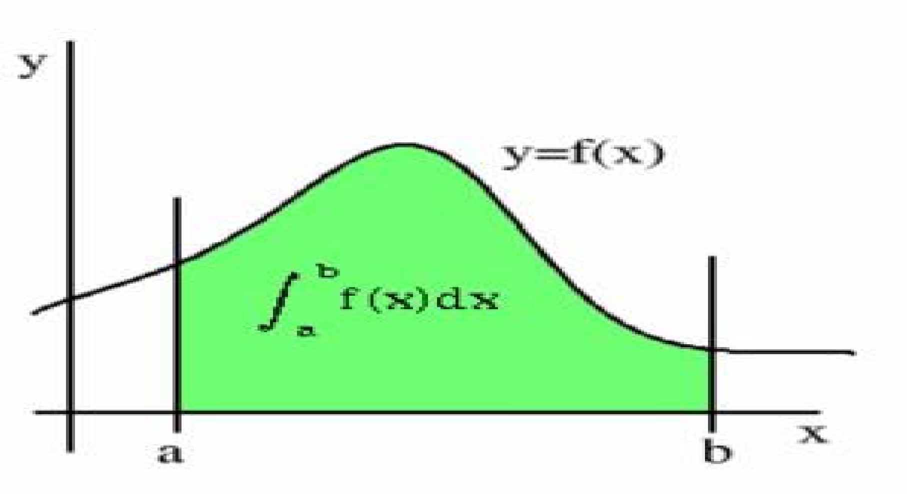
۱۱۰ تمرین نوین انتگرال

شامل خلاصه درس ، نکته و تست

بر اساس آخرین تغییرات کتاب درسی حساب دیفرانسیل و انتگرال



تهیه و تنظیم :

حسین حجازی

اسفند ماه ۱۳۹۱

کتاب جدید التالیف حساب دیفرانسیل انتگرال، شامل تغییرات اساسی در بیان مفاهیم و تعاریف اصلی درس است.

از این رو نگارش مجموعه ای که بتواند تمام نیازهای دانش آموز را پوشش دهد و او را در شرایطی آرام و مطمئن برای امتحان نهایی و آزمون کنکور مهیا کند، امری اجتناب ناپذیر به نظر می رسد.

پس از استقبال عزیزان از جزوه ی ۳۱۳ مشق نوین مشتق، بر آن شدم مجموعه ی جامع و به روز ۱۱۰ تمرین نوین انتگرال را تالیف نمایم.

در این مجموعه ، بخش های مختلف انتگرال، در قالب درسنامه ای کوتاه، اما کامل و نکات مهم و کاربردی تستی به ساده ترین شکل، بیان وارائه شده است. هم چنین تنوع سوالات امتحانی و تست های پر تکرار موجود، به دانش آموز کمک می کند تا در آرامش ، با اطمینان از محتوای استاندارد مطالب، به مطالعه و تمرین بپردازد.

عزیزان می توانند برای دانلود پاسخنامه به سایت ریاضی سرا (www.riazisara.ir) مراجعه نمایند.

در پایان، ضمن آرزوی موفقیت برای شما همکار گرامی و دانش آموز عزیز، همچنان از طریق پست الکترونیکی : hejazi.mh20@yahoo.com و یا شماره همراه ۰۹۱۵۵۱۳۳۹۸۷ پاسخگوی نظرات، سوالات و پیشنهاداتتان می باشم.

حسین حجازی - کارشناس ارشد ریاضی
دبیر دبیرستان های مشهد مقدس
اسفند ماه ۱۳۹۱

انتگرال

در این فصل به مطالعه و بررسی مساله مساحت پرداخته و سپس از این طریق مفهوم مهم انتگرال معین را فرمول بندی خواهیم نمودامإ ذکر این نکته حائز اهمیت است که گرچه انتگرال در مورد مسائل تعیین سطح مفهوم سازی شده ، اما این مفهوم کاربردهای فراوانی در مسائل مهم دیگر ریاضیات، فیزیک و سایر علوم دقیقه دارد، از جمله پتانسیل الکتریکی، کار انجام شده توسط نیروها، مطالعه و تعیین معادله مسیر متحرک ها با استفاده از سرعت داده شده و ... .

قبل از آن که به مطالعه و بررسی مساحت بپردازیم، لازم است با مجموع های متناهی و نماد سیگما آشنا شویم.

تعریف نماد سیگما :

هرگاه $\mathrm{n,m}$ دو عدد صحیح $(\mathrm{m} \le n)$ و همچنین f تابعی باشد که بر اعداد صحیح $\sum_{\mathrm{i=m}}^{n} \mathrm{f(i)}$ تعریف شده باشد

آن گاه برای مجموع اعداد $f(m), f(m+1), \dots, f(n)$ از نماد زیر استفاده می کنیم:

$$\sum_{\mathrm{i=m}}^{n} \mathrm{f(i)} = \mathrm{f(m)} + \mathrm{f(m+1)} + \cdots + \mathrm{f(n)}$$

i : متغیر سیگما یا اندیس جمع بندی

m : حد پایین سیگما

n : حد بالای سیگما

مثال:

$$1)\ \sum_{i=2}^{5} i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$

$$2)\ \sum_{i=0}^{10} x^i = x^0 + x^1 + \cdots + x^{10}$$

$$3)\ \sum_{i=1}^{4} (-1)^i = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4$$

$$4)\ \sum_{k=1}^{7} \frac{1}{k+5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots \frac{1}{12}$$

$$5)\ \sum_{i=1}^{10} ia = 1a + 2a + \cdots + 10a$$

قرارداد : مانند بحث دنباله ها به جای استفاده از نماد تابعی $f(i)$ از یک متغیر اندیس دار مانند a_i یا b_i استفاده می کنیم که به اصطلاح به آن **جمله عمومی**، (نمایش جمله iام) می گویند.

