



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های دروس ریاضیات

دانلود نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نمونه سوالات و پاسخنامه کنکور

دانلود نرم افزارهای ریاضیات

...

کانال سایت ریاضی سرا در تلگرام:

<https://telegram.me/riazisara>

(@riazisara)

جهت تهیه کتاب (درسنامه کنکوری آمار و مدل سازی) تالیف حبیب هاشمی با تلفن
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۵	<u>۱ اندازه گیری و مدل سازی</u>
۵	۱-۱ اندازه گیری
۵	۱-۲ مدل سازی ریاضی
۵	۱-۳ خطای اندازه گیری
۷	<u>۲ جامعه و نمونه</u>
۷	۲-۱ جامعه آماری
۷	۲-۲ روش های مطالعه آمار
۷	۲-۲-۱ سرشماری
۷	۲-۲-۲ نمونه گیری
۸	۲-۲-۳ روش اعداد تصادفی
۹	۲-۲-۴ روش های جمع آوری داده ها
۹	۲-۲-۵ نکات طراحی پرسشنامه
۱۱	<u>۳ متغیرهای تصادفی</u>
۱۱	۳-۱ متغیر تصادفی
۱۱	۳-۱-۱ انواع متغیر تصادفی
۱۲	<u>۴ دسته بندی داده ها و جدول فراوانی</u>
۱۲	۴-۱ اهداف دسته بندی داده ها
۱۲	۴-۱-۱ دسته بندی داده های گسسته
۱۳	۴-۱-۲ جدول فراوانی داده های گسسته
۱۳	۴-۱-۳ دسته بندی داده های پیوسته
۱۷	۴-۲ انواع فراوانی
۱۷	۴-۲-۱ فراوانی مطلق دسته نام
۱۸	۴-۲-۲ فراوانی نسبی دسته نام
۱۸	۴-۲-۳ فراوانی تجمعی دسته نام
۱۸	۴-۲-۴ درصد فراوانی نسبی (درصد) دسته نام

جهت تهیه کتاب (درسنامه کنکوری آمار و مدل سازی) تالیف حبیب هاشمی با تلفن ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

۵ نمودارها (شاخص های هندسی)

- ۵-۱ نمودار میله ای (ستونی)
- ۵-۲ نمودار مستطیلی
- ۵-۳ نمودار چند بر فراوانی
- ۵-۴ نمودار دایره ای
- ۵-۵ نمودار ساقه و برگ

۶ شاخص های مرکزی

- ۶-۱ مد (نما) MO
- ۶-۲ میانه MD
- ۶-۳ چارک ها
- ۶-۳-۱ نمودار جعبه ای
- ۶-۴ میانگین
- ۶-۴-۱ میانگین ساده
- ۶-۴-۲ مجموع داده ها
- ۶-۵ مقایسه شاخص های مرکزی (میانگین، میانه و مد)

- ۶-۶ میانگین وزندار

۷ شاخص های پراکندگی

- ۷-۱ دامنه تغییرات (R)
- ۷-۲ واریانس (پراش)
- ۷-۳ انحراف معیار
- ۷-۴ واریانس در جدول فراوانی
- ۷-۵ ضریب تغییرات (C.V)
- ۷-۶ مقایسه ی دقت یا پراکندگی دو گروه

..... منابع:

جهت تهیه کتاب (درسنامه کنکوری آمار و مدل سازی) تالیف حبیب هاشمی با تلفن
۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

مقدمه

اثری که در اختیار شماست مجموعه‌ای از مطالب آمار و مدل سازی، مثال‌های متنوع و تست‌های سراسری می‌باشد؛ از این رو شما را در جمع‌بندی مطالبی که تاکنون مطالعه کرده اید یاری می‌رساند. با توجه به لزوم تشریح و توضیح بیشتر این درس برای رشته‌های ریاضی، تجربی و انسانی سعی شده است که پاسخ مثال‌ها به اندازه کافی تشریحی باشد و نکات لازم هر تست گفته شود. در این درسنامه تست‌های سراسری نیز گنجانده شده است تا سلیقه طراحان کنکور برجسته و مشخص شود. امیدواریم این درسنامه برایتان مفید باشد و بتوانید از آن بهره‌مندی لازم را ببرید.

موفق باشید.

۱ اندازه‌گیری و مدل سازی

۱-۱ اندازه‌گیری

در رسیدن به اطلاعات عددی با معیار مناسب برای انجام بررسی آماری، نسبت دادن عدد به موضوع مورد مطالعه را اندازه‌گیری گوئیم.

اولین قدم در رسیدن به اطلاعات عددی برای انجام بررسی آماری یک یا چند موضوع اندازه‌گیری است.

به عنوان نمونه برای رسیدن به اطلاعات عددی در بررسی پیشرفت سالانه تولید گندم در کشور، مقدار گندم تولید شده در سال اندازه‌گیری شده و به صورت عدد مشخص می‌شود.

۱-۲ مدل سازی ریاضی

بیان مسئله به زبان ریاضی را مدل سازی ریاضی گوئیم.

ویژگی های یک مدل سازی با ارزش:

۱- ساده و ابتدایی
۲- به پدیده مورد نظر نزدیک تر بودن

مثال ۱: نسبت دادن عدد به موضوع مورد مطالعه برای رسیدن به اطلاعات عددی با معیاری مناسب کدام است؟

(۱) نمونه‌گیری (۲) $\sqrt{2}$ اندازه‌گیری (۳) مدل سازی ریاضی (۴) سرشماری

مثال ۲: اولین قدم در رسیدن به اطلاعات عددی است.

(۱) نمونه‌گیری (۲) $\sqrt{2}$ اندازه‌گیری (۳) مدل سازی ریاضی (۴) سرشماری

مثال ۳: کدام نوع مدل سازی ریاضی با ارزش تر است؟ (سراسری انسانی ۸۷)

(۱) خطای اندازه‌گیری برابر (۲) نتیجه حاصل همان پدیده‌ی مورد نظر

(۳) فقط مفاهیم ریاضی ساده‌تر $\sqrt{4}$ مفاهیم ریاضی ساده‌تر - نتیجه به پدیده مورد نظر نزدیک‌تر

مثال ۴: بیان مسئله به زبان ریاضی را گویند.

(۱) نمونه‌گیری (۲) $\sqrt{2}$ اندازه‌گیری (۳) مدل سازی ریاضی (۴) سرشماری

۱-۳ خطای اندازه‌گیری

تفاضل مقدار واقعی و مقدار اندازه‌گیری شده را خطای اندازه‌گیری گوئیم و با E نشان می‌دهند.

*مقدار مثبت خطای اندازه‌گیری از واحد اندازه‌گیری کوچک‌تر است.

*خطای اندازه‌گیری مثبت یا منفی است و هیچ‌گاه صفر نیست.

*در محاسبات خطای اندازه‌گیری، می‌توان از E با توان‌های بزرگ‌تر از یک چشم‌پوشی کرد.

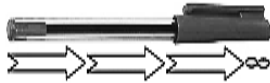
*فرم کلی مدل اندازه‌گیری به صورت زیر است:

(E) خطای اندازه‌گیری + مقدار اندازه‌گیری شده = مقدار واقعی

مثال ۵: اگر مقدار اندازه‌گیری کوچک‌تر از مقدار واقعی باشد، خطای اندازه‌گیری است؟

(۱) منفی (۲) $\sqrt{2}$ مثبت (۳) صفر (۴) بزرگ‌تر از واحد

مثال ۶: در اندازه‌گیری زیر واحد بزرگ A و واحد کوچک B است. مدل ریاضی طول خودکار کدام است؟



$$l = 2B + 2A + E \quad (2) \quad l = 2B + 2A \quad (1)$$

$$l = 2A + 2B + E \quad (4) \quad l = 2A + 2B \quad (3)$$

مثال ۷: در مثال ۶ کدام گزینه صحیح است؟

$$|E| < AB \quad (4) \quad |E| < B \quad (3) \quad |E| < A \quad (2) \quad |E| < A + B \quad (1)$$

حل: چون واحد B کوچک‌تر از واحد A است گزینه ۳ صحیح است.

مثال ۸: فرض کنید مدل طول مدادی $L = 4 + E_1$ و مدل شعاع قاعده آن $R = 2 + E_2$ است مدلی برای حجم مداد بیابید.

