جزوه آموزشی

آمار و احتمال

یازدهم ریاضی

کاری از استاد بابالویان

پاییز ۹۶

فصل اول :مبانی ریاضیات

درس اول : آشنایی با منطق ریاضی

درس دوم : مجموعه و زیر مجموعه

درس سوم : اعمال روی مجوعه ها و جبر مجموعه ها

درس اول : آشنایی با منطق ریاضی

استدلال :

یک استدلال از چند جمله خبری (ملزومات استدلال) و یک نتیجه (نتیجه استدلال) تشکیل می شود .

مثال : اعداد اول بزرگ تر از یک فرد هستند.

a عدد اول بزرگ تر از یک است .

نتیجه : a عدد فرد است .

گزاره :

یک جمله خبری که می تواند دارای ارزش درست (T) یا نادرست (F) باشد را گزاره می نامند .گزاره ها را معمولاً با نماد p ، q یا r ..... نمایش می دهند .

مثال : جمله « هوا خوب است » یا « حافظ بهترین شاعر است » گزاره نیستند زیرا اولی خبری نیست و دومی دارای ارزش مشخص درست یا نادرست نیست .

گزاره نما :

اگر جمله خبری دارای متغیر باشد که با جایگذاری عدد به جای متغیر به گزاره تبدیل شود آن را گزاره نما می گویند .

مجموعه عضو هایی از دامنه متغیر که به ازای آن ها گزاره نما به گزاره تبدیل می شود را دامنه گزاره نما می گویند و با D نمایش می دهند و زیر مجموعه ای از دامنه که به ازای آن ها گزاره درست ایجاد می شود را مجموعه جواب گزاره نما می گویند و با S نمایش می دهند ($S \subseteq D$)

مثال : جمله « p عددی فرد است » یک گزاره نما است . دامنه آن تمام اعداد طبیعی و مجموعه جواب آن تمام اعداد اول است .

تمرین : مجموعه جواب گزاره $\{x \in R \mid x^{۳} - ۴x = ۰\}$ را بیابید .

نقیض گزاره :

اگر p یک گزاره باشد نقیض آن، گزاره ای است که ارزش آن درست عکس ارزش p باشد .

نقیض گزاره p با $\sim p$ نمایش داده می شود .

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

مثال : نقیض گزاره « اعداد صحیح گویا هستند » گزاره « اعداد صحیح گویا نیستند » می باشد .

توجه : اگر دو گزاره هم ارزش باشند می گوییم هم ارز منطقی هستند مثل p و $\sim(\sim p)$ و می نویسیم $\sim(\sim p) \equiv p$

ترکیب فصلی :

اگر بین دو گزاره حرف ربط « یا » باشد، ترکیب فصلی ایجاد می شود که معمولاً به صورت $p \vee q$ نمایش داده می شود و علامت « $\vee$ » را رابط فاصل می گویند .

ارزش یک ترکیب فصلی زمانی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشد .

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال : برای هر دو عدد حقیقی a و b زمانی حاصل ضرب صفر است که a یا b صفر باشد .

$$a,b \in R \quad ; \quad a \times b = ۰ \Rightarrow a = ۰ \vee b = ۰$$

ترکیب عطفی :

اگر بین دو گزاره حرف ربط « و » باشد، ترکیب عطفی ایجاد می شود که معمولاً به صورت $p \wedge q$ نمایش داده می شود و علامت « $\wedge$ » را رابط عاطف می گویند .

ارزش یک ترکیب عطفی زمانی درست است که هر دو گزاره درست باشد .

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

مثال : برای هر دو عدد حقیقی مثبت a و b زمانی حاصل جمع صفر است که a و b هر دو صفر باشند .

$$a,b \in R \ , a,b > ۰ \quad ; \quad a + b = ۰ \Rightarrow a = ۰ \wedge b = ۰$$

تمرین : فرض کنید محمد به دانشگاه می رود(p) و رضا مکانیک (q) است . ارزش گزاره های زیر را مشخص کنید .

الف) محمد به دانشگاه می رود یا رضا مکانیک است .

ب) محمد به دانشگاه می رود یا رضا مکانیک است .

ج) محمد به دانشگاه نمی رود و رضا مکانیک است .

د) محمد به دانشگاه نمی رود یا رضا مکانیک نیست .

ه) محمد به دانشگاه نمی رود و رضا مکانیک نیست .

و) $p\wedge \sim q$

قوانین دمورگان : $\sim(p\vee q)\equiv \sim p\wedge \sim q$ و $\sim(p\wedge q)\equiv \sim p\vee \sim q$

به کمک جداول زیر درستی قوانین دمورگان را نشان دهید .

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee \sim q$
د	د					
د	ن					
ن	د					
ن	ن					

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge \sim q$
د	د					
د	ن					
ن	د					
ن	ن					

ترکیب شرطی :

اگر p و q دو گزاره ساده باشند ترکیب « اگر p آنگاه q » یک ترکیب شرطی است و به صورت « $p\Rightarrow q$ » نوشته می شود که p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می گویند .

ارزش یک ترکیب شرطی زمانی نادرست است که فر ض درست ولی حکم نادرست باشد .

p	q	$p\Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

برای درک بهتر به این مثال توجه کنید :

فردا دربی هستش و دوستت میگه اگر تو بری استادیوم منم میام .حالا بگو تو کدوم حالت دوستت زده زیر حرفش :

الف) تو میری اونم میره .　　　ب) تو میری اون نمیره .

ج) تو نمیری اونم میره .　　　د) تو نمیری اون میره .

تمرین : ترکیب « اگر ۲ فرد باشد ، آنگاه ۵>۲ است » به انتفای مقدم .... است.

تمرین : به کمک جدول زیر نشان دهید $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$

تمرین : بدون کمک جدول ارزش ها نشان دهید .

الف) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

ب) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

تمرین : ترکیب $\sim q \Rightarrow \sim p$ را عکس نقیض $p \Rightarrow q$ می گویند نشان دهید $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$

تمرین : عکس نقیض گزاره « اگر تو بری ورزشگاه منم میرم » را بنویسید .

تمرین : اگر a صحیح باشد ثابت کنید اگر a^2 فرد باشد ، آنگاه a فرد است .

تمرین : نشان دهید ترکیب های $p \Rightarrow p \vee q$ و $p \wedge q \Rightarrow p$ همواره درست هستند ($(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$ و ...)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q \Rightarrow p$	$p \Rightarrow p \vee q$

ترکیب دو شرطی :

اگر p و q دو گزاره باشند آنگاه گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را که به صورت $p \Leftrightarrow q$ نمایش می دهند را ترکیب دو شرطی می نامند و معمولا را را به صورت « p اگر و تنها اگر q » می خوانند . (البته به صورت « p شرط لازم و کافی برای q است » نیز می خوانند)

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

ارزش یک ترکیب دو شرطی زمانی نادرست است که فرض و حکم هم ارزش باشند .

مثال : گزاره های« ۶ عدد اول است $\Leftrightarrow$ ۵>۲ » و « مثلث متساویالساقین است اگر و تنها اگر دو زاویه برابر داشته باشد » نمونه ای از ترکیب دو شرطی هستند .

تمرین : شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه ای رو عمود منصف یک پاره خط باشد آن است که ....

قوانین هم ارزی های منطقی :

الف) قوانین جابجایی

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$
$$p \vee q \equiv q \vee p$$

ب) قوانین شرکت پذیری

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

ج) قوانین توزیع پذیری

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

د) قوانین دمورگان

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$
$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

ه) قوانین جذب

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$
$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

و) قانون تبدیل گزاره شرطی به فصلی

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$$

تمرین : قانون جذب را به کمک جدول ارزش ها اثبات کنید .

سور ها :

به عبارت های « به ازای هر – به ازای جمیع مقادیر » و « وجود دارد – به ازای برخی مقادیر » سور گفته می شود که اولی سور عمومی و دومی سور وجودی نام دارد و به اختصار سور عمومی را با علامت $\forall$ و سور وجودی را با علامت $\exists$ نمایش می دهند . این عبارت ها می توانند قبل از گزاره نماها آمده و گزاره های درست یا نادرست بسازند .

(مجموعه اعداد زوج را با E و اعداد فرد را با O و اعداد اول را با P نمایش می دهیم)

تمرین : گزاره های زیر را به کمک نماد های $\forall$ و $\exists$ بنویسید .

الف) به ازای هر عدد طبیعی n ، ۲n زوج است .

ب) عددی صحیح وجود دارد که مربع آن به علاوه یک برابر صفر است .

ج) به ازای هر عدد حقیقی غیر صفر ، حاصل ضرب آن عدد در معکوسش برابر یک است .

د) به ازای برخی مقادیر حقیقی داریم : $x^{3}=8x$

تمرین : عبارت های زیر را بدون استفاده از نماد $\forall$ و $\exists$ بنویسید .

الف) $\exists x\in R;\quad x^{2}+1=0$

ب) $\forall a\in E;\quad a=2k, k\in O$

ج) $\forall p\in P;\quad p=2k+1, k\in Z$

د) $\exists b\in Z;\quad b(b+1)=2k, k\in Z$

تمرین : کدام گزاره ها درست و کدام یک نادرست است . در صورت نادرست بودن مثال نقض بیاورید .

الف) $\forall x\in R;\quad |x|>1$

ب) $\exists x\in R;\quad x^{2}<x$

ج) $\exists x\in Z;\quad 2x+1=2$

د) $\forall x\in N;\quad \frac{4n+6}{2}\in O$

نقیض گزاره های سوری :

برای نوشتن نقیض یک گزاره سوری فقط منفی کردن فعل جمله کافی نیست به مثال زیر دقت کنید .

هر آسیایی ایرانی است (نادرست) هر آسیایی ایرانی نیست (نادرست)

پس دو گزاره بالا که هم ارزش هستند نمی توانند نقیض هم باشند . ولی به گزاره های زیر دقت کنید :

هر آسیایی ایرانی است (نادرست) بعضی از آسیایی ها ایرانی نیست (درست)

دو گزاره فوق نقیض هم هستند پس برای نقیض یک گزاره سوری باید هم سور و هم گزاره بعد آن نقیض شود .

توجه : نقیض سور عمومی ، سور وجودی است و برعکس .

$$\sim(\exists x ; p(x)) \equiv \forall x ; \sim p(x) \qquad \sim(\forall x ; p(x)) \equiv \exists x ; \sim p(x)$$

تمرین : ارزش گزاره های زیر را تعیین کرده سپس نقیض آنها را بنویسید .

الف) هر عدد فردی اول است .

ب) $\forall x \in R ; x + \frac{۱}{x} \geq ۲$

ج) عدد حقیقی وجود دارد که مربع آن منفی است .

د) $\exists x \in R ; x + ۲ = ۳$

تکلیف : تمرین های صفحه ۱۷ و ۱۸ را حل کنید .

