کاربردهای مشتق

۵–۸: آنالیز نقطه‌ای (تحلیل رفتار تابع در همسایگی یک نقطه)

رسم نمودار یک تابع یکی از مفیدترین ابزارها در تحلیل رفتار آن تابع است. هنگام رسم نمودار یک تابع بررسی چگونگی رفتار نمودار در همسایگی کوچک نقاط خاص اهمیت ویژه‌ای دارد. در این بخش روش تحلیل رفتار یک تابع در همسایگی یک نقطه را شرح می‌دهیم و در بخش بعد به خواص کلی نمودارها خواهیم پرداخت. در تست‌های آزمون‌های مختلف دو دسته تست وجود دارد که به رفتار نمودار در همسایگی یک نقطه ربط پیدا می‌کند:

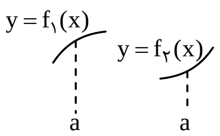
۱– تست‌هایی که مستقیماً از نمودار تابع در همسایگی یک نقطه سؤال می‌کنند.

۲– تست‌هایی که هدف آن‌ها تشخیص «اکسترمم نسبی» بودن، یا «نقطه‌ی عطف» بودن یک نقطه‌ی خاص است.

هر چند که بعضی از تست‌های نوع دوم با روش‌هایی حل می‌شود که در بخش‌های قبل گفته‌ایم، ولی در این کتاب همه‌ی این‌گونه تست‌ها را در این بخش آورده‌ایم. زیرا در جلسه‌ی کنکور و دیگر آزمون‌ها نیز شما در وهله‌ی اول نمی‌دانید که یک تست را باید از یک روش خاص حل کنید یا به روش کلی حل آن متوسل شوید.

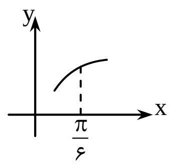
نخست یادآوری می‌کنیم که تقعر یک تابع (مانند f) در همسایگی یک نقطه (مانند $x=a$) با علامت $f''(a)$ و یکنوایی آن با علامت $f'(a)$ مشخص می‌شود.

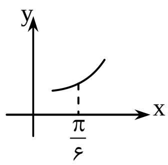
به‌طور مثال در دو شکل روبه‌رو داریم: $f'(a)>0$، ولی درباره‌ی f'' می‌توانیم بگوییم: $f_1''(a)<0$ و $f_2''(a)>0$.

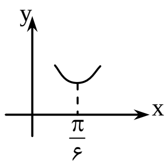


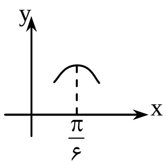
بعضی از تست‌ها را می‌توانیم با همین اطلاعات به راحتی حل کنیم.

تست (۱): نمودار تابع $y=\sin^2 x+\sin x$ در مجاورت $x=\frac{\pi}{6}$ به کدام صورت است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

حل: مشتق اول و دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\sin^2 x+\sin x \Rightarrow f'(x)=\sin 2x+\cos x \Rightarrow f''(x)=2\cos 2x-\sin x$$

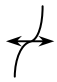
داریم $f'(\frac{\pi}{6})>0$ و $f''(\frac{\pi}{6})=2\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}>0$، بنابراین نمودار f در همسایگی $x=\frac{\pi}{6}$ اکیداً صعودی و با تقعری رو به بالاست.

پس گزینه‌ی (۲) درست است.

تذکر: اگر در این تست به‌دست می‌آوردیم: $f'(\frac{\pi}{6})=0$ و $f''(\frac{\pi}{6})>0$، آن‌گاه گزینه‌ی (۳) درست بود. گزینه‌های دیگر را نیز خودتان تحلیل کنید.

برای حل بعضی از تست‌ها تعیین علامت f' و f'' در خود نقطه‌ی $x=a$ به تنهایی کافی نیست (معمولاً در تست‌هایی که این مقادیر خودشان صفر می‌شوند) و باید در همسایگی نقطه‌ی $x=a$ علامت f' و f'' را تعیین کنیم.

تست (۲): نمودار تابع $f(x)=x-\tan x$ در همسایگی مبدأ مختصات چگونه است؟

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

حل:

راه اول: مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=1-(1+\tan^2 x)=-\tan^2 x$$

واضح است که $f'(0)=0$ و در همسایگی محذوف $x=0$ داریم: $f'(x)<0$، یعنی باید در $x=0$ خط مماس افقی داشته باشیم و در همسایگی آن تابع نزولی اکید باشد. چنین شرطی در گزینه‌ی (۴) برقرار است.

راه دوم: می‌توانیم از هم‌ارزی استفاده کنیم. می‌دانیم وقتی $x\to 0$، داریم: $\tan x \sim x+\frac{1}{3}x^3$، بنابراین:

$$f(x)\sim x-x-\frac{1}{3}x^3 \Rightarrow f(x)\sim -\frac{1}{3}x^3$$

یعنی رفتار تابع f و تابع $y=-\frac{1}{3}x^3$ در همسایگی $x=0$ شبیه یکدیگر است. می‌دانیم رفتار تابع $y=-\frac{1}{3}x^3$ در همسایگی $x=0$ شبیه گزینه‌ی (۴) است.

نکته: **استفاده از هم‌ارزی در تشخیص رفتار تابع (معمولاً در همسایگی $x=0$ و به ویژه در توابع مثلثاتی) مفید است.**

رفتار توابع خاص

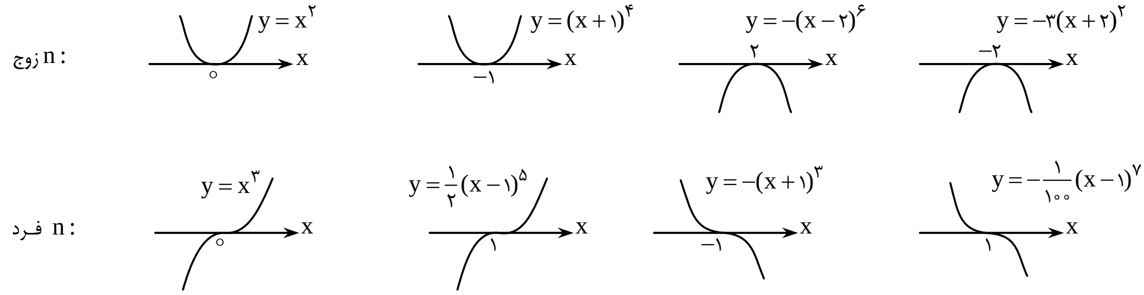
با روش کلی بررسی علامت‌های f' و f'' همه‌ی مسائل از این نوع را می‌توانیم حل کنیم. اما در مواردی خاص شناخت رفتار تابع در حل سریع‌تر مسأله بسیار کمک می‌کند. با این توابع آشنا هستید، ولی برای یادآوری دوباره آن‌ها را بیان می‌کنیم.

۱- رفتار توابع چندجمله‌ای در همسایگی ریشه‌ها

می‌دانیم تابع $f(x)=(x-a)^n$ در همسایگی $x=a$ دو گونه رفتار دارد:

- اگر n عددی زوج باشد، با یک نقطه‌ی اکسترمم نسبی (در واقع می‌نیمم نسبی) مواجه‌ایم.
- اگر n عددی فرد (بزرگ‌تر از ۱) باشد، با یک نقطه‌ی عطف (با خط مماس افقی) مواجه‌ایم.

به مثال‌های زیر توجه کنید:



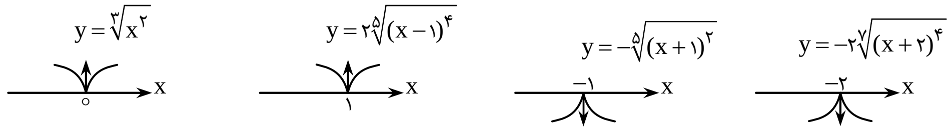
۲- رفتار توابع اصم در همسایگی ریشه‌ها

تابع $f(x)=\sqrt[n]{(x-a)^m}$ را در نظر بگیرید (n عددی فرد است و $m<n$). می‌دانیم که تابع f در $x=a$ مشتق‌ناپذیر است و در واقع خط مماس عمودی دارد. حال دو حالت ممکن است پیش بیاید:

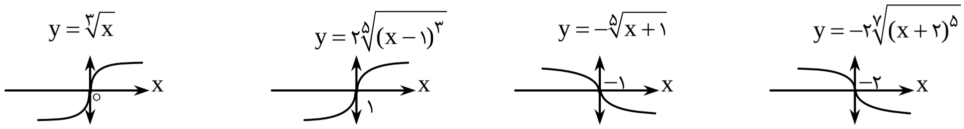
- اگر m عددی زوج باشد، در همسایگی $x=a$ داریم $f(x)\ge 0$ و چون $f(a)=0$، با یک نقطه‌ی می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم (نقطه‌ی بازگشت).
- اگر m نیز عددی فرد باشد، با یک نقطه‌ی عطف (با خط مماس عمودی) مواجه‌ایم.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

: m زوج

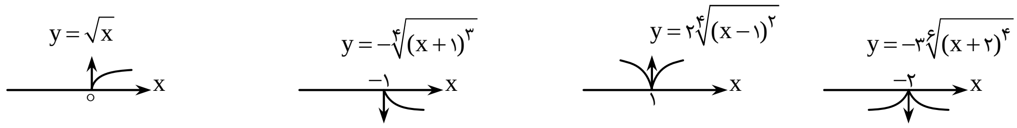


: m فرد



➢**تذکر (۱):** در تابع بالا (یعنی $f(x)=\sqrt[n]{(x-a)^m}$) وقتی n عددی زوج باشد، بازهم در $x=a$ خط مماس عمودی داریم، ولی ممکن است فقط یک همسایگی $x=a$ در دامنه‌ی تابع باشد (دقت کنید که وقتی n زوج باشد، همواره $f(x)\geq 0$).

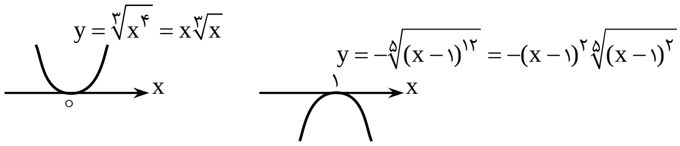
به مثال‌های زیر توجه کنید:



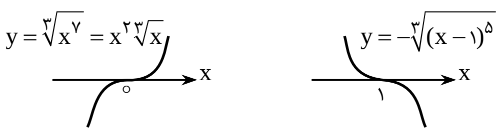
➢**تذکر (۲):** در تابع بالا (یعنی $f(x)=\sqrt[n]{(x-a)^m}$)، وقتی $m>n$، شرایط مانند حالت $m<n$ است، با این تفاوت که خط مماس عمودی به خط مماس افقی تبدیل می‌شود.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

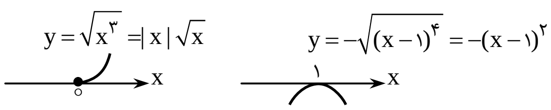
در حالت m زوج و n فرد همواره داریم $y\geq 0$ یا $y\leq 0$.



در حالت m فرد و n فرد در همسایگی نقاط y تغییر علامت می‌دهد.



در حالت n زوج همواره داریم $y\geq 0$ یا $y\leq 0$.



با توجه به آن‌چه تاکنون گفته‌ایم، اگر تست یا مسأله‌ای مستقیماً از یکی از توابع بالا سؤال بکند، می‌توانیم پاسخ درست را تشخیص دهیم. توصیه می‌کنیم از حفظ کردن موارد بالا بپرهیزید. با کمی دقت به ساختار ساده‌ی این توابع پی خواهید برد، که بدون حفظ کردن می‌توانید به راحتی نمودار تابع را رسم کنید.