حل:

$$V = \pi R^2 \cdot L \Rightarrow \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده (دایره)} = \text{حجم مداد (استوانه)}$$

$$V = \pi(4 + E_1)^2(2 + E_2) = \pi(16 + 8E_1 + E_1^2)(2 + E_2)$$

$$= \pi \left(32 + 16E_2 + 16E_1 + 8E_1E_2 + 2E_1^2 + E_1^2E_2 \right)$$

$$\Rightarrow V = 32\pi + \underbrace{16\pi E_1 + 16\pi E_2}_E \Rightarrow V = 32\pi + E$$

مثال ۹: مدل طول و عرض مستطیلی به ترتیب $8 + E_1$ و $3 + E_2$ است. مدل مساحت مستطیل کدام است؟

$$24 + 8E_1 + 3E_2 \quad (4) \quad 24 + 3E_1 + 8E_2 \quad (3) \quad 24 + E_1 + E_2 \quad (2) \quad 24 + E_1E_2 \quad (1)$$

حل: گزینه ۳

$$(8 + E_1)(3 + E_2) = 24 + 8E_2 + 3E_1 + E_1E_2 = 24 + 8E_2 + 3E_1$$

۲ جامعه و نمونه

۲-۱ جامعه آماری

مجموعه افراد یا اشیایی که موضوع یا موضوعاتی را روی آن‌ها مطالعه می‌کنیم را جامعه آماری گوئیم. صفت: به کمیت یا کیفیتی که متعلق به عناصر جامعه آماری باشد صفت گوئیم و بر دو نوع است:
(۱) صفت ثابت: همه ی عناصر جامعه آن را دارا باشند مانند کارمندان شرکت نفت
(۲) صفت متغیر: در یک فرد به فرد دیگر تغییر می‌کند مانند گروه خونی
نکته: اعضای جامعه آماری حداقل یک صفت مشترک دارند.
مشاهده آماری: جمع آوری اطلاعات مربوط به صفات متغیر در یک جامعه آماری را مشاهده آماری می‌گویند.

۲-۲ روش‌های مطالعه آمار

مطالعه آماری موضوع یا موضوعات به دو روش سرشماری و نمونه‌گیری انجام می‌گیرد.

۲-۲-۱ سرشماری

مطالعه یا بررسی تمام اعضای جامعه آماری را روش سرشماری گویند.

مهمترین مشکلات سرشماری:

- * بالا بودن هزینه
- * وقت‌گیر بودن
- * در دسترس نبودن اعضای جامعه
- * از بین رفتن اعضای جامعه در بعضی مطالعات

۲-۲-۲ نمونه‌گیری

مطالعه یا بررسی اعضای از جامعه را به عنوان نمونه، روش نمونه‌گیری گویند.

نمونه: زیرمجموعه‌ای از جامعه آماری را نمونه گویند.

تعداد اعضای جامعه و نمونه را به ترتیب اندازه جامعه و نمونه گویند.

جهت تهیه کتاب (درسنامه کنکور آمار و مدل سازی) تالیف حبیب هاشمی با تلفن ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

نکته: عمل نمونه گیری مهمترین بخش آمار است، نمونه ای می تواند نمایانگر خصوصیات جامعه آماری باشد که:

(۱) به اندازه کافی بزرگ باشد.

(۲) اعضایش به طور تصادفی انتخاب شوند.

هرچه تنوع موضوع در جامعه بیشتر باشد اندازه نمونه بزرگتر انتخاب می شود.

انتخاب اعضای نمونه نباید از قانونی پیروی کند.

معمولاً اندازه نمونه حداقل ۱۰ درصد اندازه جامعه است.

مثال ۱: افراد یا اشیایی که موضوع یا موضوعاتی روی آن ها مطالعه می شود، کدام است؟

(۱) نمونه (۲) سرشماری (۳) جامعه (۴) نمونه گیری

مثال ۲: مطالعه و بررسی آماری تمام اعضای جامعه کدام است؟

(۱) نمونه (۲) سرشماری (۳) جامعه (۴) نمونه گیری

مثال ۳: از بین رفتن اعضای جامعه در بعضی موضوعات مربوط به کدام روش آماری است؟

(۱) نمونه گیری (۲) سرشماری (۳) اندازه گیری (۴) مدل سازی

مثال ۴: برای کدام موضوع در کلاس اندازه نمونه بزرگتر است؟

(۱) قد (۲) سن (۳) هوش (۴) معدل

مثال ۵: کدام نمونه به خوبی بیانگر خصوصیات جامعه نیست؟

(۱) به اندازه کافی بزرگ باشد. (۲) اعضایش قانونی انتخاب شوند.

(۳) اعضایش تصادفی انتخاب شوند. (۴) اندازه اش بیشتر از ۱۰ درصد جامعه باشد.

نمونه تصادفی: نمونه ای است که اعضایش به طور تصادفی انتخاب شوند و روش انتخاب اعضایش از دو ویژگی زیر پیروی کند:

(۱) امکان انتخاب تمام اعضای جامعه در نمونه وجود داشته باشد.

(۲) شانس انتخاب تمام اعضای جامعه برای نمونه یکسان باشد.

۲-۲-۳ روش اعداد تصادفی

یکی از روش های ساده و پر استفاده برای انتخاب نمونه تصادفی ساده، روش اعداد تصادفی است.

عدد تصادفی: عددی کوچک تر از یک و بزرگ تر از صفر با سه رقم اعشار را عدد تصادفی گویند و برای نوشتن آن می توان از

ماشین حساب استفاده کرد. مانند عدد ۰/۵۶۴

مراحل روش اعداد تصادفی برای انتخاب نمونه:

* اعضای جامعه را شماره گذاری می کنیم. (شماره گذاری می تواند از هر عدد طبیعی شروع شود).

* به تعداد اندازه نمونه عدد تصادفی مشخص می کنیم.

* شماره های اعضای نمونه را به صورت زیر به دست می آوریم:

* اولین شماره جامعه + [عدد تصادفی \times اندازه جامعه] = شماره نمونه

([] نماد جزء صحیح است.)

نکته: در صورتی که شماره های مساوی برای شماره نمونه به دست بیاید عدد تصادفی را عوض کنید.

مثال ۶: در مورد روش انتخاب نمونه تصادفی کدام گزینه صحیح نیست؟

(۱) امکان انتخاب تمام اعضای جامعه در نمونه وجود داشته باشد.

جهت تهیه کتاب (درسنامه کنکوری آمار و مدل سازی) تالیف حبیب هاشمی با تلفن ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

۳) اندازه نمونه به اندازه کافی بزرگ باشد.

۲) شانس انتخاب تمام اعضای جامعه برای نمونه یکسان باشد.

۴) انتخاب اعضای نمونه از قانونی پیروی کند.

مثال ۷: به کمک اعداد تصادفی ۰/۴۲۱ و ۰/۸۴۲ دو شماره از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۱۵ بیابید؟

$$[0 / 421 \times 15] + 1 = [6 / 315] + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$[0 / 842 \times 15] + 1 = [12 / 63] + 1 = 12 + 1 = 13$$

مثال ۸: با استفاده از عدد تصادفی ۰/۳۴۲، عدد طبیعی بین ۱۵ تا ۷۸ کدام است؟

$$37(4) \quad 36(3 \sqrt{\quad}) \quad 22(2) \quad 21(1)$$

حل:

$$\text{اندازه جامعه} = 78 - 15 + 1 = 64$$

$$[0 / 342 \times 64] + 15 = [21 / 888] + 15 = 21 + 15 = 36$$

مثال ۹: در یک لیست ۳۰ نفری، می‌خواهیم از شماره ی ۲۰ تا ۳۰ یک نفر را انتخاب کنیم اگر ماشین حساب، عدد تصادفی ۰/۲۹۷

راتولید کند، کدام شماره انتخاب می‌شود؟

$$24(4) \quad 23(3 \sqrt{\quad}) \quad 22(2) \quad 21(1)$$

حل:

$$\text{اندازه جامعه} = 30 - 20 + 1 = 11$$

$$[0 / 297 \times 11] + 1 = [3 / 267] + 1 = 3 + 1 = 4$$

بنابراین ۴مین نفر با شروع از شماره ی ۲۰ می‌شود شماره ی ۲۳.

داده: نتیجه بررسی و مطالعه‌ی نمونه را داده گویند.

هدف اصلی علم آمار تبدیل داده‌ها به اطلاعات است.

۲-۲-۴ روش‌های جمع‌آوری داده‌ها

روش جمع‌آوری داده‌ها در آمار با توجه به موضوع مورد مطالعه عبارت اند از:

- داده‌های از پیش تهیه شده
- پرسش (مصاحبه یا پرسشنامه کتبی)
- مشاهده و ثبت وقایع
- آزمایش

نکته: تفاوت روش پرسش کتبی (پرسشنامه) و پرسش شفاهی (مصاحبه) در این است که در پرسشنامه سؤالات برای همه یکسان است. اما در مصاحبه با توجه به اینکه مصاحبه‌گر ممکن است در مورد سؤالاتی توضیح بیشتری دهد، سؤالات برای همه یکسان نیست.

