روش های رفع ابهام :

اولین قدم در حد گیری قرار دادن مقدار حد در تابع است ولی گاهی ممکن است حالت مبهمی ایجاد شود که در این صورت باید رفع ابهام کرد . (البته در تست ها در صورت وجود گزینه «حد ندارد» باید به دامنه نیز توجه شود)

نکته ۱ : در همه روش ها همواره می توان به جای عامل های غیر صفر شونده مقدارشان را قرار داد .(عامل یعنی در کل عبارت ضرب شده باشد نه فقط در قسمتی از آن)

نکته ۲ : وقتی که چند عبارت مشابه در تابع وجود دارد می توان با یک تغییر متغیر مناسب به عبارت ساده تری رسید

مثال :

$$\odot \lim_{x\to ۱^+} \frac{\overbrace{(x+۱)}^{\text{عامل غیر صفر}}\sqrt{\sqrt{x}-۱}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}} \xrightarrow[t\to ۱^+]{\sqrt{x}=t} \lim_{t\to ۱^+} ۲\sqrt{\frac{t-۱}{t^۲-t}} = \lim_{t\to ۱^+} ۲\sqrt{\frac{۱}{t}} = ۲$$

۱) هم ارزی : یعنی استفاده از یک تابع معادل که در همسایگی آن نقطه بر تابع اصلی منطبق است .

نکته : در یک عبارت اگر هم ارزی استفاده می کنیم ، باید به جای تمام عبارات ، هم ارز آنها را قرار دهیم . در ضمن اگر عبارت های هم ارز همدیگر را حذف کنند باید از هم ارزی های دقیق تر استفاده کنیم .

- **قاعده کم توان** : چند جمله ای های فاقد عدد ثابت در صفر ، هم ارز با کم توان ترین جمله است .

$$\odot \lim_{x\to ۰} \frac{x^{۱۰}-۳x^۳+۲x^۲}{x^۸+۲x^۵-۲x^۲} = \lim_{x\to ۰} \frac{۲x^۲}{-۲x^۲} = -۱$$

$$\odot \lim_{x\to ۰} \frac{(۱+۲x)(۱+۴x)\dots(۱+۲۰x)-۱}{۲x} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱+(۲+۴+\dots+۲۰)x-۱}{۲x} = \frac{(۲+۴+\dots+۲۰)}{۲} = \frac{۱۰\times ۱۱}{۲} = ۵۵$$

$$\odot \lim_{x\to ۰^+} \frac{۲x-\sqrt[۹]{۳x-\sqrt{۲x}}}{x+۵\sqrt[۶]{x+\sqrt[۳]{۳x}}} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{-\sqrt[۹]{-\sqrt{۲x}}}{۵\sqrt[۶]{\sqrt[۳]{۳x}}} = \lim_{x\to ۰^+} \frac{\sqrt[۱۸]{۲x}}{۵\sqrt[۱۸]{۳x}} = \frac{۱}{۵}\sqrt[۳]{\frac{۲}{۳}}$$

$$\odot \lim_{x\to 0}\frac{x+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^3+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}=1$$

$$\odot \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^4+2(x^2-1)}{(x^2-1)^4+3(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^4+2(x-1)(x+1)}{(x-1)^4(x+1)^4+3(x-1)}\xrightarrow[t\to 0]{x-1=t}\lim_{t\to 0}\frac{t^4+4t}{16t^4+3t}=\frac{4}{3}$$

$$\odot \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}+x^2-1}{\sqrt[3]{x^2-1}+x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x-1}+(x-1)(x+1)}{\sqrt[3]{x-1}\times\sqrt[3]{x+1}+(x-1)(x^2+x+1)}\xrightarrow[t\to 0]{\sqrt[3]{x-1}=t}\lim_{t\to 0}\frac{t+2t^3}{\sqrt[3]{2}t+3t^3}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\odot \lim_{x\to 1^-}\frac{\left|x-\sqrt[3]{x}\right|}{\sqrt[3]{x^2}-x}\xrightarrow[t\to 1^-]{\sqrt[3]{x}=t}\lim_{t\to 1^-}\frac{\left|t^3-t\right|}{t^2-t^3}=\lim_{t\to 1^-}\frac{t-t^3}{t^2-t^3}=\lim_{t\to 1^-}\frac{t(1-t)(1+t)}{t^2(1-t)}=2$$