ولی اگر در تست‌ها به مسائلی برخوریم که تابع دارای چند ریشه باشد (که معمولاً نیز با چنین توابعی روبه‌رو خواهیم شد)، چگونه می‌توانیم عمل کنیم؟ کلید کار، استفاده از نکته‌ی زیر است:

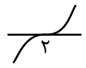
نکته: **اگر** $h(x)=f(x)g(x)$**، طوری که** $f(a)=0$ **و** $g(a)\neq 0$**، آن‌گاه:**

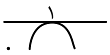
۱- اگر $g(a)>0$**، رفتار تابع** h **در همسایگی** $x=a$ **شبیه رفتار تابع** f **است.**

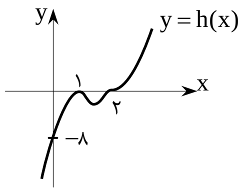
۲- اگر $g(a)<0$**، رفتار تابع** h **در همسایگی** $x=a$ **شبیه رفتار تابع** $-f$ **است.**

مفهوم نکته‌ی بالا این است که برای تحلیل رفتار تابع h در همسایگی ریشه‌ی آن $(x=a)$، کافی است آن را بـه ضـرب دو تـابع تجزیـه کنـیم کـه $x=a$ ریشه‌ی یکی نباشد. در این صورت می‌توانیم به جای تابع اخیر (یعنی تابع g با شرط $g(a)\neq 0$)، تنها علامت آن در $x=a$ را قرار دهیم.

مثال: تابع $h(x)=(x-۲)^۳(x-۱)^۴$ را نظر بگیرید. در این صورت:

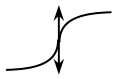
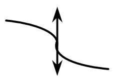
۱- رفتار تابع h در همسایگی $x=۲$ شبیه رفتار تابع $y=(x-۲)^۳$ است، یعنی  زیرا اگر قـرار دهـیم $g(x)=(x-۱)^۴$، $x=۲$ ریشه‌ی g نیست و داریم: $g(۲)>۰$. پس به جای $g(x)$ می‌توانیم علامت آن یعنی $+$ را قرار دهیم.

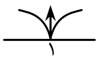
۲- رفتار تابع h در همسایگی $x=۱$ شبیه رفتار تابع $y=-(x-۱)^۴$ است، یعنی  زیرا اگر قـرار دهیم $g(x)=(x-۲)^۳$، داریم: $g(۱)<۰$، پس به جای آن می‌توانیم علامت آن یعنی $-$ را قرار دهیم.



دو نتیجه‌ی بالا را با نمودار تابع مطابقت دهید.

تست (۳): **نمودار تابع $f(x)=(x+۲)\sqrt[۳]{x^۳-۲x^۲+x}$ در همسایگی $x=۱$ چگونه است؟**

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

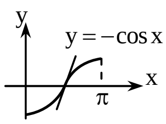
حل: چون $x^۳-۲x^۲+x=x(x-۱)^۲$، ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به صورت $f(x)=\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}\times(x+۲)\sqrt[۳]{x}$ بنویسیم. اگـر قـرار دهـیم: $g(x)=(x+۲)\sqrt[۳]{x}$، چون $g(۱)>۰$، رفتار تابع f در همسایگی $x=۱$ شبیه رفتار تابع $y=\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}$ می‌شود، یعنی .
بنابراین گزینه‌ی (۱) درست است.

تذکر: اگر $g(۱)<۰$ می‌شـد، رفتـار تـابع شـبیه رفتـار تـابع $y=-\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}$ مـی‌شـد، یعنـی گزینـه‌ی (۲) درسـت بـود. هـم‌چنـین چـون $f(x)=\sqrt[۳]{x}\times\underbrace{\sqrt[۳]{(x-۱)^۲}(x+۲)}_{h(x)}$ و $h(۰)>۰$، رفتار تابع f در همسایگی $x=۰$ شبیه رفتار تابع $y=\sqrt[۳]{x}$ است، یعنی مانند گزینه‌ی (۳).

تست (۴): **کدام گزینه نمودار تابع $f(x)=\dfrac{\sin x\cos x}{\cos x-۲}$ را در همسایگی $x=\dfrac{\pi}{۲}$ نشان می‌دهد؟**

۱)  ۲)  ۳)  ۴) 

حل: چون $x=\dfrac{\pi}{۲}$ ریشه‌ی $\cos x$ است، ضابطه‌ی f را به صورت $f(x)=\cos x\dfrac{\sin x}{\cos x-۲}$ می‌نویسیم.



اگر قرار دهیم $g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x-۲}$ داریم: $g(\frac{\pi}{۲})<۰$، پس رفتار تابع f در همسایگی $x=\dfrac{\pi}{۲}$ شبیه رفتار تابع $y=-\cos x$ است. با توجه به نمودار $y=-\cos x$، گزینه‌ی (۳) رفتار درست را نشان می‌دهد.

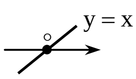
تذکر: یادآوری می‌کنیم که تابع $y=\cos x$ در نقطه‌های برخورد با محور xها، نقطه‌ی عطف دارد.

پرسش: منظور از شباهت رفتار نمودارهای دو تابع $y_۱=f(x)g(x)$ و $y_۲=f(x)$ در همسایگی $x=a$ چیست؟

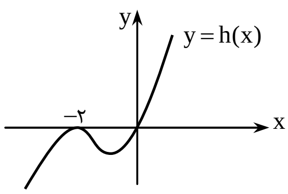
پاسخ: منظور از شباهت دو نمودار، شباهت آن دو از جنبه‌ی یکنوایی و تقعر است. یعنـی در همسـایگی چـپ و راسـت $x=a$ دو تـابع $y_۱$ و $y_۲$ از جنبه‌ی یکنوایی و تقعر مانند یکدیگرند. بنابراین اگر برای یک تابع (مثلاً $y_۲=f(x)$) تقعر تعریف نشده باشد (مثلاً $f_۲(x)=x+۲$)، در این صـورت فقط از جنبه‌ی یکنوایی می‌توانیم رفتار دو تابع را مشابه بدانیم.

نکته: **در نکته‌ی قبل (یعنی شباهت رفتار نمودارهای دو تابع $h(x)=f(x)g(x)$ و $y=f(x)$)، اگر برای تابع f تقعر تعریف نـشده باشد (یعنی تابع f یک تابع چندجمله‌ای درجه‌ی اول باشد)، رفتار دو تابع تنها از جنبه‌ی یکنوایی شبیه یکدیگر است.**

مثـال ۱- در تابع $h(x)=x(x+۲)^۲$ اگر قرار دهیم $g(x)=(x+۲)^۲$، داریم: $g(۰)>۰$. بنابراین در همـسایگی $x=۰$ رفتار تابع شبیه رفتار تابع $f(x)=x$ است، یعنی شبیه شکل روبه‌رو.

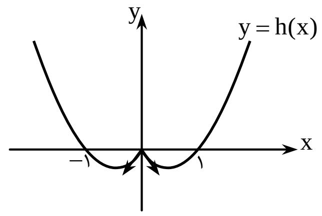


ولی دقت کنید که چون $f(x)$ یک تابع درجه‌ی ۱ است و تقعر برای آن تعریـف نـشده، از جنبـه‌ی تقعـر رفتار دو تابع شبیه یکدیگر نیست. تنها از جنبه‌ی یکنوایی مـی‌تـوانیم بگـوییم کـه ماننـد نمـودار $y=x$، نمودار تابع h نیز در همسایگی $x=۰$ صعودی اکید است.
به نمودار تابع h دقت کنید و نتیجه‌ی بالا را با آن مطابقت دهید.



۲- در تابع $h(x)=|x|(x^2-1)$ رفتار تابع در همسایگی $x=0$ فقط از نظر یکنوایی شبیه رفتار تابع $y=-|x|$ است، یعنی شبیه ، پس در نقطه‌ی $x=0$ با نقطه‌ی زاویه‌دار و ماکزیمم نسبی مواجه‌ایم. ولی درباره‌ی تقعر آن نمی‌توانیم به راحتی اظهارنظر کنیم، چون تابع $y=-|x|$ تقعر ندارد.

به نمودار تابع h دقت کنید و آن را با نتیجه‌ی بالا مطابقت دهید.



کاربرد آنالیز نقطه‌ای در تشخیص نوع نقطه

وقتی ما بتوانیم نمودار تقریبی یک تابع مانند f را در همسایگی نقطه‌ای مانند $x=a$ رسم کنیم، قطعاً به راحتی می‌توانیم بگوییم که این نقطه برای تابع f چه نقشی دارد. آیا «اکسترمم نسبی» است، یا «نقطه‌ی عطف»، یا حتی یک «نقطه‌ی عادی». هم‌چنین روش دیگری که معمولاً در حل این‌گونه تست‌ها کاربرد دارد، تعیین علامت تابع در اطراف ریشه‌ی مورد نظر است.

تست (۵): در تابع $y=(x-1)^2(x-2)\sqrt[4]{(x+1)^4}$ نقاط $x=1$ و $x=-1$ چه وضعیتی دارند؟

۱) $x=1$ ماکزیمم نسبی و $x=-1$ می‌نیمم نسبی است. **۲) $x=1$ و $x=-1$ هر دو ماکزیمم نسبی هستند.**

۳) $x=1$ می‌نیمم نسبی و $x=-1$ ماکزیمم نسبی است. **۴) $x=1$ و $x=-1$ هر دو می‌نیمم نسبی هستند.**

حل: راه اول: ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به صورت $f(x)=(x-1)^2(x-2)|x+1|$ بنویسیم. در همسایگی $x=1$ رفتار تابع مشابه رفتار تابع $g_1(x)=-(x-1)^2$ است، یعنی: . در همسایگی $x=-1$ رفتار تابع از نظر یکنوایی مشابه رفتار تابع $g_2(x)=-|x+1|$ است، یعنی: . پس در هر دو نقطه با ماکزیمم نسبی مواجه‌ایم.

راه دوم: f را تعیین علامت می‌کنیم (قدرمطلق و توان ۲ در $(x-1)^2$ علامت ناحیه‌های مجاور را یکسان نگه می‌دارد). بنابراین در همسایگی $x=1$ و $x=-1$ داریم: $f(x)\le 0$ و چون $f(1)=f(-1)=0$، با ماکزیمم نسبی مواجه‌ایم.

x		-1		1		2	
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$+$

بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

تست (۶): در تابع $y=\sqrt[5]{x-1}\times\sqrt[7]{(x-2)^2}\,|(x-1)(x-2)|$ نقاط $x=1$ و $x=2$ به ترتیب چگونه‌اند؟

۱) هر دو می‌نیمم نسبی **۲) ماکزیمم نسبی و می‌نیمم نسبی**

۳) هر دو عطف **۴) عطف و می‌نیمم نسبی**

حل: راه اول: ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به صورت $f(x)=\sqrt[5]{x-1}\times|x-1|\times\sqrt[7]{(x-2)^2}\times|x-2|$ بنویسیم. در همسایگی $x=1$ رفتار تابع مشابه رفتار تابع $g_1(x)=|x-1|\sqrt[5]{x-1}$ است، یعنی (اگر شک دارید آن را به صورت دو ضابطه‌ای بنویسید). در همسایگی $x=2$ رفتار تابع مشابه رفتار تابع $g_2(x)=|x-2|\sqrt[7]{(x-2)^2}$ است، یعنی . بنابراین در $x=1$ نقطه‌ی عطف و در $x=2$ نقطه‌ی می‌نیمم نسبی داریم.

راه دوم: با تعیین علامت $f(x)$ داریم:

x		1		2	
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

بنابراین در همسایگی $x=2$ داریم: $f(x)\ge 0$ و چون $f(2)=0$، با می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم. به دلیلی مشابه در $x=1$ نه با می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم و نه با ماکزیمم نسبی، و این شرایط تنها در گزینه‌ی (۴) وجود دارد.

در حالت کلی نکته‌ی زیر نیز می‌تواند به حل چنین تست‌هایی کمک کند (این نکته از مطالبی که تاکنون گفته‌ایم نتیجه گرفته شده است).

نکته: **اگر $x=a$ ریشه‌ی مکرر تابع f باشد، آن‌گاه:**

۱- اگر مرتبه‌ی تکرار $x=a$ عددی زوج باشد، در $x=a$ با اکسترمم نسبی f مواجه‌ایم (نوع این اکسترمم را باید با آنالیز نقطه‌ای یا تعیین علامت به دست آورید).

۲- اگر مرتبه‌ی تکرار $x=a$ عددی فرد (بزرگ‌تر از ۱) باشد، در $x=a$ با نقطه‌ی عطف f مواجه‌ایم.