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = \sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

به خصوص وقتی تعداد جملات نامتناهی باشد، چنین مجموعی را یک سری نامتناهی می نامیم:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + \cdots$$

دقت کنید سه نقطه آخر به این معنی است که جملات برای همیشه و به طور نامتناهی ادامه دارند.

ویژگی های سیگما

$$1) \sum_{i=1}^{n} c = c + c + \cdots + c = nc$$

$$2) \sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$3) \sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$4) \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$5) \sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m-k}^{n-k} a_{i+k} = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k}$$ (قاعده لغزش)

$$6) \sum_{i=m}^{n} (a_i - a_{i+1}) = a_m - a_{n+1}$$

توجه: مورد شماره 6که تفاضل دو جمله متوالی می باشد، قاعده تلسکوپی یا قاعده ادغام نام دارد و می توان آن را به صورت زیر تعمیم داد.

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i - a_{i+2}) = (a_m + a_{m+1}) - (a_{n+1} + a_{n+2})$$

مثال-جمع های زیر را با استفاده از نماد سیگما بنویسید.

6) $1+2+3+\cdots+n$

7) 5+5+5+...+5 　(100 مرتبه)

8) 9+10+...+20

9) $2^2-3^2+4^2-5^2+\cdots+98^2-99^2$

10) $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}$

11) $1+2x+3x^2+\cdots+100x^{99}$

12 – (تست) : اگر $s_n=\sum_{k=1}^{n}(k^2-10k+3)$ آن گاه $s_{10}-s_9$ برابر است با :

1) 3　　2) 6　　3) -3　　4) -6

مثال13 – حاصل $\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} ij$ کدام است ؟

1)50　　2) 60　　3) 70　　4) 80

مثال 14 – حاصل $\sum_{n=1}^{100}\log\frac{n+2}{n+1}$ کدام است ؟

1) $\log 31$　　2) $\log 51$　　3) $\log 61$　　4) $\log 41$

15 – (تست) : حاصل $\sum_{i=1}^{10}\left(\frac{1}{2i+1}-\frac{1}{2i+3}\right)$ کدام است ؟

1) $\frac{2}{69}$　　2) $\frac{17}{69}$　　3) $\frac{20}{69}$　　4) $\frac{1}{69}$

16 – (تست) : اگر $\sum_{k=1}^{50} k^2+2k=l$ آن گاه حاصل $\sum_{k=0}^{52}(k-2)^2+2(k-2)$ کدام است ؟

1) l 2) $l-2$ 3) $l-1$ 4) $l+1$

17 – (تست) : حاصل $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+12}$ کدام است ؟

1) $\frac{2n}{n+1}$ 2) $\frac{n-1}{n+3}$ 3) $\frac{n}{n+1}$ 4) $\frac{1}{n+1}$

نکته- روابط زیر را به خاطر بسپارید:

1) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

2) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

3) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^3$

4) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

5) $\sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$

6) $\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = 1+r+r^2+\cdots+r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1}$ (مجموع جملات تصاعد هندسی با قدر نسبت r و جمله اول 1)

مثال18-

1) $\sum_{i=1}^{3} \mathrm{i}^3 = 1^3+2^3+3^3 = (\frac{3(4)}{2})^2 = 36$

2) $\sum_{i=1}^{4}(2\mathrm{i}-1) = 1+3+5+7 = (4)^2 = 16$

مثال 19 – اگر $\sum_{k=1}^{n}(3k-1)=40$ باشد مقدار n را به دست آورید.

حل – $\sum_{k=1}^{n}(3k-1)=3\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1=3\frac{n(n+1)}{2}-n=40 \rightarrow 3n^2+n-80=0 \rightarrow n=5$

21 – (تست) : اگر $\sum_{n=1}^{10}(n^2+n)=k$ باشد، حاصل $\sum_{n=1}^{10}(n^2+1)$ کدام است ؟

1) $k-45$ 2) $k+45$ 3) $k-55$ 4) k

22 – (تست) :اگر $\sum_{k=0}^{n}(2k+5)=5n+240$ حاصل $1^3+2^3+\cdots+n^3$ کدام است ؟

1) 12000 2) 14400 3) 21600 4) 57600

23 – (تست) : حاصل $\sum_{k=1}^{n}(6k^2-4k+3)$ کدام است ؟

1) $2n^3+2n^2+n$ 2) $2n^3-n^2-n$ 3) $2n^3-n^2+n$ 4) $2n^3+n^2+2n$

24 – (تست) : اگر $a_{n+1}=a_n+3n$ باشد، حاصل $a_{20}-a_1$ کدام است ؟

1) 545 2) 590 3) 565 4) 570

25 – (تست) :اگر $S_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{p}{n^2}$ آن گاه $\lim_{n\to\infty}S_n$ کدام است ؟

1) ∞ 2) 1 3) $\frac{1}{2}$ 4) 0

26 – (تست) : حاصل $\sum_{n=1}^{9}((n-5)^3+3n-17)$ کدام است ؟

1) -17 2) -16 3) -18 4) -2

مساحت به عنوان حد مجموع :

چند ویژگی از مساحت به گونه ای که برای ما معلوم بوده است:

1-مساحت همواره یک عدد حقیقی و نامنفی است(واحد سطح مربع)
2-هرگاه ناحیه S درون ناحیه R باشد، مساحت S کم تر از مساحت R است.
3-هرگاه ناحیه R اجتماعی متناهی از ناحیه های مجزا باشد، مساحت R برابر مجموع مساحت های این ناحیه های مجزاست.

