فصل پنجم
Chapter 5
مسائل آنالیز مختلط
Complex Analysis Problems
بخش اول
Section One
خواص اساسی جبری و هندسی
Basic Algebraic and Geometric Properties

بخش 1 خواص اساسی جبری و هندسی

مساله 1
صحت عبارت های زیر را نشان دهید.

(a) $\left(\sqrt{2}-i\right)-i\left(1-\sqrt{2}i\right)=-2i$
(b) $(2-3i)(-2+i)=-1+8i$

پاسخ

$$\left(\sqrt{2}-i\right)-i\left(1-\sqrt{2}i\right)=\sqrt{2}-i-i+\sqrt{2}=-2i,$$

و

$$(2-3i)(-2+i)=-4+2i+6i-3i^2=-4+3+8i=-1+8i.$$

مساله 2
عبارت زیر را به حقیقی تبدیل کنید.

$$\frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$$

پاسخ

$$\frac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}=\frac{5i}{(1-i)(5-5i)}=\frac{i}{(1-i)^2}=\frac{i}{-2i}=\frac{1}{2}$$

مساله 3

صحت عبارت های زیر را نشان دهید

$$\text{(a)}\ \operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z); \quad \text{(b)}\ \operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z).$$

پاسخ

فراموش نکنید گفتیم Re یعنی حقیقی و Im یعنی مجازی

فرض می کنیم

$$z = x + yi$$

با $x = Re(z)$ و $y = Im(z)$ باشد. پس

$$\operatorname{Re}(iz) = \operatorname{Re}(-y + xi) = -y = -\operatorname{Im}(z)$$

و

$$\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Im}(-y + xi) = x = \operatorname{Re}(z).$$

مساله 4

نشان دهید برای تمام $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$ داریم

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

پاسخ

فرض می کنیم $Z_k = x_k + iy_k$ باشد ، برای $k = 1,2,3$ پس

$$\begin{aligned}(z_1 z_2) z_3 &= ((x_1 + y_1 i)(x_2 + y_2 i))(x_3 + y_3 i) \\ &= ((x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2))(x_3 + y_3 i) \\ &= (x_1 x_2 x_3 - x_3 y_1 y_2 - x_2 y_1 y_3 - x_1 y_2 y_3) \\ &\quad + i(x_2 x_3 y_1 + x_1 x_3 y_2 + x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3)\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}z_1 (z_2 z_3) &= (x_1 + y_1 i)((x_2 + y_2 i))(x_3 + y_3 i)) \\ &= (x_1 + y_1 i)((x_2 x_3 - y_2 y_3) + i(x_2 y_3 + x_3 y_2)) \\ &= (x_1 x_2 x_3 - x_3 y_1 y_2 - x_2 y_1 y_3 - x_1 y_2 y_3) \\ &\quad + i(x_2 x_3 y_1 + x_1 x_3 y_2 + x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3)\end{aligned}$$

لذا

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

مساله 5

محاسبه کنید.

$$\text{(a)}\ \frac{2+i}{2-i};$$
$$\text{(b)}\ (1-2i)^4.$$

پاسخ

$$\text{(a)}\ (3+4i)/5,\ \text{(b)}\ -7+24i.$$

مساله 6

فرض کنید f یک نگاشت باشد که هر عدد مختلط را به صورت زیر می فرستد.

$$z = x+yi \rightarrow \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix}$$

نشان دهید برای تمام $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ داریم.

$$f(z_1z_2) = f(z_1)f(z_2)$$

پاسخ

فرض می کنیم

$$z_k = x_k + y_k i$$

باشد برای $k = 1,2$ پس

$$z_1z_2 = (x_1+y_1i)(x_2+y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2)$$

و لذا

$$f(z_1z_2) = \begin{bmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_2y_1 + x_1y_2 \\ -x_2y_1 - x_1y_2 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{bmatrix}.$$

از طرف دیگر

$$f(z_1)f(z_2) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_2y_1 + x_1y_2 \\ -x_2y_1 - x_1y_2 & x_1x_2 - y_1y_2 \end{bmatrix}$$

در نهایت

$$f(z_1z_2) = f(z_1)f(z_2).$$

مساله 7

با استفاده از قضیه دو جمله ای

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

عبارات زیر را بسط دهید.

$$\text{(a)}\ (1+\sqrt{3}i)^{2011};$$
$$\text{(b)}\ (1+\sqrt{3}i)^{-2011}.$$

پاسخ

$$(1+\sqrt{3}i)^{2011}=\sum_{k=0}^{2011}\binom{2011}{k}(\sqrt{3}i)^k=\sum_{k=0}^{2011}\binom{2011}{k}3^{k/2}i^k.$$

چون برای $k=2m$

$$i^k=(-1)^m$$

و برای $k=2m+1$

$$i^k=(-1)^m i$$

پس

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3}i)^{2011}&=\sum_{0\le 2m\le 2011}\binom{2011}{2m}3^m(-1)^m\\&\quad+i\sum_{0\le 2m+1\le 2011}\binom{2011}{2m+1}3^m\sqrt{3}(-1)^m\\&=\sum_{m=0}^{1005}\binom{2011}{2m}(-3)^m+i\sum_{m=0}^{1005}\binom{2011}{2m+1}(-3)^m\sqrt{3}.\end{aligned}$$

به همین طریق

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{3}i)^{-2011}&=\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}i}\right)^{2011}=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{4}\right)^{2011}\\&=\frac{1}{4^{2011}}\sum_{k=0}^{2011}\binom{2011}{k}(-\sqrt{3}i)^k\\&=\frac{1}{4^{2011}}\sum_{m=0}^{1005}\binom{2011}{2m}(-3)^m\end{aligned}$$

$$-\frac{i}{4^{2011}}\sum_{m=0}^{1005}\binom{2011}{2m+1}(-3)^m\sqrt{3}.$$

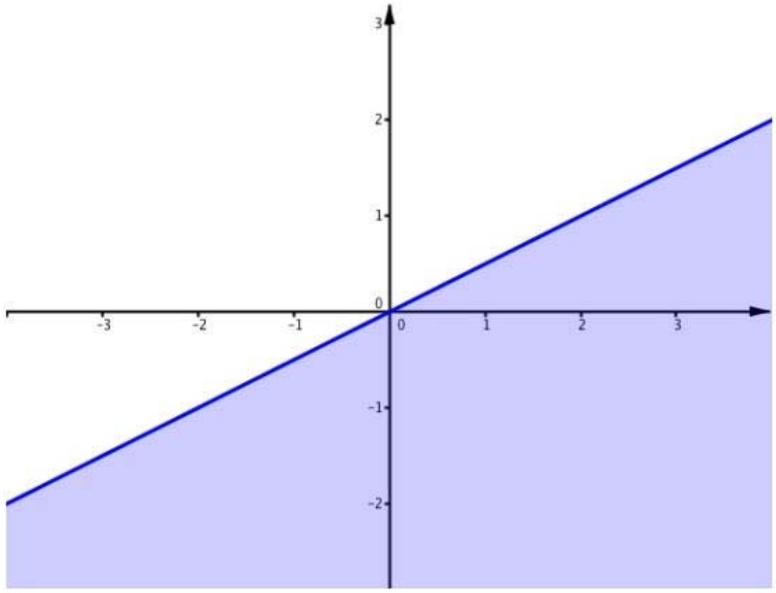
مساله 8

ناحیه های زیر را در صفحه مختصات مختلط رسم کنید.

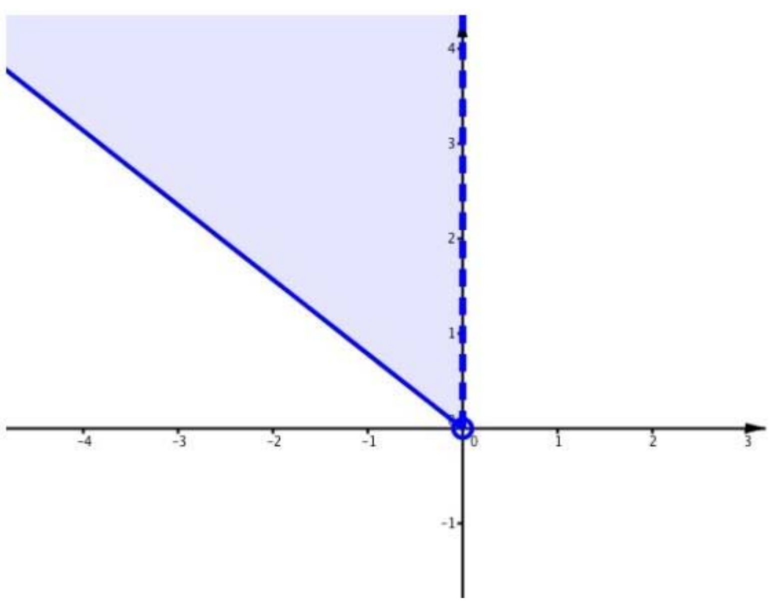
(a) $\{z : \operatorname{Re} z \geq 2\operatorname{Im} z\}$; (b) $\{z : \pi/2 < \operatorname{Arg} z \leq 3\pi/4\}$;
(c) $\{z : |z-4i+2| > 2\}$.

پاسخ

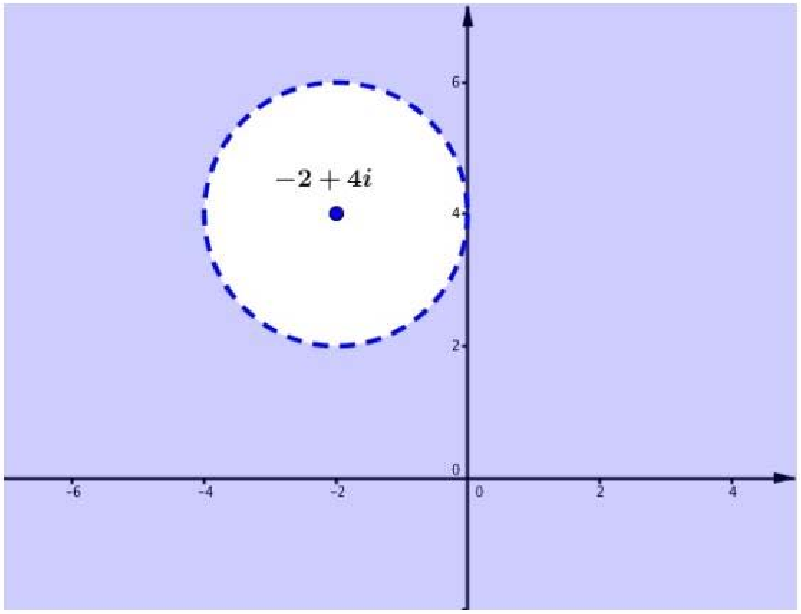
(a)



(b)



(c)



مساله 9

مطلوب است تمام جوابهای مختلط معادله های زیر.

(a) $\bar{z}=z;$

(b) $\bar{z}+z=0;$

(c) $\bar{z}=\frac{9}{z}.$

پاسخ

(a)

فرض می کنیم $z=z+iy$ باشد ، پس

$$\begin{aligned}\bar{z} &= z\\ \overline{x+iy} &= x+iy\\ x-iy &= x+iy\\ -iy &= iy\\ y &= 0\end{aligned}$$

پس $\overline{z}=z$ است فقط و فقط اگر $Im\, z=0$ باشد.

(b)

فرض می کنیم $z=z+iy$ باشد

$$\begin{aligned}\bar{z}+z &= 0\\ \overline{x+iy}+z+iy &= 0\\ x-iy+x+iy &= 0\\ 2x &= 0\\ x &= 0\end{aligned}$$

پس $\bar{z}+z=0$ است فقط و فقط اگر $Re\ z=0$ باشد.

(c)

در این قسمت داریم.

$$\bar{z}=\frac{9}{z} \iff \bar{z}z=9 \iff |z|^2=9 \iff |z|=3.$$

پس $\bar{z}=\frac{9}{z}$ است فقط و فقط اگر $|z|=3$ باشد.

مساله 10

نشان دهید

$$|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$$

است ، برای تمام $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ ها

پاسخ

$$\begin{aligned}&|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2\\ &=(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}+(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}\\ &=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)+(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\ &=((z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)-(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1))+((z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)+(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1))\\ &=2(z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)=2(|z_1|^2+|z_2|^2).\end{aligned}$$

مساله 11

نشان دهید

$$\sqrt{2}|z|\geq|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|.$$

پاسخ

می دانیم که

$$0\leq(|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|)^2=|\mathrm{Re}\,z|^2-2|\mathrm{Re}\,z||\mathrm{Im}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|^2.$$

پس

$$2|\mathrm{Re}\, z||\mathrm{Im}\, z| \leq |\mathrm{Re}\, z|^2 + |\mathrm{Im}\, z|^2,$$

و سپس داریم.

$$|\mathrm{Re}\, z|^2 + 2|\mathrm{Re}\, z||\mathrm{Im}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|^2 \leq 2(|\mathrm{Re}\, z|^2 + |\mathrm{Im}\, z|^2).$$

یعنی

$$(|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z|)^2 \leq 2(|\mathrm{Re}\, z|^2 + |\mathrm{Im}\, z|^2) = 2|z|^2,$$

لذا

$$|\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| \leq \sqrt{2}|z|.$$

مساله 12

منحنی های زیر را مشخص کنید که در کجائ صفحه مختلط قرار دارند.

(a) $\mathrm{Im}(z) = -1;$
(b) $|z-1| = |z+i|;$
(c) $2|z| = |z-2|.$

پاسخ

(a) $\{\mathrm{Im}(z) = -1\} = \{y = -1\}$

پس این یک خط افقی است که از نقطه $-i$ می گذرد.

(b)

چون

$$\begin{aligned}|z-1| = |z+i| &\Leftrightarrow |(x-1)+yi| = |x+(y+1)i| \\ &\Leftrightarrow |(x-1)+yi|^2 = |x+(y+1)i|^2 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y+1)^2 \\ &\Leftrightarrow x + y = 0,\end{aligned}$$

پس این منحنی ، خط $x + y = 0$ است.

(c)

چون

$$\begin{aligned}2|z| = |z-2| &\Leftrightarrow 2|x+yi| = |(x-2)+yi| \\ &\Leftrightarrow 4|x+yi|^2 = |(x-2)+yi|^2 \\ &\Leftrightarrow 4(x^2+y^2) = (x-2)^2 + y^2\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3x^2+4x+3y^2=4$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{2}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}$$
$$\Leftrightarrow \left|z+\frac{2}{3}\right|=\frac{4}{3}$$

پس این منحنی ، یک دائره است با مرکز $-\frac{2}{3}$ و شعاع $\frac{4}{3}$

مساله 13

نشان دهید

$$\frac{R^4-R}{R^2+R+1}\le\left|\frac{z^4+iz}{z^2+z+1}\right|\le\frac{R^4+R}{(R-1)^2}$$

است برای تمام z ها بطوری که $|z|=R>1$ باشد.