مثال: تابع $f(x)=x^{۲}(x+۳)^{۴}(x-۱)^{۳}(x+۱)$ در $x=۰$ و $x=-۳$ اکسترمم نسبی دارد (ریشه‌های مرتبه‌ی زوج)، در $x=۱$ نقطه‌ی عطف دارد (ریشه‌ی مرتبه‌ی فرد) و درباره‌ی نقطه‌ی $x=-۱$ نمی توانیم بدون مشتق‌گیری اظهار نظر کنیم.

بررسی دقیق‌تر: در $x=۰$ تابع ماکزیمم نسبی دارد، زیرا رفتار آن شبیه تابع $y=-x^{۲}$ است. در $x=-۳$ تابع می‌نیمم نسبی دارد، زیرا رفتار آن شبیه تابع $y=(x+۳)^{۴}$ است.

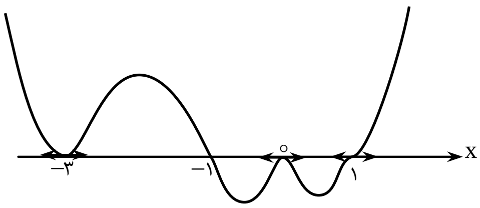
در $x=-۱$ هر چند مشخص نیست که با نقطه‌ی عطف مواجه‌ایم یا نه، ولی قطعاً می‌توانیم بگوییم با اکسترمم نسبی روبه‌رو نیستیم، زیرا از نظر یکنوایی رفتار تابع شبیه تابع $y=-(x+۱)$ می‌شود.

این نتایج از جدول تعیین علامت تابع نیز مشخص است:

x		-۳		-۱		۰		۱	
$f(x)$	+	۰	+	۰	−	۰	−	۰	+

در نقاط $x=۰$ و $x=-۳$ به دلیل مرتبه‌ی تکرار زوج علامت تابع عوض نمی‌شود.

به نمودار تابع نیز دقت کنید و آن را با نتایج بالا مطابقت دهید.



تذکر: دقت کنید که روش‌های گفته شده برای حل سریع‌تر تست‌ها بیان شده است. ممکن است در مسأله‌ای این روش‌ها سودی نداشته باشد و شما مجبور شوید از همان روش‌های بخش‌های قبل برای تشخیص نقاط اکسترمم نسبی و عطف استفاده کنید. پس هیچ‌گاه از پایه‌ی اصلی غافل نشوید!

فصل ۵

آنالیز نقطه‌ای

پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱- نقطه‌ای به طول صفر برای تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{1+x^2}$ چه نقطه‌ای است؟

۱) ماکزیمم نسبی ۲) می‌نیمم نسبی ۳) عطف ۴) عادی

۲- در نمودار تابع $f(x)=3x^5-5x^4+x$ مبدأ مختصات کدام عنوان را دارد؟

۱) ماکزیمم نسبی ۲) می‌نیمم نسبی ۳) عطف ۴) عادی

۳- اگر $f'(x)=x^5-10x^3-9x^2+18$، نقطه‌ی $x=1$ چه نقطه‌ای برای $f(x)$ است؟

۱) عطف ۲) می‌نیمم نسبی ۳) ماکزیمم نسبی ۴) عادی

۴- نقطه‌ای به طول ۲ برای تابع $f(x)=(x-2)^2(x^2-5x+6)$ چه نقطه‌ای است؟

۱) ماکزیمم نسبی ۲) می‌نیمم نسبی ۳) عطف ۴) عادی

۵- نقطه‌ای به طول $x=1$ در نمودار تابع $f(x)=\frac{(x^2-1)(x^3+x-2)}{x^2+1}$ چه عنوانی دارد؟

۱) می‌نیمم نسبی ۲) ماکزیمم نسبی ۳) عطف ۴) نقطه‌ی عادی

۶- نقاط $x=1$ و $x=2$ به ترتیب در تابع $f(x)=(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^4$ چه نوع نقاطی هستند؟

۱) می‌نیمم نسبی - ماکزیمم نسبی ۲) ماکزیمم نسبی - عطف

۳) می‌نیمم نسبی - عطف ۴) ماکزیمم نسبی - می‌نیمم نسبی

۷- برای تابع $f(x)=(x^2-1)^3+(x-1)^2+1$ نقطه‌ای به طول $x=1$ چه نقطه‌ای است؟

۱) ماکزیمم نسبی ۲) می‌نیمم نسبی ۳) عطف ۴) ساده

۸- در تابع $f(x)=(x^2-1)|x-1|$ نقطه‌ای با طول یک چه نام دارد؟

۱) می‌نیمم نسبی ۲) ماکزیمم نسبی ۳) عطف ۴) زاویه‌دار است، اما اکسترمم نیست.

۹- اگر $f(x)=\begin{cases}x^2+3x-6 & x\ge 1\\ -x+2 & x<1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}x & x\ge 1\\ x-3 & x<1\end{cases}$، آن‌گاه نقطه‌ای به طول $x=1$ برای تابع fg چگونه نقطه‌ای است؟

۱) ماکزیمم نسبی ۲) می‌نیمم نسبی ۳) عطف با خط مماس مایل ۴) عطف با خط مماس افقی

۱۰- تابع $f(x)=(x-x_1)^8$ مفروض است. کدام تابع در نقطه‌ی $x=x_1$ عطف دارد؟

۱) تابع مشتق دوم ۲) تابع مشتق چهارم ۳) تابع مشتق هفتم ۴) تابع مشتق اول

۱۱- اگر در تابع $f(x)=(x+a)^2(x-b)^3$ نقطه‌ی $x_0=2$ طول می‌نیمم نسبی تابع باشد، کدام گزینه می‌تواند درست باشد؟

۱) $\begin{cases}a=2\\ b=3\end{cases}$ ۲) $\begin{cases}a=2\\ b=-3\end{cases}$ ۳) $\begin{cases}a=-2\\ b=3\end{cases}$ ۴) $\begin{cases}a=-2\\ b=-3\end{cases}$

۱۲- اگر $x=1$ طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع با ضابطه‌ی $y=\frac{(x+a)^3}{x^2}$ باشد، a چقدر است؟

۱) ۲- ۲) ۱- و ۲- ۳) ۱ ۴) ۱-

* ۱۳- تابع $f(x)=x(x^{۲}-۴)^{۲}(x^{۲}-۵x+۶)$ دارای m اکسترمم نسبی و n نقطه‌ی عطف است. $m-n$ کدام است؟

۱) ۴-　۲) ۱　۳) صفر　۴) ۱-

۱۴- در تابع $f(x)=\sqrt{x^{۳}+x^{۲}}$ نقطه‌ی $x=۰$ چگونه نقطه‌ای است؟

۱) بازگشت و می‌نیمم نسبی　۲) بازگشت و ماکزیمم نسبی　۳) زاویه‌دار　۴) عطف

۱۵- مبدأ مختصات برای نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}+|x|}$ چه نقطه‌ای است؟

۱) زاویه‌دار و می‌نیمم نسبی　۲) عطف و زاویه‌دار
۳) ماکزیمم نسبی و بازگشت　۴) می‌نیمم نسبی و بازگشت

۱۶- در تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^{۷}-x^{۶}}$ نقطه‌ای به طول $x=۰$ چگونه نقطه‌ای است؟

۱) اکسترمم نسبی با خط مماس افقی　۲) بازگشت
۳) عطف با خط مماس افقی　۴) عطف با خط مماس عمودی

۱۷- در تابع $y=\sqrt[۳]{(x-۱)(x-۲)^{۳}}$ نقاط $x=۱$ و $x=۲$ چگونه‌اند؟

۱) $x=۱$ عطف و $x=۲$ عادی　۲) $x=۱$ و $x=۲$ هر دو عطف
۳) $x=۱$ و $x=۲$ هر دو عادی　۴) $x=۱$ عادی و $x=۲$ عطف

۱۸- برای تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}+۲x+۱$، نقطه‌ای به طول $x=۱$ چه نقطه‌ای است؟

۱) ماکزیمم نسبی　۲) می‌نیمم نسبی　۳) عطف　۴) عادی

۱۹- اگر نقطه‌ای به طول ۱، نقطه‌ی بازگشت تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x^{۳}+ax+b}$ باشد، مقدار b چقدر است؟

۱) ۴　۲) ۳　۳) ۲　۴) ۱

۲۰- نقطه‌ای به طول $x=-۱$ در نمودار تابع $f(x)=\sqrt[۵]{(x^{۳}-۳x-۲)^{۳}(x^{۲}-۱)}$ چه نقطه‌ای است؟

۱) ماکزیمم نسبی　۲) می‌نیمم نسبی　۳) عطف　۴) عادی

۲۱- تابع y بر حسب x با ضابطه‌ی $x^{۳}+y^{۳}+x^{۲}=۰$ بیان می‌شود. در نمودار این تابع مبدأ مختصات کدام عنوان را دارد؟

۱) نقطه‌ی زاویه‌دار　۲) نقطه‌ی بازگشت　۳) نقطه‌ی عطف　۴) نقطه‌ی می‌نیمم نسبی

۲۲- نقطه‌ای به طول $x=\frac{\pi}{۳}$ برای تابع $f(x)=\sin ۳x-۲\sqrt{۳}\cos x$ نقطه‌ی:

۱) ماکزیمم نسبی است.　۲) می‌نیمم نسبی است.
۳) عطف با خط مماس مایل است.　۴) عطف با خط مماس افقی است.

۲۳- در نمودار تابع $f(x)=x\sin x$، نقطه‌ای به طول $x=۰$، نقطه‌ی .... است.

۱) ماکزیمم نسبی　۲) می‌نیمم نسبی　۳) عطف　۴) عادی

۲۴- در تابع $f(x)=\sin x+\frac{۱}{۲}\sin ۲x$، نقطه‌ی $x=\pi$ چه نقطه‌ای است؟

۱) عطف　۲) ماکزیمم نسبی　۳) می‌نیمم نسبی　۴) عادی

۲۵- تابع f در بازه‌ی $(۰,\pi)$ پیوسته است و برای هر $x\neq\frac{\pi}{۲}$ در این بازه داریم: $f'(x)=\frac{۱+\cos ۲x}{\sin ۲x}$. نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۲}$ برای تابع f چه نقطه‌ای است؟

۱) می‌نیمم نسبی　۲) ماکزیمم نسبی　۳) عطف　۴) نقطه‌ی عادی

* ۲۶- اگر $f(x)=\begin{cases} x^{۲}\tan^{-۱}(\frac{۱}{x}) & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$، مبدأ مختصات برای نمودار آن چه نام دارد؟

۱) می‌نیمم نسبی　۲) ماکزیمم نسبی　۳) عطف　۴) نقطه‌ی عادی

-۲۷ نمودار تابع $f(x)=x^4-2x^3$ در همسایگی مبدأ مختصات به کدام صورت است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

-۲۸ نمودار تابع $f(x)=x^3-x+1$ در همسایگی نقطه‌ی عطف خود شبیه کدام‌یک از شکل‌های زیر است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

-۲۹ نمودار تابع $f(x)=x^4-4x^3$ در مجاورت نقطه‌ی عطف خود در سمت راست محور عرض‌ها، به کدام صورت است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

-۳۰ نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^3+4}{x^2}$ در همسایگی نقطه‌ای به طول $x=2$ به کدام صورت است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

-۳۱ نمودار تابع $f(x)=x+3+\dfrac{3x+1}{x^2}$ در همسایگی محل تلاقی آن با محور طول‌ها به کدام صورت است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

-۳۲ نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x}{|x|-1}$ در همسایگی مبدأ مختصات به کدام صورت است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

-۳۳ نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x|x|}{x-2}$ در همسایگی $x=0$ به کدام صورت است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

-۳۴ نمودار تابع $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$ در همسایگی مبدأ مختصات به کدام صورت است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

-۳۵ نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{x(x-1)^2}$ در همسایگی $x=1$ به کدام صورت است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

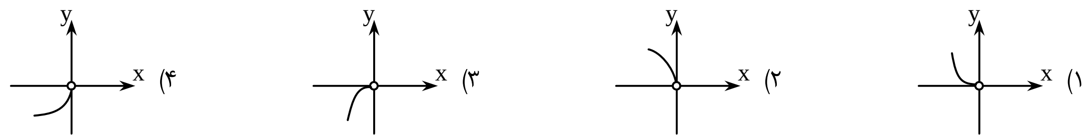
-۳۶ نمودار تابع $f(x)=x^2+\sqrt{1-x^2}$ در همسایگی $x=0$ به کدام صورت است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