درس دوم : مجموعه و زیر مجموعه

سالهای قبل با مجموعه و زیر مجموعه و علامت های آن آشنا شدید در تمرینات زیر می خواهیم مروری بر گذشته داشته و آموخته هایمان را یاد آوری کنیم .

تمرین : اگر $A=\{a,b,\{a\},\{a,b\}\}$ کدام موارد درست کدام یک نادرست است ؟

الف) $\{a\}\in A$ ب) $\{a\}\subseteq A$ ج) $a\subseteq A$

د) $\{a,b\}\in A$ ه) $\{a,b\}\subseteq A$ و) $\{b\}\in A$

ز) $\varnothing\in A$ ح) $\varnothing\subseteq A$ ط) $\{\{a,b\}\}\subseteq A$

تمرین : کدام یک از مجموعه های زیر برابر تهی و کدام یک ناتهی اند ؟

الف) $\{x\in Z \mid ۲x-۳=۴\}$ ب) $\{x\in N \mid x^{۲}=x\}$

تمرین : مجموعه های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید .

الف) $A=\{x\in Z \mid |x|\leq ۲\}$

ب) $B=\{x\in R \mid x^{۲}+x-۶=۰\}$

ج) $C=\{x\in N \mid ۲x-۳\leq ۹\}$

تمرین : اگر $A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۲,۴,۶\}$ و $C=\{۲,۳,۵\}$ باشد مجموعه های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید .

الف) $A\cap B=$ ب) $B\cup C=$

ج) $A-C=$ د) $A-(B\cup C)=$

تمرین : تمام زیر مجموعه ای مجموعه $A=\{a,\{a\},\varnothing\}$ را بنویسید .

تمرین : به کمک اصل ضرب نشان دهید تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه n عضوی ، ۲^n است .

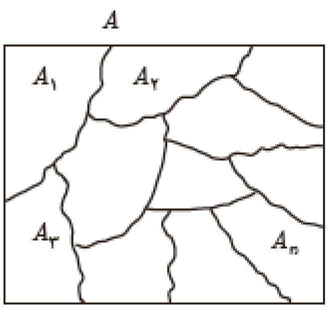
راهنمایی : یک مجموعه را فرض کنید حال اگر انگشت خود را روی یکی از اعضا بگذارید آیا مجموعه باقی مانده زیر مجموعه ی مجموعه قبل نیست ؟ آیا نمیتوان این کار را با هر یکی از اعضا یا چند عضو با هم انجام داد ؟ خوب پس چند زیر مجموعه با این روش می توان ساخت ؟

تمرین : اگر به یک مجموعه ۲ عضو اضافه کنیم به تعداد زیر مجموعه های آن ۹۶ واحد اضافه می شود . این مجموعه چند عضو دارد ؟

تمرین : اگر تعداد اعضای یک مجموعه را دو برابر کنیم تعداد زیر مجموعه های آن ۱۶ برابر می شود . تعداد اعضای اولیه این مجموعه چقدر بوده است ؟

افراز مجموعه :

اگر مجموعه A را به زیر مجموعه های ناتهی طوری تقسیم کنیم که هیچ دوتایی اشتراک نداشته باشند و اجتماع تمام آنها مجموعه A شود این زیر مجموعه ها را یک افراز مجموعه A می گویند .



$$\text{I) } \forall\ ۱ \le i \le n\ ;\ A_i \neq \varnothing$$
$$\text{II) } \forall i, j\ (i \neq j\ ;\ A_i \cap A_j = \varnothing)$$
$$\text{III) } A_۱ \cup A_۲ \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=۱}^{n} A_i = A$$

تمرین : مجموعه $A=\{۱,۲,۳...,۹\}$ را در نظر بگیرید . کدام یک از حالت های زیر یک افراز برای A محسوب می شود ؟

۱ $\{۴,۸,۹\}$ و $\{۲,۶\}$ و $\{۱,۳,۵\}$

۲ $\{۵,۷,۹\}$ و $\{۲,۴,۶,۸\}$ و $\{۱,۳,۵\}$

۳ $\{۷,۹\}$ و $\{۲,۴,۶,۸\}$ و $\{۱,۳,۵\}$

تمرین : تمام افراز های مجموعه $A=\{a,b,c\}$ را بنویسید .

تعریف به کمک نماد های ریاضی در مجموعه ها :

الف) $A\bigcup B=\{x\in U\mid x\in A\vee x\in B\}$

ب) $A\bigcap B=\{x\in U\mid x\in A\wedge x\in B\}$

ج) $A-B=\{x\in U\mid x\in A\wedge x\notin B\}$

د) $A\subseteq B\Leftrightarrow \forall x;(x\in A\Rightarrow x\in B)$ ($A\not\subseteq B\Leftrightarrow \exists x;(x\in A\wedge x\notin B)$)

نتیجه : هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A\subseteq B$ و اعضای دو مجموعه در اختیار نباشند می توانیم عضو دلخواه مانند x را در A در نظر گرفته و نشان دهیم x عضو B نیز می باشد . از آنجایی که x دلخواه بود مشخص می شود هر عضو A در B قرار دارد .

تمرین : موارد زیر را اثبات کنید .(مانند نمونه)

الف) $A\subseteq B,B\subseteq C\Rightarrow A\subseteq C$

$$\forall x;x\in A\overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x\in B\overset{B\subseteq C}{\Rightarrow} x\in C$$
$$\forall x;(x\in A\Rightarrow x\in C)\quad\Rightarrow\quad A\subseteq C$$

ب) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

ج) $A \subseteq A \cup B$

د) $A \cap B \subseteq A$

ه) $A - B \subseteq A$

ه) $A \subseteq B, C \subseteq D \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$

ز) $A \subseteq C, B \subseteq C \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

ح) $C \subseteq A, C \subseteq B \Rightarrow C \subseteq A \cap B$

تمرین : برای هر مجموعه دلخواه A ثابت کنید $\varnothing \subseteq A$.

راهنمایی : با نماد ریاضی آن چیزی که باید اثبات شود را بنویسید . ارزش این گزاره چیست ؟ چرا ؟

دو مجموعه مساوی :

دو مجموعه A و B را مساوی می گویند هر گاه هر عضو یکی از آنها عضو دیگری نیز باشد ، به عبارت دیگر $A \subseteq B, B \subseteq A$

و به صورت ریاضی می توان نوشت : $A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$

تمرین : کدام دو مجموعه با هم مساوی هستند ؟

الف) $A = \{x \in Z \mid ۲x^۲ - ۳x + ۱ = ۰\}$

ب) $B = \{x \in R \mid (x - ۱)(x^۲ + ۲) = ۰\}$

ج) $C = \{x \in N \mid |x| \leq ۱\}$

تمرین : ثابت کنید $A \cap B = B \cap A$ (خاصیت جابجایی)

تمرین : ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ آنگاه $A - B = \varnothing$.

تکلیف : تمرین های صفحه ۲۴ و ۲۵ را حل کنید .

درس سوم : قوانین و اعمال بین مجموعه ها (جبر مجموعه ها)

مشابه قوانین گزاره های مرکب برای اعمال بین مجموعه های نیز قوانینی وجود دارد که همگی به راحتی به کمک هم ارزی های منطقی گزاره های مرکب قابل اثبات هستند .

قوانین اعمال بین مجموعه ها :

الف) قوانین جابجایی

$$A \cap B = B \cap A$$
$$A \cup B = B \cup A$$

ب) قوانین شرکت پذیری

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

ج) قوانین توزیع پذیری

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

د) قوانین جذب

$$A \cap (A \cup B) = A$$
$$A \cup (A \cap B) = A$$

ه)

$$A - B = A \cap B'$$

و) قوانین دمورگان

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

تذکر : با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع و تهی تساوی‌های زیر برقرارند :

۱) $A \cup A' = U$ ۲) $A \cap A' = \varnothing$

۳) $A \cup U = U$ ۴) $A \cap U = A$

اثبات یک نمونه به کمک گزاره‌های مرکب (ج قسمت اول)

$A\cap(B\cup C)=\{x\in U \mid x\in A \wedge x\in (B\cup C)\}$	تعریف اشتراک
$=\{x\in U \mid x\in A \wedge (x\in B \vee x\in C)\}$	تعریف اجتماع
$=\{x\in U \mid (x\in A \wedge x\in B)\vee (x\in A \wedge x\in C)\}$	توزیع پذیری « $\wedge$ » نسبت به « $\vee$ »
$=\{x\in U \mid x\in (A\cap B)\vee x\in (A\cap C)\}$	تعریف اشتراک
$=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	تعریف اجتماع

تمرین : به کمک جبر مجموعه ها ثابت کنید.

الف) $A\cup(A\cap B)$

$$\begin{aligned}A\cup(A\cap B)&=(A\cap U)\cup(A\cap B)\\&=A\cap(U\cup B)\\&=A\cap U\\&=A\end{aligned}$$

ب) $(A\cup B)\cap(B'\cup A)=A$

ج) $A\cup(B\cup A')=U$

د) $A-B=B'-A'$

ه) $(A-B)\bigcap(B-A)=\varnothing$

و) $(A\bigcup B)-C=(A-C)\bigcup(B-C)$ (از راست ثابت کنید)

ز) $(A-B)\bigcup(A\bigcap B)\bigcup(B-A)=A\bigcup B$

ح) $(A-B)'=(A'\bigcup B)$

ط) $A-(B\bigcup C)=(A-B)\bigcap(A-C)$ (از راست ثابت کنید)

ی) $A\bigcap(B-C)=(A\bigcap B)-(A\bigcap C)$ (از راست ثابت کنید)

تمرین : اگر $U=\{۱,۲,۳,...,۲۰\},B=\{۵,۶,۷,...,۱۵\},A=\{۱,۲,۳,...,۱۰\}$ حاصل هر یک از عبارت های زیر را بدست آورید .

الف) $(A\bigcap B')\bigcup(A\bigcap B)$

ب) $(A-B)\bigcup((A\bigcap B')\bigcap[(B-A)\bigcup A'])$

قضیه : برای دو مجموعه دلخواه از یک مجموعه مرجع داریم :

الف) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\bigcup B=B$

ب) $A\subseteq B\Leftrightarrow A\bigcap B=A$

اثبات الف)

رفت : فرض می کنیم $A\subseteq B$ پس باید ثابت کنیم $B\subseteq A\bigcup B$ و $A\bigcup B\subseteq B$. قسمت اول طبق تعریف اجتماع بدیهی است برای قسمت دوم داریم :

$$\left.\begin{array}{l} B \subseteq B \\ A \subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow A \cup B \subseteq B \cup B \Rightarrow A \cup B \subseteq B$$

برگشت : فرض می کنیم $A \cup B = B$ حال ثابت می کنیم که $A \subseteq B$:

با توجه به تعریف اجتماع $A \subseteq A \cup B \xrightarrow{A \cup B = B} A \subseteq B$

اثبات ب)

رفت : فرض می کنیم $A \subseteq B$ پس باید ثابت کنیم $A \subseteq A \cap B$ و $A \cap B \subseteq A$. قسمت دوم طبق تعریف اشتراک بدیهی است برای قسمت اول داریم :

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq A \\ A \subseteq B \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap A \subseteq A \cap B \Rightarrow A \subseteq A \cap B$$

برگشت : فرض می کنیم $A \cap B = A$ حال ثابت می کنیم که $A \subseteq B$:

با توجه به تعریف اشتراک $A \cap B \subseteq B \xrightarrow{A \cap B = A} A \subseteq B$

تمرین : ثابت کنید اگر $A \cap B = A \cup B$ آنگاه $A = B$.