$$\odot \lim_{x\to 1^+}\frac{\log x-(\log x)^2}{\log\sqrt{x}-\log x^2}\xrightarrow[t\to 0^+]{\log x=t}\lim_{t\to 0^+}\frac{t-t^2}{\frac{1}{2}t-2t}=\frac{1}{\frac{-3}{2}}=-\frac{2}{3}$$

- **هم ارزی برنولی** : وقتی $u\to 0$ داریم : $(1+u)^n\approx 1+nu$ و $\sqrt[n]{1+u}\approx 1+\frac{1}{n}u$

$$\odot \lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^5-1}{(1+3x)^4-(1-2x)^3}=\lim_{x\to 0}\frac{10x}{12x+5x}=\frac{5}{9}$$

$$\odot \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+5x}-1}{\sqrt[3]{1+2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{2}x}{\frac{2}{3}x}=\frac{15}{4}$$

$$\odot \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}-1}{\sqrt{x-x^2}}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\times\sqrt{1-x}}=\frac{1}{2}$$

$$\odot \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}}{\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[6]{1+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{3}x-(1+\frac{1}{5})}{1+\frac{1}{5}x-(1+\frac{1}{6})}=\frac{\frac{2}{15}}{\frac{1}{30}}=4$$

$$\odot \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(x^2+\sqrt{x}-1\right)^3+\left(x^2-2\sqrt{x}+1\right)^3}{\sqrt{2x+x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1+3x^2+3\sqrt{x}+1+3x^2-6\sqrt{x}}{\sqrt{2x}}=\frac{-3\sqrt{x}}{\sqrt{2}\times\sqrt{x}}=\frac{-3\sqrt{2}}{2}$$

- **هم ارزی مثلثاتی** : هرگاه $u \to ۰$ معمولاً با استفاده از هم ارزی های زیر و روابط ساده مثلثاتی حد محاسبه می شود.

$$\begin{cases}\sin u \approx u \\ \sin^{-۱} u \approx u\end{cases} \qquad \begin{cases}\tan u \approx u \\ \tan^{-۱} u \approx u\end{cases} \qquad \begin{cases}۱-\cos^m u \approx \dfrac{m}{۲}u^۲ \Rightarrow \boxed{\cos^m u \approx ۱-\dfrac{m}{۲}u^۲} \\ \cos^{-۱} u \approx \sqrt{۱-u^۲} \quad (u \to ۱^-)\end{cases}$$

$$\odot \lim_{x\to ۰}\frac{x-\sin ۲x}{x+\sin ۳x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x-۲x}{x+۳x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-x}{۴x}=\frac{-۱}{۴}$$

$$\odot \lim_{x\to ۰}\frac{\left[x^۲\right]-x^۲}{x\tan x}=\lim_{x\to ۰}\frac{۰-x^۲}{x^۲}=-۱$$

$$\odot \lim_{x\to ۰}\frac{\tan x\ \sin ۲x\ \sin ۳x \ldots \sin nx}{nx^{n-۱}\sin x}=\lim_{x\to ۰}\frac{n!x^n}{nx^n}=(n-۱)!$$

$$\odot \lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\tan x}}{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x}}{(x+۱)\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۲}{(x+۱)}=۲$$

$$\odot \lim_{x\to ۰}\frac{\left(x^۲+x\right)^۲+\left(۱-x^۲\right)^۳-۱}{\left(x+\sin x\right)^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{\left(x\right)^۲+\left(۱-۳x^۲\right)-۱}{\left(x+x\right)^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۲x^۲}{۴x^۲}=\frac{-۱}{۲}$$