روش مستطیل برای محاسبه مساحت

می خواهیم نشان دهیم چگونه می توان مساحت یک ناحیه مانند R را که تحت نمودار تابع پیوسته و نامنفی (f (x و محدود به دو خط x = a و x = b را به دست آورد.
بازه [a , b] را به n زیر بازه ی جزء با استفاده از نقاط افرازی

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

تقسیم می کنیم که طول هر قسمت به صورت:

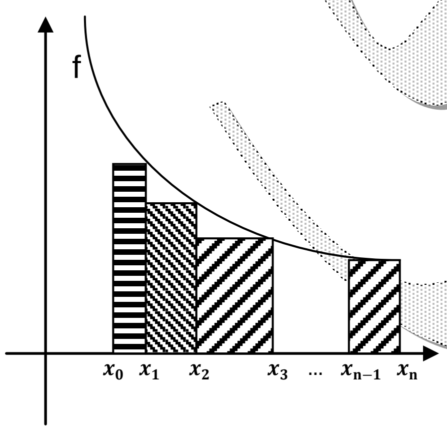
$$\Delta x_1 = x_1 - x_0$$
$$\Delta x_2 = x_2 - x_1$$
$$\vdots$$
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$
$$\vdots$$

بر روی هر زیربازه مانند $[x_{i-1}, x_i]$ مستطیلی با عرض Δx_i و ارتفاع $f(x_i)$ می سازیم، پس مساحت این مستطیل برابر است با

$$f(x_i) \times \Delta x_i$$

و مجموع این مساحت هاعبارت است از :

$$S_n = f(x_1) \times \Delta x_1 + f(x_2) \times \Delta x_2 + \cdots + f(x_n) \times \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$



در واقع S_n تقریبی از مساحت ناحیه R است
با افزایش n این تقریب به مقدار واقعی R نزدیک تر می شود مشروط بر آن که نقاط افراز را چنان انتخاب کنیم که که عرض Δx_iها نیز به صفر میل کنند، بنابراین یافتن مساحت R مستلزم آن است که حد دنباله S_n را وقتی $n \to \infty$ به دست آوریم.(با این شرط که طول بزرگ ترین Δx_iبه صفر میل کند.)

نکته مهم :

برای آن که در حدگیری Δx_{i} همگی به صفر میل کنند اغلب اوقات مناسب تر آن است که عرض همه ی زیر بازه ها مساوی در نظر گرفته شوند در این صورت داریم:

$$\Delta x_{\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{b}-\mathrm{a}}{\mathrm{n}}=\Delta x$$

$$x_i=a+i\Delta x$$

مثال27- مساحت ناحیه ای را بیابید که تحت خط $y = x + 1$ بوده و محدود به خطوط $x = 0$ و $x = 2$ می باشد.

حل:

$$\Delta x=\frac{2-0}{n}=\frac{2}{n},\ x_i=0+i\Delta x=\frac{2i}{n}$$

$$f(x_i)=x_i+1=\frac{2i}{n}+1$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}(\frac{2i}{n}+1)\frac{2}{n}=\frac{2}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{2i}{n}+\sum_{i=1}^{n}1\right)=\frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+n\right)=\frac{2n+2}{n}+2$$

و برای محاسبه ی زیر منحنی

$$\mathrm{R}=\lim_{n\to\infty}S_n=4$$

که می توان با رسم شکل مساحت ذوزنقه را نیز محاسبه نمود.

مثال 28 : مساحت ناحیه ای را که محدود به سهمی $y=x^2$ و خطوط $x=0$, $x=b>0$ می باشد به دست آورید.

حل:

$$\Delta x=\frac{b-0}{n}=\frac{b}{n}$$

$$x_i=0+i\Delta x=\frac{b_i}{n}$$

$$f(x_i)=x_i^2=(\frac{bi}{n})^2=\frac{b^2}{n^2}i^2$$

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}\frac{b^2}{n^2}i^2\times\frac{b}{n}=\frac{b^3}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{b^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{b^3}{3}$$

مثال 29 – مساحت ناحیه ای را که محدود به نمودار $y=x^3$ و خطوط $x=0$ و $y=0$ و $x=b>0$ را به دست آورید.

$$\Delta x=\frac{b-0}{n}=\frac{b}{n}$$

$$x_i=0+i\Delta x=\frac{b_i}{n}\quad,\quad f(x_i)=\frac{b^3}{n^3}i^3$$

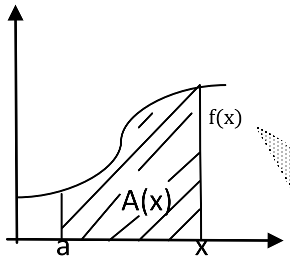
$$S_n=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=\frac{b^4}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3=\frac{b^4}{n^4}(\frac{n(n+1)}{4})^2$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{b^4}{4}$$

30 – (سوال امتحان) :مساحت تحت منحنی به معادله $y=\frac{1}{x}$ را که بالای محور x ها و محدود به $x=a\,,x=b>a$ است به دست آورید.

یک پرسش اساسی

به نظر شما مساحت زیر نمودار تابع f (x) محدود به محور xها در بازه [a , x] چه ارتباطی با خود تابع f (x) دارد؟



$A'(x)=f(x)$

به سادگی مشخص می شود که مشتق تابع مساحت، یعنی تابع A (x) همان تابع f (x) می باشد.

به عنوان مثال $f(x)=x^2$ در بازه $[0,\pi]$ ، $A(x)=\frac{x^3}{3}$ می باشد یا همین طور $f(x)=x+1$ در بازه $[0,\pi]$ $A(x)=\frac{x^2}{2}+x$ می باشد.