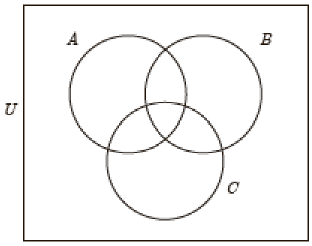
تمرین : اگر $U = \{۱, ۲, ..., ۲۰\}, B = \{۵, ۶, ..., ۱۵\}, A = \{۱, ۲, .., ۱۰\}$ حاصل هر یک از عبارت های زیر را بدست آورید

الف) $(A \cap B') \cup (A \cap B)$

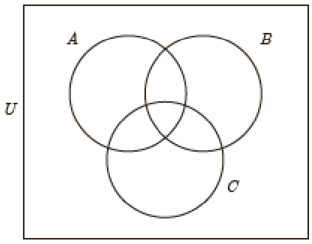
ب) $(A - B) \cup ((A \cap B') \cap [(B - A) \cup A'])$

تمرین : در هر مورد قسمت خواسته شده را هاشور بزنید .

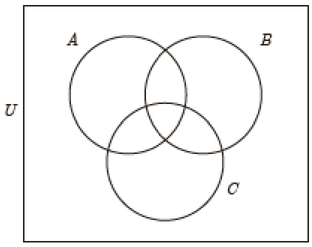
الف) اعضایی که فقط در B باشند .



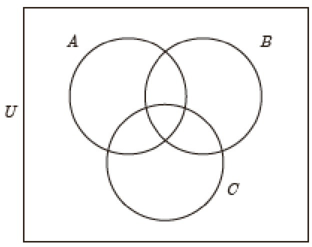
ب) اعضایی که فقط در یک مجموعه باشند .



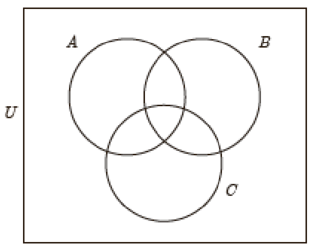
ج) اعضایی که در A و B باشند ولی در C نباشند .



د) اعضایی که در A یا B باشند ولی در C نباشند .



ه) اعضایی که در A و B نباشند ولی C باشند .



ضرب دکارتی بین دو مجموعه :

ضرب دکارتی بین دو مجموعه A و B مجموعه ای را ایجاد می کند که اعضای آن زوج مرتب هایی هستند که از اعضای A و B ساخته شده اند :

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

در این تعریف همیشه مولفه اول زوج های مرتب مربوط به مجموعه اول (A) و مولفه دوم زوج های مرتب مربوط به مجموعه دوم (B) هستند .

مثال : اگر $A = \{۱,۲\}, B = \{۳,۴,۵\}$ آنگاه داریم :

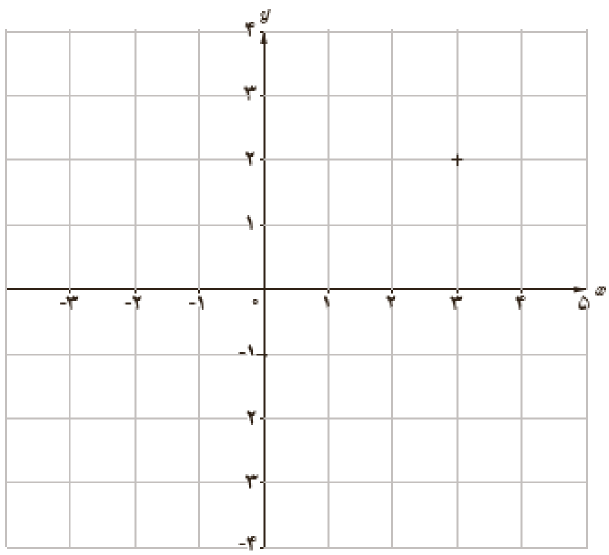
$$A \times B = \{(۱,۳),(۱,۴),(۱,۵),(۲,۳),(۲,۴),(۲,۵)\}$$
$$B \times A = \{(۳,۱),(۳,۲),(۴,۱),(۴,۲),(۵,۱),(۵,۲)\}$$

پس

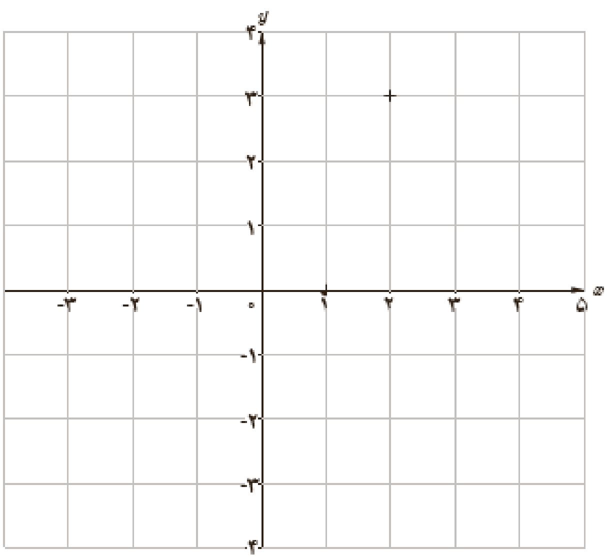
الف) $A \times B \neq B \times A$.

ب) اگر تعداد اعضای دو مجموعه m و n تا باشد ، تعداد اعضای مجموعه حاصل از ضرب دکارتی mn خواهد بود .

تمرین : در مثال قبل نمودار مختصاتی مجموعه های $A \times B , B \times A$ را رسم کنید .



نمودار مختصاتی $B \times A$

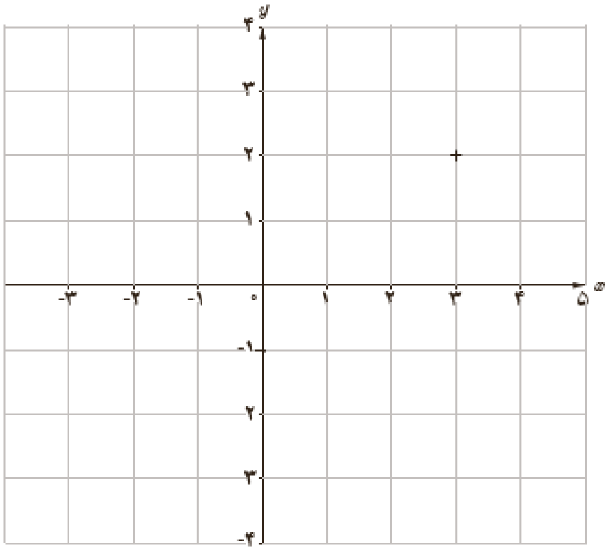


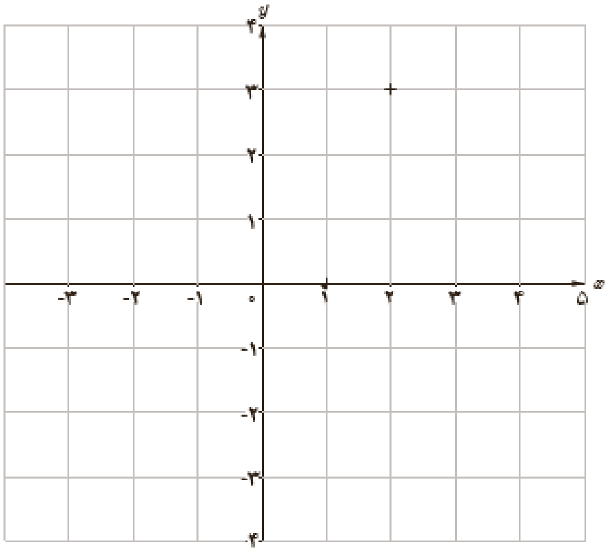
نمودار مختصاتی $A \times B$

تمرین : اگر $A=[1,4), B=\{-1,1\}, C=[2,3], D=\mathbb{R}$ ضرب های دکارتی زیر را تعریف و رسم کنید .

الف) $A\times B=$

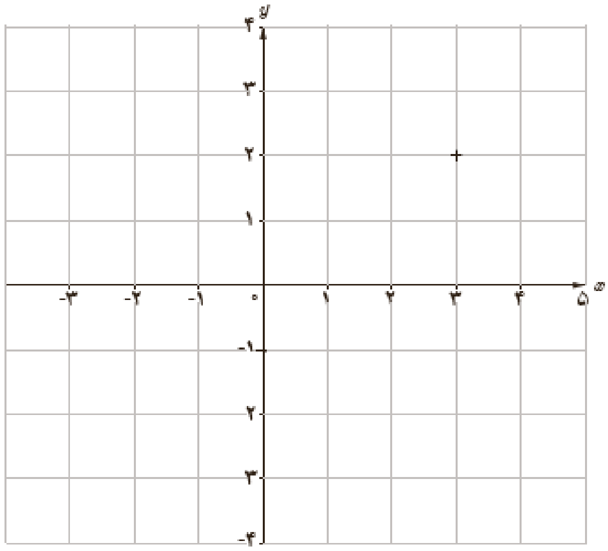
ب) $B\times C=$

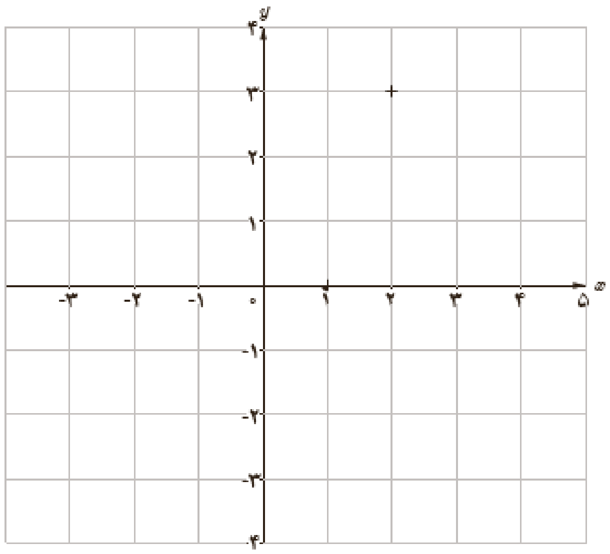




ج) $A\times C=$

د) $D\times B=$





تمرین : در صورتی که $A=\mathbb{R}, B=\mathbb{R}$ آنگاه حاصل ضرب $A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$ را چگونه تعبیر می کنید ؟

تمرین : ثابت کنید $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$.