-۳۷ نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x\sqrt[3]{x}}{x-1}$ در همسایگی $x=0$ به کدام صورت است؟

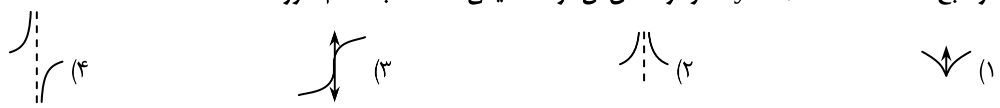
۱) ۲) ۳) ۴)

۳۸- نمودار تابع $y=\frac{x\sqrt{-x}}{-\sqrt[3]{x}}$ در همسایگی $x=0$ به کدام صورت است؟



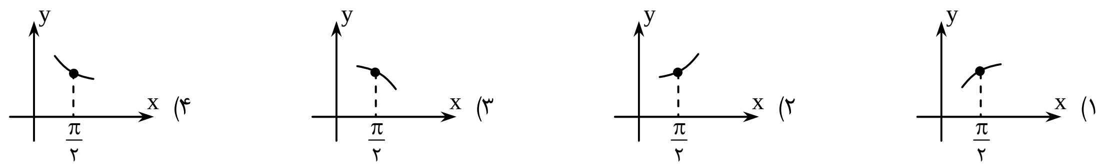
۳۹- تابع y بر حسب x با ضابطه‌ی $x^3+y^3=2$ بیان شده است. نمودار تابع در همسایگی نقطه‌ی تلاقی آن با محور y ها به کدام صورت است؟

۴۰- در تابع $y=\sqrt[3]{x^3-3x-2}$، نمودار مشتق آن در همسایگی $x=2$ به کدام صورت است؟

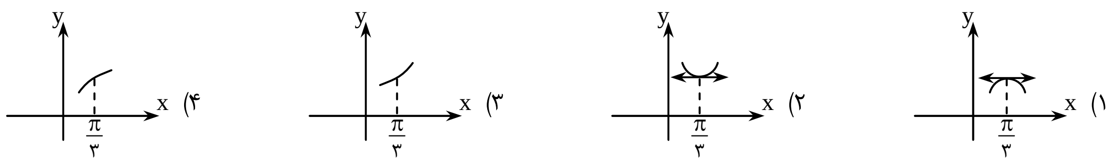


۴۱- نمودار تابع $f(x)=x\sqrt[3]{(x-2)^2}$ در همسایگی نقطه‌ی بحرانی تابع در بازه‌ی $(0,2)$ کدام است؟

۴۲- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sin x-\cos x$ در همسایگی $x=\frac{\pi}{2}$ به کدام صورت است؟

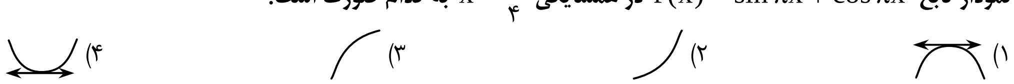


۴۳- نمودار تابع $y=\cos^2 x-\cos x+1$ در همسایگی $x=\frac{\pi}{3}$ کدام شکل است؟



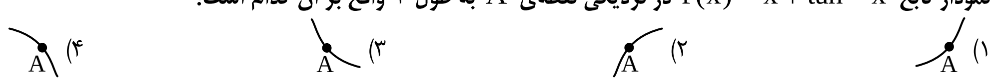
۴۴- نمودار $f(x)=x^2+x-\sin x$ در نزدیکی مبدأ به کدام صورت است؟

۴۵- نمودار تابع $f(x)=\sin\pi x+\cos\pi x$ در همسایگی $x=\frac{1}{4}$ به کدام صورت است؟



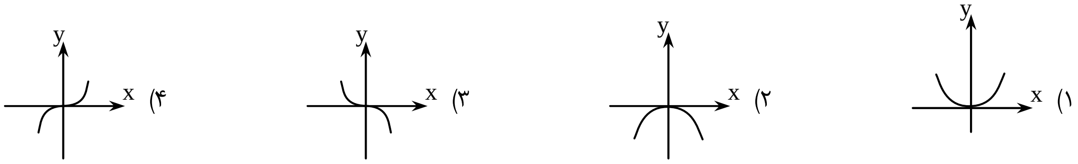
۴۶- نمودار تابع $y=\cot^{-1}(2x-1)$ در همسایگی $x=2$ چگونه است؟

۴۷- نمودار تابع $f(x)=x+\tan^{-1}x$ در نزدیکی نقطه‌ی A به طول ۱ واقع بر آن کدام است؟



۴۸- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=2+\sin x-x\cos x$ در همسایگی نقطه‌ی $x=0$ به کدام شکل است؟

۴۹- نمودار تابع $y=\sin^{-1}x-x$ در همسایگی $x=0$ به چه صورت است؟



۵۰- نمودار تابع $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ در همسایگی $x=\frac{\pi}{2}$ به کدام صورت است؟

۵۱- نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{1-\sin x}$ در همسایگی $x_0=\frac{3\pi}{2}$ به کدام صورت است؟

۵۲- نمودار تابع $f(x)=\sin^2 x\ \cos x$ در همسایگی $x=\pi$ به کدام صورت است؟

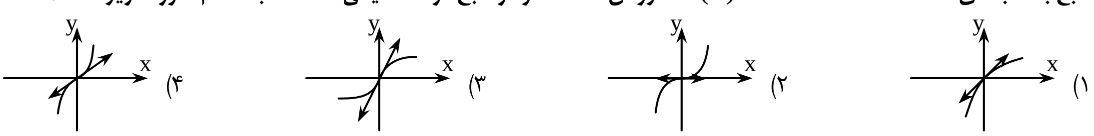
۵۳- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sin 2x\cos x$ در همسایگی نقطه‌ی بحرانی روی بازه‌ی $[0,\frac{\pi}{2}]$ به کدام صورت است؟

* ۵۴- نمودار تابع $f(x)=\cos^2 x\sin 2x$ در همسایگی نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{6}$ به کدام صورت است؟

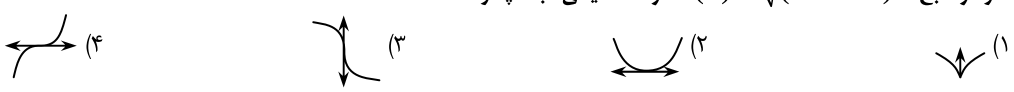
۵۵- نمودار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ در همسایگی $x=\pi$ به کدام صورت است؟

۵۶- نمودار تابع $f(x)=\tan x-\sin x+2$ در همسایگی نقطه‌ی تلاقی با محور y ها کدام شکل را دارد؟

۵۷- تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x+\sin x-\tan x$ مفروض است. نمودار تابع در همسایگی $x=0$ به کدام صورت زیر است؟



۵۸- نمودار تابع $f(x)=\sqrt[3]{(\cos x-1)^2}$ در همسایگی مبدأ چگونه است؟



* ۵۹- نمودار تابع $f(x)=(6x-\pi)\sqrt[3]{2\cos x-\sqrt{3}}$ در همسایگی نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{6}$ چگونه است؟

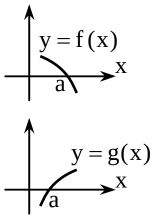
۶۰- اگر f تابعی مشتق‌پذیر و $W(1,-2)$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی نمودار تابع $f(x)$ باشد، نقطه‌ی $A(1,4)$ برای نمودار تابع $y=f^2(x)$ چگونه نقطه‌ای است؟

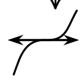
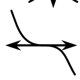
۱) ماکزیمم نسبی ۲) می‌نیمم نسبی ۳) عطف با خط مماس افقی ۴) عطف با خط مماس مایل

۶۱- f تابعی مشتق‌پذیر است و معادله‌ی $f'(x)=1$ دارای ریشه‌ی مضاعف ۲ است. نقطه‌ای به طول $x_0=2$ برای نمودار f چه حکمی دارد؟

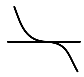
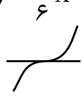
۱) نقطه‌ی عطف با خط مماس افقی
۲) نقطه‌ی عطف با خط مماس مایل
۳) نقطه‌ی اکسترمم نسبی
۴) نقطه‌ی عادی

۶۲- نمودارهای توابع f و g در همسایگی $x=a$ در شکل مقابل رسم شده است. نمودار تابع $y=\sqrt[3]{fg}$ در همسایگی $x=a$ چگونه است؟



۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۶۳- نمودار تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{1}{6}x^3-x+\sin x$ در همسایگی $x=0$ چگونه است؟ (سراسری- ۸۶)

۱) 
۲) 
۳) 
۴) 

۶۴- نمودار $y=x|x-1|+5x^2$ در $x=1$: (آزاد- ۸۶)

۱) ماکزیمم نسبی دارد.
۲) می‌نیمم نسبی دارد.
۳) عطف دارد.
۴) هیچ کدام

۶۵- تابع $y=(x-2)^5(x-3)^6$: (آزاد - ۹۰)

۱) یک ماکزیمم نسبی و یک می‌نیمم نسبی دارد.
۲) یک ماکزیمم نسبی دارد و می‌نیمم نسبی ندارد.
۳) یک می‌نیمم نسبی دارد و ماکزیمم نسبی ندارد.
۴) ماکزیمم نسبی و می‌نیمم نسبی ندارد.

فصل ۵ آنالیز نقطه‌ای

پاسخ‌های تشریحی

A **۱- گزینه‌ی (۲)** از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{(x^2+1)^2}\times 2x=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

به علت همواره مثبت بودن مخرج کسر بالا، علامت $f'(x)$ همان علامت x است، پس در همسایگی $x=0$ علامت $f'(x)$ از منفی بـه مثبـت تغییر می‌کند و با می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم.

B **۲- گزینه‌ی (۴)** مشتق اول و دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=15x^4-20x^3+1\Rightarrow f''(x)=60x^3-60x^2=60x^2(x-1)$$

داریم: $f'(0)=1$، پس گزینه‌های (۱) و (۲) رد می‌شوند. داریم: $f''(0)=0$، ولی علامت $f''(x)$ در همسایگی $x=0$ عوض نمی‌شود (به عامل x^2 توجه کنید)، بنابراین نقطه‌ی عطف نیز نیست.

تذکر: با توجه به آن‌که $f(x)=x(3x^4-5x^3+1)$، و این‌که مقدار عبارت داخل پرانتز به ازای $x=0$ برابر ۱ می‌شود، نمی‌توانید از ایـن نکتـه استفاده کنید که در همسایگی $x=0$ رفتار تابع شبیه رفتار تابع $y=x$ است. چون $y=x$ یک خط بدون تقعر را نشان می‌دهد.

B **۳- گزینه‌ی (۳) راه اول:** با مشتق‌گیری از f' داریم: $f''(x)=5x^4-30x^2-18x$، پس $f'(1)=0$ و $f''(1)<0$، بنابراین $x=1$ نقطـه‌ی ماکزیمم نسبی تابع f است.

راه دوم: چون $f'(1)=0$، با تقسیم $f'(x)$ بر $x-1$ داریم: $f'(x)=(x-1)(x^4+x^3-9x^2-18x-18)$، عبارت داخـل پرانتـز دوم بـه ازای $x=1$ عددی منفی می‌شود، پس علامت $f'(x)$ در همسایگی $x=1$ برعکس علامت $x-1$ می‌شود، در نتیجه علامـت $f'(x)$ از مثبـت به منفی تغییر می‌کند. بنابراین $x=1$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی f است.

A **۴- گزینه‌ی (۳)** با توجه به آن‌که $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$، ضابطه‌ی تـابع f را مـی‌تـوانیم بـه صـورت $f(x)=(x-2)^3(x-3)$ بنویسیم. در همسایگی $x=2$ رفتار این تابع شبیه رفتار تابع $y=-(x-2)^3$ است، یعنی، و با نقطه‌ی عطف مواجه‌ایم.