انتگرال معین

تا این جا با استفاده از روش مستطیل و تشکیل دنباله ی $\{s_n\}$ و حدگیری به محاسبه مساحت پرداختیم. در ادامه خواهیم دید به فرض نامنفی بودن f، نیازی نخواهیم داشت و در واقع از ایده اولیه محاسبات مساحت عدول کرده و به تابع f در بازه [a , b] عددی وابسته خواهیم کرد که انتگرال معین f بر بازه [a , b] نامیده خواهد شد.

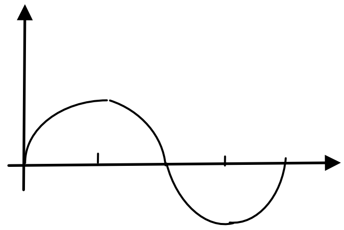
فرض کنید f تابعی پیوسته روی [a , b] باشد، پس روی هر زیربازه اش نیز پیوسته است و در نتیجه روی هر بازه، اکسترمم مطلق خواهد داشت.

فرض کنید U_i نقطه ماکزیمم مطلق و L_i نقطه می نیمم مطلق در بازه i ام باشند ، در این صورت مجموع بالای ریمان و مجموع پایین ریمان را به صورت زیر تعریف می کنیم.

مجموع پایین ریمان :
$$L_n=f(L_1)\Delta x+f(L_2)\Delta x+\cdots+f(L_n)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}f(L_i)\Delta x$$

مجموع بالای ریمان :
$$U_n=f(U_1)\Delta x+f(U_2)\Delta x+\cdots+f(U_n)\Delta x=\sum_{i=1}^{n}f(U_i)\Delta x$$

مثال31 – مجموع بالا و مجموع پایین ریمان تابع $f(x) = \sin x$ را در بازه $[0\ ,2\pi]$ به ازای n=4 بیابید.



$$\Delta x = \frac{2\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{2}$$

افراز : $\left[0,\frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2},\pi\right], \left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

$$L_n = \sum_{i=1}^{4} f(L_i)\Delta x = \Delta x\big(f(L_1) + f(L_2) + f(L_3) + f(L_4)\big)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(f(0) + f(\pi) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right) + f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -\pi$$

$$U_n = \sum_{i=1}^{4} f(U_i)\Delta x = \Delta x\big(f(U_1) + f(U_2) + f(U_3) + f(U_4)\big)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f(\pi) + f(2\pi)\right) = \pi$$

مثال 32 – مجموع های پایین و بالا را برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ بر بازه $[1,2]$ با افراز منظم P مستطیل از 5 نقطه و 4 بازه جزء محاسبه کنید.

حل:

$$\Delta x = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P = \left[1,\frac{5}{4}\right], \left[\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2},\frac{7}{4}\right], \left[\frac{7}{4},2\right]$$

$$L_4 = \sum_{i=1}^{4} f(l_i)\Delta x = \Delta x\big(f(l_1) + f(l_2) + f(l_3) + f(l_4)\big) = \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right) + f(2)\right) = \frac{533}{84}$$

$$U_4 = \sum_{i=1}^{4} f(U_i)\Delta x = \Delta x\big(f(U_1) + f(U_2) + f(U_3) + f(U_4)\big) = \Delta x\left(f(1) + f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{4}\right)\right) = \frac{319}{420}$$

نکته – اگر f تابعی صعودی باشد:

$$\begin{cases} f(l_i) = f(x_{i-1}) \\ f(U_i) = f(x_i) \end{cases}$$

و اگر f تابعی نزولی باشد:

$$\begin{cases} f(l_i) = f(x_i) \\ f(U_i) = f(x_{i-1}) \end{cases}$$

33) سوال امتحانی : در مسائل زیر U_n و L_n را به دست آورید .

الف) $f(x) = e^x$ بر $[-2\,,2]$ با $n = 4$

ب) $f(x) = \ln x$ بر $[\,1\,,2]$ با $n = 5$

ج) $f(x) = \sin x$ بر $[\,0\,,\pi]$ با $n = 6$

34 – (تست) : مجموع پایین ریمان تابع $f(x) = x^3$ بر بازه $[0,1]$ وقتی افراز از 4 نقطه $1\,, \frac{2}{3}\,, \frac{1}{3}\,, 0$ تشکیل شده باشد، کدام است؟

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{2}{9}$ 4) $\frac{1}{9}$

حل:

$$L_3 = \left(0 + \frac{1}{27} + \frac{8}{27}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

35 – (تست) : تابع $f(x) = \begin{cases} x & x\in Q \\ 2 & x\notin Q \end{cases}$ بر بازه $[0,3]$ مفروض است. اگر این بازه را به سه قسمت تقسیم کنیم، مقدار مجموع بالای ریمان کدام است؟

1) 4　　　2) 5　　　3) 6　　　4) 7

36 – (تست) : مجموع بالای ریمان $f(x) = 3x^2$ در بازه $[0,2]$ کدام است ؟

1) $\frac{24}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2$　　　2) $\frac{24}{n}\sum_{i=1}^{n} i^2$　　　3) $\frac{24}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i$　　　4) $\frac{8}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i$

نکته : دنباله $\{L_n\}$ دنباله صعودی و دنباله $\{U_n\}$ نزولی می باشند .

تعریف : هرگاه دنباله ها ی $\{L_n\}$ و $\{U_n\}$ برای تابع **f** در بازه $[a,b]$ به یک عدد مانند A همگرا باشند، می گوییم تابع f بر $[a,b]$ انتگرال پذیر است و عدد A را انتگرال معین این تابع بر بازه $[a,b]$ می گوییم و می نویسیم :

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

توجه: انتگرال معین، یک عدد حقیقی است که می تواند مثبت، منفی و یا صفر باشد.

