فصل چهارم
Chapter 4
مسائل فرا گیر ریاضیات مهندسی
Over All Problems on Engineering Mathematics
بخش اول
Section one
مسائل حسابان
Calculus Problems

بخش 4.1

مسائل حسابان   Calculus Problems

همانطور که در ابتدای جلد اول گفته شد ، مهندسین و استفاده کنندگان این مجموعه ، باید جبر، مثلثات ، حسابان و معادلات دیفرانسیل معمولی را بخوبی فرا گیرند. بنا بر این ، تمریناتی از حسابان ، معادلات دیفرانسیل و غیرو می آوریم تا مسائل فراموش شده ، یاد آورده شوند.

اینک مسائلی از حسابان

مشتق و انتگرال

مساله 1

مطلوب است مشتق

$$25\cos\left(sin^2(tanx)\right)$$

پاسخ

$$\frac{d}{dx}\left(25\cos\left(sin^2(\tan x)\right)\right) = \boxed{50\, sec2\,(x)\, cos\,(tan\, x)\, sin\,(tan\, x)\, sin\,(sin2\,(tan\, x))}$$

مساله 2

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{\sin x}{cos^2(x)}\,dx$$

پاسخ

$$\int \frac{\sin x}{cos^2(x)}\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \bullet \frac{1}{\cos(x)}\,dx$$

$$= \int \tan(x)\sec(x)\,dx$$

$$= \boxed{\sec x + c}$$

۴

مساله 3

مطلوب است مشتق

$$\frac{2\csc t - 1}{\csc t + 2}$$

پاسخ

روش اول

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\frac{2\csc(t)-1}{csc(t)+2} = \frac{(csc(t)+2)\,(-\csc(t)\cot(t)) - (2\csc(t)-1)(-\csc(t)\cot(t))}{(\csc(t)+2)^2}$$

$$= \boxed{\frac{-5\csc(t)\cot(t)}{(\csc(t)+2)^2}}$$

روش دوم

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\frac{2\csc(t)-1}{csc(t)+2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\frac{2\csc(t)-1}{csc(t)+2}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\frac{2(-\sin(t))}{1+2\sin(t)}$$

$$= \boxed{\frac{-5\csc(t)\cot(t)}{(\csc(t)+2)^2}}$$

مساله 4

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{2+7\sin^3 x}{\cos^2 x}$$

پاسخ

$$\rightarrow \int \left(\frac{2}{\cos^2 x}+\frac{7\sin^3 x}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$=\int 2\sec^2 x\,dx+7\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\sin x\,dx$$

جانشین می کنیم $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ پس داریم.

$$=\int 2\sec^2 x\,dx+7\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin x\,dx$$

فرض می کنیم $u=\cos x$ پس $du=\ -\sin x\,dx$ پس داریم.

$$=2\tan x\quad 7\int u^{-2}\,du\ \ \int du$$

$$=2\tan x\quad 7(\quad u^{-1}\quad u)+C$$

$$=2\tan \mathrm{x}+7\frac{1}{\cos x}+7\cos x+\mathrm{C}$$

$$=\boxed{2\tan \mathrm{x}+7\sec x+7\cos x+\mathrm{C}}$$

مساله 5

مطلوب است مشتق

$$\sqrt{Arccot\left(\sin\frac{1}{x}\right)}$$

پاسخ ۴۴۱۲۱۲

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{Arccot\left(\sin\frac{1}{x}\right)}}\left(\frac{1}{1+\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}\right)\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

مساله 6

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{sec^2(2x)}{1+9tan^2(2x)}\,dx$$

پاسخ

فرض می کنیم $u = 3\ \tan^2 x$ باشد ، پس $du = 3\sec^2 x$ است.

$$\rightarrow \int \frac{sec^2(2x)}{1+9tan^2(2x)}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{3}\ Arctan(3tan2x)\ +\ C}$$

مساله 7

مطلوب است مشتق زیر.

$$Arctan\ \frac{2x}{1-x^2}$$

پاسخ

$$\frac{d}{dx}Arctan\ \left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} \bullet \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+\frac{4x^2}{(1-x)^2}} \bullet \frac{2(1-x^2)-2x(-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$= \frac{2+2x^2}{(1-x^2)+4x^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \boxed{\frac{2}{1+x^2}}$$

مساله 8

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{2}{(x-3)\sqrt{x^2-6x+5}}dx$$

پاسخ

$$\to 2\int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{(x-3)^2-4}}$$

فرض می کنیم $u = x - 3$ باشد ، پس $du = dx$ است.

$$= 2\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-2^2}} = 2\left(\frac{1}{2}\right)\sec^{-1}\left(\frac{1}{2}u\right) + C$$

$$= \boxed{Arcsec\left(\frac{x-3}{2}\right) + C}$$

مساله 9

مطلوب است مشتق زیر

$$\frac{\sin^{-1} x}{1+x}$$

پاسخ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}-\sin^{-1} x}{(1+x)^2}$$

$$=\boxed{\frac{1+x-\left(\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sin^{-1}x\right)}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)(1+x)^2}}$$

مساله 10

مطلوب است مشتق زیر

$$ln((5x \quad 3)^4(2x^2+7)^3$$

پاسخ

$$\to \frac{d}{dx}(ln((5x \quad 3)^4(2x^2+7)^3))$$

$$=\frac{20(5x-3)^3\left(2x^2+7\right)^3+12x(5x-3)^4\left(2x^2+7\right)^2}{(5x-3)^4(2x^2+7)^3}$$

$$=\boxed{\frac{4\left(25x^2-9x+35\right)}{(5x-3)(2x^2+7)}}$$

مساله 11

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{x+6}{x^2+9}dx$$

پاسخ

$$\int \frac{x+6}{x^2+9}\, dx = \int \left(\frac{x}{x^2+9} + \frac{6}{x^2+9}\right)\, dx$$
$$= \int \frac{x}{x^2+9} dx + 6 \int \frac{1}{x^2+9}\, dx$$

فرض می کنیم $u = x^2 + 9 \ \to \frac{du}{dx} = 2x \to dx = \frac{1}{2x} du$

پس داریم.

$$\int \frac{x}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u}\, du = \frac{1}{2} \ln(u)$$

جانشینی را بر می گردانیم.

$$\frac{1}{2} \ln(u) = \frac{\ln(x^2+9)}{2}$$

حالا ، انتگرال دوم را محاسبه می کنیم. برای این کار ، عمل جانشینی زیر را انجام می دهیم.

$$u = \frac{x}{3} \to \frac{du}{dx} = \frac{1}{3} \to dx = 3\, du$$

پس

$$\int \frac{1}{x^2+9} dx = \int \frac{3}{9u^2+9} du = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{\arctan(u)}{3}$$

جانشینی را بر می گردانیم. پس داریم.

$$\int \frac{1}{x^2+9}\, dx = \frac{\arctan\left(\frac{x}{3}\right)}{3}$$

و در نهایت داریم.

$$\int \frac{x}{x^2+9} dx + 6 \int \frac{1}{x^2+9} dx = \frac{\ln(x^2+9)}{2} + 2 \arctan\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

مساله 12

مطلوب است مشتق زیر.

$$y = x^{x^2}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = x^{x^2}$ باشد.

$$ln\, y \ = \ ln\, x^{x^2}$$

$$ln\, y = x^2\, ln\, x$$

$$\frac{d}{dx}(lny) = \frac{d}{dx}(x^2 lnx)$$

$$\frac{1}{y}\frac{d}{dx} = x^2\frac{1}{x} + (2xlnx)$$

$$\frac{dy}{dx} = y\,[x + 2xlnx]$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = x^{x^2+1}(1 + 2xlnx)}$$

مساله 13

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \csc x\, dx$$

پاسخ

$$\rightarrow \int \csc x\, dx = \int \csc x \frac{\csc x + \cot x}{\csc x + \cot x} dx$$

$$= \int \frac{(csc^3 x + \csc x \ \cot x)\, dx}{\csc x + \cot x}$$

$$= \int \frac{-du}{u} = \quad \ln|u| + C$$

$$= \boxed{\quad \ln|\csc x + \cot x| + C}$$

مساله 14
مطلوب است مشتق زیر.

$$y = x^{\cos(2x)}, x > 0$$

پاسخ

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{\cos(2x)}\right) : \ |y| \ = \ \left|x^{\cos(2x)}\right|$$

$$\ln|y| = \cos 2x \ln|x|$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^{\cos(2x)}} \cos 2x\, x^{\cos 2x - 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\cos(2x)} \left(\frac{\cos 2x\, x^{\cos 2x - 1}}{x^{\cos(2x)}}\right)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = x^{\cos(2x)} \left(\frac{\cos 2x}{x} \quad 2\ln|x|(\sin 2x)\right)}$$