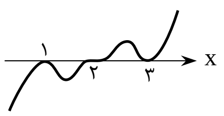
B **۵- گزینه‌ی (۱)** با توجه به آن‌که $x^3+x-2=(x-1)(x^2+x+2)$، ضابطه‌ی تابع f را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=(x-1)^2\frac{(x+1)(x^2+x+2)}{x^2+1}$$

عوامل غیر از $(x-1)^2$ به ازای $x=1$ برابر عددی مثبت می‌شوند، پس رفتار تابع f در همسایگی $x=1$ شبیه رفتار تابع $y=(x-1)^2$ اسـت، یعنی و با نقطه‌ی می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم.

A **۶- گزینه‌ی (۲) راه اول:** رفتار تابع در همسایگی $x=1$ شبیه رفتار تابع $y=-(x-1)^2$ است، یعنی و با ماکزیمم نسبی مواجه‌ایم. همچنین رفتار تابع در همسایگی $x=2$ شبیه رفتار تابع $y=(x-2)^3$ است، یعنی و با نقطه‌ی عطف مواجه‌ایم.

راه دوم: با توجه به ریشه‌های $x=1$، $x=2$ و $x=3$ نمودار تقریبی تابع را رسـم مـی‌کنـیم. درجـه‌ی تکـرار دو ریشه‌ی $x=1$ و $x=3$ زوج است، پس اکسترمم نسبی هستند و درجه‌ی تکرار ریشه‌ی $x=2$ فرد است، پـس بـا نقطه‌ی عطف مواجه‌ایم. چون $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$، نمودار تابع شبیه شکل مقابل می‌شود.

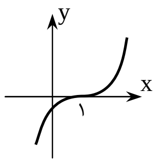


B **۷- گزینه‌ی (۲)** می‌دانیم نمودار تابع f از انتقال یک واحد به بالای نمودار $g(x)=(x^2-1)^3+(x-1)^2$ حاصل می‌شود. پس نقطه‌ی $x=1$ وضعیت مشابهی برای دو تابع دارد. حال داریم:

$$g(x)=(x-1)^3(x+1)^3+(x-1)^2=(x-1)^2((x-1)(x+1)^3+1)$$

عبارت داخل پرانتز بزرگ‌تر به ازای $x=1$ برابر ۱ می‌شود، پس رفتار تابع g در همسایگی $x=1$ شبیه رفتار تابع $y=(x-1)^2$ می‌شود، یعنـی و با یک نقطه‌ی می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم.

B **۸- گزینه‌ی (۳)** چون $f(x)=(x-1)|x-1|(x+1)$، در همسایگی نقطه‌ی $x=1$ رفتار تابع شبیه رفتار تابع $y=(x-1)|x-1|$ است. با توجه به آن‌که $y=\begin{cases}(x-1)^2 & x\ge 1\\ -(x-1)^2 & x<1\end{cases}$ نمودار آن شبیه شکل روبه‌رو می‌شود



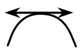
که در نقطه‌ی $x=1$ محور xها بر نمودار تابع مماس است. در این نقطه با نقطه‌ی عطف مواجه‌ایم.

C **۹- گزینه‌ی(۳)** اگر قرار دهیم $h(x)=f(x)g(x)$ داریم:

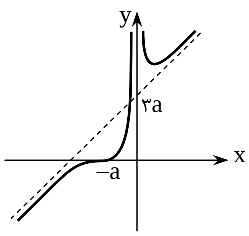
$$h(x)=\begin{cases}x^3+3x^2-6x & x\ge 1\\ -x^2+5x-6 & x<1\end{cases}\Rightarrow h'(x)=\begin{cases}3x^2+6x-6 & x>1\\ -2x+5 & x<1\end{cases}\Rightarrow h''(x)=\begin{cases}6x+6 & x>1\\ -2 & x<1\end{cases}$$

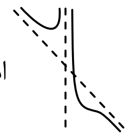
$h''(x)$ در همسایگی $x=1$ تغییر علامت می‌دهد، همچنین داریم: $h'(1)=3$، در نتیجه تابع h در نقطه‌ای به طول $x=1$، نقطه‌ی عطف با خط مماسی با شیب ۳ دارد.

B **۱۰- گزینه‌ی (۴)** می‌دانیم اگر $x=x_1$ ریشه‌ی مکرر تابع y از درجه‌ی تکرار فرد باشد، در $x=x_1$ با یک نقطه‌ی عطف مواجه‌ایم. اگر $g(x)=f'(x)$، آن‌گاه درجه‌ی تکرار ریشه‌ی $x=x_1$ در g برابر ۷ است و نقطه‌ی عطف g را مشخص می‌کند. در گزینه‌های (۱) و (۲) درجه‌ی تکرار ریشه‌ی $x=x_1$ عددی زوج می‌شود و با اکسترمم نسبی مواجه‌ایم. همچنین تابع مشتق هفتم (در گزینه‌ی ۳) یک تابع درجه‌ی ۱ است که برای آن تقعر تعریف نشده است.

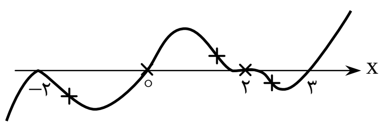
C **۱۱- گزینه‌ی (۴)** اگر $a=-2$ و $b\neq 2$، آن‌گاه $x=2$ ریشه‌ی مضاعف معادله‌ی $f(x)=0$ است و نقطه‌ی $x_0=2$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع f است. بنابراین یکی از دو گزینه‌ی (۳) و (۴) درست است. اگر $b=3$، رفتار تابع در همسایگی $x=2$ شبیه رفتار تابع $y=-(x-2)^2$ می‌شود (زیرا $(3-2)^3>0$)، یعنی  و $x=2$ ماکزیمم نسبی را مشخص می‌کند. پس گزینه‌ی (۴) درست است.

C **۱۲- گزینه‌ی (۴)** اگر $a=-1$، آن‌گاه تابع ریشه‌ی مکرر $x=1$ از درجه‌ی تکرار ۳ دارد که نقطه‌ی عطف را مشخص می‌کند. در حالت کلی با همین استدلال تابع نقطه‌ی عطف $x=-a$ را دارد و اگر $a>0$ نمودار آن شبیه شکل روبه‌رو می‌شود (مجانب قائم $x=0$ و مجانب مایل $y=x+3a$). می‌بینیم که تنها نقطه‌ی عطف تابع $x=-a$ است. پس فقط جواب $a=-1$ قابل قبول است.



تذکر: برای $a<0$ نیز نمودار تابع به شکل  است.

D **۱۳- گزینه‌ی (۴)** چون $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ و $x^2-4=(x-2)(x+2)$، ضابطه‌ی تابع f را می‌توانیم به صورت $f(x)=x(x-2)^3(x+2)^2(x-3)$ بنویسیم.



تابع f ریشه‌های ساده‌ی $x=3$ و $x=0$ را دارد و در $x=-2$ اکسترمم نسبی و در $x=2$ نقطه‌ی عطف دارد. با توجه به آن‌که $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$، نمودار تابع شبیه شکل می‌شود. با توجه به نمودار، تابع ۴ اکسترمم نسبی دارد و ۵ نقطه‌ی عطف که مکان تقریبی آن‌ها را علامت زده‌ایم. پس: $m-n=4-5=-1$.

تذکر: برای رسم چنین نموداری می‌توانید از آموزش بخش ۵-۹ (رسم نمودار) کمک بگیرید.

A **۱۴- گزینه‌ی (۳) راه اول:** مشتق چپ و راست تابع را در $x=0$ به‌دست می‌آوریم:

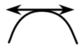
$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2(x+1)}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|\sqrt{x+1}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x+1}=1$$

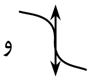
به همین ترتیب داریم: $f'_-(0)=-1$، در نتیجه با یک نقطه‌ی زاویه‌دار مواجه‌ایم.

راه دوم: چون $f(x)=|x|\sqrt{x+1}$، رفتار تابع در همسایگی $x=0$ شبیه رفتار تابع $y=|x|$ (از جهت مشتق اول) می‌شود، پس با یک نقطه‌ی زاویه‌دار و می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم.

B **۱۵- گزینه‌ی (۴)** **راه اول:** وقتی $x \to 0^+$ داریم: $f(x)=\sqrt{x^2+x}$ و $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}=+\infty$. به همین ترتیب وقتی $x \to 0^-$ داریم: $f(x)=\sqrt{x^2-x}$ و $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}=-\infty$. پس در $x=0$ با نقطه‌ی بازگشت مواجه‌ایم و چون علامت مشتق از منفی به مثبت تغییر می‌کند، نقطه‌ی می‌نیمم نسبی است.

راه دوم: می‌توانیم ضابطه‌ی f را به صورت $f(x)=\sqrt{|x|(|x|+1)}$ بنویسیم (چون $x^2=|x|^2$). بنابراین رفتار تابع در همسایگی $x=0$ شبیه رفتار تابع $y=\sqrt{|x|}$ می‌شود، یعنی .

B **۱۶- گزینه‌ی (۱)** با توجه به آن‌که $f(x)=\sqrt[3]{x^6(x-1)}$، در نزدیکی نقطه‌ی $x=0$ رفتار تابع شبیه تابع $y=-\sqrt[3]{x^6}=-x^2$ می‌شود، یعنی نمودار تابع شبیه  می‌شود.

۱۷- گزینه‌ی (۱) ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به صورت $f(x)=(x-2)\sqrt[3]{x-1}$ بنویسیم. در همسایگی $x=1$ رفتار تابع مشابه تابع $g_1(x)=-\sqrt[3]{x-1}$ است، یعنی  و با نقطه‌ی عطف مواجه‌ایم.

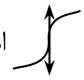
برای بررسی نقطه‌ی $x=2$ به جز مشتق‌گیری مستقیم، می‌توانیم به این صورت عمل کنیم: قرار می‌دهیم $g(x)=\sqrt[3]{x-1}$، بنابراین:

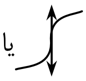
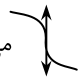
$$f(x)=(x-2)g(x)\Rightarrow f'(x)=g(x)+(x-2)g'(x)\Rightarrow f''(x)=2g'(x)+(x-2)g''(x)$$

بنابراین $f'(2)=g(2)\neq 0$ و $f''(2)=2g'(2)\neq 0$، پس با یک نقطه‌ی عادی مواجه‌ایم.

B **۱۸- گزینه‌ی (۳)** از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}+2\Rightarrow \lim_{x\to 1}f'(x)=+\infty$$

چون $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ هر دو $+\infty$ شده‌اند، با نقطه‌ی عطف با خط مماس عمودی مواجه‌ایم (در واقع نمودار تابع در همسایگی $x=1$ به صورت  است.)

C **۱۹- گزینه‌ی (۳)** اگر $x=1$ ریشه‌ی $g(x)=x^3+ax+b$ نباشد، برای تابع f یک نقطه‌ی عادی است. اگر ریشه‌ی ساده‌ی g باشد، رفتار تابع f در اطراف آن شبیه  یا  می‌شود و نقطه‌ی عطف است. ولی اگر ریشه‌ی مضاعف g باشد، رفتار تابع f در اطراف آن به شکل  یا  خواهد بود (زیرا رفتار تابع f شبیه رفتار تابع $y=\pm\sqrt[3]{(x-1)^2}$ خواهد بود). بنابراین باید $g(1)=g'(1)=0$.

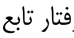
$$g'(1)=0\Rightarrow 3\times 1+a=0\Rightarrow a=-3\xrightarrow{g(1)=0}1-3+b=0\Rightarrow b=2$$

C **۲۰- گزینه‌ی (۳)** با توجه به آن‌که $x^3-3x-2=(x+1)^2(x-2)$، ضابطه‌ی تابع f را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=\sqrt[5]{(x+1)^6(x-2)^3(x-1)(x+1)}=(x+1)\sqrt[5]{(x+1)^2(x-2)^3(x-1)}$$

عبارت $(x-2)^3(x-1)$ به ازای $x=-1$ مقداری مثبت دارد، پس رفتار تابع f در همسایگی $x=-1$ شبیه رفتار تابع $y=(x+1)\sqrt[5]{(x+1)^2}=(x+1)^{\frac{7}{5}}$ می‌شود.

