵)=-۱$:

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{۵n^۲+۷}{n^۲+n}\right)=\lim_{x\to+\infty} f(۵^-)=-۱$$

نتیجه ۱: اگر f,g در نقطه a پیوسته باشند ، آنگاه توابع $(g(a)\neq ۰)$ $\frac{f}{g}$, fg , $f\pm g$ نیز در a پیوسته هستند .

تست : $f(x)=۳x-۶$ و $g(x)=x^۲+x+۱$ روی فاصله معینی پیوسته هستند.کدام تابع لزوماً در این فاصله پیوسته نیست

۱) $۳f^۲(x)g(x)$ ۲) $\frac{f(x)}{g(x)}$ ۳) $\sqrt{f(x)g(x)}$ ۳) $۷f^۲(x)-۶f(x)+۱$

تست : تابع f اکیداً نزولی و از مبدا می گذرد و در هر بازه ای پیوسته است . در کدام گزینه نمی توان در مورد پیوستگی تابع در $x=۰$ صحبت کرد ؟

۱) $f^{-۱}$ ۲) $f^۳$ ۳) $\sqrt{-xf}$ ۴) $\sqrt{xf}$

حل : می توان با فرض $y=-x$ به عنوان یک تابع با شرایط داده شده متوجه شد که تابع گزینه ۴ قابل تعریف نیست.

نتیجه ۲ : اگر f در a پیوسته و g در a ناپیوسته باشد ، تابع $f\pm g$ حتماً نا پیوسته است . و تابع $f\times g$ با شرط اینکه $f(a)=۰$ و تابع g اطراف a کراندار باشد ، پیوسته است .

تست : توابع f,g با دامنه R مفروض هستند . اگر f در $x=a$ پیوسته و g در این نقطه نا پیوسته باشد . کدام تابع الزاماً ناپیوسته است ؟

۱) $(|f|-۱)g$ ۲) $(|g|-۱)f$ ۳) $(|f|+۱)g$ ۴) $(|g|+۱)f$

حل : برای اینکه حاصل ضرب یک تابع پیوسته و یک تابع نا پیوسته در یک نقطه پیوسته باشد آن است که تابع پیوسته در این نقطه دارای حد صفر باشد و در گزینه ۳ تابع پیوسته $|f|+۱$ هیچ گاه نمی تواند صفر باشد .

تست : تابع f با دامنه R دقیقاً در ۱۰ نقطه پیوسته است . اگر همواره $|f(x)|<۳$ ، تابع $y=(x^۳-۳x-۱)f(x)$ در چند نقطه پیوسته است ؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۳ ۳) حداکثر ۱۱ ۴) حداکثر ۱۳

حل : چون تابع f کراندار است پس در نقاطی که تابع ضریب صفر شود تابع پیوسته خواهد بود . به روش هندسی مشخص می شود که چند جمله ای ضریب ۳ ریشه دارد ولی این ۳ ریشه می تواند جزء همان نقاط پیوستگی تابع f باشد . پس حداکثر ۱۳ نقطه پیوستگی وجود خواهد داشت .

نتیجه ۳: فقط وقتی تابع f در $g(a)$ پیوسته باشد ، $\lim_{x\to a} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$

- ✓ پس اگر f در a پیوسته باشد، ترکیب تابع f با هر تابع پیوسته در $\mathbb{R}$ ، پیوسته است : $f^n,|f|,\sin f,...$
- ✓ پس برای اینکه خطا نکنیم ، برای بررسی پیوستگی تابع مرکب یا آن را تشکیل می دهیم یا دقت را بالا می بریم.