مساله 15

مطلوب است مشتق زیر

$$y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{(x+1)^{2/3}}$$

پاسخ

$$\rightarrow y=\frac{\sqrt{1\quad x^2}}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{(1+x)^{1/2}(1\qquad x)^{1/2}}{(x+1)^{2/3}}$$

$$\rightarrow y=(1\qquad x)^{1/2}(1+x)^{-1/6}$$

$$\ln y=\frac{1}{2}\ln(1\quad x)\quad\frac{1}{6}\ln(1+x)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{1\quad x}\quad\frac{1}{6}\bullet\frac{1}{1+x}$$

$$\frac{dy}{dx}=y\bullet\frac{3(1+x)\quad(1\quad x)}{6(1\quad x)(1+x)}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=(1\quad x)^{1/2}(1+x)^{-1/6}}$$

مساله 16

مطلوب است مشتق زیر

$$y=\frac{x^3+2x}{\sqrt[5]{x^7+1}}$$

پاسخ

$$\rightarrow\ y=\frac{x^3+2x}{\sqrt[5]{x^7+1}};\ |y|=\frac{|x^3+2x|}{|x^7+1|^{1/5}}$$

$$\ln|y|=\ln|x^3+2x| \quad \frac{1}{5}\ln|x^7+1|$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+2}{x^3+2x} \quad \frac{7x^6}{5(x^7+1)}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+2x}{(x^7+1)^{1/5}}\left[\frac{3x^2+2}{x^3+2x} \quad \frac{7x^6}{5(x^7+1)}\right]}$$

مساله 17

مطلوب است مشتق زیر.

$$y=\frac{\sqrt{5x-8}\,\sqrt[3]{1-9cos(4x)}}{\sqrt[4]{x^2+10x}}$$

پاسخ

$$ln[f(x)]=ln\left|\sqrt{5x \quad 8}\,\sqrt[3]{1 \quad 9cos(4x)}\right| \quad ln\left|\sqrt[4]{x^2+10x}\right|$$

$$=\frac{1}{2}ln|5x+8|+\frac{1}{3}ln|1 \quad 9cos(4x)| \quad \frac{1}{4}ln|x^2+10x|$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\ \frac{5}{5x+8}+\frac{1}{3}\ \frac{36sin4x}{1-9cos4x} \quad \frac{1}{4}\ \frac{2x+10}{x^2+10x}$$

$$f'(x) = f(x)\left[\frac{5/2}{5x+8} + \frac{12sin4x}{1-9cos4x} \quad \frac{\frac{1}{2}x+5/2}{x^2+10x}\right]$$

$$f'(x) = \boxed{\frac{\sqrt{5x-8}\,\sqrt[3]{1-9cos(4x)}}{\sqrt[4]{x^2+10x}}\left[\frac{5/2}{5x+8} + \frac{12sin4x}{1-9cos4x} \quad \frac{\frac{1}{2}x+5/2}{x^2+10x}\right]}$$

مساله 18

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{e^{Arcsec\,x}}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

پاسخ

فرض می کنیم $u = \operatorname{arcsec} x$ باشد ، پس $du = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ است.

$$\int \frac{e^{Arcsec\,x}}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int e^u$$

$$\boxed{= e^{Arcsec\,x} + C}$$

مساله 19

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{2^{lnx}}{x(2^{lnx}-1)}\,dx$$

پاسخ

فرض می کنیم $u = 2^{\ln x} - 1$ باشد ، پس $du = \frac{x}{\ln(2)*2^{\ln x}}\,dx$ است.

$$\int \frac{2^{lnx}}{x(2^{lnx}-1)}\,dx = \frac{1}{\ln(2)}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{\ln(u)}{\ln(2)}$$

$$\boxed{= \frac{\ln\left(2^{\ln x}-1\right)}{\ln(2)} + C}$$

مساله 20

مطلوب است مشتق زیر.

$$y = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

پاسخ

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x \quad e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\right)$$

$$= \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}) \quad (e^x \quad e^{-x})(e^x \quad e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x+e^{-x})^2 \quad (e^x \quad e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^{2x}+2+e^{-2x}) \quad (e^{2x} \quad 2+e^{-2x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$\boxed{= \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}}$$

مساله 21

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx$$

پاسخ

فرض می کنیم $u = e^{-x} + 1$ باشد ، پس $du = e^{-x}\, dx$ است.

$$\rightarrow \int \frac{1}{1+e^x} dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx$$

$$\int \frac{-du}{u}$$

$$= \quad \ln|u| + C$$

$$\boxed{= \quad \ln|e^{-x} + 1| + C}$$

مساله 22

مطلوب است

$$\frac{dy}{dx} : y = \frac{x}{1-e^x}$$

پاسخ

$$f'(x) = \frac{(1)(1-e^x) - x(-e^x)}{(1-e^x)^2}$$

$$f'(x) = \boxed{\frac{1-e^x+xe^x}{(1-e^x)^2}}$$

کار برد های ماکسیمم .مینیمم ، نرخ .قانون رشد و فرو کاست.

مساله 23

پاسخ

یک طشت آب 16 متر طول دارد . دو انتهای آن به شکل ذوزنقه متساوی الساقین است با ارتفاع 4 متر و قاعده پائینی 4 متر و قاعده بالایی 6 متر. اگر آب با نرخ 10 متر مکعب در دقیقه وارد این طشت شود ، سطح آب به چه سرعتی بالا می آید ، هنگامی که عمق اب 2 متر است.

پاسخ

اگر حجم را V فرض کنیم ، داریم.

$$V = \frac{1}{2}(4 + x)(y)(16) \rightarrow \ V = 8y(x + 4)$$

با استفاده از مثلث های متشابه ، x را به عنوان تابع y بیان می کنیم.
فرض می کنیم x عرض سطح آب باشد. و y عمق آب.

$$\rightarrow \frac{x \quad 4}{y} = \frac{2}{4}$$

$$\rightarrow V \ = \ 8y\left(\frac{y}{2} + 8\right) = 4y^2 + 64y$$

$$\rightarrow \frac{dV}{dt} = \ (8y + 64)\frac{dy}{dt}$$

$y = 2$ و $\frac{dv}{dt} = 10$

$$\rightarrow 10 = 80\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{8}$$ متر در دقیقه

مساله 24

در یک منطقه ، جمعیت موش ها 50 است. بعد از یک سال 800 موش وجود دارد. چه زمانی جمعیت موش ها به 30000 مرسد. فرض کنید مرگ و میر یا حوادث دیگری در کار نباشد. و از فرمول رشد توانی تبعیت می شود.

پاسخ

$$8000 = 500e^{3k}[P = P_0e^{tk}]$$

حالا ، k را پیدا می کنیم.

$$\frac{80}{5} = e^{3k} \rightarrow ln\left(\frac{80}{5}\right) = 3k$$

$$\rightarrow k = \frac{ln(16)}{3}$$

حالا ، با داشتن $P = 30000$ زمان t را محاسبه می کنیم.

$$30000 = 500e^{t\frac{ln(16)}{3}}$$

$$60 = e^{t\frac{ln(16)}{3}}$$

$$\rightarrow ln\left(\frac{60}{1}\right) = t\left[\frac{ln(16)}{3}\right]$$

$$t = \frac{3\ln(60)}{\ln(16)}$$ سال

مساله 25

یک تابع $Q(t)$ پیدا کنید ، بطوری که این تابع تعداد باکتری ها در ظرف کشت باکتری ها را نشان می دهد. در صورتی که نرخ رشد باکتری ها $q(t) = 3t$ است. اینجا t بر حسب ساعت و $q(t)$ بر حسب هزار باکتری در ساعت است. تعداد اولیه باکتری ها 10000 است.

پاسخ

$$Q(t) = \int q(t)dt$$

$$= \int 3^t dt$$

$$= \frac{3^t}{ln3} + C$$

$$\rightarrow @\, t = 0, Q(0) = 10 = \frac{1}{ln3} + C$$

$$\rightarrow C = 10 \quad \frac{1}{ln3}$$

$$\rightarrow \therefore \boxed{Q(t) = \frac{3t}{ln3} + 10 \quad \frac{1}{ln3}}$$

انتگرال گیری به روش جز به جز

مساله 26

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int (x+1)^2 \ln(3x)\, dx$$

پاسخ

فرض می کنیم

$$u = ln3x$$

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = (x+1)^2 dx$$

$$v = \frac{(x+1)^3}{3}$$

پس

$$\int (x+1)^2 \ln(3x)\, dx = uv \quad \int vdu$$

$$= \frac{1}{3}(x+1)^3 \quad \frac{1}{3}\int \frac{(x+1)^3}{x} dx$$

$$= \frac{1}{3}(x+1)^3 \ln 3x \quad \frac{1}{3}\int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x} dx$$

$$= \frac{1}{3}(x+1)^3 \ln 3x \quad \frac{1}{3}\int \left(x^2+3x+3+\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \boxed{\frac{1}{3}(x+1)^3 \ln 3x \quad \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+3x+\ln x\right]+C}$$

مساله 27

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int x^3 e^{x^2}\, dx$$

فرض می کنیم $u = x^2$ باشد ، پس $du = 2x\, dx$ است.

پس داریم.