مثال 37 – آیا تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در $[-1,1]$ انتگرال پذیر است؟

حل:

$$\Delta x = \frac{2}{n}$$

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x = \frac{2}{n}(1+1+1+\cdots+0+1+\cdots+1) = \frac{2}{n}(n-1)$$

$$U_n = \frac{2}{n}(1+1+\cdots+1) = \frac{2}{n}(n) = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} l_n = 2 = \lim_{n\to\infty} U_n \xrightarrow{f\ \text{انتگرال پذیر است}} \int_{-1}^{1} f(x)dx = 2$$

مثال 38 – آیا تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$ در $[-1,1]$ انتگرال پذیر است ؟

مثال 39 – تابع $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 1-x & x < 0 \end{cases}$ مفروض است .مقدار $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ در صورت وجود به دست آورید .

قضیه- اگر تابع f در بازه [a , b] پیوسته باشد، آن گاه در این بازه انتگرال پذیر است ولی عکس مطلب در حالت کلی درست نیست. (مثال 41)

تذکر: اگر تابع f در بازه [a , b] تعداد متناهی نقطه ناپیوستگی داشته باشد ولی در این نقاط دارای حد چپ و راست باشد(نه لزوما برابر)، آن گاه تابع f در این بازه انتگرال پذیر است.

مثال 40 – آیا تابع $y = 2x + 1$ روی بازه $[2,5]$انتگرال پذیر است ؟

تذکر : هرگاه$\mathrm{C_i} \in [x_{i-1}, x_i]$ نقطه دلخواهی از بازه جزء iام باشد، می توان ثابت کرد که :

$$\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(C_i)\Delta x}$$

41 – (تست) : برای تابع $f(x) = \log \frac{4x+1}{4x}$ در بازه $[\frac{7}{8}, \frac{15}{8}]$ حاصل $\sum_{i=1}^{4} f(C_i)\Delta x$ کدام است ؟

1) $\frac{1}{8}\log 2$ 2) $\frac{1}{4}\log 2$ 3) $\frac{1}{2}\log 2$ 4) $\log 2$

42 – (تست) : اگر تابع $f(x)=\begin{cases}2 & x\epsilon Q\\ -2 & x\notin Q\end{cases}$ باشد، مقدار U_n-L_n در بازه $[-1,2]$ کدام است ؟

1) 6 2) 8 3) 10 4) 12

نکته : اگر تابع $\boldsymbol{f(x)=\begin{cases}m & x\epsilon Q\\ n & x\epsilon Q\end{cases}}$ در بازه $[\boldsymbol{a,b}]$ باشد، داریم

$$\mathbf{U_n-L_n=|m-n|(b-a)}$$

نکته :

اگر تابع f در بازه $[a,b]$ پیوسته و یکنوا باشد آن گاه اختلاف مجموع بالا و مجموع پایین ریمان در این بازه عبارت از

$$\mathbf{U_n-L_n=|\boldsymbol{f(a)}-f(b)|\times\Delta x}$$

43 – (تست) : برای تابع $f(x)=x^2$ در $[1,4]$ و $n=180$ مجموع بالای ریمان چقدر از مجموع پایین ریمان کمتر است ؟

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{6}$ 4) $\frac{1}{8}$

44 – (تست) : در تابع $f(x)=5+2x$ حداقل تعداد تقسیمات بازه $[1,4]$ چقدر باشد تا اختلاف مجموع بالا و پایین کمتر یا مساوی $\frac{1}{5}$ باشد.

1) 150 2) 151 3) 900 4) 901

قضیه : هرگاه تابع $\boldsymbol{f}$ بر بازه $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ پیوسته باشد و $\boldsymbol{M}\,,\boldsymbol{m}$ به ترتیب می نیمم و ماکزیمم مطلق $\boldsymbol{f}$بر این بازه باشند، آن گاه

$$\mathbf{m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)}$$

اثبات)

نکته : به مقدار $\bar{f}=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ مقدار متوسط یا میانگین تابع f بر بازه $[a,b]$می گویند .

مثال-نامساوی های زیر را ثابت کنید.

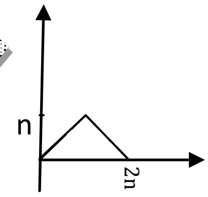
45) $0\leq\int_0^2\sin\frac{\pi}{2}x\,dx\leq 2$

46) $\frac{3}{26}\leq\int_2^5\frac{dx}{x^2+1}\leq\frac{3}{5}$

47 – (تست): اگر $A=\int_1^2 \frac{dx}{1+x^4}$ باشد، حدود A کدام است ؟

$1)\ 1\le A\le 2$　　$2)\ \frac{1}{17}\le A\le\frac{1}{2}$　　$3)\ 0\le A\le\frac{1}{17}$　　$4)\ \frac{1}{2}\le A\le 1$

48 – (تست) : اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد مقدار متوسط آن در بازه $[0,2n]$ برابر 10 باشد، n کدام است ؟



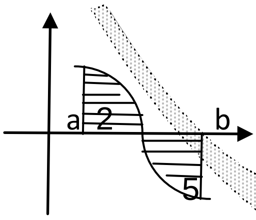
1) 10　　2) 20　　3) 25　　4) 30

قضیه – هرگاه f تابعی انتگرال پذیر باشد

$$\left|\int_a^b \mathbf{f(x)dx}\right| \le \int_a^b |\mathbf{f(x)}|\,dx$$

اثبات:

مثال 49 – اگر نمودار f به صورت مقابل باشد، حاصل $\int_a^b |f(x)|dx$, $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ را به دست آورید .