۲-۲-۵ نکات طراحی پرسشنامه

- سازمان‌دهی محتوای پرسشنامه
- در نظر گرفتن هدف بررسی
- تهیه فهرستی از عناوین مربوط به اطلاعاتی که باید جمع‌آوری شود.
- عدم جمع‌آوری داده‌ها و اطلاعات اضافی

- استفاده از سؤالات ساده و واضح به طوری که برداشت متفاوتی از پرسش ها نشود.
- استفاده از سؤالاتی که دارای جواب یک کلمه‌ای یا عددی هستند.
- عدم استفاده از سؤالات هدایت کننده
- استفاده از سؤالات چندگزینه‌ای

مثال ۱۰: نتیجه مطالعه و بررسی نمونه را..... گویند.

(۱) سرشماری (۲) داده (۳) نمونه‌گیری (۴) اندازه‌گیری

مثال ۱۱: برای موضوع استفاده از چتر در هوای بارانی کدام روش جمع‌آوری داده‌ها مناسب است؟

(۱) داده‌های از پیش تهیه شده (۲) پرسش (۳) آزمایش (۴) مشاهده و ثبت وقایع

مثال ۱۲: روش جمع‌آوری داده‌های از پیش تهیه شده برای کدام موضوع مناسب است؟

(۱) بررسی تعداد تصادفات رانندگی در یک بزرگراه

(۲) تأثیر گوش دادن موسیقی کلاسیک بر یادگیری

(۳) تأثیر رژیم گرفتن در کاهش وزن

(۴) تعیین رنگ مورد علاقه مردم

مثال ۱۳: جمع‌آوری داده‌ها به کدام روش مورد قبول نیست؟ (سراسر تجربی ۹۱)

(۱) مصاحبه (۲) پرسش هدایت‌شونده (۳) آزمایش (۴) مشاهده و ثبت وقایع

مثال ۱۴: در طراحی پرسشنامه کدام گزینه صحیح نیست؟

(۱) سازمان‌دهی محتوا (۲) استفاده از سؤالات هدایت‌شونده

(۳) استفاده از سؤالات ساده و واضح (۴) استفاده از سؤالات چندگزینه‌ای

مثال ۱۵: در کدام مورد عمل سرشماری انجام نشده است؟ (سراسری انسانی)

(۱) تمام افراد جامعه مورد مطالعه قرار گیرد. (۲) نمونه همان جامعه آماری است.

(۳) اندازه‌ی نمونه برابر اندازه‌ی جامعه است. (۴) نمونه، زیر مجموعه‌ی جامعه‌ی آماری است.

مثال ۱۶: هدف اصلی علم آمار کدام است؟

(۱) تبدیل اطلاعات به یکدیگر (۲) تبدیل اطلاعات به داده‌ها

(۳) تبدیل داده‌ها به اطلاعات (۴) تبدیل داده‌ها به یکدیگر

مثال ۱۷: کدام طریق برای جمع‌آوری داده‌ها مناسب نیست؟ (سراسری تجربی ۹۰ خارج از کشور)

(۱) مصاحبه (۲) الگوی خاص (۳) مشاهده (۴) آزمایش

۳ متغیرهای تصادفی

۳-۱ متغیر تصادفی

موضوع یا موضوعاتی را که در نمونه یا جامعه مورد مطالعه قرار می‌گیرند، متغیر تصادفی گوئیم.

متغیر تصادفی دارای حالت‌ها یا مقادیری است که به‌طور تصادفی در بین اعضای جامعه یا نمونه تغییر می‌کنند.

متغیر تصادفی به دو دسته کمی و کیفی تقسیم می‌شوند:

متغیر تصادفی کمی: متغیری که قابل اندازه‌گیری است و نتیجه آن عدد هست.

متغیر تصادفی کیفی: متغیری که قابل اندازه‌گیری نیست و دارای مقولات یا حالات مختلف است.

مثال ۱: کدام متغیر تصادفی کمی است؟

۱) جنسیت افراد (۲) وضعیت تأهل افراد (۳) نمره درس دانش آموزان (۴) گروه خونی افراد

مثال ۲: کدام متغیر تصادفی کیفی است؟

۱) میزان بارندگی در شهر (۲) درآمد افراد شاغل (۳) قد دانش آموزان (۴) نوع تلفن افراد

متغیر تصادفی کمی در بین اعضای نمونه یا جامعه قابل مقایسه است.

مثال ۳: با کدام متغیر نمی‌توان دانش آموزان کلاس را با هم مقایسه کرد؟

۱) نمره درس (۲) گروه خونی (۳) وزن (۴) تعداد اعضای خانواده

۳-۱-۱ انواع متغیر تصادفی

متغیر تصادفی کمی دارای دو نوع پیوسته و گسسته است. همچنین متغیر تصادفی کیفی نیز دارای دو نوع ترتیبی و اسمی است.

متغیر کمی پیوسته: متغیر کمی که مقادیرش بین دو مقدار دلخواه تغییر می‌کند و قابل شمارش نیستند.

متغیر کمی گسسته: متغیر کمی که مقادیرش اعداد صحیح است و قابل شمارش هستند.

متغیرهای تصادفی کمی گسسته از نوع تعداد می‌باشند.

تذکر: متغیرهای تصادفی که می‌توان تعداد آن‌ها به‌صورت نیم هم شمرد جز متغیرهای تصادفی گسسته هستند مانند تعداد طبقات ساختمان که در صورت ناتمام بودن یک طبقه به‌صورت ۱/۵، ۲/۵، ۳/۵، ... طبقه شمرده می‌شود.

متغیر کیفی ترتیبی: متغیر کیفی که حالاتش دارای ترتیب هستند. مانند مقاطع تحصیلی (ابتدایی، متوسطه اول، متوسطه دوم، دانشگاهی) و میزان تحصیلات (کاردانی، کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکتری)

متغیر کیفی اسمی: متغیر کیفی که حالاتش دارای ترتیب نیستند. مانند جنسیت (زن و مرد) و گروه خونی (A,B,AB,O)

مثال ۴: نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید؟

- | | |
|---|-------------|
| الف) میزان آلودگی هوای شهر تهران | کمی پیوسته |
| ب) زمان انتظار بیمار در مطب پزشک | کمی پیوسته |
| پ) تعداد غایبین کلاس‌های دبیرستان | کمی گسسته |
| ت) تعداد مکالمات تلفن افراد | کمی گسسته |
| ث) ارزشیابی توصیفی دانش آموزان (ضعیف، متوسط، خوب، عالی) | کیفی ترتیبی |
| ح) مراحل رشد انسان (نوزاد، کودک، نونهال، نوجوان، جوان، میان‌سال، پیر) | کیفی ترتیبی |
| خ) وضعیت تأهل افراد (مجرد، متأهل) | کیفی اسمی |
| ج) گروه خونی افراد (A , B , AB , O) | کیفی اسمی |

مثال ۵: کدام یک از متغیرهای زیر کمی پیوسته است.

- ۱) تعداد نامه‌های یک صندوق (۲) جنسیت افراد (۳) میزان بارندگی (۴) گروه خونی

مثال ۶: متغیر « نوع تلفن مورد استفاده شهروندان » است.

- ۱) کمی گسسته (۲) کیفی اسمی (۳) کیفی ترتیبی (۴) کمی پیوسته

مثال ۷: تعداد پاکت‌های موجود در یک صندوق پست یک متغیر است؟

- ۱) کیفی - ترتیبی (۲) کیفی اسمی (۳) کمی پیوسته (۴) کمی گسسته

مثال ۸: مقطع تحصیلات افراد یک شهر، کدام نوع متغیر است؟ (سراسری انسانی ۸۸)

- ۱) کیفی ترتیبی (۲) کیفی اسمی (۳) کمی پیوسته (۴) کمی گسسته

مثال ۹: قطر تنه ی درختان یک باغ کدام نوع متغیر است؟ (سراسری انسانی)

- ۱) کیفی ترتیبی (۲) کیفی اسمی (۳) کمی پیوسته (۴) کمی گسسته

۴ دسته‌بندی داده‌ها و جدول فراوانی

۴-۱ اهداف دسته‌بندی داده‌ها

- خلاصه کردن داده‌ها برای تبدیل سریع داده‌ها به اطلاعات
- تبدیل داده‌های کمی به کیفی (یک کاسه کردن) جهت راحت توصیف کردن داده‌ها

۴-۱-۱ دسته‌بندی داده‌های گسسته

در بعضی از موضوعات که در آن‌ها از داده‌های گسسته استفاده می‌شود با یک کاسه کردن داده‌ها بر اساس دسته‌بندی داده‌ها می‌توان اطلاعات را به صورت توصیفی نشان داد.

