معرفی صفر مطلق و صفر حدی

صفر مطلق به خود صفر می گویند مثلاً $\lim\limits_{n\to 1^-}[x]=0$ و فقط در حد های براکتی ظاهر می شود .

صفر حدی به اطراف صفر می گویند مثلاً $\lim\limits_{n\to 1^\pm}(x-1)=0^\pm$ و در واقع یک عدد غیر صفر است .

$$\text{صفر}=\frac{\text{صفر مطلق}}{\text{عدد یا صفر حدی}} \qquad \text{وجود ندارد}=\frac{\text{عدد یا صفر حدی}}{\text{صفر مطلق}}$$

تست : حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\dfrac{x-1}{[x-1]}$ کدام است ؟

تست : $\lim\dfrac{[x]^2-4}{x^2-4}$ وقتی $x\to 2^+$ کدام است ؟ (آ ۶۵)

حد بی نهایت :

عدد بر روی صفر حدی ، برابر بی نهایت است .

$$\frac{-1}{0^-}=+\infty \qquad \frac{-1}{0^+}=-\infty \qquad \frac{1}{0^-}=-\infty \qquad \frac{1}{0^+}=+\infty$$

حد در بی نهایت :

عدد بر روی بی نهایت برابر صفر است .

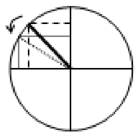
تست : حاصل حد های زیر را بیابید :

$$\odot\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{x^3-3x+2}\overset{H}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{3x^2-3}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

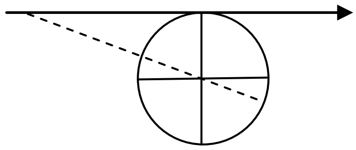
$$\odot\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}-\sqrt[5]{x}}{\cancel{x}+\sqrt[3]{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{-1}{x^{p>0}}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

$$\odot \lim_{x\to ۲}\frac{(-۱)^{[x]+۱}}{x^{۲}-۴}=\begin{cases} x\to ۲^{+} & \frac{-۱}{۰^{+}}=-\infty \\ x\to ۲^{-} & \frac{۱}{۰^{-}}=-\infty \end{cases}$$

$$\odot \lim_{x\to\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)^{+}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{-}{۰^{-}}=+\infty$$

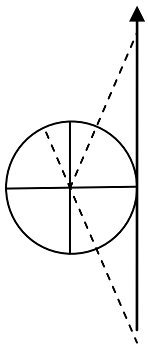


$$\odot \lim_{x\to ۰^{-}}\frac{[\cot x]}{\sin x}=\frac{[-\infty]}{۰^{-}}=\frac{-\infty}{۰^{-}}=+\infty$$

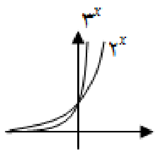


$$\odot \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{۱+۲^{\tan x}}=\begin{cases} x\to \frac{\pi}{۲}^{+} & \frac{۱}{۱+۲^{-\infty}}=۱ \\ x\to \frac{\pi}{۲}^{+} & \frac{۱}{۱+۲^{+\infty}}=۰ \end{cases}$$

حد ندارد

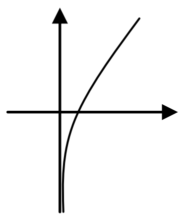


$$\odot \lim_{x\to ۰^{-}}\frac{۳^{x}+۲^{x}}{۳^{x}-۲^{x}}=\frac{۱+۱}{۰^{-}}=-\infty$$



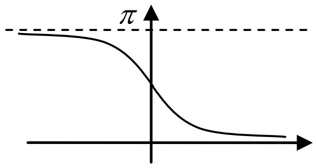
$$\odot \lim_{x\to-\infty}\frac{۲^{x}+۲^{-x}}{۲^{x}-۲^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۰+۲^{-x}}{۰-۲^{-x}}=-۱$$

$$\odot \lim_{x\to ۰^{+}}\left[\log_{x}^{۲}\right]=\lim_{x\to ۰^{+}}\left[\frac{۱}{\log_{۲}^{x}}\right]=\left[\frac{۱}{-\infty}\right]=\left[۰^{-}\right]=-۱$$

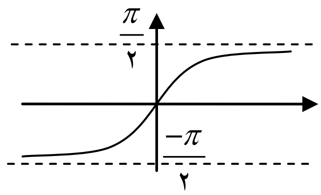


$$\odot \lim_{x\to ۱^{+}}\log\left(\frac{x^{۲}-x}{x+۱}\right)=\lim_{x\to ۱^{+}}\log\left(\frac{x(x-۱)}{x+۱}\right)=\log\left(\frac{۱\times ۰^{+}}{۲}\right)=\log ۰^{+}=-\infty$$

$\odot \lim\limits_{x\to ۰^+}\cot^{-۱}(\frac{x+۱}{\sqrt{x}-\sqrt[۳]{x}})=\cot^{-۱}\left(\frac{۱}{۰^-}\right)=\cot^{-۱}\left(-\infty\right)=\pi$



$\odot \lim\limits_{x\to+\infty}\tan^{-۱}\left(\log x\right)=\tan^{-۱}(+\infty)=\frac{\pi}{۲}$



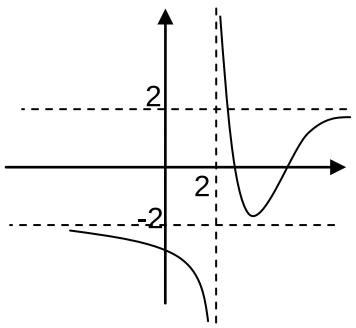
$\odot \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\tan^{-۱}x}{۲-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{۲}x}{-x}=\frac{-\pi}{۲}$