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \int \frac{x^3 e^u}{2x}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int x^2 e^u du = \frac{1}{2}\int u e^u du$$

حالا ، فرض می کنیم

$$v = u \qquad dw = e^u du$$
$$dv = du \qquad w = e^u$$

پس

$$= \frac{1}{2}(vw \quad \int w dv)$$

$$= \frac{1}{2}(vw \quad \int w dv)$$

$$= \frac{1}{2}(ue^u \quad \int e^u du)$$

$$= \frac{1}{2}(ue^u \quad e^u) + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left(x^2 e^{x^2} \quad e^{x^2}\right) + \mathrm{C}}$$

مساله 28

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int sec^3 x\,dx$$

پاسخ

فرض می کنیم.

$$u = sec\,x$$
$$du = sec\,x\,tan\,x$$

$$dv = sec^2x\,dx$$
$$v = tan\,x$$

پس

$$= sec\,x\,tan\,x \quad \int tan\,x\,sec\,x\,tan\,x$$

$$tan^2\,x = sec^2x \quad 1$$

$$= secx\ tanx \quad \int(sec^3x \quad secx)dx$$
$$= \int secxdx = secx\ tanx + \ln|secx + tanx| \quad \int sec^3xdx$$

$$= 2\int secxdx = secx\ tanx + \ln|secx + tanx|$$

$$= \int secxdx = \boxed{\frac{secx\ tanx + \ln|secx + tanx|}{2}}$$

مساله 29

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int Arctan\,\sqrt{x}\,dx$$

پاسخ

$$\rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{\cos(2x)}\right) : \ |y| = \left|x^{\cos(2x)}\right|$$

$$\ln|y| = \cos 2x \ln|x|$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^{\cos(2x)}}\cos 2x\, x^{\cos 2x-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^{\cos(2x)}\left(\frac{\cos 2x\, x^{\cos 2x-1}}{x^{\cos(2x)}}\right)$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = x^{\cos(2x)}\left(\frac{\cos 2x}{x} \quad 2\ln|x|(\sin 2x)\right)}$$

مساله 30

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int (4x^3 \quad 9x^2 + 7x + 3)e^{-x}\, dx$$

پاسخ

با استفاده مکرر از انتگرال گیری جز به جز ، داریم.

$$= (4x^3 \quad 9x^2 + 7x + 3)(\quad e^{-x}) \quad (12x^2 \quad 18x + 7)(e^{-x}) \\ +(24x \quad 18)(\quad e^{-x}) \quad 24(e^{-x}) + C$$

$$= \quad e^{-x}(4x^3 \quad 9x^2 + 7x + 3) \quad e^{-x}(12x^2 \quad 18x + 7) \\ e^{-x}(24x \quad 18) \quad 24e^{-x} + C$$

$$\boxed{= \quad e^{-x}(4x^3 + 3x^2 + 13x + 16) + C}$$

جانشینی مثلثاتی

مساله 31

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{1}{(x^2+25)^{\frac{3}{2}}}\, dx$$

پاسخ

فرض می کنیم

$$\mathrm{x} = 5tan\theta$$

$$dx = 5sec^2\theta d\theta$$

$$\sqrt{x^2 + 25} = 5sec\theta$$

پس داریم.

$$= \int \frac{5sec^2\theta d\theta}{(5sec\theta)^3}$$

$$= \int \frac{5sec^2\theta}{125sec^3\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{25} \int \frac{1}{sec\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{25} \int cos\theta d\theta = \frac{sin\theta}{25} + C = \frac{1}{25}\left(\frac{tan\theta}{sec\theta}\right) + C$$

$$= \boxed{\frac{x}{25\sqrt{x^2}+25} + C}$$

مساله 32
انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{4x^2-9}} dx$$

پاسخ
فرض می کنیم.

$$2x = 3\ sec\theta$$
$$2dx = 3\ sec\theta\ tan\theta\ d\theta$$
$$\sqrt{4x^2 \quad 9} = 3\ tan\theta$$

پس

$$= \frac{\frac{3}{2}sec\theta tan\theta d\theta}{\frac{9}{4}sec^2\theta(3tan\theta)}$$

$$= \int \frac{2}{9sec\theta} d\theta$$

$$= \frac{2}{9}(sin\theta) + C$$

$$= \boxed{\frac{2}{9}\left(\frac{\sqrt{4x^2-9}}{2x}\right) + C}$$

مساله 33
انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{\ln^3 x}{x\sqrt{ln^2(x)-4}}\,dx$$

پاسخ
فرض می کنیم

$$u = \ln x$$
$$du = \frac{dx}{x}$$

همچنین

$$u = 2\,sec\theta$$
$$du = 2\,sec\theta\;tan\theta\;d\theta$$
$$\sqrt{u^2 \quad 4} = 2\,tan\theta$$

$$= \int \frac{u^3 du}{\sqrt{u^2-4}}$$

$$= \int \frac{8\sec^3\theta(2sec\theta tan\theta d\theta)}{2tan\theta}$$

$$= 8\int \sec^4\theta d\theta$$

$$= 8\int(\tan^2\theta + 1)\sec^2\theta d\theta$$

$$= 8\int \tan^2\theta(\sec^2\theta)d\theta + 8\int\sec^2\theta d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\left[\frac{(u^2-4)^{3/2}}{8}\right] + 8\left[\frac{\sqrt{u^2-4}}{2}\right] + C$$

$$= \boxed{\frac{8}{3}\left[\frac{\left(ln^2x-4\right)^{3/2}}{8}\right] + 8\left[\frac{\sqrt{ln^2x-4}}{2}\right] + C}$$

مساله 34
انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+6}}dx$$

پاسخ
فرض می کنیم

$$\theta = Arctan\frac{x}{\sqrt{6}}$$
$$\mathrm{x} = \sqrt{6}tan\theta$$
$$dx = \sqrt{6}\sec^2\theta d\theta$$
$$\sqrt{x^2+6} = \sqrt{6\tan^2\theta+6}$$
$$= \sqrt{6(\tan^2\theta+1)}$$
$$= \sqrt{6}\sec\theta$$

همچنین برای $\int \sec^3 x$ انتگرال گیری جز به جز بکار می بریم .یعنی فرض می کنیم.

$$u = secx$$
$$\mathrm{du} = secxtanxdx$$
$$dv = \sec^2 xdx$$
$$v = \tan x$$

پس داریم.

$$= \int \frac{(6\tan^2\theta)\sqrt{6}\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{6}sec\theta}$$

$$= 6\int \tan^2\theta\; sec\;\theta\; d\theta$$

$$= 6\int(\sec^2\theta \quad 1)sec\;\theta\; d\theta$$
$$= 6[\int \sec^3\theta\; d\theta \quad \int sec\;\theta\; d\theta]$$

$$= 6[(sec\theta tan\theta \int \tan^2 \theta \; sec\; \theta \; d\theta) \quad \int sec\theta d\theta]$$

$$= 6\left[\frac{1}{2}\; sec\theta \; tan\theta + \frac{1}{2} ln|sec\theta \; tan\theta| \quad \int sec\theta d\theta\right]$$

$$= 6\left[\frac{1}{2}\; sec\theta \; tan\theta \quad \frac{1}{2} ln|sec\theta \; tan\theta|\right] + C$$

$$= \boxed{\frac{3\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{6}}\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right) \quad 3\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{6}} + \frac{x}{\sqrt{6}}\right| + C}$$

برای $\int \sec^3 \theta$ داریم.

$$\int \sec^3 \theta \; d\theta = sec\theta \; tan\theta \quad \int(\sec^3 \theta \quad sec\theta)\; d\theta$$
$$= sec\theta \; tan\theta + \ln|sec\theta \; tan\theta| + C$$
$$\int \sec^3 \theta \; d\theta$$
$$2\int \sec^3 \theta \; d\theta = sec\theta \; tan\theta + \ln|sec\theta \; tan\theta| + C$$
$$\therefore \int \sec^3 \theta \; d\theta = \frac{1}{2}\; sec\theta \; tan\theta + \frac{1}{2}\ln|sec\theta \; tan\theta| + C$$

انتگرال گیری از طریق کسر های جزئی

مساله 35

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{4x+3}{2x^2+3x+1}\, dx$$

پاسخ

$$\int \frac{4x+3}{2x^2+3x+1}\, dx;\; \frac{P}{Q} = \frac{4x+3}{2x^2+3x+1} = \frac{4x+3}{(2x+1)(x+1)}$$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x+1}$$

$$= \frac{A(2x+1)+B(x+1)}{(x+1)(2x+1)}$$

$$\rightarrow 4x+3 = A(2x+1) + B(x+1)$$

اگر

$$x = \frac{1}{2}, B = 2$$

اگر

$$x = \quad 1, A = 1$$

پس

$$\int \frac{4x+3}{2x^2+3x+1}dx = \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{2}{2x+1}dx$$

$$= \boxed{ln|x+1| + 2ln|2x+1| + C}$$

مساله 36

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{3x+1}{x^3+2x^2+x}dx$$

پاسخ

$$\int \frac{3x+1}{x^3+2x^2+x}dx;\ \frac{P}{Q} = \frac{3x+1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{A(x+1)^2 + B(x)(x+1) + C(x)}{x(x+1)^2}$$

$$\rightarrow 3x+1 = A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx$$

اگر

$$x = \quad 1, C = 2$$

اگر

$$x = 0, A = 1$$

پس

$$B = \quad 1$$

$$\int \frac{3x+1}{x^3+2x^2+x}dx = \int \left(\frac{1}{x} \quad \frac{1}{x+1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right)dx$$

$$= \boxed{ln|x| \quad ln|x+1| \quad \frac{2}{x+1} + C}$$

مساله 37

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{x+3}{(x-1)^3} dx$$

پاسخ

کسر را باز نویسی می کنیم.