مثال ۱: تعداد خانوار ۳۰ دانش آموز به صورت زیر است:

جهت تهیه کتاب (درسنامه کنکوری آمار و مدل سازی) تالیف حبیب هاشمی با تلفن ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

۷-۶-۴-۶-۸-۴-۵-۶-۵-۶-۹-۳-۴-۵-۱۰-۷-۵-۸-۶-۷-۸-۹-۷-۳-۴-۵-۶-۴-۵-۳

داده را در سه دسته ۳ تا ۵ نفر، ۶ تا ۸ نفر و بیشتر از ۸ نفر به ترتیب به سه نوع خانوار کم جمعیت، جمعیت متوسط و پر جمعیت دسته بندی می کنیم.

دسته ها	نوع خانوار
۳ تا ۵ نفر	کم جمعیت
۶ تا ۸ نفر	جمعیت متوسط
بیشتر از ۸ نفر	پر جمعیت

فراوانی مطلق داده: تعداد دفعات تکرار داده X_i را فراوانی مطلق داده گویند و با f_i نشان می دهند.

$$\sum f_i = n \text{ به عبارتی مجموع فراوانی داده ها با تعداد داده ها برابر است.}$$

۴-۱-۲ جدول فراوانی داده های گسسته

بعد از یک کاسه کردن داده های گسسته تعداد داده را در هر دسته شمرده و به عنوان فراوانی مطلق در نظر می گیریم و جدول فراوانی را برای آن ها تشکیل می دهیم.

مثال ۲: در مثال ۱ جدول فراوانی را تشکیل دهید.

دسته ها	نوع خانوار	فراوانی مطلق
۳ تا ۵ نفر	کم جمعیت	۱۴
۶ تا ۸ نفر	جمعیت متوسط	۱۳
بیشتر از ۸ نفر	پر جمعیت	۳

۴-۱-۳ دسته بندی داده های پیوسته

مراحل دسته بندی داده ها را با یک مثال مطرح می کنیم:

مثال ۳: داده های زیر مربوط به نمرات پایانی اول درس آمار و مدل سازی یک کلاس ۳۰ نفر است:

۱۳ ۷ ۱۵ ۱۶ ۹ ۱۴ ۱۶ ۱۲ ۱۲.۵ ۱۴
 ۱۲ ۶ ۱۰ ۱۹ ۱۷ ۱۳ ۱۸ ۱۴ ۱۵ ۱۸
 ۱۴ ۱۱ ۱۲ ۱۶ ۱۷ ۱۳ ۱۶ ۱۵ ۱۴ ۱۵

(۱) محاسبه دامنه تغییرات داده ها: حداکثر اختلاف داده ها را دامنه تغییرات داده گوئیم و به صورت زیر محاسبه می شود:

$$R = b - a$$

که در آن b بزرگ ترین و a کوچک ترین داده می باشند. در مثال ۳ داریم:

$$R = b - a = 19 - 6 = 13$$

نکته: هرچه دامنه تغییرات بزرگتر باشد نشان دهنده این است که اختلاف در جامعه بیشتر است.

اگر داده ها را a برابر کنیم دامنه تغییرات $|a|$ برابر می شود.

اگر داده ها را b واحد کم (اضافه) کنیم دامنه تغییرات تغییر نمی کند.

(۲) مشخص کردن تعداد دسته‌ها: تعداد دسته‌ها را می‌توان به‌طور اختیاری با توجه به تعداد داده‌ها بین ۵ تا ۲۰ دسته تعیین کرد. تعداد دسته همیشه مشخص می‌شود.

تذکره: می‌توان تعداد دسته‌ها را نیز با استفاده از فرمول $k = \lceil \sqrt{n} \rceil$ که در آن k تعداد دسته‌ها، n تعداد داده‌ها و نماد $\lceil \cdot \rceil$ جز صحیح است، محاسبه کرد.

در مثال ۳ تعداد دسته‌ها را ۵ در نظر می‌گیریم یعنی:

$$k = \lceil \sqrt{30} \rceil = \lceil 5.477 \rceil = 6$$

(۳) تعیین طول دسته‌ها: طول دسته‌ها به صورت‌های زیر تعریف می‌شود:

(۱) تفاضل کران‌های پایین (کران‌های بالا) متوالی دسته‌ها

(۲) تفاضل نماینده (مرکز)های متوالی دسته‌ها

(۳) تفاضل کران بالا و کران پایین هر دسته

برای تعیین طول دسته از رابطه $c = \frac{R}{k}$ می‌توان استفاده کرد. در محاسبه طول دسته ممکن است مقدار آن عددی صحیح مثبت نباشد که با توجه به دقت ثبت داده‌ها (تعداد ارقام اعشاری داده‌ها) مقدار طول دسته (c) را به عدد بالاتر با همان دقت ثبت داده‌ها تغییر می‌دهیم. در مثال ۳ داریم: $c = \frac{13}{5} = 2.6 = 3$

(۴) تعیین کران‌های دسته‌ام: کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین مقدار دسته i ام به ترتیب کران پایین (a_i) و کران بالای (b_i) دسته‌ام گوئیم.

برای تعیین کران‌های دسته‌ها ابتدا کران پایین دسته اول را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

دسته اول $[a, a + c)$

دسته دوم $[a + c, a + 2c)$

⋮

دسته i ام $[a + (i - 1)c, a + ic)$

دسته آخر $[b - c, b]$

مقدار طول دسته به دست آمده را در تعداد دسته‌ها ضرب می‌کنیم و آن را R' می‌نامیم. با محاسبه نصف تفاضل $R' - R$ مقداری به دست می‌آید که در محاسبه کران‌های آن استفاده می‌کنیم. در مثال ۳ داریم:

$$\frac{R' - R}{2} = \frac{3 \times 5 - 13}{2} = \frac{15 - 13}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

حال مقدار به دست آمده را از کوچک‌ترین داده کم می‌کنیم تا کران پایین دسته اول مشخص شود. در مثال ۳ داریم:

$$6 - 1 = 5 \quad \text{کران پایین دسته اول:}$$

در موردی که نسبت دامنه به تعداد دسته‌ها (طول دسته) مقداری صحیح مثبت هست، مقدار $R' - R$ صفر به دست می‌آید. در این صورت کران پایین دسته اول و کوچک‌ترین داده برابرند. البته در غیر این صورت می‌توان مقدار طول دسته را با تغییر به عدد صحیح مثبت به این حالت تبدیل کرد. در این صورت دسته‌ها را به صورت $[a_i, b_i)$ نمایش می‌دهیم که در آن a_i کران پایین و b_i کران بالای دسته‌ام است.

حال با اضافه کردن مقدار طول دسته (c) به کران پایین دسته اول، کران پایین دسته دوم مشخص می‌شود. به همین ترتیب کران پایین دسته‌های بعدی نیز مشخص می‌شوند. در مثال ۳ داریم:

$$5 + 3 = 8 \quad \text{کران پایین دسته دوم:}$$

$$8 + 3 = 11 \quad \text{کران پایین دسته سوم:}$$

$$11 + 3 = 14 \quad \text{کران پایین دسته چهارم:}$$

$$\text{کران پایین دسته پنجم: } 17 = 14 + 3$$

بعد از تعیین کران‌های پایین دسته‌ها، برای تعیین کران بالای دسته‌ها می‌توان با اضافه کردن طول دسته به کران‌های پایین، کران‌های بالا را مشخص کرد. یا به عبارتی کران پایین هر دسته با کران بالای دسته قبلیش برابر است بنابراین در مثال ۳ کران‌ها بالا به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\text{کران بالای دسته اول} = \text{کران پایین دسته دوم} = 8$$

$$\text{کران بالای دسته دوم} = \text{کران پایین دسته سوم} = 11$$

$$\text{کران بالای دسته سوم} = \text{کران پایین دسته چهارم} = 14$$

$$\text{کران بالای دسته چهارم} = \text{کران پایین دسته پنجم} = 17$$

$$\text{کران بالای دسته پنجم} = \text{کران پایین دسته پنجم} + \text{طول دسته} = 20 = 17 + 3$$