$\odot \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{۲}{\pi}\tan^{-۱}(x^۲-۱)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{۲}{\pi}\times(\frac{\pi}{۲})^-\right]=\left[۱^-\right]=۰$

$\odot \lim\limits_{x\to-\infty}[\frac{۱}{۱+\tan(۳\underbrace{\tan^{-۱}x}_{(-\frac{\pi}{۲})^+})}]=[\frac{۱}{\underbrace{۱+\tan(-\frac{۳\pi}{۲})^+}_{-\infty}}]=\left[\frac{۱}{-\infty}\right]=\left[۰^-\right]=-۱$

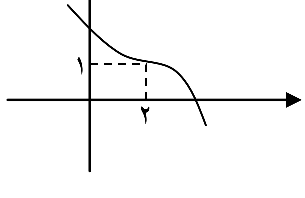
$\odot \lim\limits_{x\to+\infty}(\left[\frac{۱}{x}\right]-\left[-\frac{۱}{x}\right])=\left[۰^+\right]-\left[۰^-\right]=۱$

تست : اگر نمودار f به صورت زیر باشد ، حاصل مجموع حد چپ و راست تابع $y=\left[fof\left(x\right)\right]$ در $x=۲$ کدام است ؟



$$\left.\begin{array}{l}\left[f\left(f\left(۲^+\right)\right)\right]=\left[f\left(+\infty\right)\right]=\left[۲^-\right]=۱\\ \left[f\left(f\left(۲^-\right)\right)\right]=\left[f\left(-\infty\right)\right]=\left[(-۲)^-\right]=-۳\end{array}\right\}\xrightarrow{+}-۲$$

تست : اگر نمودار f به صورت زیر باشد ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{x-۴}{f\left(x\right)-۱}$ کدام است ؟



تست : در تابع $f\left(\dfrac{x}{x-۱}\right)=\dfrac{[x]}{x}$ حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ کدام است ؟

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=f(-\infty)=\lim_{x\to ۱^-} f\left(\frac{x}{x-۱}\right)=\frac{[۱^-]}{۱}=۰$$

تست : اگر $f(x)=\dfrac{۲^{-x}+۱}{۲^{-x}-۱}$ و $g(x)=\dfrac{۲^x-۱}{۲^x+۱}$ آنگاه مقدار $\lim\limits_{x\to۰}(gof)(x)$ کدام است ؟

$$\left.\begin{aligned} g(f(۰^+))&=g\left(\frac{۲}{۰^-}\right)=g(-\infty)=\frac{۰-۱}{۰+۱}=-۱\\ g(f(۰^-))&=g\left(\frac{۲}{۰^+}\right)=g(+\infty)=\frac{۲^x}{۲^x}=۱\end{aligned}\right\}\Rightarrow \text{حد ندارد}$$

رفع ابهام در بی نهایت $\left(\infty\times۰, \infty-\infty, \dfrac{\infty}{\infty}\right)$:

الف) هم ارزی پرتوان چند جمله ای ها

$$\frac{x^n+ax^{n-۱}+\dots}{x^{n-۱}+bx^{n-۲}+\dots}\approx x+(a-b) \qquad (x+a)^n-(x+b)^n\approx n(a-b)x^{n-۱} \qquad ax^n+bx^{n-۱}+\dots\approx ax^n$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+۱)^۴+(x-۱)^۴}{x(x+۱)(۲x+۱)(۳x+۱)}=\frac{۲x^۴}{۶x^۴}=\frac{۱}{۳}$$

$$\odot \lim_{x\to\infty}\frac{x^۲+\cos x}{۲x^۲}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^۲}{۲x^۲}=\frac{۱}{۲}$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty}(\log_۲(۴x+۱)-\log_۲(x-۲))=\lim_{x\to+\infty}\log_۲\frac{۴x+۱}{x-۲}=\lim_{x\to+\infty}\log_۲ ۴=۲$$

$$\odot \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^۲+x+۱}{۲x^۲+۱}\right)^{\frac{۲x+۱}{x}}=\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲=\frac{۱}{۴}$$

$$\odot \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{۳x^۲+۶x+\sqrt{x^۴+x}}}{\sqrt[۳]{\sqrt{۷x^۲+\sqrt{x^۶+x-۱}}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{۳x^۲+x^۲}}{\sqrt[۳]{\sqrt{۷x^۲+|x^۳|}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{۴x^۲}}{\sqrt[۳]{-x^۳}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲|x|}{-x}=\frac{-۲x}{-x}=۲$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}+\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۴]{x}}{\sqrt{۴x+۱}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}}=\frac{۱}{۲}$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{۴x+۱}{۲x-۱}\right]=[۲]\xrightarrow{x=۱۰۰}\left[\frac{۴۰۱}{۱۹۹}\right]=\left[۲^{+}\right]=۲$$

$$\odot \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^{۲}+x+۱}{x^{۲}+x+۳}\right]+\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x-۱}{x+۲}\right]\xrightarrow{x=-۱۰۰}\left[\frac{۹۹۰۱}{۱۰۱۰۱}\right]+[۲]=\left[۱^{-}\right]+۲=۲$$

....

$$\odot \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+۲)^{۱۰}-(x-۱)^{۱۰}}{(x-۲)^{۱۰}-(x+۱)^{۱۰}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱۰\times ۳x^{۹}}{۱۰\times(-۳)x^{۹}}=-۱$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sqrt{x}+۱)^{۲}-(x+\sqrt{x}-۱)^{۲}}{(\sqrt{x}-۱)^{۲}+(۲\sqrt{x}-۱)^{۲}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲\times۲\left(x+\cancel{\sqrt{x}}\right)}{x+۴x}=\frac{۴x}{۵x}=\frac{۴}{۵}$$

....