$$\rightarrow \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} = \frac{x+3}{(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^2}{(x-1)^2} + \frac{B(x-1)}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{Ax^2-2Ax+A+Bx-B+C}{(x-1)^3}$$

$$\frac{x+3}{(x-1)^3} = \frac{Ax^2-2Ax+A+Bx-B+C}{(x-1)^3}$$

$$\begin{array}{lll} \rightarrow A & = 0 & \therefore A = 0 \\ 2A+B & = 1 & B = 1 \\ A \quad B+C & = 3 & C = 4 \end{array}$$

$$\int \frac{x+3}{(x-1)^3} dx = \int \left[\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3}\right] dx$$

$$= \int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \int \frac{4}{(x-1)^3} dx$$

$$= \boxed{\frac{-1}{x-1} \quad \frac{2}{(x-1)^2} + C}$$

مساله 38

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{2x-1}{(x-5)^2} dx$$

پاسخ

کسر را باز نویسی می کنیم.

$$\rightarrow \frac{A}{x-5}+\frac{B}{(x-5)^2}=\frac{2x-1}{(x-5)^2}=\frac{A(x-5)}{(x-5)^2}+\frac{B}{(x-5)^2}=\frac{Ax+5A+B}{(x-5)^2}$$

$$\rightarrow 2x \quad 1 \quad = Ax \quad 5A+B$$

$$\rightarrow A \qquad = 2 \qquad \therefore A=2$$

$$5A+B= \quad 1 \qquad C=4$$

$$\rightarrow \int \frac{2x-1}{(x-5)^3}dx=\int \frac{2}{x-5}dx+\int \frac{9}{(x-5)^2}dx$$

$$=\boxed{2ln|x \quad 5| \quad \frac{9}{x-5}+C}$$

جانشینی گوناگون

مساله 39

انتگرال زیر را محاسبه کید.

$$\int \frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx$$

پاسخ

فرض می کنیم

$$z=tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$sinx = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$cosx=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{1+\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}}$$

$$=\int \frac{2dz}{1+z^2+2z+1-z^2}$$

$$=\int \frac{dz}{1+z}$$

$$= \boxed{\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C}$$

مساله 40
انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{1}{\sin x + \tan x}\,dx$$

پاسخ
جانشینی نصف زاویه

$$= \int \frac{dx}{\sin x + \tan x} = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2}+\frac{2z}{1-z^2}}$$

$$= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{2z\left[\left(1-z^2\right)+\left(1+z^2\right)\right]}{1-z^4}}$$

$$= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{4z}{1-z^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{\left(1-z^2\right)}{z}\,dz$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\left(\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| \quad \frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2}\right) + C}$$

مساله 41
انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{2x^3}{5-\sqrt{x^2-2}}\,dx$$

پاسخ
فرض می کنیم

$$u = \sqrt{x^2 \quad 2}$$

$$u^2 = x^2 \quad 2$$

$$2u = 2xdx$$

$$\int \frac{2x^3}{5-\sqrt{x^2-2}}dx = 2\int \frac{(u^2+2)udu}{5-u}$$

$$= 2\int \frac{u^3+2u}{5-u}du$$

$$= \quad 2\int \left(u^2+5u+27+\frac{135}{u-5}\right)du$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}(x^2 \quad 2)^{3/2} \quad 5(x^2 \quad 2) \quad 54\sqrt{x^2 \quad 2} \quad 270\ln\left|\sqrt{x^2 \quad 2} \quad 5\right| + C}$$

مساله 42

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \frac{1}{5-3\cos x}dx$$

پاسخ

فرض می کنیم

$$z = tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$dz = \frac{\sec^2(x/_2)}{2}$$

$$dx = \frac{2dz}{1+\tan^2(x/_2)}$$

$$dz = \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$\int \frac{1}{5-3\cos x}dx = \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{5-3\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)}$$

$$= \int \frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{\frac{5(1+z^2)-3(1-z^2)}{1+z^2}}$$

$$= \int \frac{2dz}{5+5z^2-3+3z^2} = \int \frac{2dz}{2+8z^2}$$

$$= \int \frac{dz}{1+4z^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2dz}{1+4z^2}$$

$$= \frac{1}{2} Arctan(2z) + C$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} Arctan\left(2\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + C}$$

انتگرال های ناسره

مساله 43

آیا انتگرال زیر همگرا است یا واگرا؟

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

پاسخ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{t\to\infty} \int_{0}^{t} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} \left[Arctanx\right]_{t}^{0} + \lim_{t\to\infty} \left[Arctanx\right]_{0}^{t}$$

$$= \lim_{t\to-\infty} Arctant + \lim_{t\to\infty} Arctant$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$$

$$= \pi$$

پس ، انتگرال ، همگرا است.

مساله 44

آیا انتگرال زیر همگرا است یا واگرا؟

$$: \int_{0}^{3} \frac{1}{x-1} dx$$

پاسخ

$$\int_0^3 \frac{dx}{x-1} = \int_0^1 \frac{dx}{x-1} + \int_1^3 \frac{dx}{x-1}$$

برای $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ داریم.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{x-1}$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \left[\ln|x \quad 1|\right]_0^t$$

$$= \left(\lim_{t\to 1^-} (\ln|t \quad 1|) \quad 0\right)$$

$$= \quad \infty$$

چون $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ واگرا است ، پس $\int_1^3 \frac{dx}{x-1}$ وا گرا است.

مساله 45

آیا انتگرال زیر همگرا است یا وا گرا؟

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$$

پاسخ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} = \lim_{a\to -\infty} \int_a^0 \frac{xdx}{(1+x^2)^2} + \lim_{b\to +\infty} \int_0^b \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$$

$$= \lim_{a\to -\infty} \left[\quad \frac{1}{2(1+x^2)}\right]_a^0 + \lim_{b\to +\infty} \left[\quad \frac{1}{2(1+x^2)}\right]_0^b$$

$$= \lim_{a\to -\infty} \left[\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+a^2)}\right] + \lim_{b\to +\infty} \left[\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1+b^2)}\right]$$

$$= \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0\ ;$$

چون ، حد وجود دارد ، پس انتگرال ، همگرا است.

مساله 46

آیا انتگرال زیر همگرا است یا واگرا؟

$$\int_{-\infty}^{0} x^2 e^x dx$$

پاسخ

جانشین می کنیم.

$$u = x^2 \qquad dv = \mathrm{e^x}\, dx$$
$$\mathrm{du} = 2x dx \qquad v = \mathrm{e^x}$$

$$\int_{-\infty}^{0} x^2 e^x dx$$

$$\int_{-\infty}^{0} x^2 e^x dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} x^2 e^x dx$$

$$\to \int x^2 e^x dx = x^2 e^x \quad \int 2x\, e^x dx$$

حالا ،

$$u = 2x \qquad dv = \mathrm{e^x}\, dx$$
$$\mathrm{du} = 2dx \qquad v = \mathrm{e^x}$$

$$= x^2 e^x \quad 2x e^x + \int 2e^x\, dx = x^2 e^x \quad 2x e^x + 2e^x$$

$$\to \lim_{a\to-\infty} [e^x(2 \quad 2x + x^2)]\,{}_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty} [2 \quad e^x(a^2 \quad 2a + 2$$

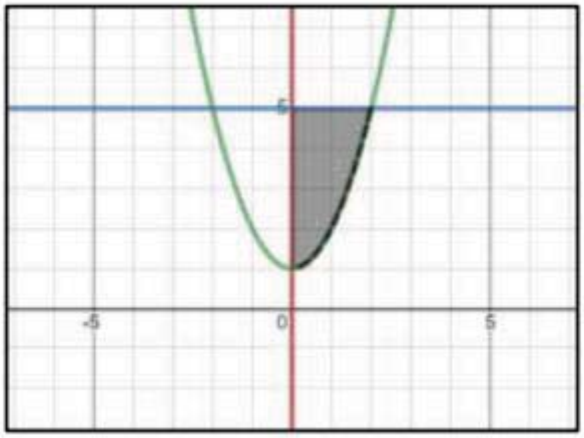
$$= 2 \quad \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{a^2}{e^{-a}} \quad \frac{2a}{e^{-a}} + \frac{2}{e^{-a}}\right)$$
$$= 2$$

پس انتگرال ، همگرا است.

مساحت یک ناحیه

مساله 47

مطلوب است مساحت ناحیه بین نمودار های $y = x^2 + 1$ و $y = 5$ و $x = 0$ در ربع اول صفحه مختصات .