$$\odot \lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{۱-۲۷x}-۱}{\cos\sqrt{x}-۱}=\lim_{x\to ۰}\frac{-\frac{۲۷}{۹}x}{\frac{-۱}{۲}\left(\sqrt{x}\right)^۲}=۱۸$$

$$\odot \lim_{x\to ۰}\frac{۲-\cos ۲x-\cos ۴x}{x\sin ۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\left(۱-\cos ۲x\right)+\left(۱-\cos ۴x\right)}{x\times ۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{۱}{۲}\times ۴x^۲+\frac{۱}{۲}\times ۱۶x^۲}{۲x^۲}=۵$$

$$\odot \lim_{x\to ۰}\left(\left[۲x\right]+\left[-۲x\right]\right)\frac{۱-\cos^۳ x}{۱-\sqrt{۱+x^۲}}=\lim_{x\to ۰}(-۱)\frac{\frac{۳}{۲}x^۲}{۱-(۱+\frac{۱}{۲}x^۲)}=\lim_{x\to ۰}(-۱)\frac{\frac{۳}{۲}}{-\frac{۱}{۲}}=۳$$ (سراسری ۹۴ داخل)

$$\odot \lim_{x\to ۰^+}\frac{\sin ۳x}{\sqrt{۱-\cos^۳ x}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۳x}{\sqrt{\frac{۳}{۲}x^۲}}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۳x}{\sqrt{\frac{۳}{۲}}x}=\sqrt{۶}$$

$$\odot \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{4}x^2}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}\right)^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2} = 0$$

$$\odot \lim_{x\to 0}\left[\frac{1-\cos 2x}{x^2}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2\sin^2 x}{x^2}\right] = \lim_{x\to 0}\left[2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right] = \left[2^-\right] = 1$$

$$\odot \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin x}{\sin^{-1} x}\right] \xrightarrow{\sin x < x < \sin^{-1} x} \left[1^-\right] = 0$$

....

$$\odot \lim_{x\to 1^-} \frac{\cos^{-1} x}{\sqrt{x-x^2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x}\times\sqrt{1-x}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{2}$$

$$\odot \lim_{x\to 1^-} \frac{\cos^{-1}\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow[t\to 1^-]{x^2=t^3} \lim_{t\to 1^-} \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t^3}} = \lim_{t\to 1^-} \frac{1}{\sqrt{t^2+t+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\odot \lim_{x\to(-1)^+} \frac{\pi-\cos^{-1} x}{\sqrt{1+x}} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{\cos^{-1}(-x)}{\sqrt{1+x}} \xrightarrow[t\to 1^-]{-x=t} \lim_{t\to 1^-} \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-t}} = \lim_{t\to 1^-} \frac{\sqrt{1+t}\sqrt{1-t}}{\sqrt{1-t}} = \sqrt{2}$$

....

$$\odot \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\frac{1}{2}x^2-(1-\frac{1}{4}x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^2}{x^2} = \frac{3}{4}$$

$$\odot \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{\cos 2x}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\frac{1}{4}x^2)-(1-\frac{1}{4}\times 4x^2)}{x^2} = \frac{3}{4}$$

$$\odot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x-\cos 3x}{2-\sqrt{4-x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\frac{1}{2}x^2)-(1-\frac{1}{2}\times 9x^2)}{x^2}\times\left(2+\sqrt{4-x^2}\right) = 4\times 4 = 16$$

$$\odot \lim_{x\to 0} \frac{\cos x\,\cos 3x-1}{\sqrt{x^2+4}-2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\frac{1}{2}x^2)(1-\frac{1}{2}\times 9x^2)-1}{x^2}\times\left(\sqrt{x^2+4}+2\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1-5x^2-1}{x^2}\times 4 = -20$$

- **هم ارزی های دقیق تر مثلثاتی** : هرگاه دو هم ارزی مثلثاتی هم دیگر را از بین ببرند مجبوریم از هم ارزی های دقیق تری استفاده کنیم .