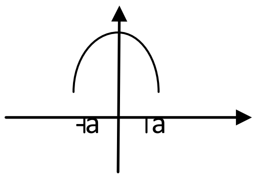
دو نکته مهم

1) فرض کنید $\boldsymbol{f}$ تابعی زوج بر $[-\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{a}]$ باشد، در این صورت

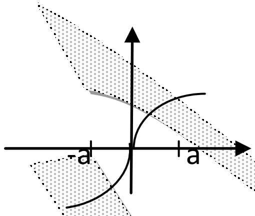
$$\int_{-a}^{a} \mathbf{f(x)dx} = \mathbf{2}\int_{0}^{a} \mathbf{f(x)dx}$$

2) فرض کنید $\boldsymbol{f}$ تابعی فرد بر $[-\boldsymbol{a}\,,\boldsymbol{a}]$ باشد، در این صورت

$$\int_{-a}^{a} \mathbf{f(x)dx} = \mathbf{0}$$



زوج



فرد

مثال 50 − حاصل $\int_{-1}^{1}(x\cos x+\tan x)\,dx$ را بیابید .

ویژگی های انتگرال معین

1) $\int_{a}^{a} \boldsymbol{f(x)dx}$

2) $\int_{a}^{b} \boldsymbol{f(x)dx} = -\int_{a}^{b} \boldsymbol{f(x)dx}$

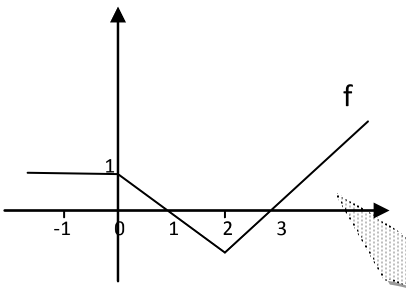
3) $\int_{a}^{b} \boldsymbol{f(x)dx} = \int_{a}^{b} \boldsymbol{f(t)dt}$

4) $\int_{a}^{b} \boldsymbol{f(x)dx} = \int_{a}^{c} \boldsymbol{f(x)dx} + \int_{c}^{b} \boldsymbol{f(x)dx}$

5) $\int_{a}^{b} \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{b-a}$

51 − (تست) : نمودار تابع f به صورت زیر است مقدار متوسط تابع f در بازه $[-1,3]$ کدام است ؟

$1)\ 1 \qquad 2)\ \frac{1}{8} \qquad 3)\ \frac{1}{4} \qquad 4)\ \frac{1}{2}$



52 − اگر تابع f $[-2,2]$ نسبت به مبداء متقارن و مقدار متوسط تابع f روی بازه $[-2,5]$ برابر 4 باشد، $\int_2^5 f(x)dx$ کدام است ؟

$1)\ -28 \qquad 2)\ 28 \qquad 3)\ 12 \qquad 4)\ 4$

53 − (تست) نمودار تابع f روی بازه $[-1,1]$ نسبت به مبداء متقارن است. اگر f بر $[-3,1]$ پیوسته بوده و داشته باشیم :

$A=\int_0^1 f(x)dx \quad , \quad B=\int_{-3}^{-1} f(x)dx$ حاصل $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ کدام است ؟

1) B 2) 2A 3) A+2B 4) 2A+B

مثال- حاصل انتگرال های زیر را به دست آورید.

54) $\int_0^3 [x]dx$

55) $\int_0^4 \left[\frac{x}{2}\right] dx$

56) $\int_0^4 [\sqrt{x}]dx$

57) $\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{x}\right] dx$

58) $\int_0^{\pi} [\cos x]dx$

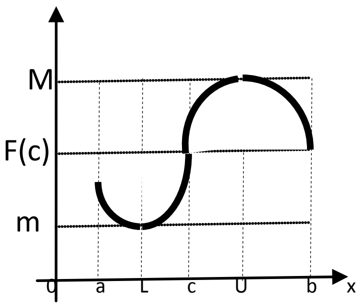
59) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} [x]dx$

قضیه مقدار میانگین در انتگرال ها

هرگاه f بر [a , b] تابعی پیوسته باشد، نقطه ای مانند C از این بازه وجود دارد به قسمی که :

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(x)dx} = \mathbf{f(c)(b-a)}$$

اثبات:



تعبیر هندسی: این قضیه بیان می کند که اگر f روی [a , b] پیوسته باشد، مساحت محصور بین نمودار تابع f و محور xها و خطوط x = a و x = b برابر مساحت مستطیلی است که طول آن، طول این بازه و عرض آن مقدار متوسط تابع f در این بازه خواهد بود.

قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

فرض کنیم تابع f بر بازه I که شامل نقطه a است پیوسته باشد، در این صورت احکام زیر برقرارند:

الف) هرگاه تابع F بر I با ضابطه

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

تعریف می کنیم آن گاه F مشتق پذیر است و $F'(x) = f(x)$.

ب) هرگاه G تابع اولیه دیگری برای f باشد به طوری که $G'(x) = f(x)$ آن گاه برای هر دو نقطه از I مانند a, b

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$$

اثبات-

به عنوان مثال برای محاسبه $\int_1^3 3x^2dx$ که همان سطح زیر منحنی $f(x) = 3x^2$ در [1,2] می باشد کافیست تابع اولیه $F(x) = x^3$ را در نظر بگیریم و :

$$\int_1^2 3x^2\,dx = x^3]\begin{matrix}2\\1\end{matrix} = 2^3 - 1^3 = 7$$

اکنون این سوال مطرح می شود که تابع اولیه f (x) را چگونه بیابیم؟

پس از طرح چند تست از قضیه اساسی، چگونگی یافتن F (x) را بیان خواهیم کرد.