پاسخ

$$y = x^2 + 1 \quad \rightarrow x = \sqrt{y-1}$$

$$\int_1^5 \left(\sqrt{y-1} \quad\quad 0\right) dy$$

فرض می کنیم $u = y - 1 \ \rightarrow du = dy$ پس

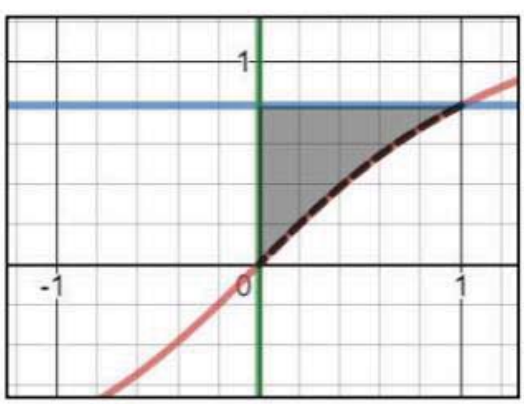
$$= \int_1^5 \sqrt{u} \ \ du$$

$$= \left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^5 = \left[\frac{(y-1)^{3/2}}{3/2}\right]_1^5$$

$= \dfrac{16}{3}$ واحد مربع

مساله 48

مطلوب است مساحت محصور بین منحنی های $x = 0$, $y = \arctan x \,, y = \dfrac{\pi}{4}$ واقع در ربع اول صفحه مختصات.



پاسخ

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} tany dy$$

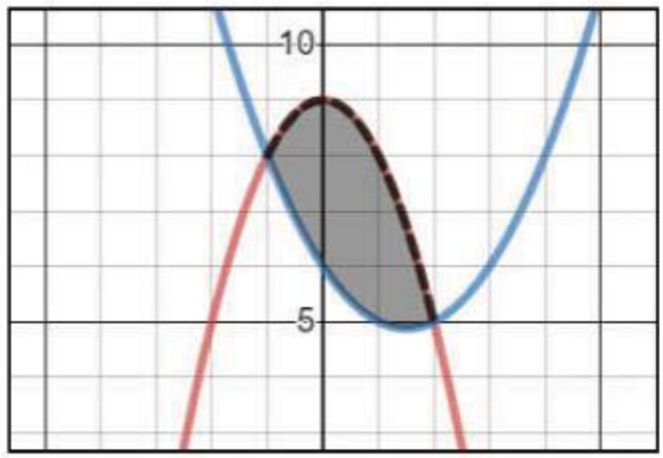
$$= [\ln|\sec y|]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \boxed{5.3832 \times 10^{-3}}$$

مساله 49

مطلوب است مساحت بین منحنی های

$$y = 9 - x^2 \ , \ \ 2y = x^2 - 3x + 12$$



پاسخ

برای نقاط بر خورد ، حل می کنیم.

$$\begin{cases} y = 9 - x^2 \\ 2y = x^2 - 3x + 12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 9 - x^2 \\ y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 6 \end{cases}$$

$$9 - x^2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 6$$

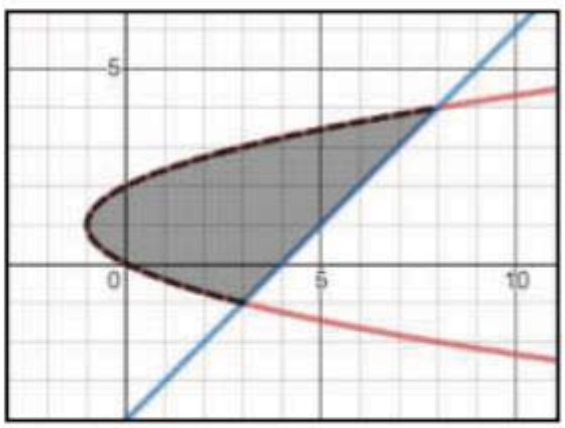
$$0 = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 3$$
$$0 = x^2 - x - 2$$
$$(x-2)(x+1) = 0$$
$$x = 2, x = -1$$

برای مساحت حل می کنیم.

$$A = \int_{-1}^{2} (9 - x^2)\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 6\right)\, dx$$
$$= \left[\frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) + 3x\right]_{-1}^{2}$$
$$= \frac{27}{4} \text{ واحد مربع}$$

مساله 50

مطلوب است مساحت ناحیه بین دو منحنی $x = y^2 - 2y$ و $x - y - 4 = 0$



پاسخ

نقاط تقاطع را پیدا می کنیم.

$$\begin{cases} x = y^2 - 2y \\ x - y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y^2 - 2y \\ x = y + 4 \end{cases}$$

$$y^2-2y=y+4$$
$$y^2-3y-4=0$$
$$(y+1)(y-4)=0$$
$$y=-1, y=4$$

پس داریم.

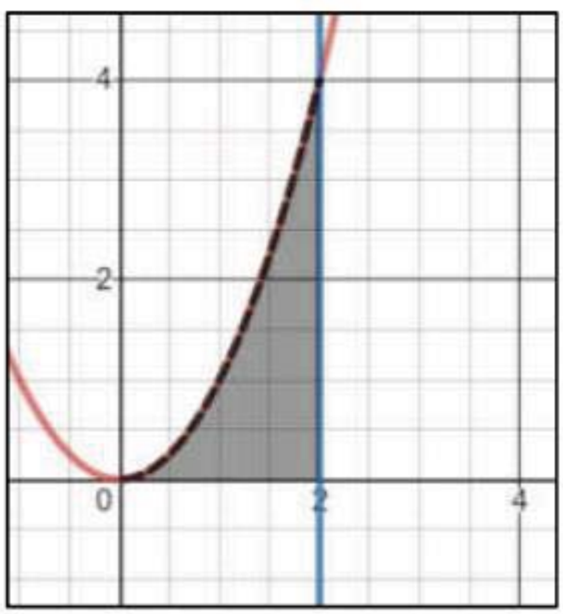
$$A=\int_{-1}^{4}[(y+4)-(y^2-2y)]dy=\int_{-1}^{4}(-y^2+3y+4)\,dy$$
$$=\left[\frac{y^3}{3}+\frac{3y^2}{2}+4y\right]_{-1}^{4}=\left(-\frac{64}{3}+\frac{48}{2}+16\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-4\right)$$
$$=49-\frac{130}{6}-\frac{9}{6}=\frac{125}{6}$$ واحد مربع

حجم یک ناحیه درنتیجه داوران یک جسم

مساله **51**

با استفاده از روش دیسک ، مطلوب است حجم یک ناحیه محصور بین $y=x^2\,, x=2, y=0$

که در $x=2$ دوران می کند. فقط انتگرال را پیدا کنید.



پاسخ

$$y=x^2\rightarrow x=\sqrt{y}$$

$$r = 2 - \sqrt{y}$$

$$V = \pi \int_0^4 \left(2 - \sqrt{y}\right)^2 dy$$

طول کمان یک منحنی

مساله 52

مطلوب است طول منحنی $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ از $x = 0$ تا $x = 2$

پاسخ

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad y' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}}\, dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{\frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}}\, dx$$

$$= \int_0^2 \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}\, dx = \int_0^2 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\, dx$$

$$= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_0^2$$

$$= \boxed{\frac{e^2 - e^{-2}}{2}}$$

مساله 53

مطلوب است طول منحنی $y = e^x$ از $x = 0$ تا $x = 2$، فقط انتگرال را بنویسید.

پاسخ

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (x')^2} dx$$

$$L = \boxed{\int_0^2 \sqrt{1 + e^{2x}} dx}$$

مساله 54

انتگرالی بنویسید که طول منحنی $y = \ln \cos x$ از $x = 0$ تا $x = \frac{\pi}{4}$ محاسبه می کند.

پاسخ

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$$

$$\frac{d}{dx}(\ln|\cos x|) = \frac{1}{\cos x}(\quad \sin x)$$

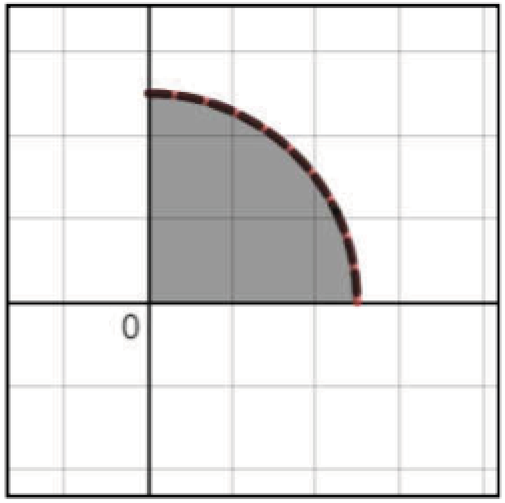
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \left(\frac{-\sin x}{\cos x}\right)^2} \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 x} \, dx$$

$$= \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \, dx}$$

مساله 55

مطلوب است سطح جانبی یک کره با شعاع r



پاسخ

توجه اگر بین دو متغیر یا عدد علامتی وجود ندارد ، آن علامت تفریق یا — است. مثلا اگر داشته باشیم

$x \quad y$ این یعنی $x - y$

در فرمول های زیر SA حروف اول $Surface\ Area$ است به معنی سطح جانبی

$$\rightarrow SA = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$$

$$= 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 \quad x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 \quad x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^r \sqrt{(r^2 \quad x^2)+\frac{(r^2-x^2)x^2}{r^2-x^2}}\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 \quad x^2+x^2}dx$$

$$= 2\pi r[x]_0^r = 2\pi r^2$$

سطح جانبی تمام کره به صورت زیر است.