$$\odot \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^{۴}}{۲x^{۳}-۳}-\frac{x^{۲}}{۲x+۱}\right)=\frac{۱}{۲}(x+۰)-\frac{۱}{۲}\left(x-\frac{۱}{۲}\right)=\frac{۱}{۴}$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{۲}}{x+۱}-\frac{x^{۲}+x}{x-۱}\right)=x-۱-(x+۲)=-۳$$

$$\odot \lim_{x\to\infty}\frac{۳x^{۶}+۶x^{۵}+۹}{x^{۵}-۲x^{۴}+۱}-۳x=\lim_{x\to\infty}\frac{۳(x^{۶}+۲x^{۵}+۳)}{x^{۵}-۲x^{۴}+۱}-۳x=۳(x+۴)-۳x=۱۲$$

تست : حد کسر $\frac{x^{m+۳}+nx+m}{mx^{n-۲}-mx+n-۱}$ با شرط $n>۳$ وقتی $n\to+\infty$ برابر ۲- است . $m+n$ کدام است ؟

تست : اگر $\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-۲)x^{۲}+\sqrt{bx+۱}}{\sqrt{x-۱}+\sqrt[۳]{x}}=۲$ آنگاه $a+b$ کدام است ؟

تست : در تابع $f(x)=\frac{ax^{n}+۱۵}{۳x-\sqrt{۴x^{۲}+۱۵x}}$. اگر $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-۱$ ، آنگاه $\lim_{x\to۳}f(x)$ کدام است ؟ (س ۹۴ تجربی)

تست : اگر $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x^{۲}+x}{x-۱}-ax)=b$ آنگاه $a+b$ کدام است ؟

تست : اگر برای هر $x>۰$ داشته باشیم $|۲f(x)-۴|<\frac{x}{x^{۲}+۱}$ آنگاه مقدار $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ کدام است ؟

ب) هم ارزی های رادیکالی :

۱) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{ax^n+bx^{n-۱}+c}\approx\sqrt[n]{a}\left|x+\frac{b}{na}\right|$ اگر n فرد باشد ، قدر مطلق را بر می داریم

۲) $\sqrt[n]{(x+a_۱)(x+a_۲)...(x+a_n)}\approx\left|x+\overline{a_i}\right|$ اگر n فرد باشد ، قدر مطلق را بر می داریم

۳) $\sqrt[n]{u+a}-\sqrt[n]{u+b}\approx\frac{a-b}{n\sqrt[n]{u^{n-۱}}}$ $\qquad\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt[n]{\frac{x+a}{x+b}}-۱)\approx\frac{a-b}{n}$

$\odot\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^{۲}+۴x}-\sqrt[۳]{x^{۳}-۶x^{۲}-x+۱}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}|x+۲|+(x-۲)=-x-۲+x-۲=-۴$

$\odot\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[۳]{۲۷x^{۳}+۸x^{۲}}-\sqrt{۹x^{۲}+۲x}$

$\odot\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x-۲\sqrt{x}}-۲\sqrt{x})\xrightarrow[t\to+\infty]{x=t^{۲}}\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{t^{۲}+t}+\sqrt{t^{۲}-۲t}-۲t)=\left|t+\frac{۱}{۲}\right|+|t-۱|-۲t=\frac{-۱}{۲}$

$\odot\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[۳]{x^{۹}+۴x^{۶}+۵}-\sqrt{x^{۶}+۳x^{۳}+۲}\xrightarrow[t\to+\infty]{x^{۳}=t}\lim\limits_{t\to+\infty}\sqrt[۳]{t^{۳}+۴t^{۲}}-\sqrt{t^{۲}+۳t}=t+\frac{۴}{۳}-\left|t+\frac{۳}{۲}\right|=-\frac{۱}{۶}$

$\odot\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^{۴}+۲x^{۳}+۵}{x^{۲}-۷x}}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^{۲}+۹x}-x=x+\frac{۹}{۲}-x=\frac{۹}{۲}$

$\odot\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[۵]{(x-۱)(x-۲)(x-۳)(x-۴)(x-۵)}-x=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\frac{۱۵}{۵})-x=-۳$

$\odot\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[۴]{(x+۱)(x+۲)(x+۳)(x+۴)}-\sqrt[۳]{(x-۱)(x-۲)(x-۳)})=\lim\limits_{x\to+\infty}(\left|x+\frac{۱۰}{۴}\right|-\left(x-\frac{۶}{۳}\right))=\frac{۹}{۲}$

$$\odot \lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^۲+۱}-\sqrt{x^۲-۱}) = \lim_{x\to-\infty} x(\frac{۱-(-۱)}{۲\sqrt{x^۲}}) = \frac{۲}{-۲} = -۱$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+۳}-\sqrt{x+۷})(\overbrace{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x+۹}}^{۲\sqrt{x}}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{۳-۷}{۲\sqrt{x}} \times ۲\sqrt{x} = -۴$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+۱}-۲\sqrt{x+۲}+\sqrt{x+۴}) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+۱}-\sqrt{x+۲}+\sqrt{x+۴}-\sqrt{x+۲}) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\frac{۱-۲}{۲\sqrt{x}}+\frac{۴-۲}{۲\sqrt{x}}) = \frac{-۱+۲}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\odot \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^۲+۴x}-\sqrt{x^۲+۲x}}{\sqrt[۳]{x^۳+۳x}-\sqrt[۳]{x^۳+۶x^۲}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{۴x-۲x}{۲\sqrt{x^۲}}}{\frac{۳x-۶x^۲}{۳\sqrt[۳]{(x^۳)^۲}}} = \frac{\frac{۲x}{-۲x}}{\frac{-۶x^۲}{۳x^۲}} = \frac{-۱}{-۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^۳+۳x^۲+۱}-\sqrt{x^۳-x^۲+۱}}{\sqrt{۲x+۱}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{۳x^۲+۱-(-x^۲+۱)}{۲\sqrt{x^۳}}}{\sqrt{۲x}} = \frac{۴x^۲}{۲\sqrt{۲}x^۲} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x+۴\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{۴\sqrt{x}-۰}{۲\sqrt{x}}}{\frac{\sqrt{x}-۰}{۲\sqrt{x}}} = \frac{۲}{\frac{۱}{۲}} = ۴$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+\sqrt{۴x-\sqrt{x}}}-\sqrt{x-\sqrt{x+\sqrt{۹x}}}) = \lim_{x\to+\infty} (\frac{\sqrt{۴x-\sqrt{x}}-(-\sqrt{x+\sqrt{۹x}})}{۲\sqrt{x}}) = \frac{۲\sqrt{x}+\sqrt{x}}{۲\sqrt{x}} = \frac{۳}{۲}$$