پاسخ

وقتی که $|z|=R>1$ است ، داریم.

$$|z^4+iz|\ge|z^4|-|iz|=|z|^4-|i||z|=R^4-R$$

و

$$|z^2+z+1|\le|z^2|+|z|+|1|=|z|^2+|z|+1=R^2+R+1$$

بر اساس نا معادله مثلث. پس

$$\left|\frac{z^4+iz}{z^2+z+1}\right|\ge\frac{R^4-R}{R^2+R+1}.$$

از طرف دیگر

$$|z^4+iz|\le|z^4|+|iz|=|z|^4+|i||z|=R^4+R$$

و

$$|z^2+z+1|=\left|\left(z-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)\right|$$
$$=\left|z-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right|\left|z-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right|$$

$$\geq \left(|z| - \left|\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right|\right)\left(|z| - \left|\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right|\right)$$
$$= (R-1)(R-1) = (R-1)^2$$

لذا

$$\left|\frac{z^4+iz}{z^2+z+1}\right| \leq \frac{R^4+R}{(R-1)^2}.$$

مساله 14

نشان دهید

$$|\mathrm{Log}(z)| \leq |\ln|z|| + \pi$$

است ، برای تمام $z \neq 0$ ها.

پاسخ

چون

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z) \text{ for } -\pi < \mathrm{Arg}(z) \leq \pi,$$

پس

$$|\mathrm{Log}(z)| = |\ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)| \leq |\ln|z|| + |i\,\mathrm{Arg}(z)| \leq |\ln|z|| + \pi.$$

مساله 15

عبارت های زیر را به صورت $x+iy$ بنویسید. $x, y \in \mathbb{R}$

(a) $\dfrac{i}{1-i} + \dfrac{1-i}{i};$

(b) تمام ریشه های سومِ $-8i$

(c) $\left(\dfrac{i+1}{\sqrt{2}}\right)^{1337}$

پاسخ

(a)

$$\begin{aligned}\frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i} &= \frac{i^2+(1-i)^2}{(1-i)i} \\ &= \frac{-1-2i}{1-i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-1+i-2i-2}{2} \\
&= \frac{-3-i}{2} = -\frac{3}{2} - \frac{i}{2}
\end{aligned}
$$

(b)

داریم.

$$-8i = 2^3\, e^{\left(\frac{-i\pi}{2}\right)}$$

پس ریشه ها سوم به صورت زیر هستند.

$$2\, e^{\left(\frac{-i\pi}{6}\right)} \quad , \quad 2e^{\left(\frac{i\pi}{2}\right)} \quad , \quad 2e^{\left(\frac{7i\pi}{6}\right)}$$

یعنی

$$\sqrt{3}-i, \quad 2, \quad -\sqrt{3}-i$$

(c)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}\right)^{1337} &= \left(\exp\frac{i\pi}{4}\right)^{1337} \\
&= \exp\frac{1337\pi i}{4} \\
&= \exp\left(167\cdot 2\pi i + \frac{\pi}{4}i\right) \\
&= \exp\frac{\pi}{4}i = \frac{1+i}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

مساله 16

مطلوب است شناسه اصلی و شکل نمایی عبارت های زیر.

(a) $z = \dfrac{i}{1+i}$;

(b) $z = \sqrt{3}+i$;

(c) $z = 2-i$.

پاسخ

$$(a)\ \ \arg(z)=\frac{\pi}{4}\quad \text{و}\quad z=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{\left(\frac{\pi i}{4}\right)}$$
$$(b)\ \ \arg(z)=\frac{\pi}{6}\quad \text{و}\quad z=2\,e^{\left(\frac{\pi i}{6}\right)}$$
$$(c)\ \ \arg(z)=-\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\quad \text{و}\quad z=\sqrt{5}\,e^{\left(-\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)i\right)}$$

مساله 17

مطلوب است تمام ریشه های مختلط معادله های زیر.

$$\text{(a)}\ \ z^6=-9;$$
$$\text{(b)}\ \ z^2+2z+(1-i)=0.$$

پاسخ

(a)

ریشه ها به صورت زیر هستند.

$$z=\sqrt[6]{-9}=\sqrt[6]{9e^{\pi i}}=\sqrt[3]{3}e^{\pi i/6}e^{2m\pi i/6}\ (m=0,1,2,3,4,5)$$
$$=\frac{3^{5/6}}{2}+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}i,\sqrt[3]{3}i,-\frac{3^{5/6}}{2}+\frac{\sqrt[3]{3}}{2}i,-\frac{3^{5/6}}{2}-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}i,-\sqrt[3]{3}i,\frac{3^{5/6}}{2}-\frac{\sqrt[3]{3}}{2}i.$$

(b)

ریشه ها به صورت زیر هستند.

$$z=\frac{-2+\sqrt{4-4(1-i)}}{2}=-1+\sqrt{i}$$
$$=-1+\sqrt{e^{\pi i/2}}=-1+e^{\pi i/4}e^{2m\pi i/2}\ (m=0,1)$$
$$=\left(-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}i,\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

مساله 18

مطلوب است چهار ریشه های z^4+16 سپس ، این چند جمله ای را به صورت دو چند جمله ای مرتبه دوم با ضریب های حقیقی بنویسید.

پاسخ

چهار ریشه های دو جمله ای داده شده برای $m=0,1,2,3$ به صورت زیر هستند.

$$\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16e^{\pi i}} = \sqrt[4]{16}e^{\pi i/4}e^{2m\pi i/4}$$
$$= 2e^{\pi i/4}, 2e^{3\pi i/4}, 2e^{5\pi i/4}, 2e^{7\pi i/4}$$

ملاحظه می شود که این ریشه ها به صورت دو مزدوج هستند. یعنی

$$2e^{\pi i/4} = \overline{2e^{7\pi i/4}} \;\; 2e^{3\pi i/4} = \overline{2e^{5\pi i/4}}.$$

این کمک می کند که عبارت داده شده را به صورت دو چند جمله ای مرتبه دوم فاکتور بگیریم.

$$\begin{aligned}
z^4+16 &= (z-2e^{\pi i/4})(z-2e^{3\pi i/4})(z-2e^{5\pi i/4})(z-2e^{7\pi i/4}) \\
&= \left((z-2e^{\pi i/4})(z-2e^{7\pi i/4})\right)\left((z-2e^{3\pi i/4})(z-2e^{5\pi i/4})\right) \\
&= (z^2-2\,\mathrm{Re}(2e^{\pi i/4})z+4)(z^2-2\,\mathrm{Re}(2e^{3\pi i/4})z+4) \\
&= (z^2-2\sqrt{2}z+4)(z^2+2\sqrt{2}z+4)
\end{aligned}$$

بخش 5.2
تابع های مختلط

مساله 1
تابع های زیر را به صورت $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ در صفحه مختصات کارتزین بنیویسید با $u(x,y) = Re\big(f(z)\big)$ و $v(x,y) = Im\big(f(z)\big)$

(a) $f(z) = z^3 + z + 1$
(b) $f(z) = z^3 - z;$
(c) $f(z) = \dfrac{1}{i - z};$
(d) $f(z) = \overline{\exp(z^2)}.$

پاسخ

(a)

$$\begin{aligned} f(z) &= (x+iy)^3 + (x+iy) + 1 \\ &= (x+iy)(x^2 - y^2 + 2ixy) + x + iy + 1 \\ &= x^3 - xy^2 + 2ix^2y + ix^2y - iy^3 - 2xy^2 + x + iy + 1 \\ &= x^3 - 3xy^2 + x + 1 + i(3x^2y - y^3 + y). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} f(z) = z^3 - z &= (x+yi)^3 - (x+yi) \\ &= (x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i) - (x+yi) \\ &= (x^3 - 3xy^2 - x) + i(3x^2y - y^3 - y), \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{i-z} &= \frac{1}{-x + (1-y)i} \\ &= \frac{-x - (1-y)i}{x^2 + (1-y)^2} \\ &= -\frac{x}{x^2 + (1-y)^2} - i\frac{1-y}{x^2 + (1-y)^2} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} f(z) &= \overline{\exp(z^2)} = \overline{\exp((x+yi)^2)} \\ &= \overline{\exp((x^2-y^2)+2xyi)} \\ &= \overline{e^{x^2-y^2}(\cos(2xy)+i\sin(2xy))} \\ &= e^{x^2-y^2}\cos(2xy) - ie^{x^2-y^2}\sin(2xy) \end{aligned}$$

فراموش نکنید که مکرر گفته ایم $\exp(z) = e^z$ است.

مساله 2

فرض کنید داشته باشیم

$$f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$$

اینجا $z = x + iy$ است. دو عبارت های زیر را بکار برید

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

و $f(z)$ بر حسب z بنویسید و سپس نتیجه را ساده کنید.

پاسخ

داریم.

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy) \\ &= x^2 - y^2 + i2x - i2xy - 2y \\ &= (x-iy)^2 + i(2x+2iy) \\ &= \bar{z}^2 + 2iz. \end{aligned}$$

مساله 3

فرض کنید $p(z)$ یک چند جمله ای باشد ، با ضریب های حقیقی. ثابت کنید

$$\overline{p(z)} = p(\bar{z})$$

است.

پاسخ

فرض می کنیم

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

باشد و

$$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$$

پس داریم.

$$\begin{aligned}\overline{p(z)} &= \overline{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n} \\ &= \overline{a_0} + \overline{a_1 z} + \cdots + \overline{a_n z^n} \\ &= \overline{a_0} + (\overline{a_1})\overline{z} + \cdots + (\overline{a_n})\overline{z^n} \\ &= a_0 + a_1 \overline{z} + \cdots + a_n \overline{z}^n = p(\overline{z}).\end{aligned}$$

اگر $p(z)=0$ باشد ، پس $\overline{p(z)}=0$ است و لذا $p(\overline{z})=\overline{p(0)}=0$ است. از طرف دیگر اگر $p(\overline{z})=0$ باشد ، پس $\overline{p(z)}=p(\overline{z})=0$ است و لذا $p(z)=0$ است.

بر اساس آنچه در بالا گفتیم $p(z_0)=0$ است فقط و فقط اگر $p(\overline{z}_0)=0$ باشد ، لذا z_0 یک ریشه $p(z)=0$ است فقط و فقط اگر $\overline{z}_0=0$ باشد.

مساله 4

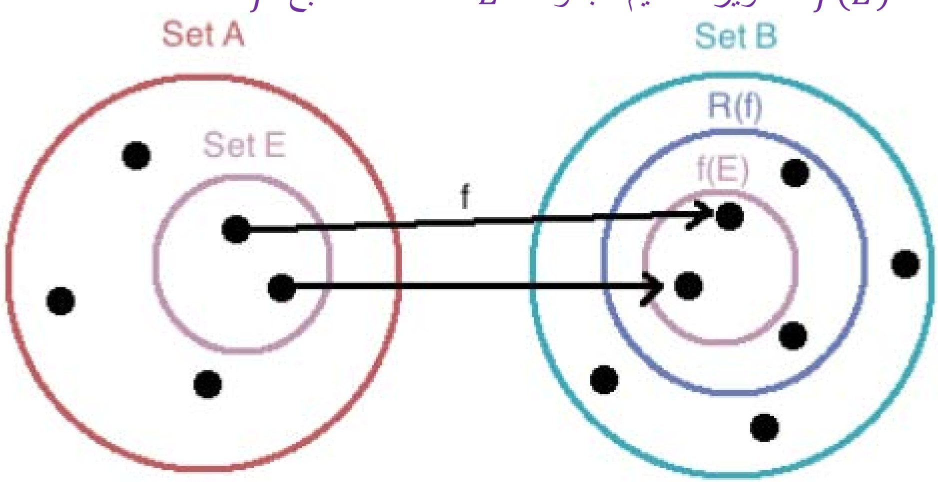
فرض کنید

$$T(z)=\frac{z}{z+1}.$$

مطلوب است تصویر معکوس دیسک $|z|<\frac{1}{2}$ تحت تابع T

توضیح

می گوییم مجموعه $f(E)$ تصویر مستقیم مجموعه E است تحت تابع f



پاسخ

فرض می کنیم $D=\left\{|z|<\frac{1}{2}\right\}$ باشد. تصویر معکوس D تحت T به صورت زیر است.

$$T^{-1}(D)=\{z\in\mathbb{C}:T(z)\in D\}=\{|T(z)|<\frac{1}{2}\}$$

$$=\left\{z:\left|\frac{z}{z+1}\right|<\frac{1}{2}\right\}=\{2|z|<|z+1|\}.$$

فرض می کنیم $z = x + yi$ باشد. پس

$$\begin{aligned} 2|z| < |z+1| &\Leftrightarrow 4(x^2+y^2) < (x+1)^2+y^2 \\ &\Leftrightarrow 3x^2-2x+3y^2 < 1 \\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{3}\right)^2+y^2 < \frac{4}{9} \\ &\Leftrightarrow \left|z-\frac{1}{3}\right| < \frac{2}{3} \end{aligned}$$

پس

$$T^{-1}(D) = \left\{z : \left|z-\frac{1}{3}\right| < \frac{2}{3}\right\}$$

دیسک است که مرکز آن در $\frac{1}{3}$ و شعاع آن $\frac{2}{3}$ است.

مساله 5

نشان دهید برای تمام اعداد مختلط $z = x + yi$ داریم.

$$|\sin z|^2 = (\sin x)^2 + (\sinh y)^2$$

پاسخ

$$\begin{aligned} |\sin(z)|^2 = |\sin(x+yi)|^2 &= |\sin(x)\cos(yi)+\cos(x)\sin(yi)|^2 \\ &= |\sin(x)\cosh(y) - i\cos(x)\sinh(y)|^2 \\ &= \sin^2 x\cosh^2 y + \cos^2 x\sinh^2 y \\ &= \sin^2 x(1+\sinh^2 y) + \cos^2 x\sinh^2 y \\ &= \sin^2 x + (\cos^2 x + \sin^2 x)\sinh^2 y = (\sin x)^2 + (\sinh y)^2. \end{aligned}$$

مساله 6

نشان دهید برای تمام $z \in \mathbb{C}$ ها ، داریم.

$$|\cos(z)|^2 = (\cos x)^2 + (\sinh y)^2$$

پاسخ

$$|\cos(z)|^2 = |\cos(x+yi)|^2 = |\cos(x)\cos(yi) - \sin(x)\sin(yi)|^2$$

$$= |\cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)|^2$$
$$= \cos^2 x\cosh^2 y + \sin^2 x\sinh^2 y$$
$$= \cos^2 x(1+\sinh^2 y) + \sin^2 x\sinh^2 y$$
$$= \cos^2 x + (\cos^2 x + \sin^2 x)\sinh^2 y = (\cos x)^2 + (\sinh y)^2$$

مساله 7

مطلوب است تمام ریشه های مختلط معادله $\cos z = 3$

پاسخ

چون $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ است ، پس باید معادله $e^{iz} + e^{-iz} = 6$ حل کنیم. یعنی

$$w + w^{-1} = 6 \Leftrightarrow w^2 - 6w + 1 = 0$$

اگر فرض کنیم $w = e^{iz}$ باشد .