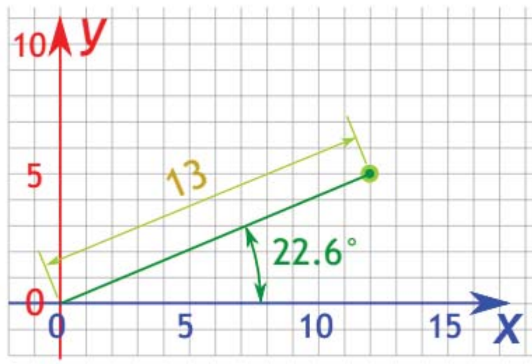
$$2(2\pi r^2) = 4\pi r^2$$

نقاط در صفحه مختصات قطبی

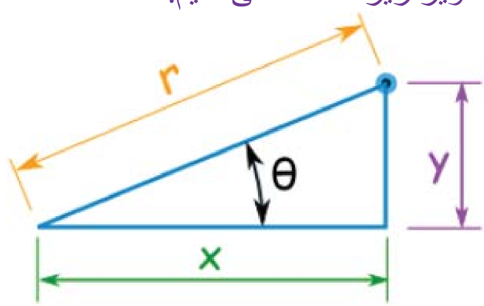
یاد آوری

مختصات قطبی

برای مشخص کردن یک نقطه قطبی ، باید ببینیم آن نقطه نسبت به مرکز چه مقدار دور است و با چه زاویه. مثلا $(13, 22.6^{\circ})$ به صورت زیر است.



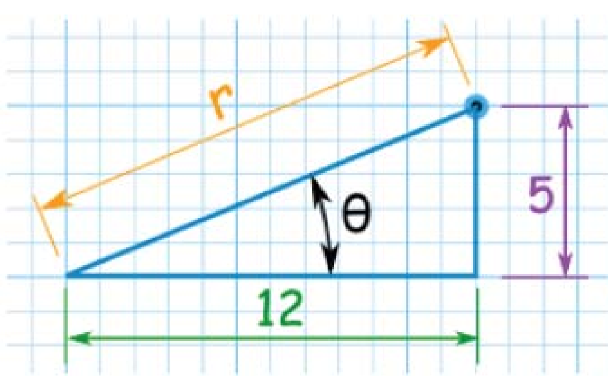
برای تبدیل یکی به دیگری از تصویر زیر استفاده می کنیم.



مساله 56

نقطه با مختصات کارتزین $(12,5)$ را به مختصات قطبی تبدیل کنید.

پاسخ



با استفاده از قضیه فیثاغورث ، طول وتر را پیدا می کنیم.

$$r^2 = 12^2 + 5^2$$

$$r = \sqrt{(12^2 + 5^2)}$$

$$r = \sqrt{(144 + 25)}$$

$$r = \sqrt{(169)} = \mathbf{13}$$

با استفاده از تابع تانژانت ، زاویه را پیدا می کنیم.

$$\tan(\theta) = 5 / 12$$

$$\theta = \tan^{-1}(5 / 12) = \mathbf{22.6^\circ}$$

پس نقطه $(12,5)$ به مختصات قطبی $(13, 22{,}6^\circ)$ است.

خلاصه برای تبدیل از کارتزین $(x\ ,y)$ به قطبی (r,θ) داریم.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

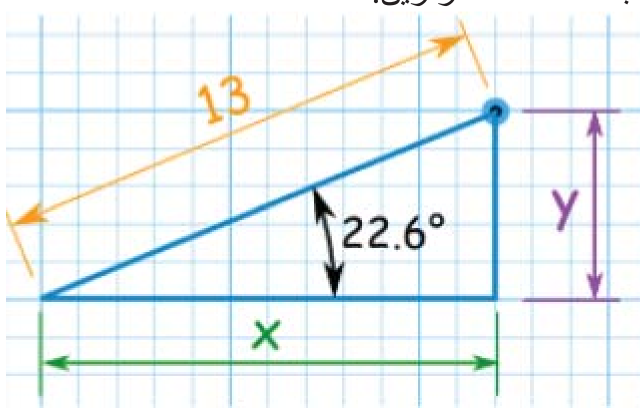
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

برای تبدیل از قطبی به کارتزین

میدانیم مختصات قطبی (r,θ) است برای تبدیل آن به (x,y) مثلث قائم الزاویه را با داشتن وتر و زاویه ، حل می کنیم.

مساله 57

مطلوب است $(13, 22{,}6^\circ)$ به مختصات کارتزین.



پاسخ

برای پیدا کردن x از کسینوس و برای پیدا کردن y از سینوس استفاده می کنیم.

$\cos(22.6°) = x / 13$

$x = 13 \times \cos(22.6°)$

$x = 13 \times 0.923$

$x = \mathbf{12.002...}$

$\sin(22.6°) = y / 13$

$y = 13 \times \sin(22.6°)$

$y = 13 \times 0.391$

$y = \mathbf{4.996...}$

پس جواب $(13, 22.6^\circ)$ است.

خلاصه

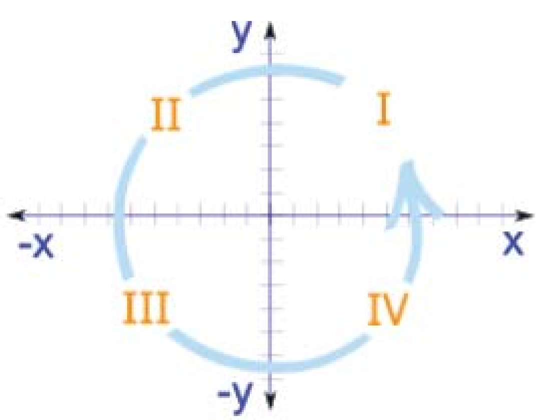
$\mathbf{x = r \times \cos(\theta)}$

$\mathbf{y = r \times \sin(\theta)}$

مساله 58

مختصات $(12, 195^\circ)$ به کارتزین پیدا کنید.

پاسخ



$r = 12 \quad , \quad \theta = 195^\circ$

پس داریم.

$x = 12 \times \cos(195°)$

$x = 12 \times -0.9659...$

$x = \mathbf{-11.59}$

$y = 12 \times \sin(195°)$
$y = 12 \times -0.2588...$
$y = \mathbf{-3.11}$

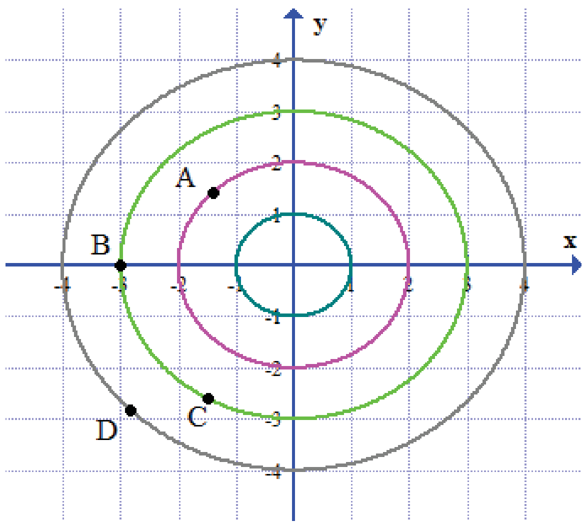
پس نقطه در $(-11.59, -3.11)$ که در ربع سوم قرار دارد.