60 – (تست) : حاصل $\frac{d}{dx}\left(\int_x^1 \frac{t\,dt}{1+t^2}\right)$ کدام است ؟

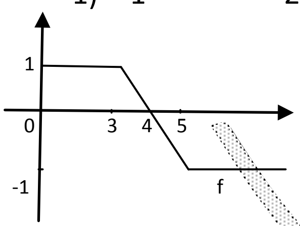
1) $\frac{-x}{1+x^2}$　　2) $\frac{x^2}{(1+x^2)^2}$　　3) $\frac{x}{1+x^2}$　　4) $\frac{1}{1+x^2}$

61 – (تست) : طول نقطه اکسترمم موضعی تابع $G(x)=\int_0^x (t-1)e^{2t}\,dt$ کدام است ؟

1) 1　　2) 2　　3) 3　　4) -1

62 – (تست) : اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد و $F(x)=\int_0^x f(t)dt$، حاصل $F'(6)+F(6)$ کدام است ؟

1) -1　　2) 1　　3) 2　　4) -2



نکته مهم:

(v و u عبارت های مشتق پذیرند.)

$$\mathbf{y}=\int_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} \mathbf{f(t)dt} \Rightarrow \mathbf{y}'=\mathbf{v}'\mathbf{f(v)}-\mathbf{u}'\mathbf{f(u)}$$

63 – (تست) : اگر $f(x)=\int_0^{\tan x}\frac{(4-t)dt}{t^2+2t+3}$ مقدار مشتق f(x) به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ کدام است ؟

1) $\frac{1}{2}$　　2) $\frac{1}{3}$　　3) 1　　4) $\frac{4}{3}$

64 – (تست) : اگر $f(x) = \int_1^x \frac{3dt}{1+t^3}$ باشد، مشتق $f\left(\frac{1}{x}\right)$ به ازای $x = 2$ کدام است ؟

1) $\frac{1}{3}$ 2) $-\frac{1}{3}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $-\frac{2}{3}$

65 – (تست) : حاصل $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \tan 2t\, dt}{x \sin x}$ کدام است ؟

1) 2 2) $\frac{1}{2}$ 3) -1 4) 1

66 – (تست) : اگر $G(x) = \int_2^x \frac{\cos \pi t}{1+t^2} dt$ و $y = x\, G\left(\frac{1}{x}\right)$ مقدار y' به ازای $x = \frac{1}{2}$ کدام است ؟

1) $\frac{1}{5}$ 2) $-\frac{2}{5}$ 3) $-\frac{1}{5}$ 4) $\frac{2}{5}$

67 – (تست) : اگر $F(x) = \int_0^x \frac{t\, dt}{1+t^3}$ باشد، حاصل $F''(1)$ کدام است ؟

1) $-\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $-\frac{1}{4}$ 4) $\frac{1}{4}$

انتگرال نامعین (تابع اولیه)

اگر f تابعی باشد که در بازه شامل بازه [a , b] تعریف شده باشد، آن گاه F را تابع اولیه یا انتگرال نامعین تابع f می نامند

اگر $F'(x) = f(x)$ و تابع اولیه تابع f را با نماد $\int f(x)dx$ نمایش می دهند.

$$\int \mathbf{f(x)dx = F(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F'(x) = f(x)}$$

مثال 68 – اگر $\int f(x)dx = x^4 + x^2$ باشد، $f'(1)$ را به دست آورید.

69 – (تست) : اگر $f(x) = \int x\,sinx\,dx$ آن گاه $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ کدام است ؟

$1) -\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $2) \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $3) -1$ $\quad$ $4) 1$

70 – (تست) : $\int f(x)dx = x\,sinx$ آن گاه $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ کدام است ؟

$1) -\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $2) \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $3) -1$ $\quad$ $4) 1$

فرمول هاي انتگرالگيري

1) $\int \mathbf{k\,dx = kx + c}$

2) $\int \mathbf{x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c}$ $\qquad$ $(\int \mathbf{x^{-1}dx = \ln|x| + c})$

3) $\int \mathbf{\sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c}$

4) $\int \mathbf{\cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + c}$

5) $\int (1+\tan^2 ax) = \frac{1}{a}\tan ax + c$

6) $\int (1+\cot^2 ax) = -\frac{1}{a}\cot ax + c$

7) $\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a}\, e^{ax} + c$

8) $\int \tan ax\, dx = -\frac{1}{a}\, \ln|\cos ax| + c$

9) $\int \cot ax\, dx = \frac{1}{a}\, \ln\, |\sin ax| + c$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

11) $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\, \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

قضیه

الف) $\int k\ f(x)dx = k\int f(x)dx$

ب) $\int \big(f(x) \pm\ g(x)\big)\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

انتگرال هاي زیر را محاسبه کنید.