ریشه های $w^2 - 6w + 1 = 0$ می شود $w = 3 \pm 2\sqrt{2}$ ، لذا جواب های $\cos z = 3$ به صورت زیر هستند.

$$iz = \log(3\pm 2\sqrt{2}) \Leftrightarrow z = -i(\ln(3\pm 2\sqrt{2}) + 2n\pi i) = 2n\pi - i\ln(3\pm 2\sqrt{2})$$

اینجا n اعداد صحیح است.

مساله 8

تابع زیر را محاسبه کنید

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+i\right).$$

پاسخ

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+i\right) = \frac{1}{2i}(e^{i(\pi/4+i)} - e^{-i(\pi/4+i)})$$
$$= \frac{1}{2i}(e^{-1}e^{\pi i/4} - ee^{-\pi i/4})$$
$$= \frac{1}{2i}\left(e^{-1}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) - e(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4})\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(e+\frac{1}{e}\right) + \frac{\sqrt{2}}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)i$$

مساله 9

تابع زیر را محاسبه کنید

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+i\right).$$

پاسخ

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{3}+i\right) &= \frac{1}{2}(e^{i(\pi/3+i)}+e^{-i(\pi/3+i)})\\ &= \frac{1}{2}(e^{-1}e^{\pi i/3}+ee^{-\pi i/3})\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-1}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})+e(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e+\frac{1}{e}\right)-\frac{\sqrt{3}i}{4}\left(e-\frac{1}{e}\right)\end{aligned}$$

مساله 10

مطلوب است i^i و مقدار اساسی آن.

پاسخ

$$i^i = e^{i\log i} = e^{i(2n\pi i+\pi i/2)} = e^{-2n\pi-\pi/2}$$

و برای عدد صحیح n مقدار اساسی مطابق زیر است.

$$i^i = e^{i\operatorname{Log} i} = e^{i(\pi i/2)} = e^{-\pi/2}.$$

مساله 11

فرض کنید $f(z)$ شاخه اساسی $\sqrt[3]{z}$ باشد ، مطلوب است

(a) Find $f(-i)$.

(b)

نشان دهید

$$f(z_1)f(z_2) = \lambda f(z_1z_2)$$

است برای تمام $z_1, z_2 \neq 0$ ها ، اینجا

$$\lambda = 1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \quad \text{یا} \quad . \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}.$$

است.

پاسخ

(a)

$$f(-i)=\exp(\frac{1}{3}\operatorname{Log}(-i))=\exp(\frac{1}{3}(-\frac{\pi i}{2}))=\exp(-\frac{\pi i}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$$

(b)

چون داریم.

$$\begin{aligned}\frac{f(z_1)f(z_2)}{f(z_1z_2)}&=\exp(\frac{1}{3}\operatorname{Log}z_1+\frac{1}{3}\operatorname{Log}z_2-\frac{1}{3}\operatorname{Log}(z_1z_2))\\&=\exp(\frac{1}{3}(\operatorname{Log}z_1+\operatorname{Log}z_2-\operatorname{Log}(z_1z_2)))\\&=\exp(\frac{i}{3}(\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2-\operatorname{Arg}(z_1z_2)))=\exp(\frac{2n\pi i}{3})\end{aligned}$$

برای عدد صحیح n و $\lambda = e^{\frac{2n\pi i}{3}}$

لذا

$$\lambda=\begin{cases}1 & \text{if } n=3k\\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} & \text{if } n=3k+1\\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} & \text{if } n=3k+2\end{cases}$$

اینجا k عدد صحیح است.

مساله 12

فرض کنید $f(z)$ شاخه اساسی z^{-i} باشد ، مطلوب است $f(i)$ ۰

پاسخ

$$f(i)=i^{-i}=\exp(-i\operatorname{Log}(i))=\exp(-i(\pi i/2))=e^{\pi/2}.$$

مساله 13

برای $z\in\mathbb{C}$ نشان دهید

(a) $\sin\bar{z}=\overline{\sin z}$;

(b) $\cosh\bar{z}=\overline{\cosh z}$.

پاسخ

(a)

با استفاده از تعریف $\sin z$ داریم.

$$\sin\bar{z} = \frac{e^{i\bar{z}} - e^{-i\bar{z}}}{2i} = \frac{e^{\overline{-iz}} - e^{\overline{iz}}}{\overline{-2i}} = \overline{\left(\frac{e^{-iz} - e^{iz}}{-2i}\right)} = \overline{\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)}$$
$$= \overline{\sin z}$$

(b)

برای $z = x + iy$ داریم.

$$e^{\bar{z}} = e^{x-iy} = e^x e^{-iy} = \overline{e^x e^{iy}} = \overline{e^z}.$$

پس

$$\cosh\bar{z} = \frac{e^{\bar{z}} - e^{-\bar{z}}}{2} = \overline{\left(\frac{e^z - e^{-z}}{2}\right)} = \overline{\cosh z}$$

مساله 14

مطلوب است تمام جوابهای $c \in \mathbb{C}$ معادله های زیر.

$$\text{(a)} \quad \log z = 4i;$$
$$\text{(b)} \quad z^i = i.$$

پاسخ

(a)

می دانیم $e^{\log z} = z$ است. پس.

$$z = \exp(\log z) = \exp(4i) = \cos 4 + i \sin 4$$

اگر $z = e^{4i}$ باشد ، پس

$$\log(\exp(4i)) = 4i + 2n\pi i \qquad (n \in \mathbb{Z})$$

برای $n = 0$ داریم

$$\log\left(e^{4i}\right) = 4i$$

(b)

می دانیم $z^i = e^{i\log z}$ پس $e^{i\log z} = i$ است.

چون $i = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}$ است ، پس داریم.

$$\exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right) = \exp\left[i(\ln|z| + i\arg(z))\right]$$
$$= \exp\left[-\arg(z) + i\ln|z|\right]$$

$$= \exp[-\arg(z)] \cdot \exp[i \ln|z|]$$

پس

$$\arg(z) = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

و

$$\ln|z| = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

پس

$$z = \exp\left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right] \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

مساله 15

نشان دهید

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

پاسخ

اگر

$$w = \tanh^{-1} z,$$

باشد ، پس

$$z = \tanh w = \frac{\sinh w}{\cosh w} = \frac{e^w - e^{-w}}{e^w + e^{-w}} = \frac{e^{2w}-1}{e^{2w}+1}$$

پس

$$\begin{aligned} z(e^{2w}+1) &= e^{2w}-1 \\ e^{2w} &= \frac{z+1}{1-z} \\ 2w\log e &= \log\left(\frac{z+1}{1-z}\right) \\ w &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{z+1}{1-z}\right) \end{aligned}$$

لذا

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{z+1}{1-z}\right).$$

مساله 16

مطلوب است تمام جوابهای معادله $\tanh z = i$ و سپس آنها را به صورت $x + iy$ بنویسید.

پاسخ

با استفاده از معکوس تابع هیپر بالیک داریم.

$$z = \tanh^{-1} z = \tanh^{-1}(i).$$

حالا با استفاده از مساله 15 که گفتیم

$$\tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right).$$

پس داریم.

$$\begin{aligned}\tanh^{-1}(i) &= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+i}{1-i}\right)\\ &= \frac{1}{2}\log(i)\end{aligned}$$

با استفاده از تعریف $\log i$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$ داریم.

$$\log(i) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

لذا

$$z = \tanh^{-1}(i) = \frac{1}{2}\left[i\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)\right] = i\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)$$

برای

$$n \in \mathbb{Z}.$$

مسائل حد ، پیوستگی و مشتق

مساله 17

حد های زیر را ، اگر وجود داشته باشند ، محاسبه کنید.

$$\text{(a)}\ \lim_{z \to -i} \frac{iz^3 + 1}{z^2 + 1};$$

$$\text{(b)}\ \lim_{z \to \infty} \frac{4 + z^2}{(z-1)^2}.$$

$$\text{(c)}\ \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{Im}(z)}{z}.$$

پاسخ

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -i}\frac{iz^3+1}{z^2+1} &= \lim_{z\to -i}\frac{i(z^3+i^3)}{z^2+1}\\ &= \lim_{z\to -i}\frac{i(z+i)(z^2-iz+i^2)}{(z+i)(z-i)}\\ &= \lim_{z\to -i}\frac{i(z^2-iz+i^2)}{z-i}\\ &= i\frac{\lim_{z\to -i}(z^2-iz+i^2)}{\lim_{z\to -i}(z-i)}\\ &= i\frac{\lim_{z\to -i}z^2-i\lim_{z\to -i}z+\lim_{z\to -i}i^2}{\lim_{z\to -i}z-\lim_{z\to -i}i}\\ &= \frac{i((-i)^2-i(-i)+i^2)}{-i-i}=\frac{3}{2}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\infty}\frac{4+z^2}{(z-1)^2} &= \lim_{z\to 0}\frac{4+z^{-2}}{(z^{-1}-1)^2}\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{4z^2+1}{(1-z)^2}=\frac{\lim_{z\to 0}(4z^2+1)}{\lim_{z\to 0}(1-z)^2}\\ &= \frac{4(\lim_{z\to 0}z)^2+\lim_{z\to 0}1}{(\lim_{z\to 0}1-\lim_{z\to 0}z)^2}=1\end{aligned}$$

(c)

چون

$$\lim_{\mathrm{Re}(z)=0,z\to 0}\frac{\mathrm{Im}(z)}{z}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{yi}=-i$$

و

$$\lim_{\operatorname{Im}(z)=0, z\to 0} \frac{\operatorname{Im}(z)}{z} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

است ، پس حد وجود ندارد.

مساله 18
نشان دهید

(a) $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{4z^5}{z^5-42z} = 4;$
(b) $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{z^4}{z^2+42z} = \infty;$
(c) $\displaystyle\lim_{z\to\infty} \frac{(az+b)^3}{(cz+d)^3} = \frac{a^3}{c^3}, c \neq 0.$

پاسخ

(a)

$$\lim_{z\to\infty} \frac{4z^5}{z^5-42z} = \lim_{z\to 0} \frac{4\left(\frac{1}{z}\right)^5}{\left(\frac{1}{z}\right)^5 - 42\left(\frac{1}{z}\right)} = \lim_{z\to 0} \frac{4}{1-42z^4} = 4.$$

(b)

می دانیم که

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\infty} \frac{z^4}{z^2+42z} \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{z\to 0} \left[\frac{1/z^4}{1/z^2+42/z}\right]^{-1} \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{z\to 0} \left[\frac{1}{z^2+42z^3}\right]^{-1} \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{z\to 0} \left(z^2+42z^3\right) = 0. \end{aligned}$$

پس

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z^4}{z^2+42z} = \infty$$

(c)

$$\lim_{z\to\infty}\frac{(az+b)^3}{(cz+d)^3}=\lim_{z\to 0}\frac{(a/z+b)^3}{(c/z+d)^3}=\lim_{z\to 0}\frac{(a+bz)^3}{(c+dz)^3}=\frac{a^3}{c^3}.$$

مساله 19

مطلوب است $f'(z)$ هنگامی که داشته باشیم.

(a) $f(z)=z^2-4z+2;$
(b) $f(z)=(1-z^2)^4;$
(c) $f(z)=\dfrac{z+1}{2z+1}\ (z\neq -\dfrac{1}{2});$
(d) $f(z)=e^{1/z}\ (z\neq 0).$

پاسخ

(a) $2z-4$; (b) $-8(1-z^2)^3z$; (c) $-1/(2z+1)^2$; (d) $-e^{1/z}/z^2$.

مساله 20

نشان دهید اگر $f(z)$ معادله های کاشی ریمان را در z_0 بر قرار کند ، پس $\left(f(z)\right)^n$ هم برای هر عدد صحیح مثبت n هم بر قرار می کند.

پاسخ

چون $f(z)$ در z_0 معادله های کاشی ریمان را بر قرار می کند

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)f(z)=0$$

پس در z_0

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(f(z))^n&=\frac{\partial}{\partial x}(f(z))^n+i\frac{\partial}{\partial y}(f(z))^n\\&=(f(z))^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}f(z)+i(f(z))^{n-1}\frac{\partial}{\partial y}f(z)\\&=(f(z))^{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)f(z)=0\end{aligned}$$

تابع های تحلیلی

مساله 21

توضیح دهید چرا $f(z)=2z^2-3-ze^z+e^{-z}$ کامل یا تام Entire است.

پاسخ
چون هر چند جمله ای کامل است پس $2z^2-3$ هم کامل است. چون هم $-z$ و هم e^z کامل هستند پس حاصلضرب آنها یعنی $-ze^z$ هم کامل است. چون e^z و $-z$ کامل هستند ، پس ترکیب آنها e^{-z} هم کامل است. و در نهایت $2z^2-3-ze^z$ و e^{-z} هم کامل هستند.