$$\odot \lim_{x\to\infty} \sqrt[۴]{x^۸+۳x^۶+۵x^۴+۱}-\underbrace{x^۲}_{\sqrt[۴]{x^۸}} = \lim_{x\to\infty} \frac{۳x^۶+۵x^۴+۱-۰}{۴\sqrt[۴]{(x^۸)^۳}} = \lim_{x\to\infty} \frac{۳x^۶}{۴x^۶} = \frac{۳}{۴}$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{\frac{x-۱}{x+۱}}-۱) = \frac{-۱-۱}{۲} = -۱$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty} x(\frac{\sqrt[۳]{x+۷}}{\sqrt[۳]{x+۲}}-۱) = \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt[۳]{\frac{x+۷}{x+۲}}-۱) = \frac{۵}{۳}$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{\frac{x^۳+۵x^۲}{x+۲}}-\mathrm{x}) = \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{\frac{x+۵}{x+۲}}-۱) = \frac{۳}{۲}$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{\frac{۹x-۱}{x+۱}}-۳) = \lim_{x\to+\infty} x(۳\sqrt{\frac{x-\frac{۱}{۹}}{x+۱}}-۳) = \lim_{x\to+\infty} ۳x(\sqrt{\frac{x-\frac{۱}{۹}}{x+۱}}-۱) = ۳\times\frac{\frac{-۱}{۹}-۱}{۲}) = \frac{-۵}{۳}$$

تست : اگر $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^{۲}-۲x+۳}-ax-b)=۰$ باشد ، $a+b$ کدام است ؟

ج) هم ارزی پرتوان نمایی : در پایه های بزرگ تر از یک داریم : $a<b \Rightarrow a^{+\infty}<b^{+\infty} \quad , \quad a^{-\infty}>b^{-\infty}$

$$\odot \lim_{x\to -\infty}(۳^x+۵^x)^{\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to -\infty}(۳^x)^{\frac{۱}{x}}=۳$$

$$\odot \lim_{x\to +\infty}\frac{۲^{۲x+۱}-۴^{x-۱}}{۳^{x+۱}-۴^{x-۱}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۲\times ۴^x-\frac{۱}{۴}\times ۴^x}{-\frac{۱}{۴}\times ۴^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{۷}{۴}\times ۲^{۲x}}{-\frac{۱}{۴}۲^{۲x}}=-۷$$

$$\odot \lim_{x\to -\infty}\frac{۲^x-۳^{۱-x}}{۲^{x-۱}-۳^{۲-x}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{۰-۳^{۱-x}}{۰-۳^{۲-x}}=\frac{۱}{۳}$$

$$\odot \lim_{x\to -\infty}\frac{۲^x-\left(\frac{۱}{۳}\right)^{۱-x}}{۲^x-۳^x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{۲^x-۳^{x-۱}}{۲^x-۳^x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{۲^x}{۲^x}=۱$$

$$\odot \lim_{x\to +\infty}\frac{۲^x+(-۲)^x}{۲^x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{۲^x+(-۱)^x\times ۲^x}{۲^x}=\lim_{x\to +\infty}۱+(-۱)^x=$$ حد ندارد

$$\odot \lim_{x\to +\infty}\left[\frac{۲^{۳x+۲}+۵^x}{۸^x+۳^x}\right]=\left[\frac{۴\times ۸^x}{۸^x}\right]=[۴]\xrightarrow{?}[۴^+]=۴$$

؟ مقدار دقیق ۴ را با قرار دادن عدد بزرگ می توان به دست آورد ولی محاسبه سخت است . پس کافیست علامت $f(x)-۴$ را در $+\infty$ تعیین کنیم : $\frac{۲^{۳x+۲}+۵^x}{۸^x+۳^x}-۴=\frac{\cancel{۲^{۳x+۲}}+۵^x-\cancel{۴\times ۸^x}-۴\times ۳^x}{۸^x+۳^x}=\frac{۵^x-۴\times ۳^x}{۸^x+۳^x}\xrightarrow{+\infty}(\frac{۵}{۸})^x>۰$

د) هم ارزی براکت در بی نهایت : در $u\to\infty$ داریم $[u]\approx u$. ولی در براکت تو در تو و یا وقتی عبارات همدیگر را از بین ببرند از هم ارزی دقیق تر استفاده می کنیم $[u]\approx u-p \quad ; \quad ۰\le p<۱$

$$\odot \lim_{x\to +\infty}\frac{x+[۲x]+\sqrt{x}}{x+|x-۱|}$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty}\frac{\left[۲\log_۴^x\right]}{\log_۲^{۲x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲\log_۴^x}{\log_۲^{۲x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_۲^x}{۱+\log_۲^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_۲^x}{\log_۲^x}=۱$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{[x]}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-p}{x}\right]=\begin{cases}\xrightarrow{p=۰}[۱]=۱\\ \xrightarrow{p>۰}\left[۱^-\right]=۰\end{cases}$$ وجود ندارد

$$\odot \lim_{x\to+\infty}\frac{۴^{\left[\frac{x}{۲}\right]}}{۲^{[x]}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲^{۲\left[\frac{x}{۲}\right]}}{۲^{[x]}}=\lim_{x\to+\infty}۲^{۲\left[\frac{x}{۲}\right]-[x]}=\lim_{x\to+\infty}۲^{x-۲p-x-p'}=۲^{-۲p-p'}$$ وجود ندارد