مساله 59

نقاط زیر را در صفحه مختصات قطبی مشخص کنید.

$$A\left(2,-\frac{5\pi}{4}\right), B(3,99\pi), C\left(3,-\frac{2\pi}{3}\right), D\left(4,-3\frac{\pi}{4}\right)$$

پاسخ



مساله 60

مطلوب است مختصات کارتزین نقطه قطبی زیر.

$$(10, \frac{\pi}{4})$$

پاسخ

$$(r,\theta) = (10, \frac{\pi}{4})$$

$$x = 10\cos\frac{\pi}{4} = 5\sqrt{2}$$

$$y = 10\sin\frac{\pi}{4} = 5\sqrt{2}$$

$$\boxed{C(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})}$$

مساله 61

مطلوب است مختصات کارتزین نقطه قطبی $\left(2,\frac{7\pi}{6}\right)$

پاسخ

$$x = r\cos(\theta) = 2\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

$$y = t\sin(\theta) = 2\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

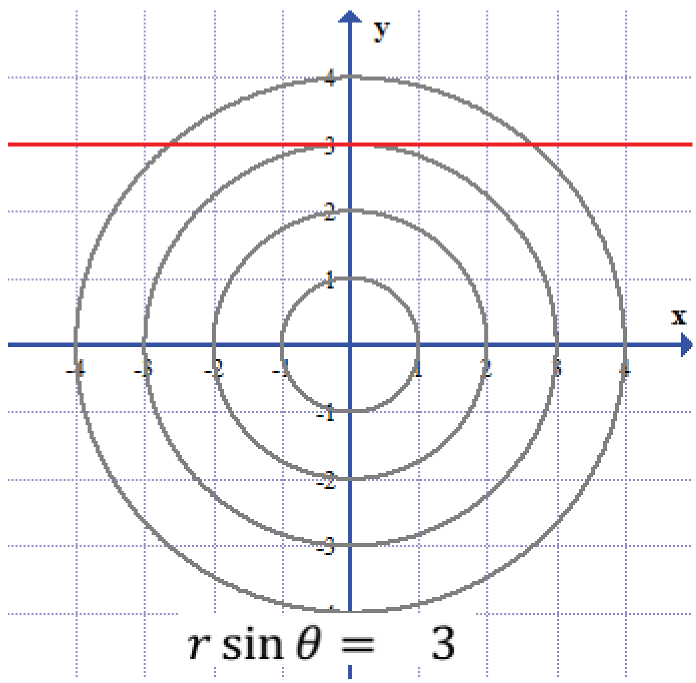
پس مختصات کارتزین نقطه داده شده $\left(-\sqrt{3},-1\right)$ است.

مساله 62

نمودار زیر را رسم کنید.

$$r\sin\theta = 3$$

پاسخ

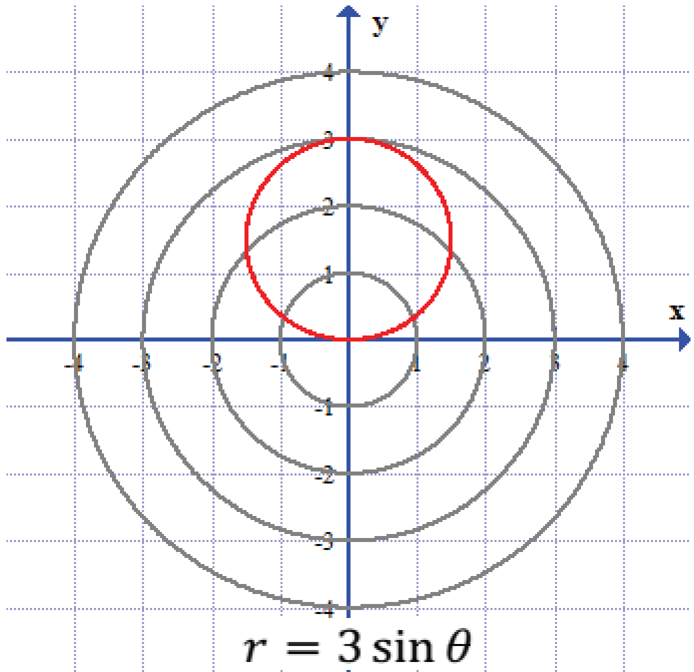


مساله 63

نمودار زیر را رسم کنید.

$$r = 3\sin\theta$$

پاسخ

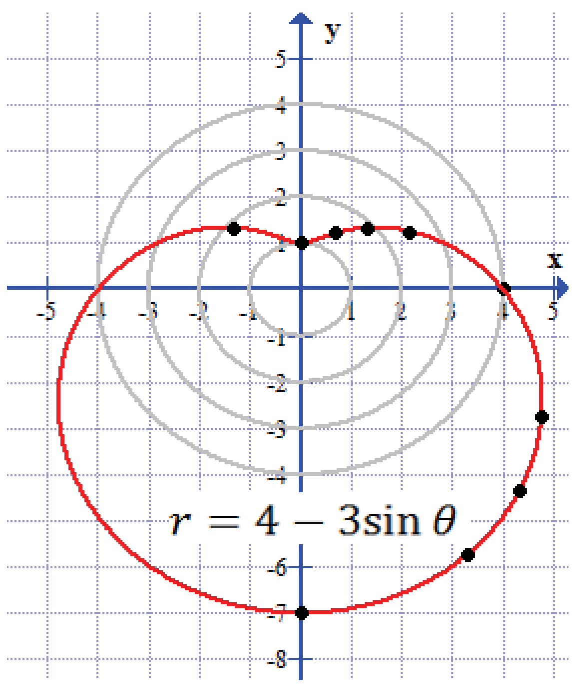


مساله 64

نمودار معادله قطبی $r = 4 - 3\sin\theta$ را رسم کنید.

پاسخ

همان طور که در جبر عمل می کردیم، اینجا هم مقادیری به θ می دادیم و مقدار $r(\theta)$ را محاسبه می کنیم. و سپس نقاط را به هم وصل می کنیم. و با استفاده از قرینگی ، نمودار سمت چپ را رسم می کنیم.



θ	r		θ	r
0	4		0	4
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5}{2}$		$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{11}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{8-3\sqrt{2}}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{8+3\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1		$-\frac{\pi}{2}$	7
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{8-3\sqrt{2}}{2}$			
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{8-3\sqrt{3}}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{8+3\sqrt{3}}{2}$

مساله 65

نمودار $r^2 = 9\sin(2\theta)$ را رسم کنید.

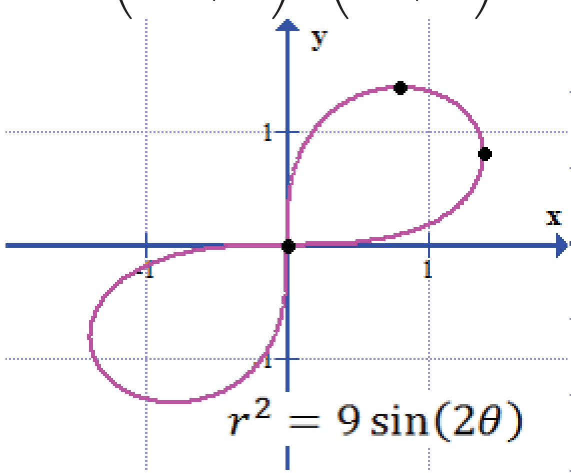
پاسخ

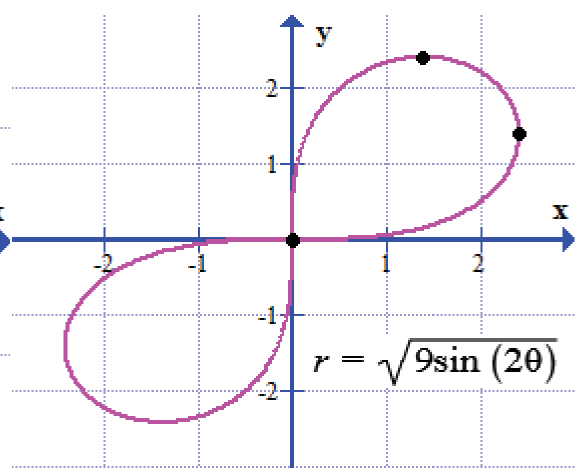
تابع را باز نویسی می کنیم. توجه دارید که r باید مثبت باشد.

$$r = \sqrt{9\sin(2\theta)}$$

چون داریم 2θ پس دو گلبرگ داریم. سه نقطه راپیدا می کنیم و براساس قرینه ، گلبرگ دیگر را هم رسم می کنیم. در مختصات زیر به این صورت است (θ, r)

$$(0,0)\ ,\left(\frac{\pi}{6}, 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)\ ,\left(\frac{\pi}{3}, 3\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

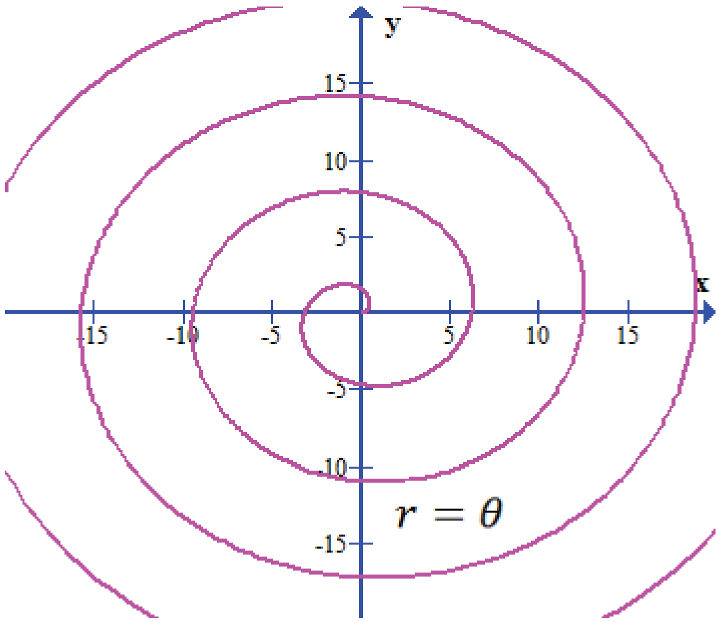




مساله 66

نمودار $r = \theta$ را رسم کنید.