مساله 22
نشان دهید $\sin(\overline{z})$ هیچ جا در $\mathbb{C}$ تحلیلی نیست.
پاسخ
چون داریم.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)\sin(\overline{z})=\frac{\partial}{\partial x}\sin(\overline{z})+i\frac{\partial}{\partial y}\sin(\overline{z})$$
$$=\cos(\overline{z})\frac{\partial\overline{z}}{\partial x}+i\cos(\overline{z})\frac{\partial\overline{z}}{\partial y}$$
$$=\cos(\overline{z})+i\cos(\overline{z})(-i)=2\cos(\overline{z})$$

چون $\sin(\overline{z})$ مشتق پذیر نیست و لذا در تمام نقاط z تحلیلی نیست

مسلله 23
نشان دهید

$$|\exp(z^3+i)+\exp(-iz^2)|\leq e^{x^3-3xy^2}+e^{2xy}$$

اینجا $y=Im\ (z)$ و $x=Re\ (z)$ است.
پاسخ
چون داریم

$$|e^z|=e^{\mathrm{Re}(z)}.$$

پس

$$\begin{aligned}|\exp(z^3+i)+\exp(-iz^2)|&\leq|\exp(z^3+i)|+|\exp(-iz^2)|\\&=\exp(\mathrm{Re}(z^3+i))+\exp(\mathrm{Re}(-iz^2))\\&=\exp(\mathrm{Re}((x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3+1)i))\\&\quad+\exp(\mathrm{Re}(2xy-(x^2-y^2)i))\\&=e^{x^3-3xy^2}+e^{2xy}.\end{aligned}$$

تابع های هامونیک

مساله 24

نشان دهید تابع های u هارمونیک هستند و مزدوج تابع هارمونیک را پیدا کنید.

$$\text{(a)} \quad u(x,y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2,$$
$$\text{(b)} \quad y(x,y) = \ln(x^2 + y^2).$$

پاسخ

(a)

اگر

$$u(x,y) = 3x^2y + 2x^2 - y^3 - 2y^2$$

باشد ، پس

$$\begin{aligned} u_x &= 6xy + 4x, \qquad & u_y &= 3x^2 - 3x^2 - 4y \\ u_{xx} &= 6y + 4, & u_{yy} &= -6y - 4 \end{aligned}$$

پس

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 6y + 4 + (-6y - 4) = 0.$$

لذا u هارمونیک است.

مزدوج هارمونیک u معادله های کاشی ریمان را بر قرار می کند و مشتق های پاره ای تمام مرتبه ها را دارد. بر اساس معادله های کاشی رینان

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y,$$

داریم $v_y = 6xy + 4x$ پس

$$v = \int (6xy + 4x)dy = 3xy^2 + 4xy + g(x).$$

پس

$$v_x = 3y^2 + 4y + g'(x)$$

چون $v_x = -u_y$ است

$$\begin{aligned} 3y^2 + 4y + g'(x) &= -3x^2 + 3y^2 + 4y \\ g'(x) &= -3x^2 \\ g(x) &= -x^3 \end{aligned}$$

لذا مزدوج هار مونیک می شود.

$$v(x,y) = 3xy^2 + 4xy - x^3.$$

(b)

اگر

$$u(x,y) = \ln(x^2 - y^2)$$

باشد ، پس

$$u_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, \qquad u_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$$
$$u_{xx} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \qquad u_{yy} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

پس

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{2(y^2-x^2)}{x^2+y^2} + \frac{2(x^2-y^2)}{x^2+y^2}x^2 + y^2 = 0.$$

پس u هارمونیک است.

به همان طریق قسمت اول ، بر اساس معادله های کاشی ریمان

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y,$$

داریم.

$$v_y = \frac{2x}{x^2+y^2}.$$

پس

$$v = \int \frac{2x}{x^2+y^2}dy = 2\arctan\frac{y}{x} + g(x)$$

پس داریم.

$$v_x = \frac{-2y}{x^2+y^2} + g'(x)$$

چون $v_x = -u_y$ است.

$$\begin{aligned} \frac{-2y}{x^2+y^2} + g'(x) &= \frac{-2y}{x^2+y^2} \\ g'(x) &= 0 \\ g(x) &= c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

پس مزدوج هارمونیک به صورت زیر است.

$$v(x,y) = 2\arctan\frac{y}{x}$$

توجه داشته باشید که u در

$$\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

تعریف شده است و v در $x=0$ تعریف شده نیست.

انتگرال های مختلط

مساله 25

مطلوب است انتگرال های زیر.

(a) $\int_1^2 \left(t^2+i\right)^2 dt;$

(b) $\int_0^{\pi/4} e^{-2it} dt;$

(c) $\int_0^{\infty} te^{zt} dt$ when $\mathrm{Re}(z)<0.$

پاسخ

(a)

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(t^2+i\right)^2 dt &= \int_1^2 (t^4+2it^2+i^2)dt \\ &= \frac{t^5}{5}+\frac{2it^3}{3}-t\bigg|_1^2 = \frac{26}{5}+\frac{14}{3}i\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} e^{-2it} dt &= -\frac{e^{-2it}}{2i}\bigg|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1+i}{2i} = \frac{1}{2}-\frac{i}{2}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} te^{zt} dt &= \frac{1}{z}\int_0^{\infty} td(e^{zt}) \\ &= \frac{1}{z}\left(te^{zt}\big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{zt} dt\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{z}\left(\lim_{t\to\infty} te^{zt} - \frac{1}{z}\left(\lim_{t\to\infty} e^{zt} - 1\right)\right)$$
$$= \frac{1}{z^2}$$

اینجا

$$\lim_{t\to\infty} te^{zt} = \lim_{t\to\infty} e^{zt} = 0$$

است ، بر اساس قانون لاپیتال L'Hospital

$$\lim_{t\to\infty} |te^{zt}| = \lim_{t\to\infty} te^{t\,\mathrm{Re}(z)} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{-xt}} = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{xe^{-xt}} = 0$$

و

$$\lim_{t\to\infty} |e^{zt}| = \lim_{t\to\infty} e^{t\,\mathrm{Re}(z)} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{-xt}} = 0$$

چون $x = Re(z) < 0$

مساله 26

مطلوب است انتگرال منحنی تراز

$$\int_\gamma \bar{z}dz$$

برای

(a)

اگر γ مثلث ABC باشد ، در جهت مخالف عقربه ساعت ، اینجا
$A = 0\,, B = 1 + i\,, C = -2$

است.

(b)

اگر γ دائره $|z - i| = 2$ باشد ، در جهت مخالف عقربه ساعت.

پاسخ

(a)

$$\int_\gamma \bar{z}dz = \int_{AB} \bar{z}dz + \int_{BC} \bar{z}dz + \int_{CA} \bar{z}dz$$
$$= \int_0^1 \overline{t(1+i)}\,d(t(1+i))$$
$$+ \int_0^1 \overline{(1-t)(1+i)-2t}\,d((1-t)(1+i)-2t)$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^1 \overline{-2(1-t)}d(-2(1-t)) \\
&=\int_0^1 2tdt+\int_0^1 ((2i-4)+10t)dt+\int_0^1 4(t-1)dt \\
&=1+(2i-4)+5-2=2i
\end{aligned}
$$

(b)

$$\int_0^{2\pi} \overline{i+2e^{it}}d(i+2e^{it})=\int_0^{2\pi} 2i(-i+2e^{-it})e^{it}dt=8\pi i.$$

مساله 27

انتگرال منحنی ترا ز زیر را محاسبه کنید.

$$\int_L \bar{z}dz,$$

اینجا L مثلث ABC است با $A=0\ ,B=1\ ,C=i$ خلاف جهت عقربه ساعت.

پاسخ

$$
\begin{aligned}
\int_L \bar{z}dz&=\int_{AB}\bar{z}dz+\int_{BC}\bar{z}dz+\int_{CA}\bar{z}dz \\
&=\int_0^1 \bar{t}dt+\int_0^1 \overline{(1-t)+ti}d((1-t)+ti) \\
&\quad+\int_0^1 \overline{(1-t)i}d((1-t)i) \\
&=\int_0^1 tdt+(-1+i)\int_0^1 ((1-t)-ti)dt-\int_0^1 (1-t)dt=i
\end{aligned}
$$

مساله 28

مطلوب است محاسبه انتگرال منحنی تراز زیر

$$\int_C f(z)dz$$

با استفاده از نمایش پارا متری برای C اینجا

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z}$$

است و منحنی C به حالت های زیر است.

(a)

نیم دائره

$$z = 2e^{i\theta}\ (0 \le \theta \le \pi);$$

(b)

نیم دائره

$$z = 2e^{i\theta}\ (\pi \le \theta \le 2\pi);$$

(c)

دائره

$$z = 2e^{i\theta}\ (0 \le \theta \le 2\pi).$$

پاسخ

(a)

$$\int_C f(z)dz = \int_0^{\pi} \frac{4e^{2i\theta} - 1}{2e^{i\theta}} d(2e^{i\theta}) = (2e^{2i\theta} - i)\big|_0^{\pi} = -\pi i$$

(b)

$$\int_C f(z)dz = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{4e^{2i\theta} - 1}{2e^{i\theta}} d(2e^{i\theta}) = (2e^{2i\theta} - i)\big|_{\pi}^{2\pi} = -\pi i$$

(c)

با جمع کردن (a) و (b) داریم. $-2\pi i$

مساله 29

بدون محاسبه انتگرال ، نشان دهید

$$\left| \int_C \frac{dz}{\bar{z}^2 + \bar{z} + 1} \right| \le \frac{9\pi}{16}$$

اینجا C کمن دائره $|z| = 3$ از $z = 3$ تا $z = 3i$ است که در ربع اول قرار دارد.

پاسخ

چون داریم

$$|\bar{z}^2 + \bar{z} + 1| \ge |\bar{z}^2| - |\bar{z}| - 1 = |z|^2 - |z| - 1 = 5$$

برای $|z| = 3$

$$\left|\frac{1}{\bar{z}^2+\bar{z}+1}\right| \le \frac{1}{5}.$$

لذا

$$\left|\int_C \frac{dz}{\bar{z}^2+\bar{z}+1}\right| \le \frac{6\pi}{4}\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10} < \frac{9\pi}{16}.$$

قضیه انتگرال کاشی و فرمول انتگرال کاشی

مساله 30

انتگرال های زیر را محاسبه کنید. در مورد عملیات خود توضیح دهید. برای (c) و (d) باید بگویید چرا انتگرال خوب تعریف شده است ، یعنی انتگرال نستقدل مسیر است.

(a) $\displaystyle\int_C \frac{2dz}{z^2-1}$,

اینجا C دائره است با شعاع $\frac{1}{2}$ و مرکز 1 در جهت مثبت.

(b) $\displaystyle\int_C \left(e^z+\frac{1}{z}\right) dz$,

اینجا C نیمه پائینی دائره است با شعاع 1 و مرکز 0 در جهت منفی

(c) $\displaystyle\int_C ze^{z^2} dz$;

(d) $\displaystyle\int_C \cosh z dz$.

پاسخ

(a)

داریم.

$$\frac{2}{z^2-1} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}.$$

پس

$$\int_C \frac{2}{z^2-1}dz = \int_C \frac{1}{z-1}dz - \int_C \frac{1}{z+1}dz.$$

از طرف دیگر

$$\int_C \frac{1}{z-1}dz = 2\pi i$$

بر اساس فرمول انتگرال کاشی

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

از طرف دیگر چون $\frac{1}{z+1}$ هم داخل و هم روی C تحلیلی است ، پس

$$\int_C \frac{1}{z+1}dz = 0$$

بر اساس قضیه کاشی ، لذا

$$\int_C \frac{2}{z^2-1}dz = 2\pi i.$$

(b)

ملاحظه می کنیم که $f(z) = \frac{e^z-1}{z}$ روی C تحلیلی است. تابع

$$F(z) = e^z - \operatorname{Log} z$$

به عنوان ضد مشتق $f(z)$ عمل می کند. اینجا $Log\ z$ یک شاخه لگاریتم است که انتخاب شده با شاخه از محور مجازی مثبت. یعنی

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i\theta, \qquad \left(r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}\right).$$

پس

$$\int_C \left(e^z - \frac{1}{z}\right)dz = (e^z - \operatorname{Log} z)\Big|_1^{-1} = \frac{1}{e} - \pi i - e + 2\pi i = \frac{1}{e} - e + \pi i.$$

(c)

چون انتگراند $f(z) = ze^{z^2}$ تحلیلی است ، پس انتگرال نسبت به مسیر ، مستقل است و ضد مشتق

$$F(z) = \frac{e^{z^2}}{2}.$$

است. پس

$$\int_C ze^{z^2}dz = \frac{e^{z^2}}{2}\Big|_0^i = \frac{1}{2e} - \frac{1}{2}.$$

(d)

چون انتگراند $f(z) = \cosh z$ تحلیلی است ، انتگرال نسب به مسیر ، مستقل است. و ضد مشتق $f(z)$ به صورت زیر است.

$$F(z) = \sinh z.$$

پس

$$\int_C \cosh z dz = \sinh z \Big|_{\pi i}^{2\pi i} = \sinh(2\pi i) - \sinh(\pi i) = 0.$$

مساله 31

با استفاده از قضیه انتگرال کاشی ، نشان دهید

$$\int_C f(z) dz = 0$$

است. اینجا C دائره واحد است $|z| = 1$ در هر دو جهت و هنگامی که $f(z)$ به صورت های زیر باشد.

(a) $f(z) = \dfrac{z^3}{z^2+5z+6}$;
(b) $f(z) = e^{\tan z}$;
(c) $f(z) = \mathrm{Log}(z+3i)$.

پاسخ

بر اساس قضیه انتگرال کاشی

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 0$$

است ، اگر $f(z)$ روی و داخل دائره واحد $|z| = 1$ تحلیلی باشد. لذا کافی است نشان دهیم $f(z)$ در $\{|z| \le 1\}$ تحلیلی باشد.

(a)

تابع $f(z)$ در $\{z \ne -2, -3\}$ تحلیلی است و لذا در $\{|z|\} \le 1$ تحلیلی است.

(b)

تابع $f(z)$ در $\{z: \cos z = 0\} = \left\{z = n\pi + \frac{\pi}{2}, n \epsilon \mathbb{Z}\right\}$ تحلیلی است زیرا

$$\left|n\pi + \frac{\pi}{2}\right| > 1$$

است برای تمام اعداد صحیح n ها ، لذا $f(z)$ در $\{|z| \le 1\}$ تحلیلی است.

(c)

تابع $\log(z)$ در $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ تحلیلی است و لذا $\log(z+3i)$ در $\mathbb{C}\backslash\{z: z = x - 3i, x \in (-\infty, 0]$ تحلیلی است. چون $|x - 3i| > 1$ است برای تمام اعداد حقیقی x لذا $f(z)$ در $\{|z| \le 1\}$ تحلیلی است.

مساله 32

فرض کنید C مرز مربعی باشد که اضلاع آن در امتداد خط های $x = \pm 2$ و $y = \pm 2$ در جهت مثبت قرار دارد. انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

(a) $\displaystyle\int_C \frac{zdz}{z+1}$;

(b) $\displaystyle\int_C \frac{\cosh z}{z^2+z}dz$;

(c) $\displaystyle\int_C \frac{\tan(z/2)}{z-\pi/2}dz$.