۵) هم ارزی سرعت رشد : در $+\infty$ داریم : ($x^x > x! > a^x > x^a > x > \sqrt{x} > \log x$) (توابع با جنس های مختلف)

$$\odot \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=۰$$

$$\odot \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\cos^۲ x}{x}\right]=\begin{cases}\xrightarrow{\cos x=۰}[۰]=۰\\ \xrightarrow{\cos x>۰}\left[۰^-\right]=-۱\end{cases}$$ حد ندارد

$$\odot \lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲}{۲^x}=۰$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty}\frac{(n+۲)!}{n^{۲n+۱}}\approx\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{n^n}=۰$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty}\frac{۲x\log x+x^۲}{x\log x-x^۲}=\frac{x^۲}{-x^۲}=-۱$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty}\frac{۲^{x-۱}+۳^{x-۱}}{x^۳+۳^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳^{x-۱}}{۳^x}=\frac{۱}{۳}$$

و) حد مجموع چند دنباله خاص :

۱) مجموع اعداد فرد طبیعی $۱+۳+۵+...+۲n-۱\approx n^۲$

۲) مجموع اعداد زوج طبیعی $۲+۴+۶+...+۲n\approx n^۲$

۳) مجموع توان های ثابت اعداد طبیعی : $۱^k+۲^k+۳^k+...+\boxed{u}^k\approx\frac{\boxed{u}^{k+۱}}{k+۱}$

$$\odot \lim_{x\to+\infty}\frac{1+2+3+\ldots+\boxed{n^2}^{1}}{n^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\left(n^2\right)^2}{2}}{n^4}=\frac{1}{2}$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{n^3}{3}}{n^3}=\frac{1}{3}$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{1+3+5\ldots+2n-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{n^2}{2}}{n^2}=\frac{1}{2}$$

تست : اگر $|x|<1$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x^4+\ldots+x^{2n}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}=\frac{1}{6}$ باشد ، مقدار $|\sin\pi x|$ کدام است ؟

حل : حد مجموع دنباله هندسی است :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{1-x^2}}{\frac{1}{1-\frac{1}{2}}}=\frac{x^2}{2\left(1-x^2\right)}=\frac{1}{6}\Rightarrow x^2=\frac{1}{4}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}\longrightarrow\left|\sin(\pm\frac{\pi}{2})\right|=1$$

۵) درصورتی که از هیچ هم ارزی نتوان استفاده کرد (اغلب مثلثاتی) ، سعی می کنیم $\frac{0}{0}$ بسازیم .

$$\odot \lim_{x\to(\frac{\pi}{4})^+}\frac{\tan 2x}{\tan(x+\frac{\pi}{4})}\xrightarrow[t\to 0]{x-\frac{\pi}{4}=t}\lim_{t\to 0^+}\frac{\tan(2t+\frac{\pi}{2})}{\tan(t+\frac{\pi}{2})}=\lim_{t\to 0^+}\frac{-\cot 2t}{-\cot t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{\tan t}{\tan 2t}=\frac{1}{2}$$

$$\odot \lim_{x\to+\infty}\frac{\tan(3\tan^{-1}x)}{\cot(2\tan^{-1}x)}\xrightarrow[t\to\frac{\pi}{2}^-]{t=\tan^{-1}x}\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan(3t)}{\cot(2t)}=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan(2t)}{\cot(3t)}\overset{H}{=}\frac{-2}{3}$$

$$\odot \lim_{x\to 3^+}\left(x-[x]\right)\tan\left(\frac{\pi x}{6}\right)=\lim_{x\to 3^+}\frac{(x-3)}{\cot\left(\frac{\pi x}{6}\right)}\overset{H}{=}=\frac{-6}{\pi}$$

$$\odot \lim_{x\to ۴}\left(۲-\sqrt{x}\right)(\cot \pi x+۱)=\lim_{x\to ۴}\left(۲-\sqrt{x}\right)\cot \pi x+\lim_{x\to ۴}\left(۲-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to ۴}\frac{۲-\sqrt{x}}{\tan \pi x}+۰\overset{H}{=}\lim_{x\to ۴}\frac{\frac{-۱}{۲\sqrt{x}}}{\pi\left(۱+\tan^{۲}\pi x\right)}=\frac{-۱}{۴\pi}$$

$$\odot \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-}(۴x-\pi)(\tan ۲x+\cot ۴x)=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}^-}\left(\frac{۴x-\pi}{\cot ۲x}+\frac{۴x-\pi}{\tan ۴x}\right)\overset{H}{=}\frac{۴}{-۲}+\frac{۴}{۴}=-۱$$

$$\odot \lim_{x\to ۰^-}\sin ۲x\left[\cot x\right]=\lim_{x\to ۰^-}\sin ۲x\cot x=\lim_{x\to ۰^-}\sin ۲x\frac{۱}{\tan x}=\frac{۲x}{x}=۲$$

$$\odot \lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^{۲}+۴x+۱}\sin\frac{۱}{۳x-۱}=\lim_{x\to -\infty}|x|\times\frac{۱}{۳x-۱}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-x}{۳x}=\frac{-۱}{۳}$$