در آخر با مقایسه کران بالای دسته‌ی آخر و بزرگ‌ترین داده صحت دسته‌بندی داده‌ها را بررسی می‌کنیم. در این مقایسه باید کران بالای دسته‌ی آخر کمتر از بزرگ‌ترین داده نباشد. همان‌طور که معلوم است کران بالای هر دسته با کران پایین دسته بعدی برابر است که نشان‌دهنده پیوستگی داده‌ها است. بنابراین دسته‌ها در مثال ۳ به صورت زیر هستند:

دسته‌ها

۵-۸

۸-۱۱

۱۱-۱۴

۱۴-۱۷

۱۷-۲۰

نکته: رابطه بین تعداد دسته‌ها، طول دسته و دامنه تغییرات:

$$c = \frac{R}{k}, \quad R = ck, \quad k = \frac{R}{c}$$

مثال ۴: نمرات دانش آموزان یک کلاس در درس ریاضی به صورت زیر است. تعداد دسته‌های لازم برای تشکیل جدول توزیع فراوانی

کدام است؟ (طول هر دسته ۴ فرض شود).
 ۴, ۱۷, ۲۰, ۱۴, ۱۲, ۹, ۱۳, ۱۸, ۱۵, ۱۵, ۱۴, ۴, ۳, ۵, ۵, ۵, ۲۰
 ۴ (۲۵) ۴ ۵ (۳) ۷ ۴ (۲) ۴ (۵) (۱)

$$k = \frac{R}{C}, \quad a = 3, \quad b = 20, \quad R = 20 - 3 = 17$$

$$\rightarrow K = \frac{17}{4} = 4.25 \rightarrow \boxed{K = 5}$$

مثال ۵: طول دسته کدام نیست؟

(۱) تفاضل کران‌های پایین (بالا) متوالی دسته‌ها

(۲) تفاضل کران‌های بالا و پایین هر دسته

(۳) تفاضل مرکز (نماینده) متوالی دسته‌ها

(۴) تفاضل دامنه و تعداد دسته‌ها

(۵) مرکز (نماینده) دسته‌ی آم: نصف مجموع کران‌های دسته‌آم یعنی، $x_i = \frac{a_i + b_i}{2}$

نکته: در جدول فراوانی، مراکز دسته تشکیل دنباله حسابی با قدرنسبت طول دسته می‌دهند بنابراین رابطه زیر را می‌توان بین دو مرکز دسته بنویسیم:

$$x_j = x_i + (j - i) \times c$$

مثال ۶: در مثال ۳ داریم:

دسته‌ها	مرکز دسته x_i
۵-۸	$\frac{۵+۸}{۲} = ۶/۵$
۸-۱۱	۹/۵
۱۱-۱۴	12/5
۱۴-۱۷	15/5
۱۷-۲۰	18/5

برای دودسته غیر متوالی i و j داریم:

$$c = \frac{a_i - a_j}{i - j}, \quad c = \frac{b_i - b_j}{i - j}, \quad c = \frac{x_i - x_j}{i - j}, \quad a_i = x_i - \frac{c}{2}, \quad b_i = x_i + \frac{c}{2}$$

رابطه بین کران‌های دسته‌آم، طول دسته‌ها (c) و کران پایین دسته اول (کوچک‌ترین داده a_1):

$$[a_1 + (i-1) \times c, a_1 + i \times c]$$

مثال ۷: در ۵۶ داده آماری، بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین آن‌ها به ترتیب ۸۶ و ۶۵ است. این داده‌ها به ۷ طبقه دسته‌بندی شده‌اند. اگر داده‌هایی که در یک دسته قرار دارند یکسان در نظر گرفته شود، مقدار مشترک (مرکز) آن‌ها در دسته پنجم کدام است؟ (سرا سری انسانی ۸۸)

$$۷۸/۵(۴ \sqrt{\quad}) \quad ۷۸(۳) \quad ۷۷/۵(۲) \quad ۷۷(۱)$$

حل:

$$\begin{cases} R = \text{Max} - \text{Min} = ۸۶ - ۶۵ = ۲۱ \\ \text{طول دسته} = \frac{R}{\text{تعداد دسته}} = \frac{۲۱}{۷} = ۳ \end{cases}$$

پس دسته‌ها به صورت $[۶۸, ۶۵]$ و $[۷۱, ۶۸]$ و $[۷۴, ۷۱]$ و $[۷۷, ۷۴]$ و دسته پنجم $[۸۰, ۷۷]$ هستند و در نتیجه مقدار مشترک (مرکز) دسته $\frac{۷۷+۸۰}{۲} = ۷۸/۵$ است.

مثال ۸: دسته سوم یک جدول توزیع فراوانی به صورت $[۵۲, ۵۷]$ است. کران بالای دسته هفتم، کران پایین دسته اول، مرکز دسته ششم را به دست آورید.

$$c = \frac{b_v - b_r}{v - r} \Rightarrow ۵ = \frac{b_v - ۵۷}{۴} \Rightarrow b_v - ۵۷ = ۲۰ \Rightarrow b_v = ۷۷$$

$$c = \frac{a_1 - a_r}{1 - r} \Rightarrow ۵ = \frac{a_1 - ۵۲}{-۲} \Rightarrow a_1 - ۵۲ = -۱۰ \Rightarrow a_1 = ۴۲$$

$$c = \frac{x_p - x_r}{p - r} \Rightarrow ۵ = \frac{x_p - ۵۴/۵}{۳} \Rightarrow x_p - ۵۴/۵ = ۱۵ \Rightarrow x_p = ۶۹/۵$$

مثال ۹: یک سری داده‌های آماری را دسته‌بندی کرده‌ایم، به طوری که مرکز دسته دوم ۶ و مرکز دسته دهم ۳۴ است. با فرض برابر بودن طول همه‌ی دسته‌ها، کران بالای دسته ششم کدام است؟

$$۲۰(۴) \quad ۲۳(۳) \quad ۲۱/۷۵(۲ \sqrt{\quad}) \quad ۲۱/۵(۱)$$

حل:

جهت تهیه کتاب (درسنامه کنکوری آمار و مدل سازی) تالیف حبیب هاشمی با تلفن ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

$$c = \frac{x_1 - x_2}{10 - 2} = \frac{24 - 6}{8} = \frac{18}{8} = 2.25 \Rightarrow [4/25 \text{ و } 7/75]$$

$$6 - 1/75 \quad 6 \quad 6 + 1/75$$

مرکز دسته دوم

$$c = \frac{b_6 - b_7}{6 - 2} \Rightarrow 2.25 = \frac{b_6 - 7/75}{4} \Rightarrow b_6 - 7/75 = 9 \Rightarrow b_6 = 21/75$$

مثال ۱۰: در یک دسته‌بندی داده‌ها، کران پایین دسته دوم و مرکز دسته هشتم به ترتیب ۷، ۳۳ است. اگر این داده‌ها در ۱۲ طبقه دسته‌بندی کرده باشیم، کران بالای دسته آخر چقدر است؟

$$43(4) \quad 51(3) \quad 57(2) \quad 47(1)$$

حل:

$$\text{کران پایین دسته هشتم} = \frac{c}{2} = 33 \Rightarrow \text{کران پایین دسته هشتم} = \frac{c}{2} - \text{مرکز دسته هشتم}$$

$$c = \frac{a_8 - a_7}{8 - 2} \Rightarrow c = \frac{(33 - \frac{c}{2}) - 7}{6} \Rightarrow c = 4$$

$$c = \frac{b_{12} - b_1}{12 - 2} \Rightarrow 4 = \frac{b_{12} - 11}{10} \Rightarrow b_{12} = 51$$

مثال ۱۱: تعدادی داده را در ۴ دسته، دسته‌بندی کرده‌ایم اگر ۱۹، ۳۱ به ترتیب مراکز دسته‌های اول و آخر باشند تمامی دسته‌ها و مراکز آن‌ها را تعیین کنید.

$$c = \frac{x_1 - x_4}{1 - 4} = \frac{19 - 31}{-3} = \frac{-12}{-3} = 4$$

$$a_1 = x_1 - \frac{c}{2} = 19 - \frac{4}{2} = 17$$

دسته‌ها (a_i, b_i)	مرکز دسته
$(17, 21)$	۱۹
$(21, 25)$	۲۳
$(25, 29)$	۲۷
$(29, 33)$	۳۱

۴-۲ انواع فراوانی

برای تشکیل جدول فراوانی دسته‌بندی شده فراوانی‌هایی را به آن اضافه می‌کنیم این فراوانی‌ها در توصیف داده‌ها به ما کمک می‌کنند.

۴-۲-۱ فراوانی مطلق دسته نام

تعداد داده‌ها در دسته‌نام را فراوانی مطلق آن گوییم و با f_i نشان می‌دهیم.