تست : اگر $g(x)=x-\frac{۱}{x}$ و $\lim_{x\to ۱} f(g(x))=f\left(\lim_{x\to ۱} g(x)\right)$ کدام گزینه می تواند تابع f باشد ؟

۱) $f(x)=x-[x]$ ۲) $f(x)=[x^۲]+[x]$ ۳) $f(x)=(x^۲+۱)\operatorname{sgn}(x)$ ۴) $f(x)=\sqrt{x\operatorname{sgn}(x)}$

حل : باید تابع f در $g(۱)=۰$ پیوسته باشد . و فقط گزینه ۴ پیوسته است . (توجه : $x\operatorname{sgn}(x)=|x|$)

تست : اگر f در $x=x_۰$ پیوسته باشد آنگاه در $x=x_۰$:

۱) تابع $[f]$ قطعاً پیوسته ولی $|f|$ ممکن است پیوسته نباشد .

۲) تابع $|f|,[f]$ قطعاً پیوسته هستند.

۳) تابع $|f|$ قطعاً پیوسته ولی تابع $[f]$ ممکن است ناپیوسته باشد .

۴) توابع $|f|,[f]$ ممکن است ناپیوسته باشند .

تست : اگر $f(x)=\sqrt{1-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-\sqrt{x}}$ ، تابع gof در $x=1$ از نظر پیوستگی چگونه است ؟

حل : هیچ نوع پیوستگی ندارد .

$\lim\limits_{x\to 1^-} g(f(x))=g(0^+)=\sqrt{0^-}$ وجود ندارد $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^+} g(f(x))=g(\sqrt{0^-})$ وجود ندارد

تست : اگر $f(x)=[x^2]$ و $g(x)=\sqrt{x}-1$ ، تابع fog در $x=1$ و $x=4$ از نظر پیوستگی چگونه است ؟

قضیه پیوستگی تابع وارون :

اگر f در $[a,b]$ پیوسته و اکیداً صعودی باشد آنگاه f^{-1} روی $[f(a),f(b)]$ پیوسته و اکیداً صعودی است.

اگر f در $[a,b]$ پیوسته و اکیداً نزولی باشد آنگاه f^{-1} روی $[f(b),f(a)]$ پیوسته و اکیداً نزولی است.

تست : وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{x-2}$ در بازه $(m,n]$ پیوسته است . بیشترین مقدار $n-m$ کدام است ؟

حل : $D=[2,+\infty)$ و تابع را می توان به صورت $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}+\sqrt{x-2}}$ نوشت که تابعی اکیداً نزولی است .

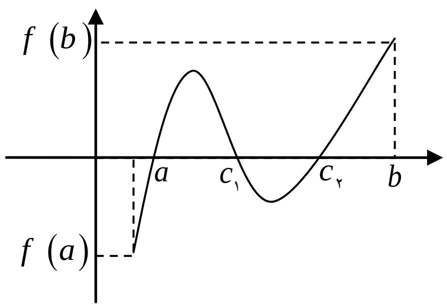
بنابر این f^{-1} در بازه $\left(f(+\infty),f(2)\right]=\left(0,\sqrt{2}\right]$ پیوسته و اکیداً نزولی است . $n-m=\sqrt{2}$

تست : فاصله پیوستگی تابع وارون تابع $f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{10-x}$ کدام است ؟

تست : اگر $f(x)=\begin{cases} x+1 & 0\le x\le 1 \\ 4-2x & 2\le x\le 4\end{cases}$ ، f^{-1} در چه بازه ای پیوسته و اکیداً نزولی است ؟

تست : اگر تابع f در بازه $[-۳,۱]$ پیوسته و یکنوای اکید باشد . و $f(-۳)=۱, f(۱)=-۳$ ، آنگاه $f^{-۱}$ در بازه $[-۳,۱]$:

۱) پیوسته و صعودی ۲) پیوسته و نزولی ۳) ممکن است غیر یکنوا باشد ۴) ناپیوسته و صعودی



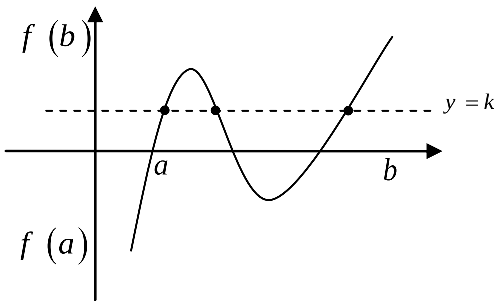
قضیه بولتزانو : اگر f در $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<۰$

آنگاه حداقل یک c در بازه (a,b) وجود دارد که $f(c)=۰$

یعنی تابع حداقل یک ریشه در این بازه دارد

اگر اکیداً یکنوا باشد (یک به یک است) دقیقاً یک ریشه دارد .