$$\odot \lim_{x\to +\infty}\left[\frac{x^{۲}+۳}{۲x+۱}\right]\tan\left(\frac{۲\pi x}{x^{۲}+۴}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^{۲}+۳}{۲x+۱}\right)\left(\frac{۲\pi x}{x^{۲}+۴}\right)=\lim_{x\to +\infty}\frac{۲\pi x^{۳}}{۲x^{۳}}=\pi$$

$$\odot \lim_{x\to -\infty}x\sqrt{۱-\cos\frac{۱}{x}}=\lim_{x\to \infty}x\times\sqrt{\frac{۱}{۲}}\times\left|\frac{۱}{x}\right|=-\sqrt{۲}$$

$$\odot \lim_{x\to -\infty}x\left(x+\sqrt{x^{۲}+۸}\right)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(x^{۲}-x^{۲}-۸\right)}{x-\sqrt{x^{۲}+۸}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-۸x}{۲x}=-۴$$

$$\odot \lim_{x\to +\infty}x\left(\tan^{-۱}x-\frac{\pi}{۲}\right)=\lim_{x\to +\infty}x\left(-\tan^{-۱}\frac{۱}{x}\right)=\lim_{x\to +\infty}x.\frac{-۱}{x}=-۱ \qquad \boxed{\tan^{-۱}x+\tan^{-۱}\frac{۱}{x}=\frac{\pi}{۲}}$$

$$\odot \lim_{x\to +\infty}x\left(\cos^{-۱}\frac{۱}{x}-\cos^{-۱}\frac{۲}{x}\right)=\lim_{x\to +\infty}x\left(\frac{\pi}{۲}-\sin^{-۱}\frac{۱}{x}-\frac{\pi}{۲}+\sin^{-۱}\frac{۲}{x}\right)=x\left(\frac{۲}{x}-\frac{۱}{x}\right)=۱ \qquad \boxed{\sin^{-۱}x+\cos^{-۱}x=\frac{\pi}{۲}}$$

$$\odot \lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{\sin x}-\frac{۱}{x}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{x-\sin x}{x\sin x}\right)=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\frac{۱}{۶}x^{۳}}{x^{۲}}\right)=۰$$

$$\odot \lim_{x\to +\infty}\left(\sin\sqrt{x+۱}-\sin\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to +\infty}۲\sin\left(\frac{\sqrt{x+۱}-\sqrt{x}}{۲}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}}{۲}\right)=۰$$

$$\odot \lim_{x\to ۰^-}(۲\cot x-\cot ۲x)=\lim_{x\to ۰^-}\left(\frac{۲}{\tan x}-\frac{۱}{\tan ۲x}\right)=\lim_{x\to ۰^-}\left(\frac{۲}{x}-\frac{۱}{۲x}\right)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{۳}{۲x}=\frac{۳}{۰^-}=-\infty$$

روش رفع ابهام (1^{∞}) :

اگر $f\,,g$ دو تابع باشند که $g \to \infty$, $f \to 1$ داریم :

$$\lim_{x\to\infty}(f)^{g} \approx e^{\lim\limits_{x\to\infty}(f-1)\times g}$$

$$\odot\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x} = e^{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x-1}\right)} = e$$

$$\odot\ \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-x)^{\sqrt{x^2+1}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{(x+1)^2})\sqrt{x^2+1}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{-1}{2\sqrt{x^2}})\sqrt{x^2}} = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$$\odot \lim_{x\to 0^-}(1-\sin 2x)^{\cot 3x} = e^{\left(\lim\limits_{x\to 0^-}-\sin 2x\cot 3x\right)} = e^{\left(\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-\sin 2x}{\tan 3x}\right)} = e^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{1}{e^2}}$$

$$\odot \lim_{x\to 0^+}\left(\cos\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}\times(\sqrt{x})^2}{x}} = \sqrt{e}$$

$$\odot \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\cot x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x-\sin x}{\sin x})\times\frac{1}{\tan x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\frac{1}{6}x^3}{x^2})} = e^{0} = 1$$

تست : اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+ax}-x)^{bx} = e^2$ آنگاه مقدار ab کدام است ؟

تست : اگر $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{2x})^{3ax} = \frac{1}{\sqrt{e^3}}$ آنگاه مقدار a کدام است ؟

تعریف دنباله ای حد :

می گوییم $\lim\limits_{n\to a} f(x)=L$ هرگاه $f(a_n)\to L \quad \Rightarrow \quad a_n \to a \quad ; \quad \forall a_n \neq a \in D_f$

نکته مهم : برای تشخیص مقدار دقیق حد در بی نهایت a_n ، می توان عدد بزرگ جایگذاری کرد و یا $a_n - ۲$ را تعیین علامت کرد.

تست : اگر $f(x)=[۵x]$ و $a_n=\frac{۲n^۲+۱۳}{n^۲+n}$ ، دنباله $\{f(a_n)\}$ به چه عددی همگراست ؟

حل : a_n همگرا به ۲ است ولی با توجه با وجود تابع براکتی باشد نوع ۲ مشخص شود :

$$a_{۱۰۰}=\frac{۲۰۰۱۳}{۱۰۱۰۰}=۲^- \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(a_n)=\left[۵\times ۲^-\right]=۹$$

تست : اگر $a_n=\sqrt{n^۲+۲n}-n$ و $f(x)=\frac{[۷x]}{x}$ ، دنباله $\{f(a_n)\}$ به چه عددی همگراست ؟

تست : اگر $a_n=\frac{۲n^۲+b}{n^۲+۳n}$ و $f(x)=\sqrt{x^۲-x-۲}$ ، به ازای کدام b ، دنباله $f(a_n)$ همگراست ؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) هر مقدار b ۴) هیچ مقدار b