71) $\int x^2\, dx$

72) $\int \frac{1}{x^3}\, dx$

73) $\int (\sin 5x + \sqrt{x}) dx$

74) $\int (e^{3x} + \frac{1}{x} + \tan 2x)\, dx$

75) $\int \frac{x^2 + 2\sqrt{x} + 1}{x}\, dx$

76) $\int tan^2 x\, dx$

77) $\int \left(\frac{1}{x^2 + 4} + e^{3x} - \cos 2x\right) dx$

78) $\int \frac{(x+2)^3}{x} dx$

79) $\int \sin 4x \cos 2x\, dx$

80) $\int (cos^4x - sin^4x)\ dx$

81) $\int (2sin^2x + 1)\ dx$

82) $\int \frac{1 + e^{2x}}{e^x}\ dx$

83) $\int \sqrt{(1 - \sqrt{x})^2 + 4\sqrt{x}}\ \ dx$

84) $\int \frac{dx}{sin^2x}$

85) $\int \frac{dx}{sin^2xcos^2x}$

86 – (تست) : اگر $\int \frac{x^4+2x^2+2}{x^2+1}dx = g(x) + \frac{1}{3}x^3 + x + c$ آن گاه $g(1)$ کدام است ؟

1) $\frac{\pi}{4}$ 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) $\frac{\pi}{3}$ 4) 1

87 – (تست) : اگر $\int \frac{x+1}{x^3}dx = \frac{f(x)}{2x^2} + c$ باشد آن گاه $f(x)$کدام است ؟

1) $2x-1$ 2) $2x+1$ 3) $-2x-1$ 4) $-2x+1$

88 – (تست) : اگر $\int \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2 - x}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}f(x) + c$ آن گاه $f(x)$ کدام است ؟

1) $2+2\sqrt{x}$ 2) $x-\sqrt{x}$ 3) $1+2\sqrt{x}$ 4) $1+4\sqrt{x}$

86 – (تست) : اگر $\int \frac{5x^2+6x}{2\sqrt{x}}dx = f(x)\sqrt{x} + c$ باشد $f(x)$ کدام است ؟

1) x^2+2x 2) x^2+3x 3) $2x^2+2$ 4) $2x^2+3$

87 – (تست) : اگر $\int \sqrt{(x^2-\frac{1}{x^2})^2+4}\,dx = \frac{f(x)}{3x} + c$ باشد $f(x)$ کدام است ؟

1) x^3-4 2) x^3+4 3) x^4+3 4) x^4-3

91 – (تست) : $F(x) = \int 7x\sqrt[3]{x}dx$ باشد $F(0)=1$ باشد مقدار $F(1)$ کدام است ؟

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

92 – (سوال امتحاني) – اگر تابع با ضابطه $y = f(x)$ در رابطه $\frac{dy}{dx} = \frac{3x-1}{\sqrt{x}}$ صدق کند، ضابطه تابع f که نمودار آن از (0 و 1) مي گذرد را بيابيد.

93 – (تست) : اگر ضريب زاويه ي خط مماس بر نمودار f در هر نقطه $M(x,y)$ برابر عکس مجذور طول آن نقطه باشد و نمودار تابع از نقطه (2,3) بگذرد $f(1)$ کدام است ؟

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{5}{2}$ 3) $\frac{3}{2}$ 4) $\frac{7}{2}$

محاسبه انتگرال معين به کمك تابع اوليه

94) $\int_0^2 \left|\sqrt{x}-1\right| dx$

95) $\int_0^1 |3x-1|[3x]dx$

96) $\int_{-1}^2 (x-|x|)dx$

97) $\int_{-1}^2 (x+|x|)dx$

98) $\int_{-1}^2 (x+|x|)[x]dx$

99) $\int_0^{\frac{\pi}{8}}(\sin x\, cos^3 x - sin^3 x cosx)dx$

100) $\int_{-1}^{1}\frac{sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^4}}$

101 − (تست) : مقدار متوسط تابع $f(x) = \sin 2x$ در بازه $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ کدام است ؟

1) $\frac{3}{\pi}$ 2) $\frac{4}{\pi}$ 3) $\frac{\pi}{3}$ 4) $\frac{\pi}{6}$

102 -(تست) : میانگین تابع $f(x) = x\sqrt{x}$ در بازه $[0,5]$ برابر مقدار تابع در نقطه $\sqrt[3]{c}$ است c کدام است ؟

1)10 2) 15 3) 20 4) 25

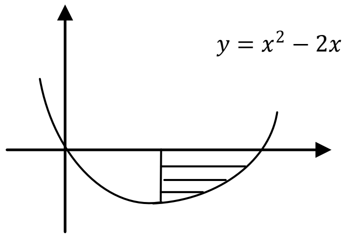
103 − (سوال امتحاني) : مقدار میانگین تابع $f(x) = e^{-x} + \cos x$ را بر بازه $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ به دست آورید .

104 − (سوال امتحاني) : مساحت ناحيه R را كه بالاي خط $y = 1$ و تحت نمودار $y = \frac{5}{x^2+1}$ مي باشد به دست آوريد .

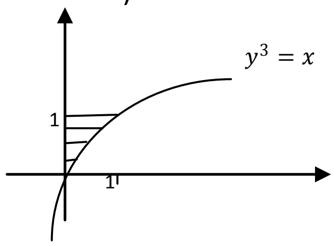
105 − (سوال امتحاني) : مساحت يك طاق $y = \sin x$ را محاسبه كنيد .

مساحت هاي هاشور زده را به دست آورید.

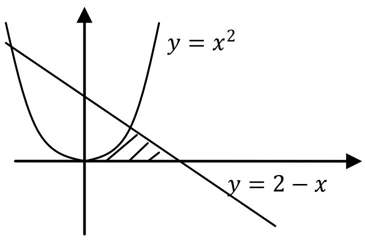
106)



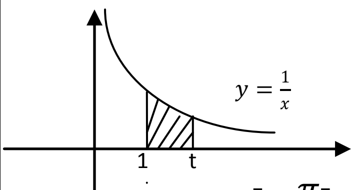
107)



108)



109)



110 – سطح محصور به منحنی تابع $y = 2\sin x \cos 3x$ و محورxها در بازه $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ کدام است ؟

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{6}$ 4) $\frac{1}{8}$