(a)

بر اساس فرمول انتگرال کاشی داریم.

$$\int_C \frac{zdz}{z+1} = 2\pi i(-1) = -2\pi i.$$

(b)

بر اساس قضیه انتگرال کاشی داریم.

$$\int_C \frac{\cosh z}{z^2+z}dz = \int_{|z|=r} \frac{\cosh z}{z^2+z}dz + \int_{|z+1|=r} \frac{\cosh z}{z^2+z}dz$$

برای $r = \frac{1}{2}$ ، بر اساس فرمول انتگرال کاشی داریم.

$$\int_{|z|=r} \frac{\cosh z}{z^2+z}dz = 2\pi i \left.\frac{\cosh(z)}{z+1}\right|_{z=0} = 2\pi i$$

و

$$\int_{|z+1|=r} \frac{\cosh z}{z^2+z}dz = 2\pi i \left.\frac{\cosh z}{z}\right|_{z=-1} = -2\pi i \cosh(-1).$$

لذا

$$\int_C \frac{\cosh z}{z^2+z}dz = 2\pi i(1-\cosh(-1)).$$

(c)

می دانیم $\tan\frac{z}{2}$ در

$$\{z \neq (2n+1)\pi : n \in \mathbb{Z}\}$$

تحلیلی است. و لذا در C تحلیلی است. پس بر اساس فرمول انتگرال کاشی داریم.

$$\int_C \frac{\tan(z/2)}{z-\pi/2}dz = 2\pi i \tan(\pi/4) = 2\pi i$$

مساله 33

مطلوب است انتگرال $g(z)$ اطراف دائره $|z-i| = 2$ در جهت خلاف عقربه ساعت

(a) $g(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$;

(b) $g(z) = \dfrac{1}{z(z^2+4)}$.

پاسخ

(a)

چون

$$-2i \notin \{|z-i| \leq 2\}$$

و

$$2i \in \{|z-i| \leq 2\},$$

پس بر اساس فرمول انتگرال کاشی ، داریم.

$$\int_{|z-i|=2} g(z)dz = \int_{|z-i|=2} \frac{(z+2i)^{-1}}{z-2i}dz = 2\pi i(2i+2i)^{-1} = \frac{\pi}{2}$$

(b)

بر اساس قضیه انتگرال کاشی برای $r < \frac{1}{2}$ داریم.

$$\int_{|z-i|=2} g(z)dz = \int_{|z|=r} g(z)dz + \int_{|z-2i|=r} g(z)dz$$

چون

$$\int_{|z|=r} g(z)dz = 2\pi i \left.\frac{1}{z^2+4}\right|_{z=0} = \frac{\pi i}{2}$$

و

$$\int_{|z-2i|=r} g(z)dz = 2\pi i \left. \frac{1}{z(z+2i)} \right|_{z=2i} = -\frac{\pi i}{4}$$

بر اساس فرمول انتگرال کاشی

$$\int_{|z-i|=2} g(z)dz = \frac{\pi i}{4}$$

مساله 34

انتگرال های زیر محاسبه کنید اگر منحنی ها

$$C_1 = \{|z| = 1\}$$

و

$$C_2 = \{|z-2| = 1\}$$

باشند و هر دو در جهت خلاف عقربه ساعت.

$$\text{(a)} \quad \frac{1}{2z-z^2};$$

$$\text{(b)} \quad \frac{\sinh z}{(2z-z^2)^2}.$$

پاسخ

(a)

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{2z-z^2} = \int_{|z|=1} \frac{(2-z)^{-1}}{z} dz = 2\pi i (2-0)^{-1} = \pi i$$

(b)

$$\int_{|z|=1} \frac{\sinh z}{(2z-z^2)^2} dz = \int_{|z|=1} \frac{(\sinh z)(2-z)^{-2}}{z^2} dz$$

$$= 2\pi i ((\sinh z)(2-z)^{-2})' \Big|_{z=0} = \frac{\pi i}{2}$$

انتگرال های ناسره

مساله 35

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{x^3+1}.$$

پاسخ
انتگرال تراز

$$z/(z^3+1)$$

در امتدا

$$L_R=[0,R], C_R=\{z= \quad Re^{it}:0\le t\le 2\pi/3\}$$

و

$$M_R=\{te^{2\pi i/3}:0\le t\le R\}.$$

را در نظر بگیرید. بر اساس فرمول انتگرال کاشی

$$\int_{L_R}\frac{zdz}{z^3+1}+\int_{C_R}\frac{zdz}{z^3+1}-\int_{M_R}\frac{zdz}{z^3+1}=\int_{|z-e^{\pi i/3}|=1/2}\frac{zdz}{z^3+1}$$

براساس فرمول انتگرال کاشی

$$\begin{aligned}\int_{|z-e^{\pi i/3}|=1/2}\frac{zdz}{z^3+1}&=\frac{2\pi i\exp(\pi i/3)}{(\exp(\pi i/3)+1)(\exp(\pi i/3)-\exp(-\pi i/3))}\\&=\frac{2\pi\exp(\pi i/3)}{(\exp(\pi i/3)+1)\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

برای z در امتدا C_R

$$\left|\frac{z}{z^3+1}\right|\le\frac{R}{R^3-1}$$

و لذا

$$\left|\int_{C_R}\frac{zdz}{z^3+1}\right|\le\frac{2\pi R}{3(R^3-1)}$$

در نتیجه

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{zdz}{z^3+1}=0$$

و

$$\int_{M_R}\frac{zdz}{z^3+1}=\exp(4\pi i/3)\int_0^R\frac{xdx}{x^3+1}$$

پس ، داریم.

$$\left(1-\exp(4\pi i/3)\right)\int_0^\infty \frac{xdx}{x^3+1}=\frac{2\pi\exp(\pi i/3)}{(\exp(\pi i/3)+1)\sqrt{3}}$$

و در نهایت

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{x^3+1}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

بخش 5.3
سری ها
سری های تیلور و لورنت Taylor and Laurent Series
مساله 1
مطلوب است سری تیلور تابع های زیر و شعاع همگرایی آنها.

(a) $z\sinh(z^2)$ at $z = 0$;

(b) e^z at $z = 2$;

(c) $\dfrac{z^2+z}{(1-z)^2}$ at $z = -1$.

پاسخ
(a)
چون

$$e^z = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!,$$

$$\begin{aligned} z\sinh(z^2) &= z\left(\frac{e^{z^2}-e^{-z^2}}{2}\right) \\ &= \frac{z}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{n!}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{2}\frac{z^{2n+1}}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{4m+3}}{(2m+1)!} \end{aligned}$$

ملاحظه می شود که اگر $n = 2m$ باشد ، یعنی اگر n زوج باشد ، پس

$$\frac{1-(-1)^n}{2} = 0$$

است و اگر $n = 2m + 1$ باشد ، یعنی اگر n فرد باشد ، پس

$$\frac{1-(-1)^n}{2} = 1$$

چون $f(z)$ کامل یا تام است ، پس شعاع همگرایی ∞ است.

(b)

فرض می کنیم $w = z - 2$ باشد ، پس $z = w + 2$ است و

$$e^z = e^{w+2} = e^2 e^w = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2 (z-2)^n}{n!}.$$

چون $f(z)$ تام یا کامل است ، پس شعاع همگرایی ∞ است.

(c)

فرض می کنیم $w = z + 1$ باشد ، پس

$$\frac{z^2+z}{(1-z)^2} = \frac{w^2-w}{(2-w)^2} = 1 - \frac{3}{2-w} + \frac{2}{(2-w)^2}.$$

داریم.

$$-\frac{3}{2-w} = -\frac{3}{2}\frac{1}{1-(w/2)} = -\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{2^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3w^n}{2^{n+1}}$$

و

$$\begin{aligned}\frac{2}{(2-w)^2} &= \left(\frac{2}{2-w}\right)' = \left(\frac{1}{1-(w/2)}\right)' \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{2^n}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nw^{n-1}}{2^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)w^n}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned}\frac{z^2+z}{(1-z)^2} &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3w^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)w^n}{2^{n+1}}. \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)(z+1)^n}{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

چون $f(z)$ در $|z+1|<2$ تحلیلی است و در $z=1$ یک تکین دارد ، پس شعاع همگرایی 2 است.

مساله 2

مطلوب است سری تایلور $(\cos z)^2$ در $z=\pi$

پاسخ

فرض می کنیم $w=z-\pi$ باشد ، پس

$$
\begin{aligned}
(\cos z)^2 &= (\cos(z+\pi))^2 = (\cos w)^2 \\
&= \left(\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{2iw}+e^{-2iw}+2) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2i)^n w^n}{n!} + \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2i)^n w^n}{n!} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2i)^{2n} w^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1} w^{2n}}{(2n)!} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1} w^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1} (z-\pi)^{2n}}{(2n)!}
\end{aligned}
$$

مساله 3

یک بسط سری توانی تابع $f(z)=\frac{1}{3-z}$ اطراف نقطه $4i$ پیدا کنید و شعاع همگرایی را محاسبه کنید.

پاسخ

داریم.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3-z} &= \frac{1}{(3-4iz)-(z-4i)} \\
&= \frac{1}{3-4i}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-4i}{3-4i}} \\
&= \frac{1}{3-4i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-4i}{3-4i}\right)^n
\end{aligned}
$$

برای

$$\left|\frac{z-4i}{3-4i}\right| < 1$$

یعنی برای

$$|z-4i| < |3-4i| < 5$$

پس

$$\frac{1}{3-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-4i)^n}{(3-4i)^{n+1}}$$

با شعاع همگرایی 5

مساله 4

یک بسط سری لورنت تابع $f(Z) = z^{-1}\sinh(z^{-1})$ اطراف نقطه صفر پیدا کنید و تکینگی در صفر را طبقه بندی کنید.

پاسخ

برای $g(z) = \sin z$ می دانیم که

$$g^{(n)}(z) = \begin{cases} \sinh z & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \cosh z & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

پس

$$g^{(n)}(0) = \begin{cases} \sinh(0) = 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \\ \cosh(0) = 1 & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

در این حالت ، سری مک لورن برای $g(z) = \sinh z$ به صورت زیر است.

$$z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$$

سری لورنت برای $g(z^{-1}) = \sinh z^{-1}$ به صورت زیر است.

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} + \cdots$$

پس سری لورنت برای $f(z) = z^{-1}g(z^{-1}) = z^{-1}\sinh z^{-1}$ به صورت زیر است.

$$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!z^4} + \frac{1}{5!z^6} + \cdots$$

توجه کنید که $f(z) = z^{-1}\sinh z^{-1}$ برای $z \neq 0$ تحلیلی است این یعنی $z = 0$ یک تکین تک و تنها است و در حقیقت یک تکین اصلی بنیادی است.

مساله 5
تابع زیر را در نظر بگیرید

$$f(z)=\frac{\sin z}{\cos(z^3)-1}.$$

تکین در $z=0$ را طبقه بندی کنید و مانده را محاسبه کنید.

پاسخ

توجه کنید که f یک تکین تک و تنها در $z=0$ دارد. پس با بسط صورت و مخرج در سری تایلور ، داریم.

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}-\dfrac{z^7}{7!}+\cdots}{-\dfrac{z^6}{2!}+\dfrac{z^{12}}{4!}-\dfrac{z^{18}}{6!}\cdots}\\
&= \frac{z\left(1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-\dfrac{z^6}{7!}+\cdots\right)}{-\dfrac{z^6}{2!}\left(1-\dfrac{2z^6}{4!}+\dfrac{2z^{12}}{6!}-\cdots\right)}\\
&= \frac{-2}{z^5}\cdot\frac{1-\dfrac{z^2}{3!}+\dfrac{z^4}{5!}-\dfrac{z^6}{7!}+\cdots}{1-\dfrac{2z^6}{4!}+\dfrac{2z^{12}}{6!}-\cdots}\\
&= \frac{-2}{z^5}\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots\right)\cdot\frac{1}{1-\dfrac{2z^6}{4!}+\dfrac{2z^{12}}{6!}-\cdots}
\end{aligned}$$

حالا ، فرض می کنیم

$$g(z)=\frac{2}{4!}-\frac{2z^6}{6!}+\frac{2z^{12}}{8!}-\cdots$$

باشد ، پس داریم.

$$f(z) = \frac{-2}{z^5}\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots\right)\cdot\frac{1}{1-z^6g(z)} \tag{4.1}$$

اینجا $g(z)$ در $z=0$ تحلیلی و غیر صفر است. در حقیقت $g(0)=\frac{1}{12}$ است. پس برای یک ε
خیلی کوچک اگر $|z|<\varepsilon$ باشد ، پس $|g(z)|<1$ است. پس برای $|z|<\min\{\varepsilon,1\}$ می توانیم

$$\frac{1}{1-z^6g(z)}$$

را به سری هندسی بسط دهیم. پس

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-2}{z^5}\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots\right)\left(1+z^6g(z)+z^{12}(g(z))^2+\cdots\right) \\ &= \left(\frac{-2}{z^5}+\frac{2}{3!z^3}-\frac{2}{5!z}+\frac{2z}{7!}+\cdots\right)\left(1+z^6g(z)+z^{12}(g(z))^2+\cdots\right) \end{aligned}$$

لذا ، مانده f در $z=0$ می شود

$$\frac{-2}{5!}=\frac{-1}{60}.$$

مساله 6

سری لورنت برای تابع

$$f(z)=\frac{z+4}{z^2(z^2+3z+2)}$$

در

(a) $0<|z|<1$;
(b) $1<|z|<2$;
(c) $|z|>2$;
(d) $0<|z+1|<1$.

پیدا کنید.

پاسخ

تابع $f(z)$ را به صورت جمع کسر های پاره ای می نویسیم.

$$\frac{z+4}{z^2(z^2+3z+2)}=-\frac{5}{2z}+\frac{2}{z^2}+\frac{3}{z+1}-\frac{1}{2(z+2)}.$$

برای

$$:0<|z|<1,$$

داریم

$$\frac{3}{z+1} = 3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

و

$$-\frac{1}{2(z+2)} = -\frac{1}{4}\frac{1}{1+(z/2)} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}.$$

لذا

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{5}{2z}+\frac{2}{z^2}+3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n} \\ &= \frac{2}{z^2}-\frac{5}{2z}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(3-2^{-n-2})z^n \end{aligned}$$

برای

$$1 < |z| < 2,$$

داریم.

$$\frac{3}{z+1} = \frac{3}{z}\frac{1}{1+(1/z)} = \frac{3}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}$$

و

$$-\frac{1}{2(z+2)} = -\frac{1}{4}\frac{1}{1+(z/2)} = -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n}.$$

پس

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{5}{2z}+\frac{2}{z^2}+\frac{3}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{2^n} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3(-1)^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{2z}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{-n-2}z^n. \end{aligned}$$

برای

$$2 < |z| < \infty,$$

داریم.

$$\frac{3}{z+1}=\frac{3}{z}\frac{1}{1+(1/z)}=\frac{3}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}$$

و

$$-\frac{1}{2(z+2)}=-\frac{1}{2z}\frac{1}{1+(2/z)}=-\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{z^n}.$$

پس

$$\begin{aligned}f(z)&=-\frac{5}{2z}+\frac{2}{z^2}+\frac{3}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}-\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^n}{z^n}\\&=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(3-2^{n-2})}{z^n}.\end{aligned}$$

برای

$$0<|z+1|<1,$$

فرض می کنیم

$$w=z+1$$

پس

$$\frac{z+4}{z^2(z^2+3z+2)}=\frac{5}{2(1-w)}+\frac{2}{(1-w)^2}+\frac{3}{w}-\frac{1}{2(w+1)}.$$

برای

$$0<|w|<1,$$

داریم.

$$\frac{5}{2(1-w)}=\frac{5}{2}\sum_{n=0}^{\infty}w^n,$$

$$\frac{2}{(1-w)^2}=\left(\frac{2}{1-w}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}2w^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}2(n+1)w^n$$

و

$$-\frac{1}{2(w+1)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nw^n.$$

پس

$$f(z) = \frac{3}{w} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(2n + \frac{9}{2} - \frac{(-1)^n}{2}\right) w^n$$
$$= \frac{3}{z+1} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(2n + \frac{9}{2} - \frac{(-1)^n}{2}\right)(z+1)^n.$$

مساله 7

فرض کنید داشته باشیم.