اثبات : (برهان خلف) فرض کنید $A \times \varnothing \neq \varnothing$ با عضو گیری داریم :

تمرین : ثابت کنید $A \times B = B \times A$ در صورتی که $A = \varnothing \vee B = \varnothing \vee A = B$.

اثبات : اگر A یا B تهی باشد حکم ثابت می شود .

فرض کنید A و B تهی نباشد در این صورت می توان از هر کدام عضو گیری کرد مثلاً $x \in A, y \in B$ و داریم :

تکلیف : تمرین های صفحه ۳۸ را حل کنید .

فصل دوم :احتمال

درس اول : مبانی احتمال

درس دوم : احتمال غیر هم شانس

درس سوم : احتمال شرطی

درس چهارم : پیشامد های مستقل و وابسته

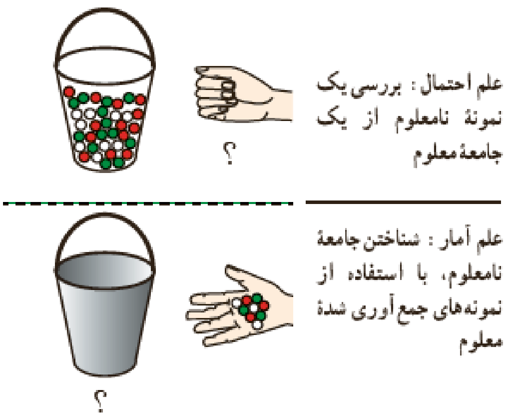
درس اول : مبانی احتمال

آمار و احتمال به چه کاری می‌آیند ؟

فرض کنید کارشناسان یک کارخانه تولید لوازم خانگی می خواهند بررسی کنند که برای سال آینده بهتر است سرمایه کارخانه به چه نسبتی صرف تولید یخچال و لباس شویی و .... شود . در ضمن آنها از آنچه در آینده رخ خواهد داد اطمینان ندارند . در چنین موقعیتی علم آمار و احتمال به کمک ما می آید .

علم آمار با توجه به داده های قبلی از وضعیت تقاضا می تواند میزان تقاضای سال آینده برای هر کالا را مشخص کند و علم احتمال نیز کمک خواهد کرد تا بهترین تصمیم ممکن گرفته شود .

در واقع در علم آمار می خواهیم با جمع آوری نمونه های معلوم ، جامعه نا معلوم را بشناسیم ولی در علم احتمال می خواهیم به کمک جامعه معلوم یک نمونه نامعلوم (تصادفی) را بررسی کنیم .



تمرین : تشخیص دهید در هر مورد با چه علمی سر و کار داریم ؟

صورت مسئله	آمار	احتمال
۱ــ می‌دانیم ۹۰ تا از ۱۰۰ سیب یک جعبه سالم است. چند تا سیب از جعبه برداریم، تا تقریباً مطمئن باشیم که دست‌کم یک سیب خراب برداشته‌ایم؟	☐	☐
۲ــ درآمد کارمندان شهرداری چقدر است؟	☐	☐
۳ــ ۹۰ نفر از ۱۰۵ دانش‌آموز پایه یازدهم به ورزش شنا علاقه دارند. اگر ۲۰ نفر از این دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است کمتر از ۱۵ نفر از آنها به شنا علاقه‌مند باشند؟	☐	☐
۴ــ در انتخابات هفتم اسفند ۱۳۹۴، شهرستان سواد کوه شمالی با مشارکت بیش از ۹۸/۲ درصد رکورددار بوده است. اگر از ۱۰ نفر واجد شرایط بپرسیم که آیا در انتخابات شرکت کرده‌اند یا خیر، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟	☐	☐
۵ــ چه تعداد از دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم مدرسه شما به ورزش شنا علاقه دارند؟	☐	☐

فضای نمونه ای : مجموعه تمام حالت هایی که در یک پدیده تصادفی می تواند رخ دهد . هر عضو فضای نمونه ای را بر آمد می گویند .

پیشامد : هر زیر مجموعه از فضای نمونه را پیشامد می نامند .

مثال : درون یک جعبه ۵ لامپ قرار دارد که ۳ تای آن سالم است و دو تای دیگر معیوب است . با شماره گذاری لامپ های سالم با اعداد ۱و۲و۳ و لامپ های معیوب با اعداد ۴و۵ داریم :

الف) فضای نمونه ای : $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$

ب) پیشامد آنکه لامپ سالم از جعبه خارج شود : $A = \{۱, ۲, ۳\}$

نکته : در صورتی که آزمایشی متشکل از دو آزمایش با فضای نمونه ای $S_۱, S_۲$ باشد ، فضای نمونه آن $S_۱ \times S_۲$ است . مشابه این موضوع در مورد هر تعداد آزمایش همزمان نیز درست است .

مثال : یک راننده تاکسی خطی در ایستگاه منتظر می ایستد تا حداکثر ۴ مسافر سوار کند و حتی با کمتر از آن نیز مجبور به حرکت می شود . در مسیر برگشت نیز همین اتفاق می افتد . فضای نمونه ای این پدیده در صورتی که تعداد مسافرین رفت و برگشت برای ما مهم باشد برابر است با : $S = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\} \times \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\} \Rightarrow n(S) = ۲۵$

در این فضای نمونه ای منظور از بر آمد $(۱, ۲)$ این است که تاکسی با ۱ مسافر حرکت کرده و در برگشت ۲ مسافر زده باشد .

اصول احتمال :

برای هر پیشامد مثل A احتمال رخ دادن آن را به صورت $P(A)$ نمایش می دهیم که عددی حقیقی در بازه $[۰, ۱]$ است.

اصول احتمال عبارت اند از :

الف) $P(S) = ۱$

ب) برای دو پیشامد ناسازگار ($A \cap B = \varnothing$) داریم : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

قضیه : در مورد هر فضای نمونه ای گزاره های زیر درست است .

الف) $P(A')=١-P(A)$

اثبات :

$$A\cup A'=S\Rightarrow \underbrace{P(S)}_{١}=P(A)+P(A')\Rightarrow P(A')=١-P(A)$$

ب) $P(\emptyset)=٠$

اثبات : با توجه با اینکه تهی متمم S است داریم :

$$P(\emptyset)=١-P(S)=١-١=٠$$

ج) اگر A و B و C دو به دو ناسازگار باشند ، آنگاه $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$

(این حکم برای هر تعداد پیشامد قابل تعمیم است)

اثبات : در این صورت $A, B\cup C$ نیز ناسازگارند پس داریم :

$$P(A\cup B\cup C)=P(A\cup (B\cup C))=P(A)+P(B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

د) برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم : $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

اثبات : واضح است که $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ و $A-B, A\cap B$ ناسازگارند ، پس

$$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

ه) اگر $B\subseteq A$ آنگاه $P(B)\leq P(A)$

اثبات : اگر $B\subseteq A$ آنگاه داریم

$$P(A-B)=P(A)-P(B)\xrightarrow{P(A-B)\geq ٠}P(A)-P(B)\geq ٠\Rightarrow P(A)\geq P(B)$$

و) برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

اثبات : واضح است که $A\cup B=(A-B)\cup B$ و $B, A-B$ ناسازگارند ، پس

$$P(A\cup B)=P(A-B)+P(B)\xrightarrow{P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)}P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

تمرین : عددی به تصادف از بین اعداد ۵۰ تا ۲۰۰ انتخاب می کنیم .احتمال های زیر را محاسبه کنید .

الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۵ بخش پذیر باشد .

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش پذیر باشد ولی بر ۵ نه .

ج) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش پذیر باشد نه بر ۵ .

تکلیف : تمرین های صفحه به جز تمرین ۴ را حل کنید .

درس دوم : احتمال غیر هم شانس

همیشه اینطور نیست که احتمال رخ دادن هر بر آمد فضای نمونه ای برابر باشد . مثلاً تاسی ا تصور کنید که روی سه وجه آن ۳ و دو وجه آن ۲ و یک وجه آن ۱ درج شده باشد . فضای نمونه پرتاب تاس برابر $S=\{۱,۲,۳\}$ خواهد بود .(هر بر آمد از فضای نمونه ای را پیشامد ساده می گویند)

الف) احتمال رخ دادن هر سه پیشامد ساده را حساب کنید ؟

$P(۱)=$

$P(۲)=$

$P(۳)=$

ب) آیا پیشامد های ساده هم شانس هستند ؟

ج) حاصل جمع احتمال پیشامد های ساده چقدر است ؟

اصول احتمال غیر هم شانس :

اگر $A=\{a_۱,a_۲,...,a_k\}$ یک پیشامد از فضای نمونه ای S با احتمال غیر هم شانس باشد .

الف) $۰\leq P(A)\leq ۱$

ب) $P(S)=۱$

ج) $P(A)=P(a_۱)+P(a_۲)+....+p(a_k)$

نکته : از دو اصل آخر می توان نتیجه گرفت که $P(S)=P(s_۱)+P(s_۲)+...+P(s_n)=۱$

تمرین : در یک مسابقه چهار جانبه فوتبال ، احتمال برد تیم a دو برابر احتمال برد تیم b ، و احتمال برد تیم b ۳ برابر احتمال برد تیم c است و تیم d نیز با تیم b هم شانس است . احتمال برد هر تیم را مشخص کنید .

تمرین : در یک آزمایش تصادفی $S=\{x,y,z\}$ فضای نمونه ای است . اگر $P(\{x,y\})=\frac{۲}{۳}$ و $P(\{x,z\})=\frac{۱}{۲}$ ، احتمال وقوع هر پیشامد ساده را بیابید .

تمرین : یک تاس به گونه ای است که احتمال وقوع عدد فرد ۳ برابر احتمال وقوع عدد زوج است . احتمال مشاهده ۳ یا ۴ را بیابید .

تکلیف : تمرین های صفحه ۵۱ را حل کنید .

درس سوم : احتمال شرطی

فرض کنید دو تاس را پرتاب کرده ایم و از ما پرسیده می شود احتمال آنکه مجموع دو عدد ظاهر شده ۹ باشد چقدر است ؟ با توجه به فضای نمونه ای که ۳۶ عضو دارد و با توجه به پیشامد خواسته شده $A=\{(۳,۶),(۴,۵),(۵,۴),(۶,۳)\}$ که ۴ عضو دارد احتمال آن $\frac{۴}{۳۶}$ یا $\frac{۱}{۹}$ خواهد بود .

حال فرض کنید شرط « اگر تاس اول ۴ باشد » به مساله اضافه شود ، در این صورت فضای نمونه ای به مجموعه $S=\{(۴,۱),(۴,۲),...,(۴,۶)\}$ کاهش می یابد و پیشامد نیز فقط شامل عضو $(۴,۵)$ خواهد بود . به این ترتیب احتمال برابر $\frac{۱}{۶}$ خواهد شد .