در این تابع نیز داریم: $y'=\frac{7}{5}(x+1)^{\frac{2}{5}}$ و $y''=\frac{14}{25}(x+1)^{\frac{-3}{5}}$ که نشان می‌دهد در $x=-1$ با نقطه‌ی عطفی با خط مماس افقی مواجه‌ایم. (زیرا $y'=0$ و علامت y'' تغییر می‌کند).

B **۲۱- گزینه‌ی (۲)** با توجه به آن‌که $y=-\sqrt[3]{x^3+x^2}$ باید نقش نقطه‌ی $x=0$ را برای این تابع بیابیم. چون $y=-\sqrt[3]{x^2(x+1)}$، در همسایگی نقطه‌ی $x=0$ رفتار تابع شبیه تابع $y=-\sqrt[3]{x^2}$ است، یعنی ، پس با نقطه‌ی بازگشت و ماکزیمم نسبی مواجه‌ایم.

B **۲۲- گزینه‌ی (۲)** از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f'(x)=3\cos 3x+2\sqrt{3}\sin x\Rightarrow f''(x)=-9\sin 3x+2\sqrt{3}\cos x$$

بنابراین $f'(\frac{\pi}{3})=0$ و $f''(\frac{\pi}{3})=\sqrt{3}>0$، پس با نقطه‌ی می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم.

۲۳- گزینه‌ی(۲) (راه اول: مشتق اول و دوم تابع را به‌دست می‌آوریم: B

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\sin x+x\cos x \qquad \Rightarrow f'(0)=0 \\ f''(x)=\cos x+\cos x-x\sin x \Rightarrow f''(0)>0 \end{array}\right\} \to \text{نقطه‌ی مینیمم نسبی}$$

راه دوم: در همسایگی کوچک $x=0$، x و $\sin x$ هم‌علامت‌اند، بنابراین $f(x)\geq 0$، و چون $f(0)=0$، با نقطه‌ی می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم.

راه سوم: با استفاده از هم‌ارزی $\sin x\sim x$ در همسایگی $x=0$، رفتار تابع شبیه $y=x^2$ می‌شود.

۲۴- گزینه‌ی(۱) (راه اول: مشتق اول و دوم تابع را تشکیل می‌دهیم: B

$$f'(x)=\cos x+\cos 2x\Rightarrow f''(x)=-\sin x-2\sin 2x\Rightarrow f''(x)=-\sin x(1+4\cos x)$$

با توجه به آن‌که مقدار عبارت داخل پرانتز به ازای $x=\pi$ برابر -3 می‌شود، پس علامت $f''(x)$ در همسایگی $x=\pi$ عوض می‌شود (زیرا علامت $\sin x$ عوض می‌شود). بنابراین با نقطه‌ی عطف مواجه‌ایم.

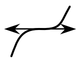
راه دوم: ضابطه‌ی تابع f را به صورت $f(x)=\sin x(1+\cos x)$ می‌نویسیم. معادله‌ی $1+\cos x=0$ ریشه‌ی مضاعف $x=\pi$ را دارد و معادله‌ی $\sin x=0$ ریشه‌ی ساده $x=\pi$ را، پس $x=\pi$ ریشه‌ی مکرر تابع با درجه‌ی تکرار ۳ است. در نتیجه نقطه‌ی عطف تابع را مشخص می‌کند.

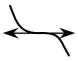
۲۵- گزینه‌ی(۲) چون $\cos 2x\geq -1$، در همسایگی محذوف $x=\frac{\pi}{2}$ داریم: $1+\cos 2x>0$ و صورت کسر عددی مثبت است. پس علامت $f'(x)$ مانند علامت $\sin 2x$ است که در همسایگی $x=\frac{\pi}{2}$ از مثبت به منفی تغییر می‌کند. بنابراین با نقطه‌ی ماکزیمم نسبی مواجه‌ایم. C

۲۶- گزینه‌ی(۳) مشتق تابع را در $x=0$ می‌یابیم: D

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\tan^{-1}(\frac{1}{x})=\text{کران دار}\times\text{صفر}=0$$

پس تابع در $x=0$ خط مماس افقی دارد. از طرفی وقتی $x\to 0^+$ داریم: $\tan^{-1}(\frac{1}{x})\to\frac{\pi}{2}$، پس در همسایگی راست $x=0$، تابع مقدار مثبت دارد. همچنین وقتی $x\to 0^-$ داریم: $\tan^{-1}\frac{1}{x}\to\frac{-\pi}{2}$، پس تابع در همسایگی چپ $x=0$، مقدار منفی دارد.

بنابراین نمودار تابع در همسایگی $x=0$ شبیه  می‌شود و در این نقطه، نقطه‌ی عطف داریم.

۲۷- گزینه‌ی(۱) با توجه به آن‌که $f(x)=x^3(x-2)$، در همسایگی $x=0$ نمودار تابع شبیه نمودار تابع $y=-x^3$ است، یعنی به شکل . A

۲۸- گزینه‌ی(۴) (راه اول: مشتق دوم تابع را به‌دست می‌آوریم: $f'(x)=3x^2-1\Rightarrow f''(x)=6x$ A

$x=0$ نقطه‌ی عطف تابع است و برای $x<0$ داریم: $f''(x)<0$، پس در همسایگی چپ نقطه‌ی عطف تقعر نمودار تابع رو به پایین است. به همین ترتیب در همسایگی راست نقطه‌ی عطف تقعر نمودار رو به بالا است. این شرایط در گزینه‌های (۱) و (۴) وجود دارد که با توجه به $f'(0)=-1$ گزینه‌ی (۴) درست است.

راه دوم: چون $f'(x)=3x^2-1$ تابع دو اکسترمم نسبی دارد، و چون $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$، نمودار تابع شبیه  می‌شود. بنابراین رفتار تابع در همسایگی نقطه‌ی عطف شبیه گزینه‌ی (۴) است.

۲۹- گزینه‌ی (۴) از تابع مشتق می‌گیریم و نقطه‌ی عطف آن را در محدوده‌ی $x>0$ می‌یابیم: B

$$f'(x)=4x^3-12x^2\Rightarrow f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$$

x		0		2	
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

با توجه به جدول بالا، در همسایگی نقطه‌ی عطف $x=2$، علامت f'' از منفی به مثبت تغییر می‌کند، بنابراین یکی از گزینه‌های (۱) و (۴) درست است. چون $f'(2)=-16$، شیب خط مماس در این نقطه عددی منفی است و گزینه‌ی (۴) درست است.

۳۰- گزینه‌ی(۴) مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم: B

$$f(x)=x+4x^{-2}\Rightarrow f'(x)=1-\frac{8}{x^3}=\frac{x^3-8}{x^3}$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	¦	$-$	0	$+$	

در همسایگی $x=2$ علامت مشتق از منفی به مثبت تغییر می‌کند، پس با می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم.

C **۳۱- گزینه‌ی (۳) راه اول:** نقطه‌ی تلاقی با محور طول‌ها را می‌یابیم و سپس از تابع مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=0 \Rightarrow x+3=-\frac{3x+1}{x^2} \Rightarrow x^3+3x^2+3x+1=0 \Rightarrow (x+1)^3=0 \Rightarrow x=-1$$ نقطه‌ی تلاقی

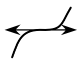
$$f(x)=x+3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x)=1-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}=\frac{x^3-3x-2}{x^3} \Rightarrow f'(-1)=0$$

$$f'(x)=1-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(x)=\frac{6}{x^3}+\frac{6}{x^4}=\frac{6(x+1)}{x^4}$$

پس $f''(-1)=0$ و در همسایگی $x=-1$ علامت آن از منفی به مثبت تغییر می‌کند که این شرایط در گزینه‌ی (۳) برقرار است.

راه دوم: ضابطه‌ی تابع را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2}=\frac{(x+1)^3}{x^2}\xrightarrow{f(x)=0} x=-1$$: محل تلاقی با محور xها

چون عامل $\frac{1}{x^2}$ به ازای $x=-1$ برابر ۱ می‌شود، در همسایگی $x=-1$ رفتار تابع شبیه رفتار تابع $y=(x+1)^3$ می‌شود، یعنی: 

B **۳۲- گزینه‌ی (۴)** مشتق چپ و راست تابع در $x=0$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x\to 0^+ : f(x)=\frac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2} \Rightarrow f'_+(0)=-1$$

$$x\to 0^- : f(x)=\frac{x}{-x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{-1}{(-x-1)^2} \Rightarrow f'_-(0)=-1$$

پس $f'(0)=-1$ و این شرط در گزینه‌ی (۴) برقرار است.

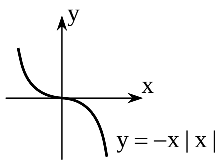
C **۳۳- گزینه‌ی (۴) راه اول:** اگر قرار دهیم: $g(x)=\frac{x^2}{x-2}$ داریم: $f(x)=\begin{cases} g(x) & x\ge 0 \\ -g(x) & x<0 \end{cases}$. حال داریم:

$$g'(x)=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$$

وقتی $x\to 0^+$، صورت کسر بالا منفی است و مخرج آن مثبت (اصطلاحاً $\frac{0^+\times(-4)}{4}=0^-$)، پس $g'(x)$ منفی است.

به همین ترتیب وقتی $x\to 0^-$، $g'(x)$ مثبت است. بنابراین در تابع f در هر دو همسایگی چپ و راست $x=0$ داریم: $f'(x)<0$ و این شرایط در گزینه‌ی (۴) برقرار است.

راه دوم: چون عامل $\frac{1}{x-2}$ به ازای $x=0$ عددی منفی می‌شود، رفتار تابع f در همسایگی $x=0$ شبیه رفتار تابع $y=-x|x|$ است، که به راحتی قابل رسم است:



B **۳۴- گزینه‌ی (۲)** با توجه به گزینه‌ها کافی است $f'(0)$ را تعیین کنیم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\sqrt{4-x^2}=2$$

شیب خط مماس بر نمودار تابع در $x=0$ برابر ۲ است و این شرط در گزینه‌ی (۲) برقرار است.

B **۳۵- گزینه‌ی (۱) راه اول:** در همسایگی $x=1$ نمودار تابع شبیه نمودار تابع $y=\sqrt[3]{1\times(x-1)^2}$ است، یعنی: .

راه دوم: با توجه به جدول تعیین علامت تابع f، در همسایگی محذوف $x=1$ داریم: $f(x)>0$، و چون $f(1)=0$، در نقطه‌ی $x=1$ با می‌نیمم نسبی f مواجه‌ایم. این شرط تنها در گزینه‌ی (۱) برقرار است.

C **۳۶- گزینه‌ی (۱) راه اول:** مقدار $f'(0)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=2x+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0)=0$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

پس گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند. از طرفی چون $f'(x)=x(2-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})$، در همسایگی کوچک $x=0$ علامت f' شبیه علامت x می‌شود (زیرا عبارت پرانتز تقریباً برابر ۱ می‌شود). پس علامت آن از منفی به مثبت تغییر می‌کند و با می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم.

راه دوم: با توجه به آن‌که در همسایگی کوچک $x=0$ داریم: $\sqrt{1-x^2}\ge 1-x^2$ (چون $1-x^2$ عددی بین صفر و یک است)، پس $x^2+\sqrt{1-x^2}\ge 1$، یعنی: $f(x)\ge f(0)$، پس در $x=0$ با می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم.

B ۳۷- گزینه‌ی (۱) راه اول: با توجه به آن‌که $\frac{۱}{x-۱}$ به ازای $x=۰$ برابر -۱ می‌شود، نمودار تابع در همسایگی $x=۰$ شبیه نمودار تابع $g(x)=-x\sqrt[۳]{x}$ می‌شود. داریم: $g'(x)=-\frac{۴}{۳}\sqrt[۳]{x}$، پس علامت g' در همسایگی $x=۰$ از مثبت به منفی تغییر می‌کند و با ماکزیمم نسبی مواجه‌ایم.