نکته: برای اینکه سریع‌تر و راحت‌تر فراوانی مطلق دسته‌ها را مشخص کنیم بهتر است داده‌ها را به‌طور غیر نزولی مرتب شوند.

جهت تهیه کتاب (درسنامه کنکوری آمار و مدل سازی) تالیف حبیب هاشمی با تلفن ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

مثال ۱۲: در مثال ۳ فراوانی مطلق دسته‌ها را به جدول دسته‌بندی و مرکز دسته‌ها اضافه می‌کنیم.

۱۵ و ۱۵ و ۱۴ و ۱۴ و ۱۴ و ۱۳ و ۱۳ و ۱۲ و ۱۲ و ۱۱ و ۱۰ و ۹ و ۷ و ۶
۱۹ و ۱۸ و ۱۸ و ۱۷ و ۱۶ و ۱۶ و ۱۶ و ۱۶

دسته‌ها	مرکز دسته x_i	فراوانی مطلق f_i
۵-۸	$\frac{۵+۸}{۲} = ۶/۵$	۲
۸-۱۱	۹/۵	۲
۱۱-۱۴	۱۲/۵	۸
۱۴-۱۷	۱۵/۵	۱۳
۱۷-۲۰	۱۸/۵	۵
جمع		۳۰

مجموع فراوانی‌های مطلق دسته‌ها با تعداد داده‌ها برابر است.

$$\sum f_i = n$$

۲-۲-۴ فراوانی نسبی دسته‌آم

نسبت فراوانی مطلق دسته‌آم به مجموع فراوانی‌های مطلق (تعداد داده‌ها) را فراوانی نسبی دسته‌آم گوئیم و با $\frac{f_i}{n}$ نشان می‌دهیم.
نکته: مجموع فراوانی‌های نسبی دسته‌ها برابر یک است.

۳-۲-۴ فراوانی تجمعی دسته‌آم

تعداد داده‌های کوچک‌تر از کران بالای دسته‌آم را فراوانی تجمعی دسته‌آم گوئیم. البته در مورد دسته آخر وقتی که کران بالای آن بزرگترین داده است (مقدار طول دسته صحیح و مثبت است) تعداد داده‌های کوچک‌تر و مساوی کران بالای آن را فراوانی تجمعی دسته آخر گوئیم.

*فراوانی تجمعی با فراوانی مطلق دسته اول برابر است.

*فراوانی تجمعی دسته آخر با تعداد داده‌ها برابر است.

*فراوانی تجمعی هر دسته (دسته دوم و بعد از آن) با مجموع فراوانی مطلق آن دسته با فراوانی‌های مطلق دسته‌ی قبلیش برابر است. یعنی $\sum_{k=1}^i f_k$: فراوانی تجمعی دسته‌آم

مثال ۱۳: فراوانی تجمعی هر دسته برابر تعداد داده‌هایی است که مقدار آنها از آن دسته است.

- (۱) کران پایین - کوچک‌تر $\sqrt{۲}$ کران بالا - کوچک‌تر
(۳) کران پایین - بزرگ‌تر (۴) کران بالا - بزرگ‌تر

۴-۲-۴ درصد فراوانی نسبی (درصد) دسته‌آم

ضرب فراوانی نسبی دسته‌آم در ۱۰۰ را درصد فراوانی نسبی (درصد) دسته‌آم گوئیم. یعنی، $\frac{f_i}{n} \times ۱۰۰$

نکته: مجموع درصد فراوانی نسبی دسته‌ها برابر ۱۰۰ است.

مثال ۱۴: برای داده‌های دسته‌بندی‌شده مثال ۳ فراوانی‌ها را به جدول اضافه می‌کنیم.

جهت تهیه کتاب (درسنامه کنکور آمار و مدل سازی) تالیف حبیب هاشمی با تلفن ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

دسته‌ها	مرکز دسته x_i	فراوانی مطلق f_i	فراوانی نسبی $\frac{f_i}{n}$	فراوانی تجمعی $\sum_{k=1}^i f_i$	درصد فراوانی نسبی $\frac{f_i}{n} \times 100$
۵-۸	۶/۵	۲	$\frac{۲}{۳۰} \approx ۰/۰۷$	۲	$۰/۰۷ \times ۱۰۰ = ۷$
۸-۱۱	۹/۵	۲	$\frac{۲}{۳۰} \approx ۰/۰۷$	۴	$۰/۰۷ \times ۱۰۰ = ۷$
۱۱-۱۴	۱۲/۵	۸	$\frac{۸}{۳۰} \approx ۰/۲۶$	۱۲	$۰/۲۶ \times ۱۰۰ = ۲۶$
۱۴-۱۷	۱۵/۵	۱۳	$\frac{۱۳}{۳۰} \approx ۰/۴۳$	۲۵	$۰/۴۳ \times ۱۰۰ = ۴۳$
۱۷-۲۰	۱۸/۵	۵	$\frac{۵}{۳۰} \approx ۰/۱۷$	۳۰	$۰/۱۷ \times ۱۰۰ = ۱۷$
جمع		$n=۳۰$	۱		۱۰۰

مثال ۱۵: داده‌های زیر وزن ۲۵ دانش آموز یک کلاس هست. جدول فراوانی آن‌ها در ۵ دسته تشکیل دهید.

۵۶ - ۴۵ - ۶۰ - ۶۵ - ۴۱ - ۳۵ - ۴۳ - ۷۵ - ۷۹ - ۸۱ - ۴۵ - ۶۵ - ۴۰ - ۴۶ - ۷۵ - ۴۰ - ۷۸ - ۳۵ - ۸۸ - ۶۴ - ۸۸ - ۵۰ - ۴۵ - ۶۰ - ۷۵

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

۳۵ - ۳۵ - ۳۸ - ۴۰ - ۴۱ - ۴۳ - ۴۵ - ۴۵ - ۴۶ - ۴۶ - ۵۰ - ۵۶ - ۶۰ - ۶۰ - ۶۴ - ۶۵ - ۶۵ - ۷۵ - ۷۵ - ۷۸ - ۷۹ - ۸۱ - ۸۸ - ۸۹

دسته‌ها	مرکز دسته x_i	فراوانی مطلق f_i	فراوانی نسبی $\frac{f_i}{n}$	فراوانی تجمعی $\sum_{k=1}^i f_i$	درصد فراوانی نسبی $\frac{f_i}{n} \times 100$
(۳۵, ۴۶)	۴۰/۵	۹	$\frac{۹}{۲۵} = ۰/۳۶$	۹	۳۶
(۴۶, ۵۷)	۵۱/۵	۳	$\frac{۳}{۲۵} = ۰/۱۲$	۱۲	۱۲
(۵۷, ۶۸)	۶۲/۵	۵	$\frac{۵}{۲۵} = ۰/۲۰$	۱۷	۲۰
(۶۸, ۷۹)	۷۳/۵	۴	$\frac{۴}{۲۵} = ۰/۱۶$	۲۱	۱۶
(۷۹, ۹۰]	۸۴/۵	۴	$\frac{۴}{۲۵} = ۰/۱۶$	۲۵	۱۶
جمع		$n=۲۵$	۱		۱۰۰

فراوانی تجمعی دسته $(i-1)$ ام - فراوانی تجمعی دسته i ام = فراوانی مطلق دسته i ام

مثال ۱۶: در جدول زیر مقدار x را طوری بیابید تا فراوانی نسبی دسته سوم برابر $۰/۲$ باشد؟

دسته‌ها	فراوانی
۴/۵ - ۹/۵	۷
۹/۵ - ۱۴/۵	x
۱۴/۵ - ۱۹/۵	۴
۱۹/۵ - ۲۴/۵	۶

$$\text{فراوانی نسبی دسته دوم} = \frac{\text{فراوانی مطلق دسته دوم}}{\text{کل فراوانی‌ها}} \rightarrow \frac{۲}{۱۰} = \frac{۴}{۷+x+۴+۶} \rightarrow x=۳$$

جهت تهیه کتاب (درسنامه کنکوری آمار و مدل سازی) تالیف حبیب هاشمی با تلفن ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

مثال ۱۷: در جدول داده‌های زیر اگر درصد فراوانی نسبی دسته وسط برابر ۳۰ باشد فراوانی دسته ۱۲-۱۰ کدام است؟ (سراسری تجربی)