محاسبه احتمال شرطی

همانطور که دیدیم در احتمال شرطی A به شرط رخ دادن B ، فضای نمونه ای به مجموعه B کاهش می یابد و بدهی است مجموعه A نیز نمی تواند تمام حالت های قبل را اختیار کند و فقط مقادیر مشترک با B قابل قبول خواهد بود پس

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}\xrightarrow[\div n(S)]{\div n(S)}P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مثال هایی برای تشخیص بهتر احتمال شرطی و غیر شرطی .

الف) ۳۰ درصد از مردان سیگاری هستند .

در جامعه کاهش یافته مردان (M) ، ۳۰ درصد افراد سیگاری (C) هستند . $P(C|M)=۰/۳$

ب)۳۰ درصد از افراد جامعه ، مردان سیگاری هستند .

در کل جامعه (نه کاهش یافته) ، ۳۰ درصد هم مرد و هم سیگاری هستند . $P(M\cap C)=۰/۳$

ج) ۱۰ درصد از سیگاری ها به بیماری کبد مبتلا هستند .

در جامعه کاهش یافته سیگاری ها ، ۱۰ درصد به بیماری کبد (K) مبتلا هستند . $P(K|C)=۰/۱$

د) ۶۰ درصد قبولی های یک دانشگاه پسر هستند . (این مورد را شما پاسخ بدهید)

تمرین : در یک قرعه کشی بین ۲۰ نفر قرار است از بین کارت های ۱ تا ۲۰ یکی را به تصادف انتخاب کنند . شماره کارت مرتضی ۱۱ است . اگر مجری اعلام کند برگ برنده فرد و دو رقمی است، احتمال برنده شدن مرتضی چقدر خواهد بود ؟

تمرین : در مدرسه ای سه کلاس یازدهم ۱-۱۱ و ۲-۱۱ و ۳-۱۱ وجود دارد که به ترتیب ۳۵،۳۳،۳۲ دانش آموز دارند . در آزمونی مشترک به ترتیب ۶،۹،۸ نفر موفق به کسب نمره کامل شده اند . یکی از دانش آموزان را به تصادف انتخاب می کنیم .

الف) احتمال اینکه دانش آموز انتخاب شده نمره کامل گرفته باشد (پیشامد A) چقدر است ؟ $\frac{۲۳}{۱۰۰}$

ب) احتمال اینکه او، دانش آموز کلاس ۱-۱۱ باشد (پیشامد B) چقدر است ؟ $\frac{۳۲}{۱۰۰}$

ج) اگر بعد از انتخاب بفهمید او دانش آموز کلاس ۱-۱۱ است، چقدر احتمال دارد نمره کامل گرفته باشد ؟

تمرین : دو تاس سبز و قرمز را پرتاب می کنیم .

الف) اگر بدانیم مجموع دو تاس ۷ شده است، احتمال اینکه تاس سبز ۶ باشد چقدر است ؟

ب) اگر بدانیم که تاس سبز ۶ است، احتمال آنکه مجموع دو تاس ۷ باشد چقدر است ؟

تمرین : از بین ۱۱ بازیکن یک تیم فوتبال که سرعت دو هیچ دو نفری یکسان نیست ، یکی را به تصادف انتخاب می کنیم.

الف) احتمال اینکه آن بازیکن سریع ترین فرد تیم باشد چقدر است ؟

ب) اگر نفر دیگری را نیز انتخاب کنیم و مشاهده کنیم نفر اول از او سریعتر است، در این صورت احتمال اینکه نفر اول سریع ترین فرد تیم باشد چقدر است ؟

حل : A : بازیکن اول سریع ترین بازیکن تیم باشد .

B : بازیکن اول از بازیکن دوم سریع تر باشد .

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۱}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۲}{۱۱}$$

نکته : از آنجایی که احتمال شرطی همان احتمال معمولی با فضای نمونه ای کاهش یافته است بنابر این تمام قوانین احتمال و گزاره های آن (جابجایی، پخشی ، دمورگان و ...)در احتمال شرطی نیز برقرار است .

۱) $P(A'|B)=۱-P(A|B)$

۲) $P(A\cup B|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(A\cap B|C)$

۳) $P(A-B|C)=P(A|C)-P(A\cap B|C)$

در ضمن یادگیری احتمال شرطی لازم است ولی این قاعده به تنهایی کافی نیست و باید سه ابزار دیگر به نام های « قانون ضرب احتمال » ، « قانون احتمال کل » و « قانون بیز » را نیز بشناسیم و بدانیم در چه مواردی و از کدام یک باید استفاده شود .

تمرین : ثابت کنید اگر B و C دو پیشامد ناسازگار باشند که $P(A|B)\le P(A|C)$ آنگاه :

$$P(A|B)\le P(A|B\cup C)\le P(A|C)$$

اثبات : اگر B و C ناسازگار باشند $A\cap B$ و $A\cap C$ نیز ناسازگارند و داریم :

$$P(A|B\cup C)=\frac{P(A\cap(B\cup C))}{P(B\cup C)}=\frac{P((A\cap B)\cup(A\cap C))}{P(B\cup C)}=\frac{P(A\cap B)+P(A\cap C)}{P(B)+P(C)}$$

کسر حاصل بین $\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ و $\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$ است که تعاریف $P(A|B)$ و $P(A|C)$ هستند .

قانون ضرب احتمال :

اگر A و B دو پیشامد باشند ، احتمال آنکه هر دو با هم رخ بدهند (A و B رخ دهند) برابر است با :

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$$

مثال : در کیسه ای ۱ گوی سبز، ۳ گوی سفید و ۲ گوی قرمز وجود دارد . از کیسه دو گوی به ترتیب و بدون جایگذاری خارج می کنیم . احتمال اینکه گوی اول سبز و گوی دوم سفید باشد چقدر است ؟

حل :

A : پیشامد گوی اول سبز باشد .

B : پیشامد گوی دوم سفید باشد .

در این صورت $P(A)=\frac{۱}{۶}$ و $P(B|A)$ یعنی با شرط آنکه گوی اول سبز باشد احتمال اینکه گوی دوم سفید باشد . که چون بدون جایگذاری بوده است پس در کیسه فقط ۵ گوی مانده که ۳ تای آن سفید است لذا $P(B|A)=\frac{۳}{۵}$ بنابر این :

$$P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۳}{۵}=\frac{۱}{۱۰}$$

تمرین : ثابت کنید قانون ضرب برای سه پیشامد به صورت زیر است .(از سمت راست ساده کنید) .

$$P(A_۱\cap A_۲\cap A_۳)=P(A_۱)P(A_۲|A_۱)P(A_۳|A_۱\cap A_۲)$$

تمرین : در مثال قبل اگر ۳ گوی بدون جایگذاری برداشته شود. احتمال اینکه گوی اول سبز و گوی دوم سفید و سومی قرمز باشد چقدر است ؟

تمرین : بسکتبالیستی هر بار که اقدام به پرتاب می کند ، اگر روحیه خوب داشته باشد به احتمال ۸۰ درصد گل می شود و اگر روحیه اش ضعیف باشد احتمال گل شدن پرتابش ۵۰ درصد است . در ضمن می دانیم او اگر پرتابی را گل کند روحیه اش قوی و در غیر این صورت روحیه اش ضعیف می شود . فرض کنید وی سه پرتاب انجام دهد و قبل از پرتاب اول روحیه خوبی داشته باشد . احتمال آنکه دقیقا دو پرتاب آخر گل شود چقدر است ؟ (راهنمایی پیشامد های A و B و C را تعریف و $P(A'\cap B\cap C)$ را حساب کنید .)

تمرین : فرض کنید سه کارت داریم که کارت اول دو رو قرمز، کارت دوم دو رو آبی و کارت سوم یک رو قرمز و یک رو آبی است . کارتی به تصادف انتخاب می کنیم و مشاهده می کنیم یک روی آن قرمز است . احتمال اینکه هر دو روی آن قرمز باشد چقدر است ؟

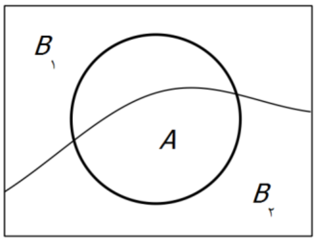
حل : A پیشامد آنکه روی کارت انتخابی قرمز باشد و B پیشامد آنکه کارت انتخابی دو رو قرمز باشد .

$$P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

هرکارتی که انتخاب شود یک رویش نگاه می شود و از ۶ روی سه کارت در ۳ حالت قرمز دیده می شود : $P(A)=\frac{1}{2}$

قانون احتمال کل :

گاهی اوقات احتمال وقوع پیشامد A در هر قسمتی از فضای نمونه ای متفاوت است . فرض کنید فضای نمونه ای به دو قسمت B_1,B_2 افراز شده باشد در این صورت $(A\cap B_1),(A\cap B_2)$ ناسازگارند بنابر این داریم :



$$\begin{aligned}P(A)&=P((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2))\\&=P(A\cap B_1)+(A\cap B_2)\\&=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)\end{aligned}$$

مثال : دو کیسه داریم که اولی شامل ۲ گوی سفید و ۳ گوی سبز و دومی شامل ۱ گوی سفید و ۹ گوی قرمز است . گویی را از یکی از دو کیسه بر می داریم . چقدر احتمال دارد این گوی سفید باشد .

A : گوی برداشته شده سفید باشد .

B_1 : کیسه اول انتخاب شده باشد .

B_2 : کیسه دوم انتخاب شده باشد .

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{4}$$

فرض کنید B_1، B_2، . . . و B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم :

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)+\dots+P(B_n)P(A|B_n)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A|B_k)$$

تمرین : دو کیسه را در نظر بگیرید که در اولی ۳ مهره قرمز و ۱ مهره سفید و در دومی ۲ مهره قرمز و ۱ مهره سفید است . یک مهره به تصادف از کیسه اول برداشته و داخل کیسه دوم می گذاریم . سپس یک مهره به تصادف از داخل کیسه دوم بر می داریم . احتمال آنکه این مهره سفید باشد چقدر است ؟

تمرین : در جعبه ای ۶ مهره سفید و ۹ مهره سیاه موجود است. دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری و به تصادف از آن بیرون می آوریم . با کدام احتمال دومین مهره خارج شده سفید است ؟ (س ۹۲)

تمرین : احتمال انتقال بیماری مسری به افراد واکسن زده ۰/۰۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰/۲ است . ۰/۴ کارگران یک کارگاه واکسن زده اند . اگر فرد بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند . با کدام احتمال این بیماری منتقل شده است ؟ (س ۸۹)

قانون بیز :

قانون بیز زمانی کاربرد دارد که هدف محاسبه $P(A|B)$ باشد ولی در داده های مساله $P(B|A)$ وجود داشته باشد :

$$P(A\cap B)=P(B\cap A)\Rightarrow P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)\Rightarrow \boxed{P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}}$$

در واقع این قانون احتمالات پیش از مشاهده را به احتمالات پس از مشاهده تبدیل می کند . در این قانون همیشه مخرج قانون احتمال کل است و یکی از اجزای آن در صورت نیز حضور دارد .