راه دوم: با توجه به جدول تغییر علامت تابع، در همسایگی محذوف $x=۰$ داریم $f(x)<۰$ و چون $f(۰)=۰$، با ماکزیمم نسبی تابع مواجه‌ایم.

x	$-\infty$		۰		۱		$+\infty$
$f(x)$		$-$	۰	$-$		$+$	

۳۸- گزینه‌ی (۱) دامنه‌ی تابع با توجه به $\sqrt{-x}$، $x<۰$ است. چون صورت کسر ضابطه‌ی تابع، عددی منفی و مخرج آن عددی مثبت است، پس همواره $y<۰$ و گزینه‌های (۱) و (۲) حذف می‌شوند. حال داریم:

$$y=x\sqrt{-x}\times(\sqrt[۳]{-x})^{-۱}=-(-x)(-x)^{\frac{۱}{۲}}(-x)^{\frac{-۱}{۳}}=-(-x)^{\frac{۷}{۶}}\Rightarrow y'=\frac{۷}{۶}(-x)^{\frac{۱}{۶}}$$

با توجه به ضابطه‌ی بالا $\lim_{x\to ۰^-} y'=۰$، بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

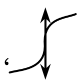
B ۳۹- گزینه‌ی (۳) داریم $y=\sqrt[۳]{۲-x^۳}$ و باید رفتار تابع را در همسایگی $x=۰$ مشخص کنیم. چون $y'=\frac{-۳x^۲}{۳\sqrt[۳]{(۲-x^۳)^۲}}$، در همسایگی محذوف $x=۰$ داریم: $y'<۰$ و در $x=۰$ داریم: $y'=۰$. بنابراین نمودار تابع در $x=۰$ خط مماس افقی دارد و در همسایگی آن اکیداً نزولی است.

C ۴۰- گزینه‌ی(۲) راه اول: از تابع مشتق می‌گیریم:

$$y'=\frac{۳x^۲-۳}{۳\sqrt[۳]{(x^۳-۳x-۲)^۲}}=\frac{x^۲-۱}{\sqrt[۳]{(x^۳-۳x-۲)^۲}}$$

پس $\lim_{x\to ۲^+} y'=\frac{۳}{۰^+}=+\infty$ و $\lim_{x\to ۲^-} y'=+\infty$، بنابراین گزینه‌ی (۲) رفتار تابع مشتق را نشان می‌دهد.

راه دوم: با توجه به آن‌که $x^۳-۳x-۲=(x+۱)^۲(x-۲)$، در همسایگی $x=۲$ رفتار تابع شبیه رفتار تابع $y=\sqrt[۳]{x-۲}$ است، یعنی شبیه



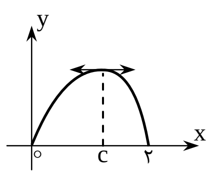
، بنابراین نمودار مشتق آن شبیه گزینه‌ی (۲) می‌شود.

C ۴۱- گزینه‌ی (۱) راه اول: مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}+x\times\frac{۲}{۳\sqrt[۳]{x-۲}}=\frac{۳x-۶+۲x}{۳\sqrt[۳]{x-۲}}=\frac{۵x-۶}{۳\sqrt[۳]{x-۲}}$$

x		$\frac{۶}{۵}$		۲	
$f'(x)$	$+$	۰	$-$		$+$

نقطه‌ی بحرانی تابع $x=\frac{۶}{۵}$ است و در همسایگی آن علامت f' از مثبت به منفی تغییر می‌کند، پس با ماکزیمم نسبی مواجه‌ایم.



راه دوم: چون تابع f در $[۰,۲]$ پیوسته است، در $(۰,۲)$ مشتق‌پذیر است و $f(۰)=f(۲)=۰$، طبق قضیه‌ی رول در نقطه‌ی $c\in(۰,۲)$ داریم: $f'(c)=۰$. چون فقط یکی از گزینه‌ها درست است، همین یک نقطه‌ی بحرانی را در این بازه داریم. حال چون در این بازه $f(x)\geq ۰$، نمودار تابع شبیه شکل روبه‌رو می‌شود و گزینه‌ی (۱) درست است.

B ۴۲- گزینه‌ی(۱) کافی است $f'(\frac{\pi}{۲})$ و $f''(\frac{\pi}{۲})$ را به‌دست بیاوریم:

$$f'(x)=\cos x+\sin x\Rightarrow f''(x)=-\sin x+\cos x$$

داریم: $f'(\frac{\pi}{۲})=۱$ و $f''(\frac{\pi}{۲})=-۱$، پس نمودار تابع f در همسایگی $x=\frac{\pi}{۲}$ اکیداً صعودی و با تقعر رو به پایین است.

B ۴۳- گزینه‌ی (۲) در ضابطه‌ی تابع، مربع کامل ایجاد می‌کنیم:

$$f(x)=\cos^۲ x-\cos x+۱=(\cos x-\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۳}{۴}$$

بنابراین همواره $f(x)\geq\frac{۳}{۴}$ و چون $f(\frac{\pi}{۳})=\frac{۳}{۴}$، پس در $x=\frac{\pi}{۳}$ با مینیمم نسبی مواجه‌ایم.

B **۴۴- گزینه‌ی (۲)** **راه اول:** با مشتق‌گیری از تابع داریم: $f'(x)=۲x+۱-\cos x \Rightarrow f''(x)=۲+\sin x$

با توجه به آن‌که $f'(۰)=۰$ و $f''(۰)>۰$، با مینیمم نسبی مواجه‌ایم.

راه دوم: با استفاده از هم‌ارزی $\sin x \sim x-\frac{۱}{۶}x^۳$ در همسایگی کوچک $x=۰$ رفتار تابع f هم‌ارز تابع g می‌شود:

$$g(x)=x^۲+x-(x-\frac{۱}{۶}x^۳)=x^۲+\frac{۱}{۶}x^۳=x^۲(۱+\frac{۱}{۶}x)$$

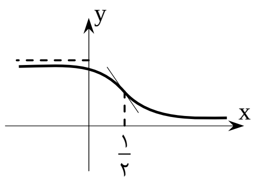
با توجه به ضابطه‌ی بالا در همسایگی $x=۰$ رفتار g شبیه رفتار $y=x^۲$ می‌شود، یعنی .

B **۴۵- گزینه‌ی (۱)** با توجه به آن‌که $a\sin\alpha+b\cos\alpha \le \sqrt{a^۲+b^۲}$ داریم: $f(x)\le\sqrt{۲}$. برای $x=\frac{۱}{۴}$ داریم: $f(\frac{\pi}{۴})=\sqrt{۲}$. پس در نقطه‌ی $x=\frac{۱}{۴}$ با ماکزیمم نسبی f مواجه‌ایم.

B **۴۶- گزینه‌ی (۳)** **راه اول:** مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\cot^{-۱}(۲x-۱)\Rightarrow f'(x)=-\frac{۲}{۱+(۲x-۱)^۲}\Rightarrow f''(x)=\frac{۸(۲x-۱)}{(۱+(۲x-۱)^۲)^۲}$$

با توجه به ضابطه‌ها $f'(۲)<۰$ و $f''(۲)>۰$. بنابراین در همسایگی $x=۲$، تابع f اکیداً نزولی و با تقعر رو به بالا است.



راه دوم: در نقطه‌ای که $۲x-۱=۰$ (یعنی $x=\frac{۱}{۲}$) تابع نقطه‌ی عطف دارد. پس نمودار تابع مشابه شکل روبه‌رو می‌شود که در همسایگی $x=۲$ مانند می‌شود.

B **۴۷- گزینه‌ی (۲)** **راه اول:** مشتق اول و دوم تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=۱+\frac{۱}{۱+x^۲}\Rightarrow f''(x)=\frac{-۲x}{(۱+x^۲)^۲}$$

چون $f'(۱)>۰$ و $f''(۱)<۰$، نمودار تابع در همسایگی $x=۱$ اکیداً صعودی و با تقعری رو به پایین است. بنابراین گزینه‌ی (۲) درست است.

راه دوم: هر دو تابع $y=x$ و $y=\tan^{-۱}x$ اکیداً صعودی‌اند، پس تابع f نیز اکیداً صعودی است و گزینه‌های (۳) و (۴) رد می‌شوند. همچنین در دو بار مشتق‌گیری x حذف می‌شود، پس تقعر تابع شبیه تقعر $y=\tan^{-۱}x$ است که در همسایگی $x=۱$ رو به پایین است.

۴۸- گزینه‌ی (۴) **راه اول:** مشتق تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f'(x)=\cos x-(\cos x-x\sin x)=x\sin x$$

داریم $f'(۰)=۰$، و چون x و $\sin x$ در همسایگی کوچک $x=۰$ هم علامت‌اند، در بقیه‌ی نقاط داریم: $f'(x)>۰$. بنابراین نمودار f در همسایگی $x=۰$ صعودی اکید است و گزینه‌ی (۴) رفتار درست را نشان می‌دهد.

راه دوم: با استفاده از هم‌ارزی در همسایگی کوچک $x=۰$ داریم: $f(x)\sim ۲+x-\frac{۱}{۶}x^۳-x(۱-\frac{۱}{۲}x^۲)\Rightarrow f(x)\sim ۲+\frac{۱}{۳}x^۳$

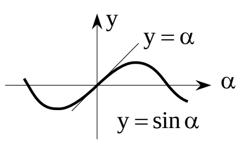
و نمودار تابع $g(x)=۲+\frac{۱}{۳}x^۳$ در همسایگی $x=۰$ مانند گزینه‌ی (۴) است.

C **۴۹- گزینه‌ی (۴)** **راه اول:** مشتق تابع را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\sin^{-۱}x-x\Rightarrow f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}-۱$$

در محدوده‌ی $-۱<x<۱$: $۱-x^۲\le۱\Rightarrow\sqrt{۱-x^۲}\le۱\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}\ge۱\Rightarrow f'(x)\ge۰$

چون تابع f در دامنه‌ی خود همواره اکیداً صعودی است، گزینه‌ی (۴) درست است.



راه دوم: با جایگذاری $x=\sin\alpha$ (که $-\frac{\pi}{۲}\le\alpha\le\frac{\pi}{۲}$) داریم: $y=\alpha-\sin\alpha$.

با توجه به نمودارهای $y_۱=\alpha$ و $y_۲=\sin\alpha$ برای $\alpha>۰$ داریم: $\alpha>\sin\alpha$، یعنی $\alpha-\sin\alpha>۰$ و برای $\alpha<۰$ داریم: $\alpha-\sin\alpha<۰$. این شرایط تنها در گزینه‌ی (۴) برقرار است.

C **۵۰- گزینه‌ی(۲) راه اول:** با مشتق‌گیری از تابع داریم:

$$f'(x)=2\cos x-2\sin 2x=2\cos x(1-2\sin x)$$

به ازای $x=\frac{\pi}{2}$ عبارت داخل پرانتز برابر ۱- می‌شود، بنابراین علامت $f'(x)$ در همسایگی $x=\frac{\pi}{2}$ برعکس علامت $\cos x$ می‌شود، در نتیجه علامت $f'(x)$ از منفی به مثبت تغییر می‌کند. یعنی با نقطه‌ی می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم.

راه دوم: با تغییر متغیر $t=x-\frac{\pi}{2}$ کافی است نمودار تابع زیر را در همسایگی $t=0$ بیابیم:

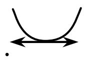
$$g(t)=2\sin(t+\frac{\pi}{2})+\cos(2t+\pi)=2\cos t-\cos 2t$$

در همسایگی $t=0$ تابع g هم‌ارز است با: $y=2(1-\frac{1}{2}t^2)-(1-\frac{1}{2}(2t)^2)=t^2+1$، که نمودار آن شبیه گزینه‌ی (۲) می‌شود.

B **۵۱- گزینه‌ی (۱) راه اول:** $f'(x_0)$ را به‌دست می‌آوریم:

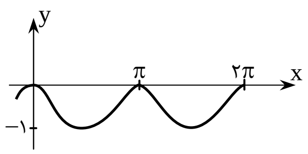
$$f(x)=\frac{\sin x}{-\sin x+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos x}{(-\sin x+1)^2}$$

داریم: $f'(x_0)=0$ و چون در همسایگی $x_0=\frac{3\pi}{2}$، علامت $\cos x$ از منفی به مثبت تغییر می‌کند، علامت $f'(x)$ نیز چنین وضعیتی دارد، یعنی با می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم.