حل: a_n همگرا به ۲ است ولی با توجه به گزینه ها (و دامنه تابع f) باید نوع ۲ مشخص شود :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n-۲=\frac{-۶n+b}{n^۲+۳n}=\frac{-۶}{n}=۰^- \xrightarrow{a_n<۲} \lim_{n\to+\infty} f(a_n)=f(۲^-)$$ تعریف نشده

تست : در تابع $f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$ ، اگر دنباله $\{f(a_n)\}$ همگرا به صفر باشد ، دنباله a_n کدام است ؟ ($a_n \to ۱^-$)

۱) $\frac{n^۲-۱}{n^۲+۱}$ ۲) $\frac{n^۲+۱}{n^۲-۱}$ ۳) $\frac{n^۲+n}{n^۲+۱}$ ۴) $\frac{n+۱}{۲n}$

تست : اگر $f(x)=\frac{|x-1|}{x^2-1}$ و دنباله $\{f(a_n)\}$ به $\frac{-1}{2}$ همگرا باشد ، $\{a_n\}$ کدام می تواند باشد ؟ ($a_n \to 1^-$)

۱) $\{[\sqrt[n]{2}]\}$ ۲) $\left\{\frac{n^2+4n+1}{n^2+2n+10}\right\}$ ۳) $\left\{\cos\frac{\pi}{n}\right\}$ ۴) $\left\{\sqrt{n^2+2n+3}-n\right\}$

تست : اگر $f(x)=\cos\frac{\pi}{x}$ و دنباله $f(a_n)$ همگرا به $\frac{1}{2}$ باشد ، a_n کدام دنباله است ؟

۱) $\left\{\frac{6}{13},\frac{6}{25},\frac{6}{37},\ldots\right\}$ ۲) $\left\{\frac{3}{8},\frac{3}{14},\frac{3}{20},\ldots\right\}$ ۳) $\left\{\frac{3}{7},\frac{3}{13},\frac{3}{19},\ldots\right\}$ ۴) $\left\{\frac{6}{11},\frac{6}{23},\frac{6}{35},\ldots\right\}$

حل : دنباله ها به ترتیب $\left\{\frac{6}{12n+1}\right\},\left\{\frac{3}{6n+2}\right\},\left\{\frac{3}{6n+1}\right\},\left\{\frac{6}{12n-1}\right\}$ هستند که فقط در گزینه ۳ : $f(a_n)\to\frac{1}{2}$

$$f(a_n)=\cos(\frac{6n+1}{3})\pi=\cos(2n\pi+\frac{\pi}{3})=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

قضیه عدم وجود حد :

اگر $a_n\to a, b_n\to a$ ولی $\lim_{n\to\infty}f(a_n)\neq\lim_{n\to\infty}f(b_n)$ آنگاه تابع f در a حد ندارد .

- برای اثبات عدم وجود حد توابع براکتی و چند ضابطه ای در a ، از دو دنباله استفاده می شود که یکی به a^+ و دیگری به a^- میل کند .

تست : کدام دو دنباله زیر برای اثبات عدم وجود حد تابع $f(x)=\left[\frac{1}{x-1}\right]$ در $x=\frac{1}{2}$ مناسب است ؟

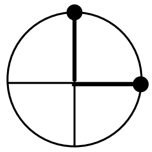
۱) $\left\{\frac{-1}{2n}\right\},\left\{\frac{1}{2n}\right\}$ ۲) $\left\{\frac{n}{2n+5}\right\},\left\{\frac{n}{2n+3}\right\}$ ۳) $\left\{\frac{n-1}{2n+3}\right\},\left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}$ ۴) $\left\{\frac{2n+1}{4n+3}\right\},\left\{\frac{3n+1}{6n+5}\right\}$

حل : باید دنباله هایی را بیابیم که یکی به $\frac{1}{2}^+$ و دیگری به $\frac{1}{2}^-$ همگرا باشد .با قرار دادن $n=100$ گزینه صحیح گزینه ۳

تست : کدام یک از دنباله های زیر به همراه دنباله $\left\{\frac{۲n^۲+۷}{n^۲+۱}\right\}$ می تواند عدم وجود حد تابع $f\left(x\right)=\begin{cases}۳ & x>۲\\ x^۲ & x<۲\end{cases}$ را در $x=۲$ ثابت می کند ؟

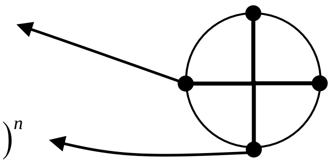
۱) $\left\{\frac{۶n+۱۱}{۳n+۵}\right\}$ ۲) $\left\{\left[\frac{۶n+۷}{۳n+۲}\right]\right\}$ ۳) $\left\{\frac{۶n-۱}{۲n+۳}\right\}$ ۴✓) $\left\{\frac{۲n^۲+۳n}{n^۲+۲n+۲}\right\}$

- برای اثبات عدم وجود حد تابع سینوس و کسینوس در $x=a$ معمولاً از دو دنباله های استفاده می شود که کمان آنها $۲n\pi+\beta,۲n\pi+\alpha$ شود به طوری که نسبت مثلثاتی در این مکان ها یکسان نشود :



$$y=\sin(\frac{۱}{x-a})\Rightarrow \quad a_n=a+\frac{۱}{۲n\pi} \quad , \quad b_n=a+\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}}$$

یا فقط یک دنباله انتخاب می شود که در کسینوس کمان $n\pi$ و در سینوس کمان $n\pi+\frac{\pi}{۲}$ بسازد بنابر این :



$\cos n\pi=\left(-۱\right)^n$

$\sin(\frac{۲n+۱}{۲})\pi=\left(-۱\right)^n$

$$y=\cos(\frac{۱}{x-a})\Rightarrow \quad a_n=a+\frac{۱}{n\pi}$$

$$y=\sin(\frac{۱}{x-a})\Rightarrow \quad a_n=a+\frac{۱}{n\pi+\frac{\pi}{۲}}$$

توجه : اگر تابع خود π داشته باشد ، از دنباله تعریف شده π را حذف می کنیم .