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 2}$$

مطلوب است سری های لورنت در دامنه های زیر.

(a) $1 < |z| < 2$

(b) $0 < |z-2| < 1$

پاسخ

ابتدا $f(z)$ را به صورت جمع کسر های پاره ای می نویسیم.

$$\frac{z^2}{z^2 - z - 2} = 1 + \frac{z+2}{(z-2)(z+1)} = 1 + \frac{4}{3(z-2)} - \frac{1}{3(z+1)}$$

در

$$1 < |z| < 2,$$

داریم.

$$\frac{z^2}{z^2 - z - 2} = 1 - \frac{2}{3}\frac{1}{1 - z/2} - \frac{1}{3z}\frac{1}{1 + 1/z}$$
$$= 1 - \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^n - \frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-n}$$
$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n} z^n + \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^{-n}$$

در

$$0 < |z-2| < 1,$$

داریم.

$$\begin{aligned}\frac{z^2}{z^2-z-2} &= 1+\frac{4}{3(z-2)}-\frac{1}{3}\frac{1}{3+(z-2)}\\ &= 1+\frac{4}{3(z-2)}-\frac{1}{9}\frac{1}{1+(z-2)/3}\\ &= 1+\frac{4}{3(z-2)}-\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3^{-n}(z-2)^n\\ &= \frac{8}{9}+\frac{4}{3(z-2)}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}3^{-n-2}(z-2)^n\end{aligned}$$

مساله 8

سری لورنت زیر را پیدا کنید.

$$\frac{1}{e^{z^2}-1}$$

تا z^6 و نشان دهید سری در

$$0<|z|<\sqrt{2\pi}.$$

همگرا است.

پاسخ

فرض می کنیم

$$f(z)=1/(e^z-1)$$

باشد. چون

$$e^z-1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$$

است ، پس e^z-1 یک صفر در 0 دارد با چند گانگی یک و لذا $f(z)$ یک قطب دارد در 0 با مرتبه یک. پس سری لورنت $f(z)$ به صورت زیر است.

$$f(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}a_n z^n=\frac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\sum_{n\geq 4}a_n z^n$$

در $0<|z|<r$ برای یک عدد $r>0$

چون

$$(e^z-1)f(z)=1$$

است ، پس داریم.

$$1 = \left(a_{-1} + a_0 z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + a_3 z^4 + \sum_{n \geq 5} a_{n-1} z^n\right)$$
$$\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \frac{z^3}{24} + \frac{z^4}{120} + \sum_{n \geq 5} \frac{z^n}{(n+1)!}\right).$$

با مقایسه ضریب های $1, z, z^2, z^3, z^4$ طرفین ، داریم.

$$\begin{cases} a_{-1} = 1 \\ a_0 + \dfrac{a_{-1}}{2} = 0 \\ a_1 + \dfrac{a_0}{2} + \dfrac{a_{-1}}{6} = 0 \\ a_2 + \dfrac{a_1}{2} + \dfrac{a_0}{6} + \dfrac{a_{-1}}{24} = 0 \\ a_3 + \dfrac{a_2}{2} + \dfrac{a_1}{6} + \dfrac{a_0}{24} + \dfrac{a_{-1}}{120} = 0 \end{cases}$$

با حل آن داریم

$$a_{-1} = 1,\ a_0 = -1/2,\ a_1 = 1/12,\ a_2 = 0 a_3 = -1/720.$$

پس

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{z}{12} - \frac{z^3}{720} + \sum_{n \geq 4} a_n z^n$$

و

$$\frac{1}{e^{z^2} - 1} = f(z^2) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2} + \frac{z^2}{12} - \frac{z^6}{720} + \sum_{n \geq 4} a_n z^{2n}.$$

حالا که $f(z)$ در

$$\{z : e^z - 1 \neq 0\} = \{z \neq 2n\pi i\}$$

تحلیلی است. پس در $0 < |z| < 2\pi$ تحلیلی است. پس $f(z^2)$ در

$$0 < |z^2| < 2\pi,$$

تحلیلی است ، یعنی $0 < |z| < \sqrt{2\pi}.$

پس سری در

$$0 < |z| < \sqrt{2\pi}.$$

همگرا است.

بخش 5.5
طبقه بندی تکینگی ها
مساله 1
برای هر کدام از تابع های مختلط زیر ، کار های زیر را انجام دهید.
تمام تکینگی آنرا در $\mathbb{C}$ پیدا کنید.
قسمت اصلی تابع در هر تکینگی بنویسید.
برای هر تکینگی ، مشخص کنید آیا آن یک قطب است ، یک تکین قابل حذف است یا تکین اساسی است.
مانده تابع در هر تکینگی را محاسبه کنید.

(a) $f(z) = \dfrac{1}{(\cos z)^2}$

پاسخ
تابع $f(z)$ در $\cos z = 0$ تکین است یعنی $z = n\pi + \frac{\pi}{2}$، فرض می کنیم

$$w = z - n\pi - \frac{\pi}{2}$$

باشد. پس

$$\frac{1}{(\cos z)^2} = \frac{1}{(\cos(w+n\pi+\pi/2))^2} = \frac{1}{(\sin w)^2}.$$

چون $\sin w$ دارای یک صفر با تعدد یک در $w = 0$ است ، پس $f(z)$ یک قطب مرتبه دوم در $z = n\pi + \frac{\pi}{2}$ دارد. پس

$$\frac{1}{(\sin w)^2} = \frac{a_{-2}}{w^2} + \frac{a_{-1}}{w} + \sum_{n\geq 0} a_n w^n.$$

چون

$$(\sin w)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^2 = w^2 + \sum_{n=4}^{\infty} b_n w^n$$

پس داریم

$$1 = \left(\frac{a_{-2}}{w^2} + \frac{a_{-1}}{w} + \sum_{n\geq 0} a_n w^n\right)\left(w^2 + \sum_{n=4}^{\infty} b_n w^n\right).$$

با مقایسه ضریب های 1 و w طرفین ، داریم $a_{-2} = 1$ و $a_{-1} = 0$ لذا قسمت اساسی $f(z)$

در $z = n\pi + \frac{\pi}{2}$ می شود

$$\frac{1}{(z-n\pi-\pi/2)^2}$$

با مانده صفر.

(b) $f(z) = (1-z^3)\exp\left(\frac{1}{z}\right)$

پاسخ

چون

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!,$$

است ، پس

$$\begin{aligned}(1-z^3)\exp\left(\frac{1}{z}\right) &= (1-z^3)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-3}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!z^n} - \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-3}} - \sum_{n=0}^{3}\frac{z^{3-n}}{n!}\\ &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!z^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!z^n} - \sum_{n=0}^{3}\frac{z^{3-n}}{n!}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+3)!}\right)\frac{1}{z^n} + 1 - \sum_{n=0}^{3}\frac{z^{3-n}}{n!}\end{aligned}$$

لذا $f(z)$ یک تکین اساسی در $z = 0$ دارد ، با قسمت اصلی

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+3)!}\right)\frac{1}{z^n}$$

و مانده

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{4!} = \frac{23}{24}.$$

فراموش نکنید که Res سه حروف اول Residue است به معنی مانده.

(c) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^{2010}}$

پاسخ
چون داریم

$$\begin{aligned}\frac{\sin z}{z^{2010}}&=\frac{1}{z^{2010}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-2009}}{(2n+1)!}\\&=\sum_{n=0}^{1004}\frac{(-1)^n z^{2n-2009}}{(2n+1)!}+\sum_{n=1005}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n-2009}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

پس $f(z)$ یک قطب به مرتبه 2009 در $z=0$ دارد ، با قسمت اصلی

$$\sum_{n=0}^{1004}\frac{(-1)^n z^{2n-2009}}{(2n+1)!}$$

و مانده

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\sin z}{z^{2010}}=\frac{(-1)^{1004}}{(2\cdot 1004+1)!}=\frac{1}{2009!}.$$

(d) $f(z)=\dfrac{e^z}{1-z^2}$

پاسخ
چون

$$1-z^2=(1-z)(1+z),$$

است ، پس $f(z)$ دو قطب مرتبه اول در 1 و -1 دارد. پس.

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{e^z}{1-z^2}=\left.\frac{e^z}{(1-z^2)'}\right|_{z=1}=-\frac{e}{2}$$

و

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{e^z}{1-z^2} = \left.\frac{e^z}{(1-z^2)'}\right|_{z=-1} = \frac{1}{2e}.$$

و قسمت های اصلی $f(z)$ در $z=1$ و $z=-1$ به ترتیب به صورت های زیر هستند.

$$-\frac{e}{2(z-1)} \qquad \frac{1}{2e(z+1)}$$

(e) $f(z) = (1-z^2)\exp\left(\frac{1}{z}\right)$

پاسخ

تابع در صفر یک تکین دارد.

$$\begin{aligned}(1-z^2)\exp\left(\frac{1}{z}\right) &= (1-z^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)z^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)z^n} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)z^{n-2}} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)z^n} - \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n!)z^{n-2}} - (z^2+z+\frac{1}{2}) \\ &= -z^2 - z + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)z^n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)!z^n} \\ &= -z^2 - z + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+2)!}\right)z^{-n}\end{aligned}$$

پس قسمت اصلی به صورت زیر است.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+2)!}\right)z^{-n}$$

تابع ، یک تکین اساسی در صفر دارد و

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{1!} - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6}$$

$$\text{(f)}\ \ f(z) = \frac{1}{(\sin z)^2}$$

پاسخ

تابع ، تکینگی ها در $k\pi$ برای $k \in \mathbb{Z}$ دارد. در $z = k\pi$ فرض می کنیم $w = z - k\pi$ باشد ، پس

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\sin z)^2} = \frac{1}{(\sin w)^2} &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{w^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{2n}}{(2n+1)!}\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{w^2}\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} w^{2n}}{(2n+1)!}\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{w^2}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} w^{2n}}{(2n+1)!}\right)^{m} \\
&= \frac{1}{w^2}\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n w^n\right)
\end{aligned}$$

پس قسمت اصلی در $k\pi$ به صورت زیر است.

$$\frac{1}{(z-k\pi)^2}$$

تابع ، یک قطب با مرتبه دوم در $k\pi$ دارد. و

$$\operatorname*{Res}_{z=k\pi} f(z) = 0$$

$$\text{(g)}\ \ f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2}$$

پاسخ

تابع ، یک تکینگی در صفر دارد ، جا یی که

$$\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left(1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\right)=\frac{1}{z^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n}}{(2n)!}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}z^{2n-2}}{(2n)!}$$

پس ، قسمت اصلی صفر است. تابع ، یک تکینگی برداشتی یا قابل حذف در صفر دارد و

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=0$$

(h) $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$

پاسخ

تابع ، در صفر و یک ، دو تکینگی دارد. در صفر داریم.

$$\frac{e^z}{z(z-1)^2}=\frac{1}{z}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n\right)$$
$$=\frac{1}{z}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n\right)$$

پس در صفر ، قسمت اصلی $\frac{1}{z}$ است ، تابع ، یک قطب مرتبه اول در صفر دارد و

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=1$$

در یک فرض می کنیم $w=z-1$ باشد ، پس

$$\frac{e^z}{z(z-1)^2}=\frac{e^{1+w}}{(1+w)w^2}=\frac{e}{w^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n\right)$$
$$=\frac{e}{w^2}\left(1+w+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\right)\left(1-w+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n w^n\right)$$

$$= \frac{e}{w^2}\left(1+\sum_{n=2}^{\infty} a_n w^n\right)$$

پس ، قسمت اصلی به صورت زیر است.

$$\frac{e}{(z-1)^2}$$

تابع ، یک قطب مرتبه دوم در یک دارد. و

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = 0$$

$$\text{(i)}\ \ f(z) = \tan z$$

پاسخ

تابع ، تکینگی هایی در

$$:\{\cos z = 0\} = \{z = k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}.$$

دارد. در

$$z = k\pi + \pi/2$$

فرض می کنیم $w = z - k\pi - \frac{\pi}{2}$ باشد ، پس

$$\tan z = \tan\left(w + k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(w + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\cos w}{\sin w}$$

چون $\sin w$ یک صفر با تعدد یک در $w = 0$ دارد ، پس $\tan z$ یک قطب مرتبه اول در $z = k\pi + \frac{\pi}{2}$ دارد. لذا

$$\operatorname*{Res}_{z=k\pi+\pi/2} \tan z = \operatorname*{Res}_{w=0}\left(-\frac{\cos w}{\sin w}\right) = -\left.\frac{\cos w}{(\sin w)'}\right|_{w=0} = -1$$

قسمت اصلی $\tan z$ در $z = k\pi + \frac{\pi}{2}$ به صورت زیر است.

$$-\frac{1}{w} = -\frac{1}{z - k\pi - \pi/2}.$$

بخش 5.5

کار برد های مانده

مساله 1

انتگرال زیر را محاسبه کنید. اینجا C یک دائره است با شعاع 7 و مرکز صفر ، در جهت منفی ، یعنی موافق عقربه ساعت.

$$\int_C \frac{8-z}{z(4-z)}dz,$$

پاسخ

ملاحظه می کنید که

$$f(z)=\frac{8-z}{z(4-z)}=\frac{8-2z+z}{z(4-z)}=\frac{2}{z}+\frac{1}{(4-z)}=\frac{2}{z}-\frac{1}{(z-4)}$$

تابع دو تکینگی در $z=0$ و $z=4$ دارد. ، پس

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=2$$

به همین طریق چون $\frac{2}{z}$ در $z=4$ تحلیلی است ، پس

$$\operatorname*{Res}_{z=4} f(z)=-1$$

بر اساس قضیه مانده کاشی و با توجه به این که C در جهت منفی است ، داریم.

$$\begin{aligned}\int_C \frac{8-z}{z(4-z)}dz &= -2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=4} f(z)\right)\\ &= -2\pi i(2-1)=-2\pi i\end{aligned}$$

مساله 2

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2-\cos\theta}.$$

پاسخ

چون $\frac{1}{2-\cos\theta}$ زوج است

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2-\cos\theta}=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{2-\cos\theta}.$$

فرض می کنیم $z=e^{i\theta}$ باشد ، پس

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}$$

و

$$d\theta = -iz^{-1}dz$$

است. پس

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2-\cos\theta} &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{2-\cos\theta}\\ &= \int_{|z|=1}\frac{-idz}{2z(2-(z+z^{-1})/2)}\\ &= i\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-4z+1}.\end{aligned}$$

تابع

$$\frac{1}{z^2-4z+1} = \frac{1}{(z-2-\sqrt{3})(z-2+\sqrt{3})}$$

یک تکینگی $|z| = 1$ در $z = 2-\sqrt{3}$ دارد. پس

$$\begin{aligned}\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2-4z+1} &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2-\sqrt{3}}\frac{1}{z^2-4z+1}\\ &= 2\pi i\left.\frac{1}{(z^2-4z+1)'}\right|_{z=2-\sqrt{3}} = -\frac{\pi i}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

پس

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{2-\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

مساله 3

فرض کنید $a,b\in\mathbb{R}$ باشد م بطوری که $a^2 > b^2$ باشد. انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}.$$

پاسخ

$$\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

مساله 4

مطلوب است انتگرال تراز تابع های زیر اطراف دائره $|z| = 2011$ در جهت مخالف عقربه ساعت.