$$u-\sin u \approx \frac{1}{6}u^3 \qquad , \qquad \tan u - u \approx \frac{1}{3}u^3 \qquad \Rightarrow \qquad \tan u - \sin u = \frac{1}{2}u^3$$

$$\odot \lim_{x\to 0}\frac{x+\sin^3 x-\sin x}{x+2\sin^3 x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x+\sin^3 x}{x-\sin x+2\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+x^3}{\frac{1}{6}x^3+2x^3}=\frac{7}{13}$$

$$\odot \lim_{x\to 0^-}\frac{|x-\sin x|+|x-\tan x|}{2x-\sin x-\tan x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{3}x^3}{x-\sin x+x-\tan x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{-1}{2}x^3}{\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{3}x^3}=3$$

$$\odot \lim_{x\to 0^+}\frac{\tan\sqrt{x}-\sqrt{x}}{(2\sqrt{x}+\sqrt{\sin x})^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{3}(\sqrt{x})^3}{(2\sqrt{x}+\sqrt{x})^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{3}\sqrt{x^3}}{27\sqrt{x^3}}=\frac{1}{81}$$

$$\odot \lim_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{x}-\sin\sqrt[3]{x}}{x\underbrace{[x]}_{x\to 0}+x|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}{-x-x^2}=\frac{-1}{6}$$

$$\odot \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-\tan^2 x}{x^2-\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-\tan x)(\sin x+\tan x)}{(x-\sin x)(x+\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-\tan x)(2x)}{(x-\sin x)(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^3}{\frac{1}{6}x^3}=-3$$

$$\odot \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\tan 2x}{\sin^3 x}==\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{2}(2x)^3}{x^3}=-4$$

$$\odot \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+\tan x}}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}\sin x-(1+\frac{1}{2}\tan x)}{x(\frac{1}{2}x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\times\frac{-1}{2}x^3}{\frac{1}{2}x^3}=\frac{-1}{2}$$

....

$$\odot \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x+\tan x-\tan ۲x}{\tan x+x-\sin ۲x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(x-\frac{۱}{۶}x^{۳})+(x+\frac{۱}{۳}x^{۳})-(۲x+\frac{۸}{۳}x^{۳})}{(x+\frac{۱}{۳}x^{۳})+x-(۲x-\frac{۸}{۶}x^{۳})}=\lim_{x\to ۰}\frac{\frac{-۵}{۲}x^{۳}}{\frac{۵}{۳}x^{۳}}=\frac{-۳}{۲}$$

$$\odot \lim_{x\to ۰}\frac{\sin^{۲}x-x\tan x}{x^{۴}}=\lim_{x\to ۰}\frac{(x-\frac{۱}{۶}x^{۳})^{۲}-x(x+\frac{۱}{۳}x^{۳})}{x^{۴}}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}-\frac{۱}{۳}x^{۴}-x^{۲}-\frac{۱}{۳}x^{۴}}{x^{۴}}=\frac{-۲}{۳}$$

$$\odot \lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}\cos x-\sin^{۲}x}{x^{۴}}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}(۱-\frac{۱}{۲}x^{۲})-(x-\frac{۱}{۶}x^{۳})^{۲}}{x^{۴}}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^{۲}-\frac{x^{۴}}{۲}-x^{۲}+\frac{x^{۴}}{۳}}{x^{۴}}=\frac{-۱}{۶}$$

تست : اگر $\lim_{x\to ۰}\frac{a\sin^{a}x}{x^{b}\tan^{۲}۴x}=\frac{۱}{۴}$ مقدار ab کدام است ؟

تست : اگر $\lim_{x\to ۰}\frac{\tan^{۲}x-\sin^{۲}x}{ax^{n}}=۱$ حاصل $a+n$ کدام است ؟

۲) قاعده هوپیتال : در صورتی که نتوان از هم ارزی استفاده کرد مثلاً وقتی $u\to ۰$ میل نکند و...از هوپیتال بهره می بریم (برای ساده تر شدن مشتق گیری، می توان ابتدا تغییر متغیر یا هم ارزی استفاده کرد)