مثال : سه کارگر A,B,C به ترتیب ۴۰ درصد ، ۳۶ درصد و ۲۴ درصد ظروف سرامیکی فروشگاهی را تولید می کنند . درصد صنایع دستی معیوب این کارگران به ترتیب ۳و۲و۱ درصد است . اگر یک ظرف تولیدی معیوب باشد با کدام احتمال این ظرف تولید کارگر C است .

حل : اگر M را پیشامد معیوب بودن ظرف در نظر بگیریم هدف بدست آوردن $P(C|M)$ خواهد بود در حالی که در داده های مساله $P(M|C)=۰/۰۱$ وجود دارد . پس :

$$P(C|M)=\frac{P(C)P(M|C)}{P(M)}=\frac{۰/۲۴\times ۰/۰۱}{۰/۴۰\times ۰/۰۳+۰/۳۶\times ۰/۰۲+۰/۲۴\times ۰/۰۱}=\frac{۲۴}{۲۱۶}=\frac{۱}{۹}$$

تمرین : در یک آزمون از دو کلاس A و B ، ۴۰ درصد کلاس A و ۶۰ درصد کلاس B قبول شده اند . اگر داوطلبین در کلاس A دو برابر کلاس B باشند و فردی به تصادف از بین قبول شدگان انتخاب شود با چه احتمالی از کلاس A است ؟ (س ۸۸)

تمرین : در یک کارخانه احتمال کم ریخته شدن شیر درون پاکت در حالت عادی ۲ درصد و در حالت خرابی یک قطعه خاص ۱۰ درصد است و احتمال خراب شدن آن قطعه ۵ درصد است . اگر پاکت شیری به تصادف انتخاب شود و مشاهده گردد که شی آن کم است چقدر احتمال دارد دلیل آن ،خرابی قطعه باشد ؟

تکلیف : تمارین صفحه ۶۴ تا ۶۶ به جز تمرین های ۱۲و ۱۳و ۱۴را حل کنید .

درس چهارم : پیشامد های مستقل و وابسته

در پیرامون ما اکثر پدیده ها به هم وابسته هستند مثل سونامی حاصل از زلزله، ولی برخی پدیده ها هم ارتباطی به هم ندارند مثلاً گروه خونی شما و دوستتان که این نوع پدیده ها مستقل می گویند . البته در پیشامد ها تشخیص وابسته و مستقل بودن همیشه آسان نیست .

اگر شما شرط B را برای اتفاق افتادن A قرار دهید و مشاهده کنید این شرط تاثیری در احتمال رخ دادن A ندارد چه نتیجه ای می گیرید ؟

بیایید جمله بالا را به زبان ریاضی بررسی کنیم :

$$P(A \mid B)=P(A) \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)}=P(A) \Rightarrow \boxed{P(A \cap B)=P(A)P(B)}$$

آیا می توان گفت شرط مستقل بودن دو پیشامد عبارتی است که داخل کادر نوشته شده است ؟

تمرین : در پرتاب دو تاس آیا پیشامد ظاهر شدن دو عدد با مجموع ۷، با پیشامد ظاهر شدن ۳ در تاس اول دو پیشامد مستقل هستند ؟

تمرین : سکه سالمی را سه بار پرتاب می کنیم . اگر A پیشامد مشاهده رو در پرتاب دوم و B پیشامد مشاهده فقط دو رو به طور متوالی باشد ، مستقل بودن A و B را بررسی کنید .

تمرین : اگر احتمال قبولی علی و رضا در کنکور به ترتیب ۶۰ و ۷۰ درصد باشد ، احتمال آنکه حداقل یکی از آنها قبول شوند چقدر است ؟

سه پیشامد A، B و C را مستقل می‌گوییم، هرگاه چهار تساوی زیر برقرار باشند.

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$$

در حالت کلی، n پیشامد A_1، A_2، ...، A_n را مستقل می‌گوییم، هرگاه احتمال اشتراک هر تعداد از این پیشامدها با حاصل‌ضرب احتمال آنها برابر باشد.

مثال : خانواده ای دارای ۴ فرزند است .

الف) احتمال اینکه هر ۴ فرزند دختر باشند چقدر است ؟

$$P(A)=P(\text{دختر، دختر، دختر، دختر})$$
$$=P(\text{دختر})\times P(\text{دختر})\times P(\text{دختر})\times P(\text{دختر})$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

ب) احتمال اینکه فقط فرزند اول و آخر دختر باشند چقدر است ؟

$$P(B)=P(\text{دختر، پسر، پسر، دختر})$$
$$=P(\text{دختر})\times P(\text{پسر})\times P(\text{پسر})\times P(\text{دختر})$$
$$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۱۶}$$

ج) احتمال اینکه دو فرزند این خانواده دختر باشند چقدر است ؟

تعداد حالت هایی که دو فرزند دختر باشد برابر است با $\binom{۴}{۲}=۶$ و احتمال هر کدام از حالت های ممکن $\frac{۱}{۱۶}$ است پس

$$P(D)=۶\times\frac{۱}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

تکلیف : تمارین صفحه ۷۱ و ۷۲ را حل کنید .

فصل سوم :آمار توصیفی

درس اول : توصیف و نمایش داده ها

درس دوم : معیار های گرایش به مرکز

درس سوم : معیار های پراکندگی

درس اول : توصیف و نمایش داده ها

یاد آوری :

علم آمار : مجموعه ای از روش ها شامل جمع آوری اعداد ، سازماندهی و نمایش ، تحلیل و تفسیر و نتیجه گیری است .

جامعه: مجموعه همه افراد یا اشیاء مورد مطالعه در آمار را جامعه می گویند . به تعداد اعضای جامعه اندازه جامعه گفته می شود .

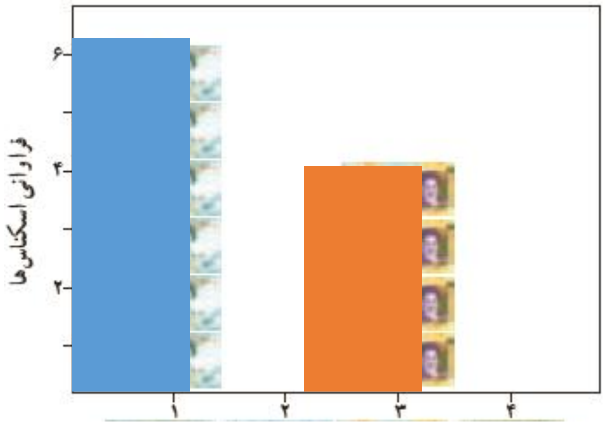
نمونه : بخشی از جامعه که برای مطالعه انتخاب می شود را نمونه می گویند . به تعداد اعضای نمونه اندازه نمونه گفته می شود .

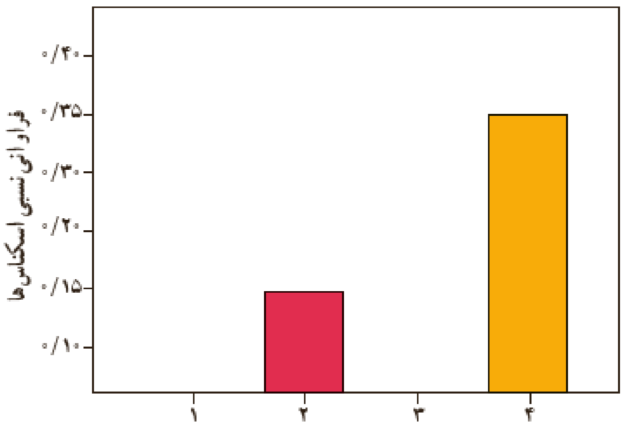
بعد از گرد آوری داده ها به تنظیم و خلاصه کردن آنها در قالب جدول (جدول فراوانی) یا رسم نمودار می پردازیم . قبل از این کار بهتر است با مفاهیم زیر آشنا شوید :

داده‌ها : واقعیت‌هایی دربارهٔ یک شیء یا فردند که در محاسبه، برنامه‌ریزی و پیش‌بینی به کار می‌روند.
متغیر : هر ویژگی از اشیا یا اشخاص، که در اعضای جامعه یکسان نیست و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند را **متغیر** می‌گویند و عددی که به آن ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود را **مقدار متغیر**، یا **مشاهده** می‌گویند.
فراوانی یک داده : تعداد دفعاتی که هر داده مشاهده می‌شود را **فراوانی** آن داده می‌گویند.
فراوانی نسبی یک داده : با تقسیم فراوانی هر داده به تعداد کلّ داده‌ها، **فراوانی نسبی** آن داده به‌دست می‌آید.
اگر فراوانی نسبی داده‌ها در ۱۰۰ ضرب شود، آن‌گاه درصد داده‌ها به‌دست می‌آید.

تمرین : یک راننده تاکسی در یک روز ۶ عدد اسکناس هزاری ، ۳ عدد اسکناس دو هزاری ، ۴ عدد اسکناس پنج هزاری و ۷ عدد اسکناس ده هزار تومانی از مسافران دریافت کرده است. جدول فراوانی و نمودار میله ای و دایره ای زیر را برای آن کامل کنید .

نوع اسکناس	شماره	فراوانی	فراوانی نسبی
هزاری	۱	۶	۰/۳
دو هزاری	۲		
پنج هزاری	۳		۰/۲
ده هزاری	۴	۷	
تعداد کل اسکناس ها		۲۰	



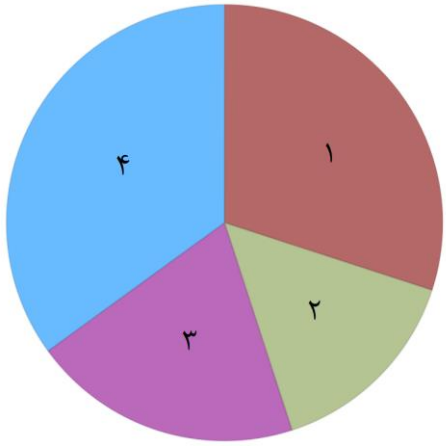


در نمودار دایره ای مربوط به جدول فراوانی داده شده

هر قسمت چند درجه است ؟

(راهنمایی : مثلاً قسمت ۳ دارای فراوانی نسبی ۰/۲ است

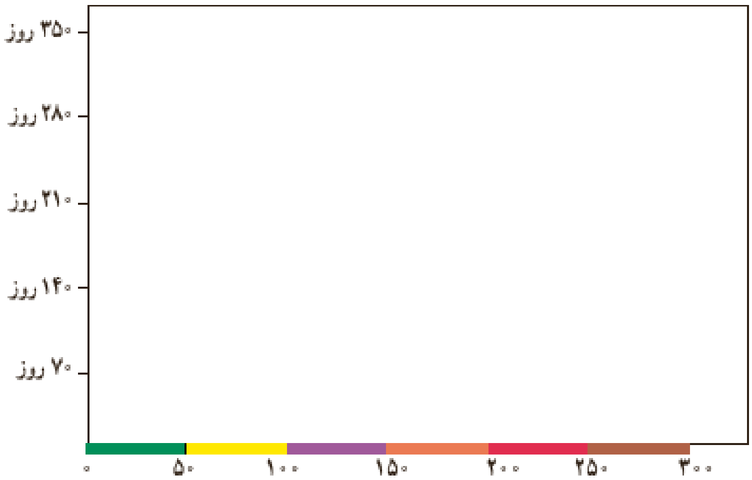
یعنی ۰/۲ از کل دایره مربوط به آن است)



تمرین : در سال ۹۳ میزان آلایندگی هوا در طول سال به صورت جدول زیر داده شده است .