	۲۰ (۴)	۱۸ (۳√)	۱۶ (۲)	۱۴ (۱)	
مرکز دسته‌ها	۷	۹	۱۱	۱۳	۱۵
فراوانی	۹	۱۵	x	۱۰	۸

حل:

$$\text{درصد فراوانی نسبی دسته سوم} = \frac{f_i}{N} \times 100 \rightarrow$$

$$30 = \frac{x}{9 + 15 + x + 10 + 18} \times 100$$

$$\frac{30}{1} = \frac{100x}{42 + x} \rightarrow \frac{3}{1} = \frac{10x}{42 + x} \rightarrow 126 + 3x = 10x \rightarrow 126 = 7x \rightarrow x = \frac{126}{7} = 18$$

مثال ۱۸: اندازه قد ۱۲۰ دانش‌آموز، در جدول زیر دسته‌بندی شده است. فراوانی دسته‌ی چهارم کدام است؟ (سراسری تجربی)

مرکز دسته	۱۵۵	۱۵۸	۱۶۱	۱۶۴	۱۶۷	۱۷۰	
درصد فراوانی نسبی	۱۰	۱۵	۱۸	x	۲۰	۱۲	۲۴ (۲)
							۲۰ (۱)
							۲۵ (۳)

حل:

$$10 + 15 + 18 + x + 20 + 12 = 100 \Rightarrow x = 25$$

درصد فراوانی نسبی دسته چهارم = ۲۵

$$\frac{\text{فراوانی مطلق دسته چهارم}}{\text{کل فراوانی ها}} \times 100 \Rightarrow 25 = \frac{f_i}{120} \times 100 \Rightarrow 25 = \frac{100 \cdot f_i}{120} \rightarrow \boxed{f_i = 30}$$

مثال ۱۹: ۸۰ داده آماری در ۷ دسته دسته‌بندی شده، فراوانی تجمعی در دسته‌های سوم و چهارم به ترتیب ۴۸ و ۵۶ است. فراوانی نسبی دسته‌ی چهارم کدام است؟

$$0.15 (4) \quad 0.12 (3) \quad 0.1 (2 \sqrt{)} \quad 0.18 (1)$$

حل:

فراوانی تجمعی دسته‌ی سوم - فراوانی تجمعی دسته چهارم = فراوانی مطلق دسته چهارم

$$\text{فراوانی مطلق دسته چهارم} = 56 - 48 = 8$$

$$\text{فراوانی نسبی دسته چهارم} = \frac{\text{فراوانی مطلق دسته چهارم}}{\text{کل فراوانی ها}} = \frac{8}{80} = 0.1$$

مثال ۲۰: فراوانی نسبی دسته‌ای برابر ۰/۶ است. اگر از این دسته سه عضو برداریم و در دسته‌ی دیگری قرار دهیم، فراوانی نسبی به ۰/۴ کاهش می‌یابد فراوانی مطلق دسته‌ی اولیه و تعداد داده‌ها را حساب کنید.

$$\frac{f_i}{n} = 0.6 \Rightarrow f_i = 0.6n \quad (1)$$

جهت تهیه کتاب (درسنامه کنکوری آمار و مدل سازی) تالیف حبیب هاشمی با تلفن ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

حال اگر از آن دسته سه عضو برداریم و در دسته‌ی دیگری قرار دهیم و فراوانی نسبی به 0.4 کاهش یابد داریم:

$$\frac{f_i - 3}{n} = 0.4 \rightarrow f_i = 0.4n + 3 \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow \begin{cases} f_i = 0.6n \\ f_i = 0.4n + 3 \end{cases} \Rightarrow 0.6n = 0.4n + 3$$

$$\Rightarrow 0.2n = 3 \Rightarrow n = 15, f_i = 0.6 \times 15 = 9$$

مثال ۲۱: هشتاد داده‌ی آماری در ۷ دسته طبقه‌بندی شده‌اند. اگر ۲۰ داده‌ی جدید به این جدول افزوده شود، فراوانی نسبی دسته‌ی وسط تغییر نمی‌کند. نسبت افزایش داده‌های دسته‌ی مذکور به فراوانی مطلق این دسته در داده‌های قبل کدام است؟ (سرا سری ریاضی ۹۰)

$$\frac{1}{8} (4) \quad \frac{1}{4} (3) \quad \frac{1}{5} (2) \quad \frac{3}{8} (1)$$

حل: اگر فراوانی دسته چهارم (وسط) داده‌های قبلی را f و فراوانی دسته چهارم (وسط) داده‌های جدید را F در نظر بگیریم. چون فراوانی نسبی در دو حالت تغییر نمی‌کند، داریم:

$$\frac{f}{80} = \frac{F}{100} \Rightarrow \frac{F}{f} = \frac{100}{80} = \frac{5}{4}$$

بنابراین:

$$\frac{\text{افزایش داده دسته‌های چهارم}}{\text{فراوانی مطلق دسته چهارم قبلی}} = \frac{F - f}{f} = \frac{F}{f} - 1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

مثال ۲۲: در جدول فراوانی تجمعی داده‌های دسته‌بندی شده اگر درصد فراوانی نسبی دسته وسط ۲۴ باشد، فراوانی دسته چهارم کدام است؟ (سرا سری ریاضی ۸۵)

مرکز دسته	۱۳	۱۵	۱۷	۱۹	۲۱
فراوانی تجمعی	۵	۱۴	a	۴۱	۵۰

$$17(4) \quad 16(3) \quad 15(2) \quad 14(1)$$

حل:

(تعداد داده‌ها) $n \Rightarrow n = 50$ = فراوانی تجمعی دسته آخر

$$24 = \frac{f_r}{50} \times 100 \Rightarrow f_r = 12$$

$$f_r = a - 14 \Rightarrow 12 = a - 14 \Rightarrow a = 26$$

$$f_p = 41 - a = 41 - 26 = 15$$

مثال ۲۳: داده‌های جدول زیر، داده‌های آماری پیوسته است. چند درصد داده‌ها، در فاصله‌ی $(21/5, 18/5]$ قرار دارند؟ (سرا سری تجربی ۸۸)

مرکز دسته	۱۴	۱۷	۲۰	۲۳	۲۶
فراوانی تجمعی	۵	۱۳	۲۵	۳۴	۴۰

$$40(4) \quad 30(3) \quad 25(2) \quad 20(1)$$

جهت تهیه کتاب (درسنامه کنکور آمار و مدل سازی) تالیف حبیب هاشمی با تلفن ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

حل: مرکز دسته (۲۱/۵, ۱۸/۵] برابر است با $\frac{۱۸/۵ + ۲۱/۵}{۲} = ۲۰$ پس فراوانی دسته سوم: $f_3 = ۲۵ - ۱۳ = ۱۲$

درصد فراوانی نسبی دسته سوم: $\frac{f_3}{n} \times ۱۰۰ = \frac{۱۲}{۴۰} \times ۱۰۰ = ۳۰$

تذکر: تعداد داده‌ها با فراوانی تجمعی دسته آخر (پنجم) برابر است یعنی، $n = ۴۰$

مثال ۲۴: در دسته بندی داده‌های آماری، مناسب ترین مقداری که می‌توانیم به هر یک از افراد یک دسته نسبت دهیم کدام است؟ (سراسری انسانی)

۱√ (مرکز دسته ۲) کران پایین دسته ۳) میانگین مقادیر دسته ۴) کران بالا دسته

مثال ۲۵: در دسته بندی ۱۳۵ داده ی آماری در ۱۵ دسته، کران‌های دسته ی چهارم به صورت (۷۷, ۷۴] است. اگر این داده ها در ۹ دسته، دسته بندی شوند، کران پایین دسته ی آخر، کدام است؟ (سراسری انسانی)

۹۵(۱) ۹۸(۲) ۱۰۲(۳) ۱۰۵(۴√)

حل:

در دسته بندی قدیم:

طول دسته $= ۷۷ - ۷۴ = ۳, k = ۱۵$

دامنه تغییرات $R = c \times k = ۳ \times ۱۵ = ۲۵$

$b_4 = a + 4c \rightarrow ۷۷ = a + 4 \times ۳$

$\rightarrow a = ۷۷ - ۱۲ = ۶۵$ کوچکترین داده

در دسته بندی جدید:

$k = ۹, R = ۴۵ \Rightarrow c = \frac{R}{k} = \frac{۴۵}{۹} = ۵$
تعداد دسته ها طول دسته جدید

$b = a + 9c = ۶۵ + ۹ \times ۵ = ۱۱۰$

$\Rightarrow a_9 = b - c = ۱۱۰ - ۵ = ۱۰۵$

کران پایین دسته آخر (دسته نهم) $= ۱۰۵$ بزرگ ترین داده

مثال ۲۶: مقادیر ۱۲۰ داده ی آماری، در بازه [۲۳, ۵۹] می‌باشند. این داده ها در ۹ طبقه، دسته بندی شده اند. اگر مجموع

فراوانی‌های دو دسته ی آخر ۱۵ باشد، چند درصد داده ها کمتر از ۵۱، هستند؟ (سراسری انسانی ۹۵)

۸۲/۵(۱) ۸۷/۵(۲√) ۹۰(۳) ۹۲/۵(۴)

حل: تعداد دسته ها تا کران بالای ۵۱: $k = \frac{۵۱-۲۳}{۴} = ۷$ $c = \frac{۵۹-۲۳}{۹} = \frac{۳۶}{۹} = ۴$

بنابراین دودسته آخر دسته‌های هشتم و نهم هستند. پس تعداد داده‌های کمتر از ۵۱ با مجموع فراوانی این ۷ دسته برابر است یعنی $۱۰۵ = ۱۲۰ - ۱۵$.