(a) $\dfrac{1}{\sin z}$;

(b) $\dfrac{1}{e^{2z} - e^{z}}$.

پاسخ

(a)

تابع $f(z) = \frac{1}{\sin z}$ در

$$\{z \neq n\pi : n \in \mathbb{Z}\}.$$

تحلیلی است. دارای یک قطب مرتبه یک در $n\pi$ دارد

چون

$$(\sin z)'|_{z=n\pi} = \cos(n\pi) = (-1)^n \neq 0.$$

است ، پس

$$\operatorname*{Res}_{z=n\pi} \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{\cos(n\pi)} = (-1)^n.$$

لذا

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2011} \frac{dz}{\sin z} &= 2\pi i \sum_{|n\pi|<2011} \operatorname*{Res}_{z=n\pi} \frac{1}{\sin z} \\ &= 2\pi i \sum_{|n|\leq 640} (-1)^n = 2\pi i.\end{aligned}$$

(b)

تابع

$$f(z) = \frac{1}{e^{2z} - e^{z}}$$

در

$$\{e^{2z} - e^{z} \neq 0\} = \{e^{z} \neq 1\} = \{z \neq 2n\pi i : n \in \mathbb{Z}\}.$$

تحلیلی است.

چون

$$(e^{2z}-e^z)'|_{z=2n\pi i}=1\neq 0,$$

است ، $f(z)$ یک قطب در $2n\pi i$ دارد. پس

$$\operatorname*{Res}_{z=2n\pi i}\frac{1}{e^{2z}-e^z}=\left.\frac{1}{2e^{2z}-e^z}\right|_{z=2n\pi i}=1.$$

لذا

$$\int_{|z|=2011}\frac{dz}{e^{2z}-e^z}=2\pi i\sum_{|2n\pi i|<2011}\operatorname*{Res}_{z=2n\pi i}\frac{1}{e^{2z}-e^z}$$
$$=2\pi i\sum_{|2n\pi i|<2011}1=2\pi i\sum_{|n|\leq 320}1=1282\pi i.$$

مساله 5

با استفاده از قضیه مانده ، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10\,x^2+9}\,dx$$

پاسخ

فرض می کنیم

$$\mathrm{f}(z)=\frac{z^2-z+2}{z^4+10\,z^2+9}$$

باشد ، تکینگی ها را پیدا می کنیم. داریم.

$$[\{z=3\,I\},\ \{z=-3\,I\},\ \{z=-I\},\ \{z=I\}]$$

حالا ، یکی یکی را بر رسی می کنیم.

تکینگی

$$z=3\,I$$

در ناحیه ما است ، پس مانده زیر را داریم.

$$\mathrm{res}(3\,I,\ \mathrm{f}(z))=\frac{1}{16}-\frac{7}{48}\,I$$

تکینگی

$$z=-3\,I$$

را کنار می گذاریم ، زیرا تکینگی در ناحیه ما نیست.

تکینگی

$$z=-I$$

را کنار می گذاریم زیرا این تکینگی در ناحیه ما نیست.

تکینگی

$$z = I$$

در ناحیه ما است پس داریم.

$$\mathrm{res}(I,\, \mathrm{f}(z)) = -\frac{1}{16} - \frac{1}{16}\, I$$

مجموع به صورت زیر است.

$$2\, I\, \pi\, (\sum \mathrm{res}(z,\, \mathrm{f}(z))) = \frac{5}{12}\, \pi$$

و در نهایت ، جواب به صورت زیر است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10\, x^2 + 9}\, dx = \frac{5}{12}\, \pi$$

مساله 6

با استفاده از قضیه مانده ، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)\, (x^2 + 4)^2}\, dx$$

پاسخ

فرض می کنیم

$$\mathrm{f}(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)\, (z^2 + 4)^2}$$

باشد. تکینگی ها را پیدا می کنیم.

$$[\{z = 2\, I\},\, \{z = -I\},\, \{z = I\},\, \{z = -2\, I\}]$$

تکینگی

$$z = 2\, I$$

در ناحیه ما است، پس

$$\mathrm{res}(2\, I,\, \mathrm{f}(z)) = \frac{11}{288}\, I$$

تکینگی

$$z = -I$$

در ناحیه ما نیست ، پس آنرا نا دیده می گیریم.

تکینگی

$$z = I$$

در ناحیه ما است ، پس داریم.

$$\operatorname{res}(I,\ \mathrm{f}(z)) = -\frac{1}{18}\, I$$

تکینگی

$$z = -2\, I$$

در ناحیه ما نیست ، پس صرف نظر می کنیم.
پس مجموع به صورت زیر است.

$$2\, I\, \pi \left(\sum \operatorname{res}(z,\ \mathrm{f}(z))\right) = \frac{5}{144}\, \pi$$

و در نهاتت داریم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)\,(x^2+4)^2}\, dx = \frac{5}{144}\, \pi$$

مساله 7

با استفاده از قضیه مانده ، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)\,(x^2+9)}\, dx$$

پاسخ

فرض می کنیم.

$$\mathrm{f}(z) = \frac{1}{(z^2+1)\,(z^2+9)}$$

تکینگی ها را پیدا می کنیم.

$$[\{z = 3\, I\},\ \{z = -3\, I\},\ \{z = -I\},\ \{z = I\}]$$

تکینگی

$$z = 3\, I$$

در ناحیه ما است. پس داریم.

$$\operatorname{res}(3\, I,\ \mathrm{f}(z)) = \frac{1}{48}\, I$$

تکینگی

$$z = -3\, I$$

در ناحیه ما نیست ، پس صرف نظر می کنیم.
تکینگی

$$z = -I$$

در ناحیه ما نیست.
تکینگی

$$z = I$$

در ناحیه ما است ، پس داریم.

$$\mathrm{res}(I,\, \mathrm{f}(z)) = -\frac{1}{16}\, I$$

جمع به صورت زیر است.

$$2\, I\, \pi\, (\sum \mathrm{res}(z,\, \mathrm{f}(z))) = \frac{1}{12}\, \pi$$

و در نهایت داریم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)\,(x^2+9)}\, dx = \frac{1}{12}\, \pi$$

مساله 8

با استفاده از قضیه مانده ، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-I)\,(x-2\,I)}\, dx$$

پاسخ

فرض می کنیم

$$\mathrm{f}(z) = \frac{1}{(z-I)\,(z-2\,I)}$$

تکینگی ها را پیدا می کنیم.

$$[\{z = 2\,I\},\, \{z = I\}]$$

تکینگی

$$z = 2\,I$$

در ناحیه ما است. پس داریم.

$$\mathrm{res}(2\,I,\, \mathrm{f}(z)) = -I$$

تکینگی

$$z = I$$

در ناحیه ما است. پس داریم.

$$\mathrm{res}(I,\, \mathrm{f}(z)) = I$$

جمع ما به صورت زیر است.

$$2\, I\, \pi\, (\sum \mathrm{res}(z,\, \mathrm{f}(z))) = 0$$

و در نهایت داریم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-I)\,(x-2\,I)}\,dx = 0$$

مساله 9
با استفاده از قضیه مانده ، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-I)\,(x-2\,I)\,(x+3\,I)}\,dx$$

پاسخ
فرض می کنیم

$$\mathrm{f}(z) = \frac{1}{(z-I)\,(z-2\,I)\,(z+3\,I)}$$

تکینگی ها را پیدا می کنیم.

$$[\{z = 2\,I\},\ \{z = -3\,I\},\ \{z = I\}]$$

تکینگی

$$z = 2\,I$$

در ناحیه است ، پس داریم.

$$\mathrm{res}(2\,I,\ \mathrm{f}(z)) = \frac{-1}{5}$$

تکینگی

$$z = I$$

در ناحیه است ، پس داریم.

$$\mathrm{res}(I,\ \mathrm{f}(z)) = \frac{1}{4}$$

جمع ما می شود.

$$2\,I\,\pi\,(\sum \mathrm{res}(z,\ \mathrm{f}(z))) = \frac{1}{10}\,I\,\pi$$

و در نهایت داریم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x-I)\,(x-2\,I)\,(x+3\,I)}\,dx = \frac{1}{10}\,I\,\pi$$

مساله 10
با استفاده از قضیه مانده ، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(I\,x)}}{(x^2+4)\,(x-1)}\,dx$$

پاسخ
فرض می کنیم

$$f(z) = \frac{e^{(I\,z)}}{(z^2+4)\,(z-1)}$$

تکینگی ها را پیدا می کنیم.

$$[\{z = 2\,I\},\ \{z = -2\,I\},\ \{z = 1\}]$$

تکینگی

$$z = 2\,I$$

درناحیه است ، پس

$$\mathrm{res}(2\,I,\ f(z)) = (-\frac{1}{10} + \frac{1}{20}\,I)\,e^{(-2)}$$

تکینگی

$$z = 1$$

روی خط حقیقی است و نصف مانده زیر را اضافه می کنیم.

$$\mathrm{res}(1,\ f(z)) = \frac{1}{5}\,e^{I}$$

پس جمع ما به صورت زیر است.

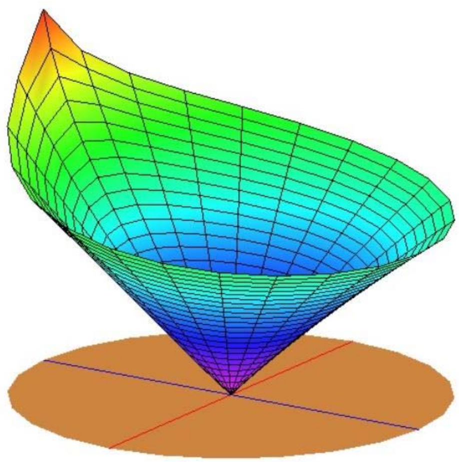
$$2\,I\,\pi\,(\sum \mathrm{res}(z,\ f(z))) = 2\,I\,\pi\,((-\frac{1}{10} + \frac{1}{20}\,I)\,e^{(-2)} + \frac{1}{10}\,e^{I})$$

و در نهایت داریم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(I\,x)}}{(x^2+4)\,(x-1)}\,dx = 2\,I\,\pi\,((-\frac{1}{10} + \frac{1}{20}\,I)\,e^{(-2)} + \frac{1}{10}\,e^{I})$$

بخش 5.6
سری های توانی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$$



مساله 1
مطلوب است جمع سری توانی زیر

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}\, z^n}{n}$$

پاسخ
جمله n ام در سری را مطابق زیر نمایش می دهیم.

$$\mathrm{a}(n) = \frac{(-1)^{(n+1)}\, z^n}{n}$$

برای تست نسبت ، جمله $a(n+1)$ لازم داریم.

$$\mathrm{a}(n+1) = \frac{(-1)^{(n+2)}\, z^{(n+1)}}{n+1}$$

تست نسبت محاسبه می شود

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a(n+1)|}{|a(n)|}$$

و بدست می آوریم.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{z^{(n+1)}\, n}{(n+1)\, z^n} \right| = |z|$$

علاوه بر این می توانیم تست ریشه را محاسبه کنیم.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a(n)|}$$

و برای مساله ما ، داریم.

$$\lim_{n\to\infty} [\frac{(-1)^{(n+1)}\, z^n}{n}]^{(\frac{1}{n})} = |z|$$

و از این ، شعاع همگرایی را نتیجه می گیریم. برای $|z| < R$ جمع سری را بدست می آوریم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)}\, z^n}{n} = \ln(1+z)$$

مساله 2

مطلوب است جمع سری توانی زیر

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n^2\, z^n$$

پاسخ

جمله n ام در سری را مطابق زیر نمایش می دهیم.

$$\mathrm{a}(n) = (-1)^n\, n^2\, z^n$$

برای تست نسبت ، جمله $a(n+1)$ لازم داریم.

$$\mathrm{a}(n+1) = (-1)^{(n+1)}\, (n+1)^2\, z^{(n+1)}$$

تست نسبت محاسبه می شود.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a(n+1)|}{|a(n)|}$$

و برای مساله ما ، داریم.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2\, z^{(n+1)}}{n^2\, z^n}\right| = |z|$$

علاوه بر این می توانیم تست ریشه را انجام دهیم.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a(n)|}$$

و برای مساله ما ، داریم.

$$\lim_{n\to\infty} [(-1)^n\, n^2\, z^n]^{(\frac{1}{n})} = |z|$$

مانند مساله یک داریم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n^2\, z^n = -\frac{z\,(-z+1)}{(1+z)^3}$$