وضعیت هوا	شاخص کیفیت هوا	فراوانی	فراوانی نسبی
پاک	$۰ \leq AQI \leq ۵۰$	۱۶	
سالم	$۵۰ < AQI \leq ۱۰۰$	۲۲۳	
ناسالم برای گروه‌های حساس	$۱۰۰ < AQI \leq ۱۵۰$	۱۱۲	
ناسالم	$۱۵۰ < AQI \leq ۲۰۰$	۴	
بسیار ناسالم	$۲۰۰ < AQI \leq ۲۵۰$	۱۰	
خطرناک	$۲۵۰ < AQI \leq ۳۰۰$	۰	
تعداد کلّ روزهای یک سال		۳۶۵	

الف) نمودار فراوانی زیر را برای آن رسم کنید .



ب) نمودار فراوانی نسبی آن را رسم کنید .

ج) چند درصد از روز های سال هوا سالم بوده است ؟

تکلیف : تمارین صفحه ۸۱ و ۸۲ را حل کنید .

درس دوم : معیار های گرایش به مرکز

در آمار توصیفی علاوه بر طبقه بندی اطلاعات و نمایش آنها در قالب نمودار ، سعی می شود به کمک یک شاخص عددی ویژگی های خاص این اطلاعات به صورت خلاصه بیان شود .

معیار های گرایش به مرکز :

شاخص های عددی هستند که میزان گرایش اعداد به یک عدد خاص را نمایش می دهند . در این جزوه ما با سه معیار مهم گرایش به مرکز به نام های میانگین و میانه و مد (نما) آشنا می شویم که بسیار پرکاربرد هستند .

میانگین : میانگین داده ها را با $\overline{X}$ نمایش می دهیم که برابر است با : $\overline{X}=\frac{x_1+x_2+....+x_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$

که x_i ها داده ها و n تعداد داده ها است .

مسأله : تعدادی خیر به طور متوسط ۱۰ درصد درآمد ماهانه خود را به یک خیریه می دهند . فرض کنید در آمد ماهیانه حضار در انجمن خیریه این مدرسه به صورت زیر باشد ، متوسط درآمد خیریه از این خیرین در این سال چقدر خواهد بود ؟

در آمد	نجمه	سبحان	رسول	حسنا	جوانه	احمد	آرمان
(میلیون ریال)	۴۰	۱۲	۲۸	۳۲	۳۰	۲۲	۲۵

حل : میانگین در آمد های ماهانه خیرین برابر است با : $\overline{X}=\frac{۲۵+۲۲+۳۰+۳۲+۲۸+۱۲+۴۰}{۷}=\frac{۱۸۹}{۷}=۲۷$

یعنی به طور متوسط درآمد ماهانه این افراد ۲۷ میلیون ریال است و ۱۰ درصد آن برابر است با ۲/۷ میلیون ریال ، معادل ۲۷۰ هزار تومان در ماه و ۳۲۴۰۰۰۰ تومان در سال .

میانگین وزنی (موزون) : اگر داده ها دارای وزن متفاوت باشند به عبارت دیگر هر x_i دارای تعداد تکرار w_i باشد آنگاه میانگین وزنی آنها برابر است با : $\overline{X}_w=\frac{w_1x_1+w_2x_2+....+w_nx_n}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}w_ix_i}{n}$

تمرین : در مساله قبل فرض کنید هر نفر فقط در چند ماه خاص قرار است ۱۰ درصد از حقوق خود را صرف خیریه کند . در زیر جدول تعداد ماه هایی که هر شخص در نظر دارد به خیریه کمک کند آمده است . میانگین درآمد خیریه از این خیرین در این سال چقدر خواهد بود ؟

	نجمه	سبحان	رسول	حسنا	جوانه	احمد	آرمان
درآمد	۴۰	۱۲	۲۸	۳۲	۳۰	۲۲	۲۵
تعداد ماه	۲	۵	۸	۳	۵	۴	۱۲

تمرین : دانش آموزی در یک آزمون نتایج زیر را دریافت کرده است و می دانیم هر درس دارای وزنی متفاوت است (ضریب) با توجه به جدول داده شده میانگین درصد مواد امتحانی او را حساب کنید .

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	دین و زندگی
درصد	۷۱	۶۵	۸۰	۵۲	۹۵	۱۰۰
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

نکته : اگر هر یک از داده های آماری با مقدار ثابتی ضرب و جمع شوند ، میانگین آنها نیز آنها نیز با همان مقدار ثابت ضرب و جمع خواهد شد .

تمرین : اگر میانگین تعدادی داده ۵ باشد و داده ها را ۳ برابر کرده و ۵ واحد از آنها کم کنیم میانگین داده های جدید چقدر است ؟

تمرین : میانگین داده های زیر را بیابید .

۱۰۳, ۹۸, ۱۰۵, ۱۱۱, ۹۰, ۹۲, ۱۰۰, ۹۹

دور افتاده : داده ای که با سایر داده ها تفاوت اساسی دارد . یعنی بسیار بزرگ تر یا بسیار کوچک تر از بقیه داده هاست .

به عنوان مثال اگر در مسأله خیرین ، شخصی با درآمد ماهیانه ۱ میلیارد ریال به انجمن خیریه مدرسه بپیوندد میانگین درآمد ها تا حدود ۱۴۸میلیون ریال در ماه بالا می رود که غیر واقعی به نظر می رسد زیرا این عدد به هیچ وجه بیان گر متوسط درآمد ها نیست . در صورتی که داده دور افتاده داشته باشیم از شاخص دیگری برای گرایش به مرکز استفاده می شود .

میانه : شاخصی برای بدست آوردن متوسط داده ها که در واقع عدد وسط در بین داده های مرتب شده است و معمولاً در مواردی استفاده می شود که داده دور افتاده داشته باشیم . میانه را با $Q_۲$ نمایش می دهیم .

نکته : اگر تعداد داده ها زوج باشد ، عدد وسط نداریم و میانه برابر با میانگین دو داده وسط است .

تمرین : میانه داده های ۱ و ۹۹ و ۶۸ و ۲ و ۸۶ و ۱۴ و ۱۰ و ۱۱ چقدر است ؟

تمرین : داده های زیر مربوط به تعداد ضربان قلب ۱۲ دانش آموز پایه یازدهم ، قبل از مسابقه دو است . میانه و میانگین داده های زیر را مشخص کنید .

۸۶ ۹۷ ۹۲ ۸۹ ۱۰۱ ۹۸ ۹۸ ۱۰۵ ۷۵ ۸۲ ۹۱ ۱۰۰

چارک : مقادیری که داده های مرتب شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می کنند چارک نامیده می شوند . بدیهی است که چارک دوم همان میانه است و چارک اول و سوم ، میانه داده های سمت چپ و راستِ میانه هستند .

مثال : به داده های زیر توجه کنید . ۷۰ میانه است و میانه اعداد قبل و بعد از آن به ترتیب ۴۸ و ۸۷ هستند که چارک اول و سوم نامیده می شوند .

۲۲	۲۴	$\boxed{۴۸}$	۵۱	۶۰	$\boxed{۷۰}$	۷۵	۸۰	$\boxed{۸۷}$	۹۳	۹۵
		چارک اول			میانه			چارک سوم		

تمرین : جاهای خالی را پر کنید .

۵۰ درصد داده ها قبل از .... و ۵۰ درصد بعد از .... هستند .

۷۵ درصد داده ها قبل از .... و یا بعد از .... هستند .

۲۵ درصد داده ها قبل از .... ویا بعد از .... هستند .

۵۰ درصد داده ها بین.. و .... قرار دارند .

مد یا نما : داده ای که بیشترین تکرار را داشته باشد مد نامیده می شود . اگر همه داده ها دارای تکراریکسان باشند این داده ها دارای مد نیستند و اگر دو داده دارای بیشترین تکرار باشند داده ها دو مدی هستند .

تمرین : در یک مسابقه دارت از ۱۰ پرتاب ، امتیازات زیر برای سه نفر حاصل شده است .

نفر اوّل	۱۰	۹	۱۰	۷	۵	۹	۱۰	۹	۸	۸
نفر دوم	۱۰	۹	۸	۶	۱	۲	۳	۵	۴	۷
نفر سوم	۹	۹	۹	۷	۱۰	۱۰	۹	۵	۴	۷

الف) مد نفر اول چیست ؟

ب) مد نفر دوم چیست ؟

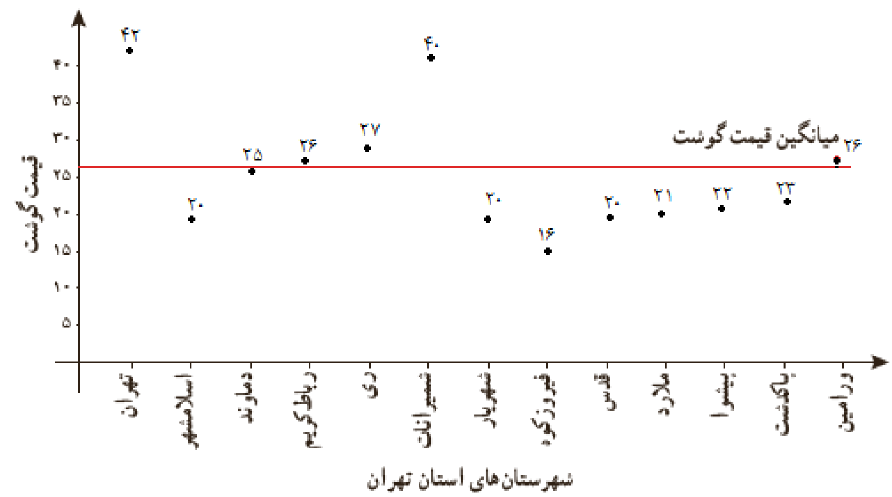
ج) مد نفر سوم چیست ؟

تکلیف : تمارین صفحه ۹۰ و ۹۱ را حل کنید .