درصد داده‌های کمتر از ۵۱: $\frac{۱۰۵}{۱۲۰} \times ۱۰۰ = ۸۷/۵$

مثال ۲۷: اگر داده‌های آماری ۱,۲,۵,۷,۱۰ دارای دامنه تغییرات R باشند و به داده‌های فوق اعداد ۰ و ۶ را اضافه می‌کنیم دامنه تغییرات اعداد جدید کدام است؟

۲R(۴) R - ۱(۳) ۱ + R(۲√) R(۱)

جهت تهیه کتاب (درسنامه کنکوری آمار و مدل سازی) تالیف حبیب هاشمی با تلفن ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

حل: دامنه تغییرات داده‌های قدیم $R = 7 - 1 = 6$ و دامنه تغییرات داده‌های جدید $7 - 0 = 7$ بنابراین دامنه تغییرات داده‌های جدید برابر است با $1 + R$.

مثال ۲۸: کوچکترین و بزرگترین داده‌های آماری $17/2$ و $22/6$ هستند اگر کران پایین دسته دوم $17/8$ باشد مطلوبست: الف) دامنه تغییرات

حل:

$$R = 22/6 - 17/2 = 5/4$$

ب) طول طبقات

حل:

$$C = 17/8 - 17/2 = 0/6 = \text{کران پایین دسته اول} - \text{کران پایین دسته دوم}$$

پ) تعداد طبقات

حل:

$$n = \frac{R}{C} = \frac{5/4}{0/6} = 9$$

ت) کران پایین دسته سوم

حل:

$$C = \frac{\text{کران پایین دسته اول} - \text{کران پایین دسته سوم}}{3 - 1} \Rightarrow 0/6 = \frac{x - 17/2}{2} \rightarrow x = 2 \times 0/6 + 17/2 = 18/4$$

ث) کران بالای دسته ششم

حل:

$$C = \frac{\text{کران بالای دسته اول} - \text{کران بالای دسته ششم}}{6 - 1} \Rightarrow 0/6 = \frac{x - 17/8}{5} \rightarrow x = 20/8$$

ج) مرکز دسته پنجم

حل:

$$C = \frac{\text{مرکز دسته اول} - \text{مرکز دسته پنجم}}{5 - 1} \Rightarrow 0/6 = \frac{x - 17/5}{4} \rightarrow x = 19/9$$

د) مرکز دسته آخر (سراسری تجربی ۸۶ خارج از کشور)

حل:

$$C = \frac{\text{مرکز دسته اول} - \text{مرکز دسته نهم}}{9 - 1} \Rightarrow 0/6 = \frac{x - 17/5}{8} \rightarrow x = 22/3$$

مثال ۲۹: در جدول زیر فراوانی نسبی دسته دوم برابر $0/25$ است. فراوانی نسبی دسته سوم کدام است؟

x_i	۶	۱۰	۱۴	۱۸
f_i	۲	۵	x	۵

حل: $\sqrt{0/4} \quad 0/45 \quad 0/35 \quad 0/25 \quad 0/125$

$$\text{فراوانی نسبی دسته دوم} = \frac{\text{فراوانی مطلق دسته دوم}}{\text{کل فراوانی}} \Rightarrow 0/25 = \frac{5}{2 + 5 + x + 5}$$

جهت تهیه کتاب (درسنامه کنکوری آمار و مدل سازی) تالیف حبیب هاشمی با تلفن ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

$$\rightarrow \frac{25}{100} = \frac{5}{12+x} \rightarrow 12+x = 20 \rightarrow x = 8$$

$$\text{فراوانی مطلق دسته سوم} = \frac{\text{فراوانی نسبی دسته سوم}}{\text{کل فراوانی}} = \frac{8}{20} = 0.4$$

جهت تهیه کتاب (درسنامه کنکوری آمار و مدل سازی) تالیف حبیب هاشمی با تلفن ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

مثال ۳۰: دانش آموزان یک مدرسه با سال تولد یکسان را وزن کشی کرده و عدد صحیح وزن آنان را یادداشت کرده ایم چند درصد آن ها وزن کمتر از ۵۰ دارند؟ (سراسرس تجربی ۸۸ خارج از کشور)

وزن	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱			
تعداد	۸	۹	۱۲	۱۵	۶	۵	۷۸(۳)	۷۵(۲)	۷۲(۱)

حل:

وزن	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰	۵۱
درصد فراوانی نسبی	$\frac{۸}{۵۵} \times ۱۰۰$	$\frac{۹}{۵۵} \times ۱۰۰$	$\frac{۱۲}{۵۵} \times ۱۰۰$	$\frac{۱۵}{۵۵} \times ۱۰۰$	$\frac{۶}{۵۵} \times ۱۰۰$	$\frac{۵}{۵۵} \times ۱۰۰$

$$\frac{۸ + ۹ + ۱۲ + ۱۵}{۵۵} \times ۱۰۰ = ۸۰$$

مثال ۳۱: کوچکترین و بزرگترین داده‌های آماری ۳۱ و ۵۲ می‌باشند این داده ها در ۷ دسته ، دسته بندی شده اند. ۳۷ درصد داده ها کمتر از ۴۰ و ۴۸ درصد آنها بیشتر یا مساوی ۴۳ می‌باشد، اگر فراوانی کل ۸۰ باشد فراوانی دسته وسط کدام است؟

$$۹(۱) \quad ۱۲(۲) \quad ۱۵(۳) \quad ۱۶(۴)$$

حل:

حدود طبقات	[۳۱,۳۴)	[۳۴,۳۷)	[۳۷,۴۰)	[۴۰,۴۳)	[۴۳,۴۶)	[۴۶,۴۹)	[۴۹,۵۲)
	۳۷ درصد کمتر از ۴۰			دسته وسط	۴۸ درصد بیشتر از ۴۳		

$$دسته چهارم = [a + 3c, a + 4c) = [31 + 9, 31 + 12) = [40, 43)$$

$$۱۵ = ۱۰۰ - (۳۷ + ۴۸) = \text{درصد فراوانی دسته وسط (چهارم)}$$

$$۱۲ = \frac{\text{فراوانی}}{۸۰} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۱۲ = \frac{\text{فراوانی}}{۸۰} \times ۱۰۰ \Rightarrow \text{فراوانی} = ۱۲$$

جهت تهیه کتاب (درسنامه کنکوری آمار و مدل سازی) تالیف حبیب هاشمی با تلفن ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.

مثال ۳۲: اطلاعات مربوط به دو دسته ی اول در دسته بندی تعدادی داده آماری که در دسته هایی با طول های مساوی دسته بندی شده اند به صورت زیر است. با توجه به جدول کران بالای دسته چهارم کدام است؟

۱۶ (۱) ۱۱ (۲) $\sqrt{\quad}$ ۱۵ (۳) ۱۸ (۴)

دسته ها	مرکز دسته
$[a,b)$	۴
$[\delta,c)$	d

حل: کران بالای دسته اول برابر کران پایین دسته ی دوم است. پس $b = \delta$ در دسته ی اول داریم:

$$\frac{a+b}{2} = 4 \rightarrow \frac{a+\delta}{2} = 4 \rightarrow a = 3$$

بنابراین دسته ی اول به صورت $[3,5)$ است در نتیجه طول دسته برابر ۲ است.

$$\text{طول دسته} = \frac{\text{کران بالای دسته ی اول} - \text{کران بالای دسته ی چهارم}}{4-1} \rightarrow 2 = \frac{x-5}{3} \rightarrow x = 11$$

**جهت تهیه جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضی
تالیف حبیب هاشمی کارشناس ارشد ریاضی
کاربردی با هیجده سال سابقه تدریس دربرگزاری
کلاس های کنکور و دبیر رسمی آموزش و پرورش
با شماره ۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱ تماس حاصل فرمایید.**