نکته مهم : در مواردی که ۱. عبارت زیر رادیکال صفر شود ۲. ریشه مخرج از درجات بالا باشد و غیر قابل تفکیک باشد ۳. عبارت ضربی غیر قابل تفکیک باشد و... روش هوپیتال موثر نخواهد بود .

$$\odot \lim_{x\to ۰}\frac{(۱+x)^{۷}-(۱-x)^{۶}-۱۳x}{x^{۲}}\overset{HH}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{۴۲(۱+x)^{۵}-۳۰(۱-x)^{۴}}{۲}=۶$$

$$\odot \lim_{x\to ۰}\frac{(۱+x)^{۱۰۰}+(۱+x)^{۹۹}-۲-۱۹۹x}{۲-۲\cos x}\overset{HH}{=}\lim_{x\to ۰}\frac{۱۰۰\times ۹۹(۱+x)^{۹۸}+۹۹\times ۹۸(۱+x)^{۹۷}}{۲\cos x}=\frac{۹۹\times ۱۹۸}{۲}=۵۸۵۱$$

$$\odot \lim_{x\to 1}\frac{x^4+x^3-2}{x^3-2x^2+1}\overset{H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{4x^3+3x^2}{3x^2-4x}=\frac{7}{-1}=-7$$

$$\odot \lim_{x\to 3^-}\frac{x^3[x]-54}{|x|+[-x]}=\lim_{x\to 3^-}\frac{2x^3-54}{x-3}\overset{H}{=}\lim_{x\to 3^-}\frac{6x^2}{1}=54$$

$$\odot \lim_{x\to 1}\frac{(x^4+x-2)(x^3-5x+4)(x^2+x+2)}{(\sqrt{x}-1)(x^6-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^4+x-2)}{(\sqrt{x}-1)}\times\frac{(x^3-5x+4)}{(x^6-1)}\times\frac{4}{2}\overset{H}{=}\lim_{x\to 1}\frac{4x^3+1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\times\frac{3x^2-5}{6x^5}\times 2=-40$$

$$\odot \lim_{x\to 2}\frac{(x^2-5x+6)^2(x^2-3x+2)^3}{(x-2)^5}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-5x+6}{x-2}\right)^2\left(\frac{x^2-3x+2}{x-2}\right)^3\overset{H}{=}\lim_{x\to 2}(2x-5)^2(2x-3)^3=1$$

$$\odot \lim_{x\to 1}\frac{(x\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[3]{x})^3}{(x\sqrt{x}-1)^3}=\left(\lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}-1}\right)^3=\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^{\frac{11}{6}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}-1}\right)^3\overset{H}{=}\left(\frac{\frac{11}{6}-\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}}\right)^3=1$$

$$\odot \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^3-8}}=\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^3-8}}=\sqrt{\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-8}}\overset{H}{=}\sqrt{\frac{5}{8}}$$

$$\odot \lim_{x\to -1}\frac{x+\sqrt{x+2}}{x^3+1}\overset{H}{=}\lim_{x\to -1}\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{3x^2}=\frac{1}{2}$$

$$\odot \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}\xrightarrow[t\to 1]{x=t^{12}}\lim_{t\to 1}\frac{t^6-t^{12}}{t^4-t^3}\overset{H}{=}\lim_{t\to 1}\frac{6t^5-12t^{11}}{4t^3-3t^2}=-6$$

$$\odot \lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+\sqrt[3]{x}-1}-3}{\sqrt{x-4}-2}$$

$$\odot \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x-\sqrt{x}}}$$

$$\odot \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}-\sqrt[3]{\sin x}}{\cos^2 x}\xrightarrow[t\to 1]{\sin x=t^6}\lim_{t\to 1}\frac{t^3-t^2}{1-t^{12}}\overset{H}{=}\lim_{t\to 1}\frac{3t^2-2t}{-12t^{11}}=\frac{-1}{12}$$