درس سوم : معیار های پراکندگی

معیار هایی چون میانگین و میانه به تنهایی نمی توانند اطلاعات کاملی در مورد داده ها به ما بدهند مخصوصا در مورد مقایسه چند گروه که تقریباً دارای شاخص های مرکزی برابر هستند . بنابراین شاخصی را نیاز داریم که میزان پراکندگی داده ها را مشخص کند . برای روشن تر شدن موضوع به مثال زیر دقت کنید .

مثال : قیمت گوشت در سال ۹۵ در تهران و شهرستان های آن در نمودار زیر به صورت نقطه آمده و میانگین قیمت گوشت با خط قرمز نمایش داده شده است .



اگر بخواهیم میزان پراکندگی هر کدام از شهر ها را از میانگین اندازه بگیریم ($x_i - \bar{x}$) که به آن انحراف از میانگین گفته می شود مجموع این انحراف ها صفر خواهد بود (همیشه !!!) پس نمی توان به معیاری دست یافت . اگر بخواهیم قدر مطلق آنها را در نظر بگیریم این مشکل رفع می شود و می توان با میانگین گرفتن از اعداد حاصل به یک معیار پراکندگی رسید ولی چون کار با قدر مطلق سخت است مجذور انحراف از میانگین گزینه بهتری خواهد بود یعنی به جای اینکه از $|x_i - \bar{x}|$ ها میانگین بگیریم از $(x_i - \bar{x})^2$ ها میانگین بگیریم .

واریانس : میانگین مجذور انحراف داده ها از میانگین را واریانس می نامند و با σ^2 نمایش می دهند .

$$\text{واریانس}\quad \sigma^2 = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

انحراف معیار : بدلیل آنکه مقدار بدست از واریانس بزرگ تر از پراکندگی قابل قبول است و همچنین واحد آن با واحد داده ها برابر نیست از جذر آن که انحراف معیار نامیده می شود بیشتر استفاده می کنند .

$$\text{انحراف معیار}\quad \sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

مسأله : از دو کلاس دهم آزمونی گرفته شد و از هر کلاس ۱۰ نفر به تصادف انتخاب گردید که نمرات آزمون آنها به ترتیب زیر است .

الف) {۶۵,۷۵,۷۳,۵۰,۶۰,۶۴,۶۹,۶۲,۶۷,۸۵}

ب) {۸۵,۷۹,۵۷,۳۹,۴۵,۷۱,۶۷,۸۷,۹۱,۴۹}

برای یک معلم تدریس در کدام کلاس بهتر است ؟

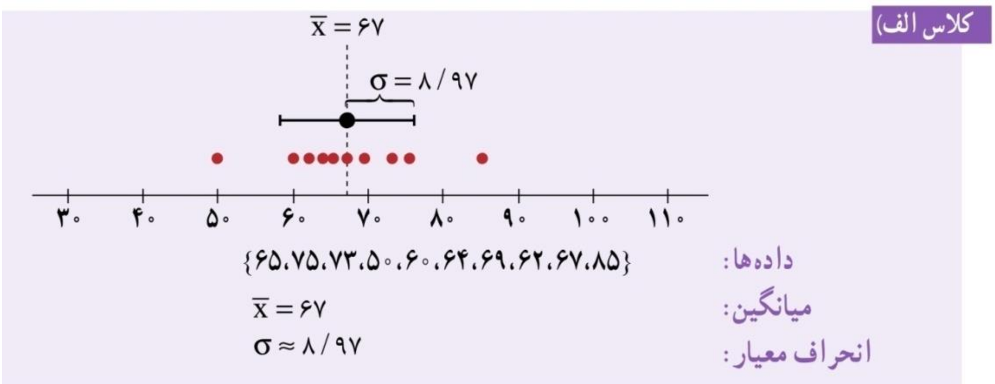
حل : میانگین هر دو کلاس برابر ۶۷ است .

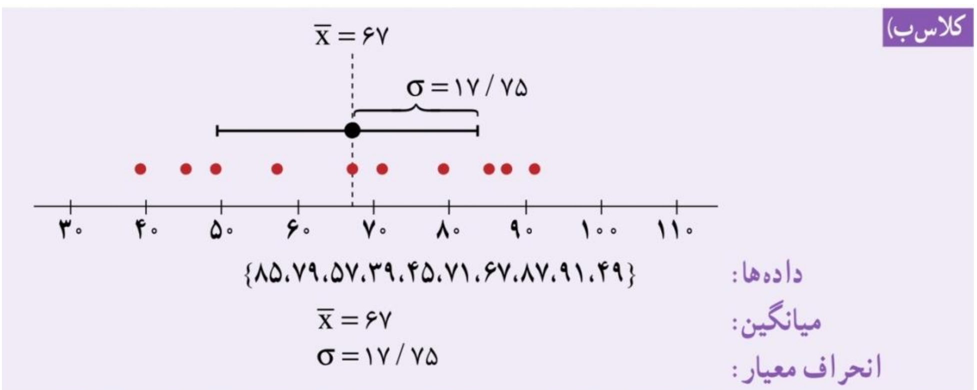
$$\overline{X}=\frac{۶۷۰}{۱۰}=۶۷$$

پس معیار میانگین اطلاع دقیقی از تفاوت دو کلاس به ما نمی دهد ولی با محاسبه انحراف معیار دو کلاس داریم .

$$\sigma^{۲}=\frac{۲^{۲}+۸^{۲}+۶^{۲}+۱۷^{۲}+۷^{۲}+۳^{۲}+۲^{۲}+۵^{۲}+۰^{۲}+۱۸^{۲}}{۱۰}=\frac{۸۰۴}{۱۰}=۸۰/۴\Rightarrow\sigma=\sqrt{۸۰/۴}\simeq۸/۹۷$$

$$\sigma^{۲}=\frac{۱۸^{۲}+۱۲^{۲}+۱۰^{۲}+۲۸^{۲}+۲۲^{۲}+۳^{۲}+۰^{۲}+۲۰^{۲}+۲۴^{۲}+۱۸^{۲}}{۱۰}=\frac{۳۱۴۵}{۱۰}=۳۱۴/۵\Rightarrow\sigma=\sqrt{۳۱۴/۵}\simeq۱۷/۷۵$$





تمرین : انحراف معیار داده های مربوط به قیمت گوشت در مثال اول را بدست آورید .

ویژگی های واریانس و انحراف معیار :

اگر داده ها با عدد ثابتی جمع شوند واریانس و انحراف معیار آنها تغییر نمی کند .

اگر داده ها در عدد ثابتی مثل a ضرب شوند ، واریانس آنها در a^2 و انحراف معیار در $|a|$ ضرب می شود .

تمرین : واریانس چند داده برابر ۵ است، اگر داده ها را ۲- برابر کرده و ۸ واحد به آنها بیافزاییم، واریانس و انحراف معیار داده های جدید چقدر است ؟

ضریب تغییرات : شاخصی بدون واحد است که از تقسیم انحراف معیار بر میانگین داده ها بدست می آید و به همین دلیل می تواند شاخصی خوبی برای مقایسه دو جامعه باشد . هرچه این شاخص کوچکتر باشد، جامعه بهتر است .

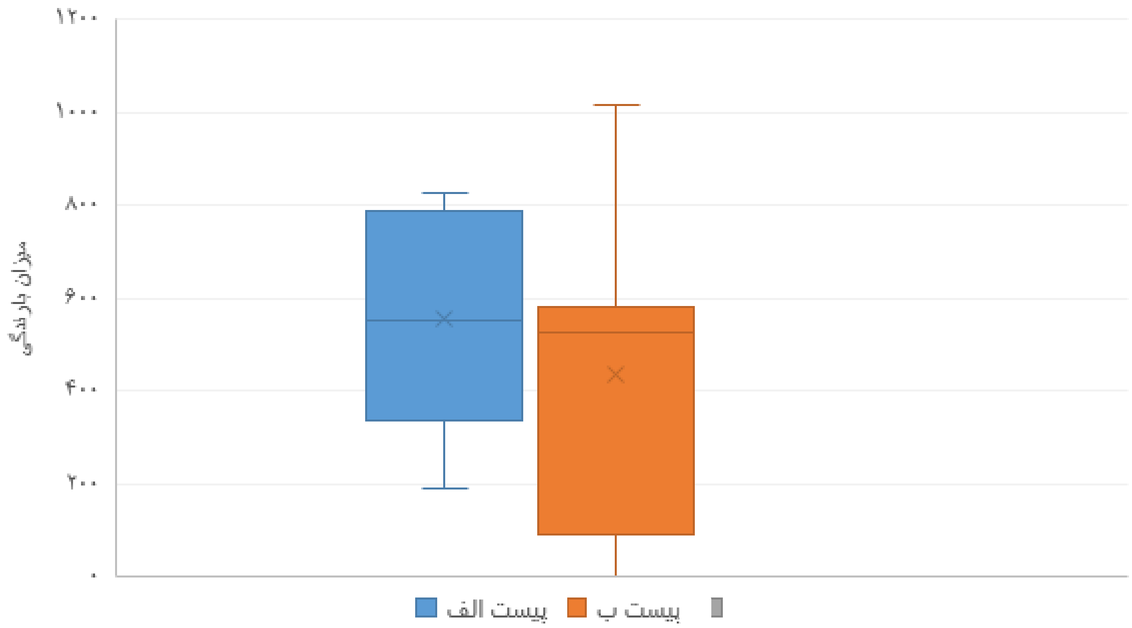
$$CV = \frac{\sigma}{\overline{X}}$$

تمرین : داده های مربوط به مقدار تولید دو شرکت در ماه گذشته به گونه ای است که میانگین اولی ۱۲۰۰ و میانگین دومی ۱۱۰۰ بوده و انحراف معیار آنها نیز به ترتیب ۱۰۰ و ۸۰ است . کدام شرکت عملکرد بهتری دارد ؟

نمودار جعبه ای : نموداری که نشان می دهد اکثر داده ها در چه محدوده ای قرار گرفته اند (دامنه میان چارکی IQR) و شامل اطلاعاتی مانند کوچکترین و بزرگ ترین داده، میانه، چارک اول و سوم است . به این ترتیب که مستطیلی در بازه بین چارک اول و سوم روی محور رسم می شود و مقدار میانه درون مستطیل مشخص می گردد .

مثال : نتایج ۷ سال بارندگی در ۲ پیست اسکی به صورت زیر ثبت شده است .

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۳	۱۳۹۲	۱۳۹۱	۱۳۹۰	۱۳۸۹	۱۳۸۸
میزان بارش برف در پیست اسکی الف	۸۲۵	۷۲۸	۴۷۲	۷۸۷	۳۳۵	۱۹۰	۵۵۱
میزان بارش برف در پیست اسکی ب	۵۶۶	۵۸۱	۹۳	۱۰۱۶	۵۲۵	۰	۲۷۱



تکلیف : تمرین های صفحه ۹۹ و ۱۰۰ را حل کنید.