تست : برای آنکه اثبات کنیم حد $\lim_{x\to ۰}\sin\frac{۱}{x}$ وجود ندارد ، از دنباله $\left\{\frac{۱}{۲n\pi}\right\}$ و دنباله مناسب دیگری استفاده می کنیم . آن دنباله کدام دنباله زیر نمی تواند باشد ؟

۱) $\{\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}}\}$ ۲✓) $\{\frac{۱}{n\pi}\}$ ۳) $\{\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۶}}\}$ ۴) $\{\frac{۱}{۲n\pi-\frac{\pi}{۲}}\}$

حل : چون $\sin ۲n\pi=۰$ پس گزینه ای که مقدار سینوسش صفر شود برای اثبات عدم وجود حد مناسب نیست . $\sin n\pi=۰$

تست : کدام دو دنباله اثبات می کند که تابع $f(x)=\sin(\frac{\pi}{\sqrt[3]{x}-2})$ در $x=8$ حد ندارد ؟

$$1)\ \begin{cases} a_n = 8+\frac{1}{n^3} \\ b_n = 8-\frac{1}{n^3} \end{cases} \quad 2)\ \checkmark\ \begin{cases} a_n = \frac{(4n+1)^3}{8n^3} \\ b_n = \left(\frac{8n+4}{4n+1}\right)^3 \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} a_n = \left(\frac{4n+1}{2n+3}\right)^3 \\ b_n = \left(\frac{4n}{n+1}\right)^3 \end{cases} \quad 4)\ \begin{cases} a_n = \left(2+\frac{1}{n}\right)^3 \\ b_n = \left(2-\frac{1}{n}\right)^3 \end{cases}$$

$$a_n = \left(2+\frac{1}{2n}\right)^3 = \frac{(4n+1)^3}{8n^3} \quad , \quad b_n = (2+\frac{1}{2n+\frac{1}{2}})^3 = \left(\frac{8n+4}{4n+1}\right)^3$$

تست : کدام گزینه به تنهایی می تواند عدم وجود حد $\lim_{x\to 3}\cos\left(\frac{\pi}{x^2-9}\right)$ را ثابت کند ؟

$$2)\ \left\{\sqrt{\frac{2n+5}{n+1}}\right\} \quad 2)\ \left\{\sqrt{\frac{6n+5}{2n+1}}\right\} \quad 3)\ \left\{\sqrt{3+\frac{1}{n}}\right\} \quad 4)\ \left\{\frac{6n^2+5}{2n^2+1}\right\}$$

- برای اثبات عدم وجود حد توابع خاص به ویژگی آنها توجه می کنیم :

تست : برای اثبات عدم وجود حد $\lim_{x\to+\infty}([x]+[-x])$ دنباله $a_n=n$ و کدام دنباله زیر مناسب است ؟

$1)\ b_n=-n \quad 2)\ b_n=n-1 \quad 3)\ b_n=\frac{1}{n} \quad 4)\ b_n=n+\frac{1}{2}$

حل : باید دو دنباله ای باشد یکی به عدد صحیح و دیگری غیر صحیح میل کند . پس گزینه ۴ دنباله دوم است.

تست : برای اثبات عدم وجود حد $\lim_{x\to+\infty}\frac{4^{\left[\frac{x}{2}\right]}}{2^{[x]}}$ کدام دنباله ها مناسب هستند ؟

حل : چون $2^{2\left[\frac{x}{2}\right]-[x]}$ پس : با در نظر گرفتن دنباله زوج $a_n=2n$ و دنباله فرد $b_n=2n+1$ داریم $f(a_n)\to 1, f(b_n)\to\frac{1}{2}$.

تست : کدام دو دنباله اثبات می کند که تابع $f\left(x\right)=\begin{cases}5 & x\in\mathbb{Q}\\ -\sqrt{2} & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ در $x=\sqrt{3}$ حد ندارد ؟

۱) $\begin{cases}a_n=\dfrac{\sqrt{3}n}{n+1}\\ b_n=\dfrac{\sqrt{3}n+\sqrt{3}}{n+2}\end{cases}$

۲) ✓ $\begin{cases}a_n=\sqrt{3}+\dfrac{1}{n}\\ b_n=\dfrac{\left[\sqrt{3}n\right]}{n}\end{cases}$

۳) $\begin{cases}a_n=\dfrac{\sqrt{3}n+1}{n+2}\\ b_n=\left[\dfrac{\sqrt{3}n}{n+5}\right]\end{cases}$

۴) $\begin{cases}a_n=\sqrt{3}+\dfrac{1}{n}\\ b_n=\sqrt{3}-\dfrac{1}{n}\end{cases}$

حل : باید گزینه ای انتخاب شود که یک دنباله گویا و یک دنباله گنگ همگرا به $\sqrt{3}$ باشد.

تست: کدام دنباله برای اثبات عدم وجود حد تابع $f\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ در $x=1$ مناسب است ؟

۱) $\left\{1+\dfrac{\pi}{n}\right\}$

۲) $\left\{1+\dfrac{\left(-1\right)^n\sqrt{2}}{n}\right\}$

۳) ✓ $\left\{1+\sqrt{\dfrac{4}{n}}\right\}$

۴) $\left\{1+\dfrac{1}{n}\right\}$

حل : باید گزینه ای انتخاب شود که هم دنباله گویا و هم گنگ همگرا به ۱ تولید کند.