راه دوم: با توجه به آن‌که $\frac{1}{1-\sin x}$ در $x_0=\frac{3\pi}{2}$ عددی مثبت می‌شود، رفتار تابع در همسایگی $x=\frac{3\pi}{2}$ شبیه تابع $y=\sin x$ می‌شود، یعنی شبیه .

C **۵۲- گزینه‌ی(۱) راه اول:** مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x=\sin x(2\cos^2 x-\sin^2 x)$$



عبارت داخل پرانتز به ازای $x=\pi$ برابر ۲ می‌شود، پس در همسایگی $x=\pi$ علامت $f'(x)$ شبیه علامت $\sin x$ است. بنابراین در همسایگی چپ $x=\pi$ داریم: $f'(x)>0$ و در همسایگی راست آن: $f'(x)<0$. این شرایط در گزینه‌ی (۱) برقرار است.

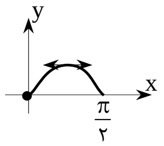
راه دوم: چون $\cos\pi=-1$، رفتار تابع در همسایگی $x=\pi$ شبیه رفتار تابع $y=-\sin^2 x$ است که در شکل مقابل رسم شده است.

C **۵۳- گزینه‌ی (۱) راه اول:** تابع f را بر حسب $\sin x$ می‌نویسیم:

$$f(x)=2\sin x\cos x\cos x=2\sin x\times(1-\sin^2 x)=2\sin x-2\sin^3 x$$

$$f'(x)=2\cos x-6\sin^2 x\cos x=2\cos x(1-3\sin^2 x)$$

در بازه‌ی $(0,\frac{\pi}{2})$ داریم: $\cos x>0$، پس علامت $f'(x)$ همان علامت $1-3\sin^2 x$ است. نقطه‌ی بحرانی نیز نقطه‌ای است که $\sin x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. در همسایگی این نقطه علامت $1-3\sin^2 x$ از مثبت به منفی تغییر می‌کند، پس با ماکزیمم نسبی مواجه‌ایم.



راه دوم: چون $f(0)=f(\frac{\pi}{2})=0$، طبق قضیه‌ی رول با یک نقطه مواجه‌ایم که $f'(x_0)=0$. به دلیل این‌که فقط یکی از گزینه‌ها درست است، پس فقط همین یک نقطه‌ی بحرانی را داریم. حال چون همواره در بازه‌ی موردنظر $f(x)\ge 0$ (زیرا $\sin 2x\ge 0$ و $\cos x\ge 0$)، با نموداری شبیه شکل مواجه‌ایم. همان‌طور که می‌بینید رفتار تابع در همسایگی نقطه‌ی بحرانی مانند شکل گزینه‌ی (۱) است.

D **۵۴- گزینه‌ی (۱)** مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\cos^2 x\times 2\sin x\cos x=2\sin x\cos^3 x\Rightarrow f'(x)=2\cos^4 x-6\cos^2 x\sin^2 x=2\cos^4 x(1-3\tan^2 x)$$

داریم: $f'(\frac{\pi}{6})=0$ و چون علامت عبارت $1-3\tan^2 x$ در همسایگی $x=\frac{\pi}{6}$ از مثبت به منفی تغییر می‌کند، پس علامت $f'(x)$ نیز از مثبت به منفی تغییر می‌کند و با ماکزیمم نسبی مواجه‌ایم.

C **۵۵- گزینه‌ی (۲) راه اول:** مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=\frac{\cos x(1+\cos x)+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}=\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{1+\cos x}$$

با توجه به آن‌که همواره $\cos x \ge -1$، پس $1+\cos x \ge 0$ و در بازه‌های پیوستگی f داریم: $f'(x)>0$، در نتیجه در این بازه‌ها f صعودی اکید است و گزینه‌های (۱) و (۴) رد می‌شود. همچنین چون $\lim\limits_{x\to\pi^+} f'(x)=\frac{1}{0^+}=+\infty$ ، گزینه‌ی (۳) نیز رد می‌شود.

راه دوم: ابتدا ضابطه‌ی تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2(\frac{x}{2})}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

نقطه‌ی $x=\pi$ برای تابع بالا همان نقش نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{2}$ را برای تابع $y=\tan x$ دارد که نمودار تابع در همسایگی آن شبیه گزینه‌ی (۲) است.

C **۵۶- گزینه‌ی (۳)** رفتار تابع را در همسایگی $x=0$ می‌خواهیم. مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x)=1+\tan^2 x-\cos x=\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x=\frac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}$$

با توجه به آن‌که همواره $\cos x \le 1$، داریم: $1-\cos^3 x \ge 0$ و در نتیجه در همسایگی $x=0$ داریم: $f'(x)\ge 0$. پس تابع در همسایگی این نقطه اکیداً صعودی است و گزینه‌ی (۳) درست است.

C **۵۷- گزینه‌ی (۳)** مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

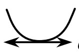
$$f'(x)=1+\cos x-(1+\tan^2 x)=1+\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow f''(x)=-\sin x-\frac{2\sin x}{\cos^3 x}=\frac{-\sin x(\cos^3 x+2)}{\cos^3 x}$$

اولاً $f'(0)=1$، پس گزینه‌ی (۲) رد می‌شود. ثانیاً چون در همسایگی $x=0$ علامت عبارت‌های $\cos^3 x$ و $2+\cos^3 x$ مثبت است، علامت $f''(x)$ برعکس علامت $\sin x$ می‌شود، یعنی در همسایگی چپ $x=0$ داریم: $f''(x)>0$ و در همسایگی راست آن: $f''(x)<0$.

C **۵۸- گزینه‌ی (۲) راه اول:** $f'(0)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\cos x-1)^2}}{x}\xrightarrow{\text{هم‌ارزی}}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{4}x^4}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{4}x}=0$$

بنابراین $f'(0)=0$ و گزینه‌های (۱) و (۳) رد می‌شوند. همچنین به وضوح همواره $f(x)\ge 0$، پس گزینه‌ی (۴) نیز رد می‌شود.

راه دوم: معادله‌ی $\cos x-1=0$ ریشه‌ی مضاعف $x=0$ را دارد، پس درجه‌ی تکرار ریشه‌ی $x=0$ در عبارت زیر رادیکال، ۴ می‌شود. همچنین عبارت همواره مثبت است، پس رفتار تابع شبیه رفتار تابع $y=\sqrt[3]{x^4}$ می‌شود که به شکل  است.

راه سوم: با استفاده از هم‌ارزی $\cos x \sim 1-\frac{1}{2}x^2$، تابع در همسایگی $x=0$ هم‌ارز تابع $y=\sqrt{\frac{1}{4}x^4}=\frac{1}{2}x^2$ می‌شود که نموداری شبیه گزینه‌ی (۲) دارد.

D **۵۹- گزینه‌ی(۳) راه اول:** $x=\frac{\pi}{6}$ هم ریشه‌ی عبارت زیر رادیکال است و هم ریشه‌ی عبارت داخل پرانتز. در همسایگی آن عبارت را تعیین علامت می‌کنیم. طبق جدول روبه‌رو در همسایگی محذوف $x=\frac{\pi}{6}$ داریم: $f(x)<0$ و چون $f(\frac{\pi}{6})=0$ با ماکزیمم نسبی تابع مواجه‌ایم.

x		$\frac{\pi}{6}$	
$6x-\pi$	$-$	0	$+$
$2\cos x-\sqrt{3}$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-$	0	$-$

دقت کنید که در تعیین علامت عبارت $2\cos x-\sqrt{3}$ از نمودار تابع $y=\cos x$ کمک گرفته‌ایم.

راه دوم: $x=\frac{\pi}{6}$ ریشه‌ی ساده‌ی دو عبارت است. چون تابع $y=6x-\pi$ یک تابع صعودی است و تابع $y=2\cos x-\sqrt{3}$ یک تابع نزولی (در همسایگی $x=\frac{\pi}{6}$)، رفتار تابع شبیه رفتار تابع $y=x\sqrt[3]{-x}$ در همسایگی $x=0$ می‌شود. حال می‌توانید ماکزیمم نسبی بودن نقطه را نشان بدهید. (داریم: $y=-x^{\frac{4}{3}}$، $y'=-\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$ و $y''=-\frac{4}{9}x^{\frac{-2}{3}}$)

B **۶۰- گزینه‌ی (۲)** چون $x=1$ نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع f است و مقدار این ماکزیمم نسبی ۲- می‌باشد، در همسایگی کوچک $x=1$ داریم: $f(x)\le -2$، بنابراین: $f^2(x)\ge 4$ و در نتیجه نقطه‌ی $A(1,4)$، نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع $y=f^2(x)$ می‌شود.

C **۶۱- گزینه‌ی (۲)** از این‌که معادله‌ی $f'(x)=1$ دارای ریشه‌ی مضاعف ۲ است، نتیجه می‌گیریم خط $y=1$ بر نمودار $y=f'(x)$ در نقطه‌ی $x_0=2$ مماس است و نمودار f' به یکی از دو صورت یا در همسایگی $x_0=2$ است. پس $x_0=2$ طول اکسترمم نسبی f' را نشان می‌دهد، در نتیجه طول نقطه‌ی عطف f را مشخص می‌کند. چون $f'(2)=1$، خط مماس بر تابع f در این نقطه‌ی عطف، خطی با شیب ۱ است.

C **۶۲- گزینه‌ی (۲)** با توجه به جدول تعیین علامت روبه‌رو، در $x=a$ با نقطه‌ی ماکزیمم نسبی تابع $y=\sqrt[3]{fg}$ مواجه‌ایم. همچنین چون $x=a$ ریشه‌ی ساده‌ی توابع f و g است، ریشه‌ی مضاعف تابع fg می‌شود. بنابراین نقطه‌ی $x=a$ برای تابع $y=\sqrt[3]{fg}$ نقطه‌ی بازگشت است. البته همان نتیجه‌ی اول برای تشخیص گزینه‌ی درست کافی است.

x		a	
f	+	∘	−
g	−	∘	+
fg	−	∘	−

C **۶۳- گزینه‌ی (۲) راه اول:** با مشتق‌گیری داریم:

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^2-1+\cos x \Rightarrow f''(x)=x-\sin x$$

با توجه به نمودارهای دو تابع $y_1=x$ و $y_2=\sin x$ می‌دانیم به ازای $x>0$ داریم: $x>\sin x$ و به ازای $x<0$: $\sin x>x$، پس به ازای $x>0$ داریم: $f''(x)>0$ و به ازای $x<0$: $f''(x)<0$. چنین شرایطی در گزینه‌ی (۲) برقرار است.

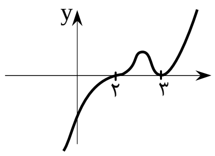
راه دوم: با استفاده از هم‌ارزی $\sin x\sim x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5$ (در همسایگی $x=0$) داریم: $f(x)\sim\frac{1}{120}x^5$، و نمودار تابع $g(x)=\frac{1}{120}x^5$ در همسایگی $x=0$ مشابه شکل گزینه‌ی (۲) است.

B **۶۴- گزینه‌ی (۴)** تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}x(x-1)+5x^2 & x\ge 1\\ x(1-x)+5x^2 & x<1\end{cases}=\begin{cases}6x^2-x & x\ge 1\\ 4x^2+x & x<1\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}12x-1 & x>1\\ 8x+1 & x<1\end{cases}\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}12 & x>1\\ 8 & x<1\end{cases}$$

در همسایگی $x=1$ نه علامت f' عوض می‌شود، نه علامت f''، پس با یک نقطه‌ی عادی مواجه‌ایم.

B **۶۵- گزینه‌ی (۱) راه اول:** در همسایگی $x=3$ رفتار تابع شبیه رفتار تابع $y=(x-3)^6$ است، یعنی ، پس با می‌نیمم نسبی مواجه‌ایم. هم‌چنین در همسایگی $x=2$ رفتار تابع شبیه رفتار تابع $y=(x-2)^5$ است، یعنی ، پس با نقطه‌ی عطف مواجه‌ایم. به این ترتیب نمودار تابع شبیه شکل زیر می‌شود که یک می‌نیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی دارد.



راه دوم: با مشتق‌گیری از تابع و تعیین علامت y' نقاط اکسترمم نسبی مشخص می‌شود.