نتیجه : توابع چند جمله ای از درجه فرد ، حداقل یک ریشه حقیقی دارند .(زیرا $f(+\infty)=+\infty, f(-\infty)=-\infty$)



قضیه مقدار میانی : اگر f در $[a,b]$ پیوسته و k عددی بین

( ) $f(a)b$ باشد . آنگاه حداقل یک c در بازه $[a,b]$ وجود دارد

که $f(c)=k$

یعنی خط $y=k$ نمودار تابع را حداقل در یک نقطه قطع می کند .

اگر اکیداً یکنوا باشد (یک به یک است) دقیقاً در یک نقطه قطع می کند .

تست : تابع $f(x)=x+\sin x$ در کدام فاصله می تواند مقدار ۵ اختیار کند ؟

۱) $(۰,\frac{\pi}{۲})$ ۲) $(\frac{\pi}{۲},\pi)$ ۳) $(\pi,\frac{۳\pi}{۲})$ ۴) $(\frac{۳\pi}{۲},۲\pi)$

حل : در واقع معادله $x+\sin x-۵=۰$ است . گزینه ۴

x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
y	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

تست : برای معادله $\sin x - x^{۲} + x + ۱ = ۰$ در بازه $[-\pi, \pi]$ کدام گزینه صحیح است ؟

۱) ریشه ندارد ۲) حداقل دو ریشه ۳) حداکثر یک ریشه ۴) دقیقاً یک ریشه

تست : معادله $x^{۳} + ۲x + ۱ = ۰$ در بازه $(-۱,۰)$:

۱) دقیقاً یک ریشه ۲) دقیقاً دو ریشه ۳) حد اقل دو ریشه ۴) ریشه ندارد

تست : یکی از ریشه های معادله $(a+۲)x^{۲} - ۷x + ۴ = a$ بین ۱و ۱- است .مجموعه مقادیر a کدام است ؟

۱) R ۲) ϕ ۳) $a > ۴$ ۴) $a < -۲$

$$f(x) = (a+۲)x^{۲} - ۷x + ۴ - a \Rightarrow \begin{cases} f(۱) = -۱ \\ f(-۱) = ۱۳ \end{cases} \Rightarrow f(۱)f(-۱) < ۰ \quad \Rightarrow \quad a \in R$$

تست: اگر $f(x) = x^{۴} + (x-۱)(x-۲)(x-۳)$ کدام خط در بازه $[۱,۲]$ نمودار منحنی را قطع می کند ؟

۱) $y = ۰$ ۲) $y = \sqrt{۱۰۱}$ ۳) $y = -\sqrt{۱۰۱}$ ۴) $y = \sqrt{۰/۱۰۱}$

تست : تابع $f(x) = \begin{cases} x^{۲} - ۱ & -۱ \le x \le ۱ \\ ۵x - ۵ & ۱ < x \le ۳ \end{cases}$ در بازه $[-۱,۳]$ تعریف شده است . مقدار c متناظر با قضیه مقدار میانی به ازای $k = ۵$ کدام است ؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\sqrt{۶}$ ۴) شرایط قضیه برقرار نیست

حل : باید تابع در این بازه پیوسته باشد که هست . (در ۱ بررسی شد) . باید $k = ۵$ عددی بین $f(-۱) = ۰, f(۳) = ۱۰$ باشد که هست.پس شرایط برقرار است و $f(x) = ۵$ فقط یک ریشه دارد که ۲ است و همان مقدار c است .