مساله 3

مطلوب است جمع سری توانی زیر

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n^3\, z^n}{(n+1)!}$$

پاسخ

توضیحات مانند مسائل 1 و 2 به همان ترتیب

$$\mathrm{a}(n) = \frac{(-1)^n\, n^3\, z^n}{(n+1)!}$$

$$\mathrm{a}(n+1) = \frac{(-1)^{(n+1)}\, (n+1)^3\, z^{(n+1)}}{(n+2)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a(n+1)|}{|a(n)|}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^3\, z^{(n+1)}\, (n+1)!}{(n+2)!\, n^3\, z^n} \right| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a(n)|}$$

$$\lim_{n\to\infty} [\frac{(-1)^n\, n^3\, z^n}{(n+1)!}]^{(\frac{1}{n})} = \left| \lim_{n\to\infty} (\frac{(-1)^n\, n^3\, z^n}{(n+1)!})^{(\frac{1}{n})} \right|$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n^3\, z^n}{(n+1)!} =$$

$$-\frac{1}{2}\, z \left(2\, \frac{1 - e^{(-z)}\, (1+z)}{z^2} - 12\, \frac{1 - e^{(-z)}\, (1 + z + \frac{1}{2}\, z^2)}{z^2} + 12\, \frac{1 - e^{(-z)}\, (1 + z + \frac{1}{2}\, z^2 + \frac{1}{6}\, z^3)}{z^2} \right)$$

مساله 4

مطلوب است جمع سری توانی زیر

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\, n + 1)\, z^n}{n!}$$

پاسخ

به همان ترتیب داریم.

$$\mathrm{a}(n) = \frac{(2\, n + 1)\, z^n}{n!}$$

$$\mathrm{a}(n+1) = \frac{(2\,n+3)\,z^{(n+1)}}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a(n+1)|}{|a(n)|}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(2\,n+3)\,z^{(n+1)}\,n!}{(n+1)!\,(2\,n+1)\,z^n}\right| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a(n)|}$$

$$\lim_{n\to\infty} [\frac{(2\,n+1)\,z^n}{n!}]^{(\frac{1}{n})} = \left|\lim_{n\to\infty} (\frac{(2\,n+1)\,z^n}{n!})^{(\frac{1}{n})}\right|$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\,n+1)\,z^n}{n!} = 2\,e^z\,(\frac{1}{2}+z)$$

مساله 5

مطلوب است جمع سری توانی زیر

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2-2)\,z^n}{2^n\,n!}$$

پاسخ

به همان ترتیب

$$\mathrm{a}(n) = \frac{(n^2-2)\,z^n}{2^n\,n!}$$

$$\mathrm{a}(n+1) = \frac{((n+1)^2-2)\,z^{(n+1)}}{2^{(n+1)}\,(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a(n+1)|}{|a(n)|}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n\left|\frac{((n+1)^2-2)\,z^{(n+1)}\,n!}{(n+1)!\,(n^2-2)\,z^n}\right|}{2^{(n+1)}} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a(n)|}$$

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{(n^2-2)\,z^n}{2^n\,n!}]^{(\frac{1}{n})} = \left|\lim_{n\to\infty}(\frac{(n^2-2)\,z^n}{2^n\,n!})^{(\frac{1}{n})}\right|$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n^2-2)\,z^n}{2^n\,n!} = -2\,e^{(1/2\,z)}+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,e^{(1/2\,z)}\,z+\frac{1}{2}(-\sqrt{2}+1)\,e^{(1/2\,z)}\,z+\frac{1}{4}\,e^{(1/2\,z)}\,z^2$$

مساله 6

مطلوب است جمع سری توانی زیر

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,z^n}{5^n}$$

پاسخ

$$\mathrm{a}(n) = \frac{n\,z^n}{5^n}$$

$$\mathrm{a}(n+1) = \frac{(n+1)\,z^{(n+1)}}{5^{(n+1)}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a(n+1)|}{|a(n)|}$$

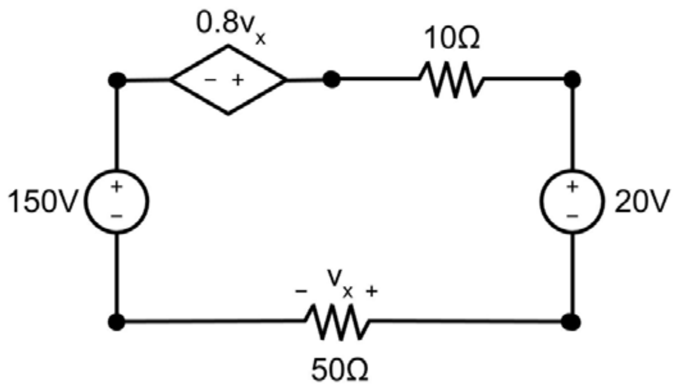
$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\left|\frac{(n+1)\,z^{(n+1)}}{n\,z^n}\right|}{5^{(n+1)}} = \frac{1}{5}\,|z|$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a(n)|}$$

$$\lim_{n\to\infty}[\frac{n\,z^n}{5^n}]^{(\frac{1}{n})} = \left|\lim_{n\to\infty}(\frac{n\,z^n}{5^n})^{(\frac{1}{n})}\right|$$

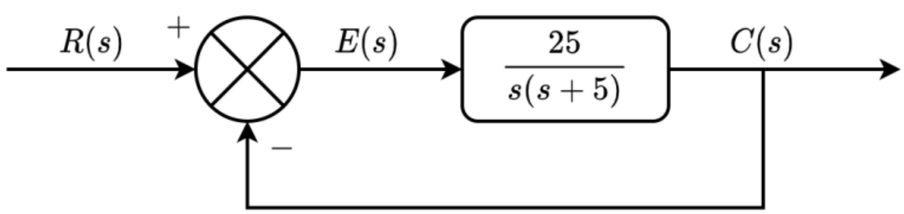
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,z^n}{5^n} = 5\,\frac{z}{(z-5)^2}$$

بخش 5.7
مسائل متداول در مهندسی برق
مساله 1
در مدار زیر ، مطلوب است برق جذب شده توسط منبع وابسته



- A. $-67.7\mathrm{W}$
- B. $67.7\mathrm{W}$
- C. $1690\mathrm{W}$
- D. $-1690\mathrm{W}$

مساله 2
در سیستم زیر مقدار حد اکثر زمان را محاسبه کنید.



- A. $0.726\mathrm{s}$
- B. $5.111\mathrm{s}$
- C. $1.231\mathrm{s}$
- D. $0.940\mathrm{s}$

مساله 3
عبارت زیر را ساده کنید.

$$(\overline{\bar{A}B})(\bar{A}+B)(\bar{B}+B)$$

- A. $\bar{A}$
- B. $\bar{B}$
- C. $\bar{A}\bar{B}$
- D. $\bar{A}+\bar{B}$

مساله 4

یک میدان مغناطیسی دارای میدان برداری زیر را دارد

$$\vec{\mathbf{B}} = 10y\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - mz\mathbf{k}.$$

عدد ثابت m حد اکثر کدام است؟

- A. -2
- B. 4
- C. 0
- D. 2

مساله 5

برای یک مدار

$$R_1 = R_3 = 5\text{k}\Omega$$

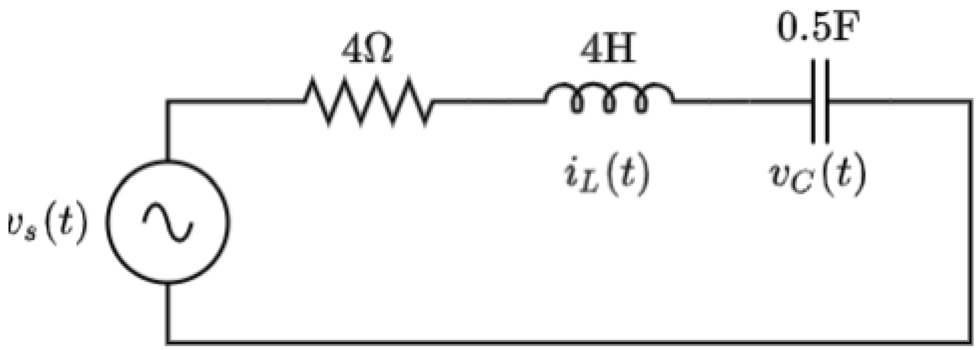
مطلوب است R_2 و R_4 تا بهره 10 بدست آید.

- A. $R_2 = 25\text{k}\Omega, R_4 = 25\text{k}\Omega$
- B. $R_2 = 10\text{k}\Omega, R_4 = 15\text{k}\Omega$
- C. $R_2 = 5\text{k}\Omega, R_4 = 5\text{k}\Omega$
- D. $R_2 = 20\text{k}\Omega, R_4 = 25\text{k}\Omega$

مساله 6

یک جواب متجانس برای معادله دیفرانسیل زیر بدست آورید ، که ولتاژ $v_C(t)$ در خازن در مدار سری RLC ایجاد می کند.

$$i_L(0) = 0.25\text{A and } v_C(0) = 0.$$



- A. $e^{-\frac{1}{2}t}$ V
- B. $e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{1}{2}t + \cos \frac{1}{2}t$ V
- C. $\sin \frac{1}{2}t$ V
- D. $e^{-\frac{1}{2}t} \sin \frac{1}{2}t$ V

پاسخ ها
جواب سئوال اول D است.
جواب سئوال دوم A است.
جواب سوال سوم A است.
جواب سوال چهارم D است.
جواب سئوال پنجم D است.
جواب سوال ششم D است.

مساله 7
نوسان رزنانس یک مدار ac کدام است؟

a) 1/√LC
b) √(L/C)
c) √LC
d) LC

پاسخ a صحیح است .
توضیح :در رزنانس $X_L = X_C$

ωL=1/ωC
ω=1/√LC.

مساله 8
هنگامی که اعداد $(5 \times 10^5)(6 \times 10^3)$ را ضرب کنیم نتیجه می شود

Ⓐ 3×10^8

Ⓑ 30×10^8

Ⓒ 300×10^9

Ⓓ $3{,}000 \times 10^7$

پاسخ B صحیح است.

مساله 9
اندازه گیری مقاومت بر حسب کدام است.

Ⓐ henries

Ⓑ ohms

Ⓒ hertz

Ⓓ watts

پاسخ صحیح B است.

مساله 10

عدد 65000 چگونه نوشته می شود؟

Ⓐ 0.65×10^4

Ⓑ 6.5×10^4

Ⓒ 65×10^4

Ⓓ 650×10^3

جواب صحیح B است.

مساله 11

هنگام تبدیل $7,000\ nA$ به میکرو آمپر، نتیجه کدام است؟

Ⓐ 0.007 μA

Ⓑ 0.7 μA

Ⓒ 700 μA

Ⓓ 7 μA

جواب صحیح D است.

مساله 12

عدد کیلو وات به , 135 میلی وات کدام است؟

Ⓐ 1.35×10^{-4} kW

Ⓑ 135×10^{-3} kW

Ⓒ 0.0135 kW

Ⓓ 0.00135 kW

جواب صحیح A است.

مساله 13

عدد 4.4×10^6 اهم به صورت متریک کدام است؟

Ⓐ 4 k

Ⓑ 4.4 k

Ⓒ 4 M

Ⓓ 4.4 M

جواب D صحیح است.

مساله 14

عدد میلی وات به 0.06 کیلو وات کدام است؟

Ⓐ 600 V

Ⓑ 6,000 mV

Ⓒ 60,000 mV

Ⓓ 600,000 mV

جواب C صحیح است.

مساله 15

هیجده هزار وات مانند کدام است؟

Ⓐ 18 mW

Ⓑ 18 MW

Ⓒ 18 kW

Ⓓ 18 μW

جواب C صحیح است.

مساله 16

عدد 3.2×10^{-5} آمپر به صورت متریک کدام است؟

Ⓐ 32 μA

Ⓑ 3.3 μA

Ⓒ 320 mA

Ⓓ 3,200 mA

جواب A صحیح است.

مساله 17

کدام یک از جوابهای زیر ، یک کمیّت برقی نیست؟

Ⓐ voltage

Ⓑ current

Ⓒ distance

Ⓓ power

جواب C صحیح است.

مساله 18

هفت هزار ولت را به کدام صورت می توان بیان کرد؟

Ⓐ 7 kV

Ⓑ 7 MV

Ⓒ 7 mV

Ⓓ either 7 kV or 7 mV

جواب A صحیح است.

مساله 19

هنگام تبدیل $1{,}600$ کیلو اهم به مگا اهم ، نتیجه کدام است؟

Ⓐ 1,600,000 MΩ

Ⓑ 160 MΩ

Ⓒ 1.6 MΩ

Ⓓ 0.160 MΩ

جواب C صحیح است.

مساله 20

واحد شارژ برق کدام است؟

(A) کولن
(B) ژول
(C) ولت
(D) وات

جواب صحیح Aاست.

مساله 21

حد اکثر مقاومت یک رزیستور قهوه ای ، قرمز ، زرد،، طلائی کدام است؟

Ⓐ 126,000 Ω

Ⓑ 126,600 Ω

Ⓒ 114,000 Ω

Ⓓ 132,000 Ω

جواب A صحیح است.

مساله 21
حد اقل مقاومت یک رزیستور قهوه ای ، قرمز ، زرد،، طلائی کدام است؟

Ⓐ 612 Ω

Ⓑ 6,120 Ω

Ⓒ 6,800 Ω

Ⓓ 6,460 Ω

جواب B صحیح است.

مساله 22
هشت دهم کولن از یک نقطه در 4 ثانیه عبور می کند. جریان بر حسب آمپر کدام است؟

Ⓐ 1.6 A

Ⓑ 16 A

Ⓒ 2 A

Ⓓ 0.2 A

جواب صحیح D است.

مساله 23
هنگامی که شدت جریان 2.5 آمپر است ، چند کولن از یک نقطه در 0.2 ثانیه عبور می کند؟

Ⓐ 12.5 C

Ⓑ 1.25 C

Ⓒ 0.5 C

Ⓓ 5 C

جواب صحیح C است.

مساله 24

اگر 6 آمپر جریان در یک سیم پیچ یک لامپ وجود دارد ، چند کولن شارژ از سیم پیچ در 1.75 ثانیه عبور می کند؟

Ⓐ 10.5 C

Ⓑ 105 C

Ⓒ 3.4 C

Ⓓ 34 C

جواب صحیح A است.

مساله 25

یک اتم بدون بار الکتریکی با عدد اتمی پنج ، چند الکترون درد؟

$(A)1$

$(B)5$

هیچ (C)

بستگی به نوع اتم دارد (D)

جواب B صحیح است.

مساله 26

شدت جریان در یک مدار نباید از 24 آمپر تجاوز کند ، چه فیوزی مناسب است؟

Ⓐ فیوز لازم نیست

Ⓑ 10 A

Ⓒ 24 A

Ⓓ 20 A

جواب C صحیح است.