$\odot \lim_{x \to \pi} \frac{۱+\cos x}{۱+\cos^۳ x}$

$\odot \lim_{x \to \frac{۳\pi}{۴}} \frac{\tan^۲ x - ۱}{\cos ۲x}$

$\odot \lim_{x \to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos(\frac{۳\pi}{۴} - x)}$

$\odot \lim_{x \to ۱} \frac{\tan(\pi x)}{x^۲ - \sqrt{x}}$

$\odot \lim_{x \to (\frac{۱}{۲})^+} \frac{|\cos \pi x|}{۱ - \sqrt{۲x}}$

$\odot \lim_{x \to ۱} \frac{\sin \frac{\pi}{x}}{\pi - ۴\tan^{-۱} x}$

$\odot \lim_{x \to \pi} \frac{\sin^{-۱}(x-\pi)}{\sin\left(\frac{\pi}{x} - ۱\right)} =$

$\odot \lim_{x \to \frac{\pi}{۶}} \frac{\sqrt{۳} - ۴\sin x \sin ۲x}{\sin ۶x}$

$\odot \lim_{x \to \pi} \frac{\sin(۱+\cos x)}{۱-\cos ۲x} \approx \lim_{x \to \pi} \frac{۱+\cos x}{۱-\cos ۲x} \overset{H}{=} \lim_{x \to \pi} \frac{-\sin x}{۲\sin ۲x} \overset{H}{=} \lim_{x \to \pi} \frac{\cos x}{۴\cos ۲x} = \frac{۱}{۴}$

$\odot \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{\sin^{-۱}(\cos x)}{\sin ۲x} \approx \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{\cos x}{\sin ۲x} \overset{H}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}} \frac{-\sin x}{۲\cos ۲x} = \frac{-۱}{-۲} = \frac{۱}{۲}$

نکته : در عبارات مثلثاتی که به صفر میل نمی کنند و استفاده از هوپیتال سخت است ، سعی می کنیم هم ارزی صفر بسازیم.

$$\odot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x \cos x}{\cos 8x - 1} \xrightarrow[t\to 0]{x-\frac{\pi}{2}=t} \lim_{t\to 0} \frac{\tan\left(\pi+2t\right)\cos(\frac{\pi}{2}+t)}{\cos\left(4\pi+8t\right)-1} = \lim_{t\to 0} \frac{-\tan 2t \sin t}{\cos 8t - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{-2t^{2}}{\frac{-1}{2}\left(8t\right)^{2}} = \frac{1}{16}$$

$$\odot \lim_{x\to\pi} \frac{\tan\left(\pi \sin x\right)\cos\frac{x}{2}}{1+\cos x} \approx \lim_{x\to\pi} \frac{\pi \sin x \cos\frac{x}{2}}{1+\cos x} \xrightarrow[t\to 0]{x-\pi=t} \lim_{t\to 0} \frac{\pi \sin(t+\pi)\cos(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{2})}{1+\cos(t+\pi)} = \lim_{t\to 0} \frac{\pi \sin(t)\sin(\frac{t}{2})}{1-\cos(t)} = \frac{\frac{t^{2}}{2}\times\pi}{\frac{1}{2}t^{2}} = \pi$$

$$\odot \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \frac{\sqrt[5]{2+\sin x} - \sqrt[7]{2+\sin x}}{\underbrace{\cos^{2} x}_{1-\sin^{2} x}} \xrightarrow[t\to 0]{1+\sin x = t} \lim_{t\to 0} \frac{\left(1+\frac{1}{5}t\right)-\left(1+\frac{1}{7}t\right)}{\left(1-\sin x\right)t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{2}{35}t}{2t} = \frac{1}{35}$$

$$\odot \lim_{x\to\pi}\left[\frac{x-\pi}{\sin x}\right] \xrightarrow[t\to 0]{x-\pi=t} \lim_{t\to 0}\left[\frac{t}{\sin\left(t+\pi\right)}\right] = \lim_{t\to 0}\left[-\frac{t}{\sin t}\right] = \left[-1^{+}\right] = -2$$

تست : اگر $\lim_{x\to -1} \frac{ax^{2}+bx-1}{x^{2}+x} = 2$ ، مقدار $a+b$ را بدست آورید .

حل : حد مخرج صفر است پس باید حد صورت نیز صفر باشد تا بعد از رفع ابهام حاصل حد ۲ شده باشد :

پس $a-b=1$ از طرفی با هوپیتال داریم $\lim_{x\to -1} \frac{2ax+b}{2x+1} = 2 \Rightarrow -2a+b=-2$ لذا $a=1, b=0$

تست : اگر $\lim_{x\to -1} \frac{ax^{3}-bx^{2}+x+1}{\left(x+1\right)^{2}} = c$ ، مقدار abc کدام است ؟

تست : اگر $\lim_{x\to 1} \frac{x^{n}-3x^{2}+x+1}{x^{2}-3x+2} = 1$ ، مقدار n کدام است ؟

تست : اگر $\lim\limits_{x\to -۳}\dfrac{ax+۳a}{۱-\sqrt{۵x+۱۶}}=۲$ آنگاه a کدام است ؟

۳) حذف عامل صفر شونده : در موارد خاصی مناسب است که روش های قبلی سخت تر باشند .(نمایی و لگاریتمی)

مثال :

$$\odot \lim_{x\to ۱}\left[\frac{x^۳-۳x^۲+۲x}{x-۱}\right]=\lim_{x\to ۱}\left[\frac{x(x-۱)(x-۲)}{x-۱}\right]=\lim_{x\to ۱}\left[x^۲-۲x\right]=\lim_{x\to ۱}\left[(x-۱)^۲-۱\right]=\left[۰^+-۱\right]=-۱$$

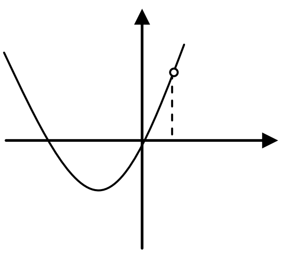
$$\odot \lim_{x\to ۰}\frac{۲۵^x-۳۶^x}{۵^x-۶^x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۵^x)^۲-(۶^x)^۲}{۵^x-۶^x}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۵^x-۶^x)(۵^x+۶^x)}{۵^x-۶^x}=۲$$

$$\odot \lim_{x\to ۱}\frac{۱۵^x+۱۰^x-۵^{x+۱}}{۳^x+۲^x-۵}=\lim_{x\to ۱}\frac{۵^x\times ۳^x+۵^x\times ۲^x-۵^x\times ۵}{۳^x+۲^x-۵}=\lim_{x\to ۱}\frac{۵^x\left(۳^x+۲^x-۵\right)}{۳^x+۲^x-۵}=۵$$

$$\odot \lim_{x\to ۰^-}\left[\frac{۲^{-x}-۱}{۲^x-۱}\right]=\lim_{x\to ۰^-}\left[\frac{\frac{۱-۲^x}{۲^x}}{۲^x-۱}\right]=\lim_{x\to ۰^-}\left[\frac{-۱}{۲^x}\right]=\left[\frac{-۱}{۱^-}\right]=\left[-\left(۱^+\right)\right]=-۲$$

$$\odot \lim_{x\to ۱}\frac{\log x}{\log x-\log\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۱}\frac{\log x}{\log x-\frac{۱}{۲}\log x}=\lim_{x\to ۱}\frac{\log x}{\frac{۱}{۲}\log x}=۲$$

تست : شکل مقابل نمودار تابع $f(x)=\dfrac{۴x^۳+ax+b}{x-۱}$ است . دو تایی مرتب (a,b) کدام است ؟



حل : تابع در نقطه $x=۱$ حد دارد پس باید یک ریشه صورت هم باشد

$۴+a+b=۰$ از طرفی تابع از $(۰,۰)$ می گذرد پس $\dfrac{b}{-۱}=۰\Rightarrow b=۰$

در نتیجه $a=-۴$.