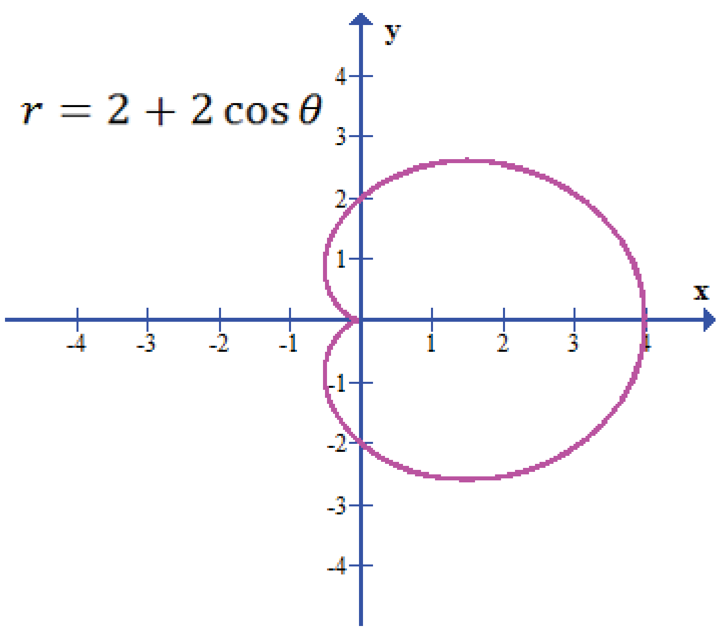
پاسخ



مساله 67

نمودار $r = 2 + 2\cos\theta$ رارسم کنید .

پاسخ



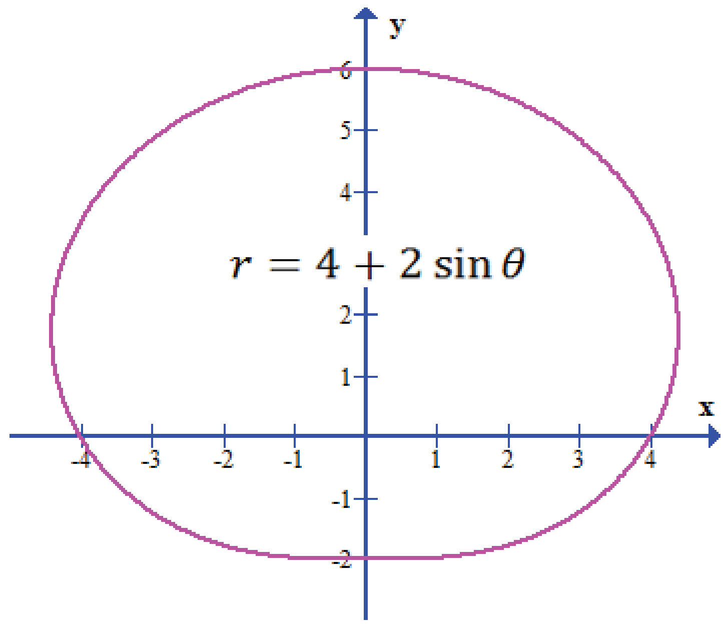
مساله 68

نمودار $r = 4 + 2\sin\theta$ را رسم کنید.

پاسخ

$$\frac{a}{b}=\frac{4}{2}=2 \quad \text{محدب}$$

θ	r
$\pi/2$	2
0	4
$\pi/2$	6

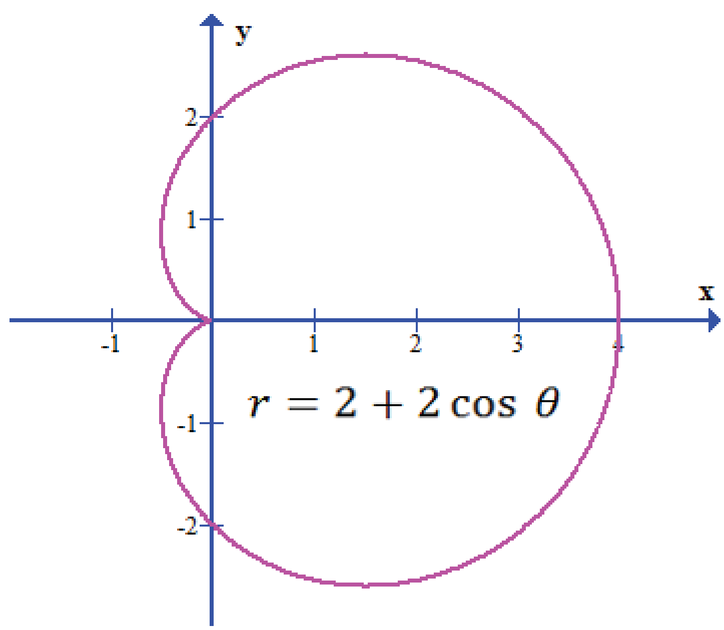


مساله 69

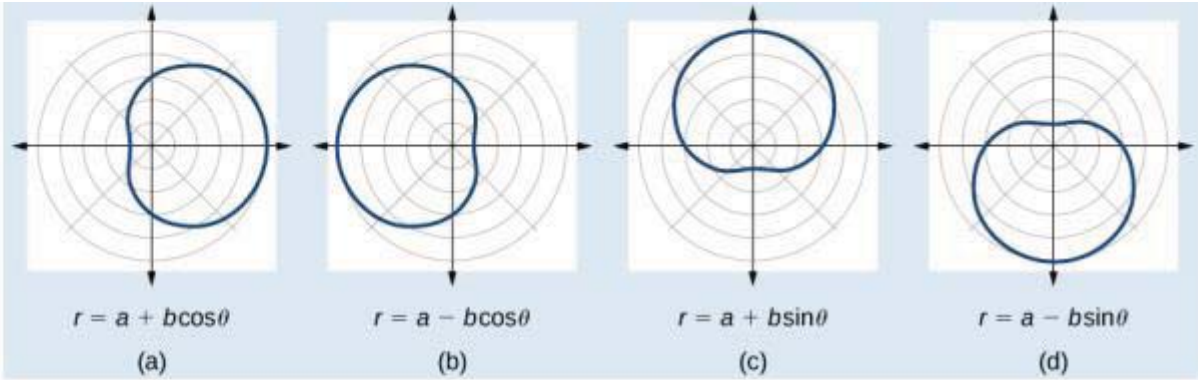
نمودار $r = 2 + 2\cos\ \theta$ را رسم کنید.

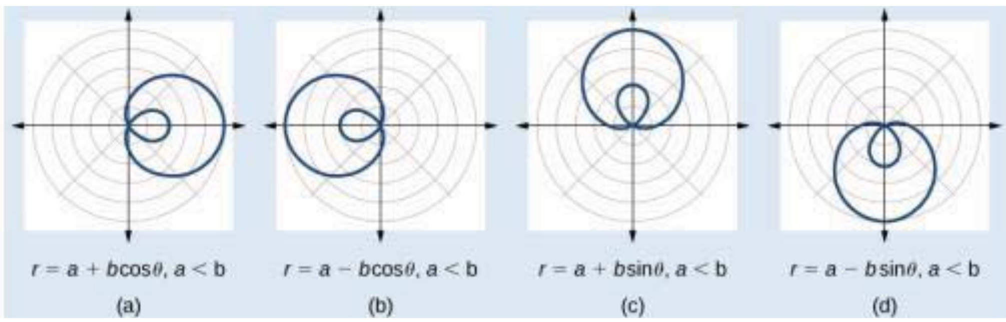
پاسخ

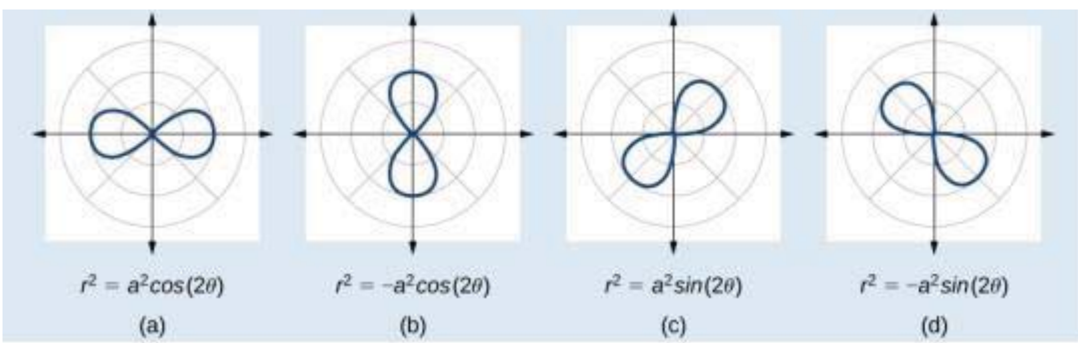
$$\frac{a}{b}=1$$

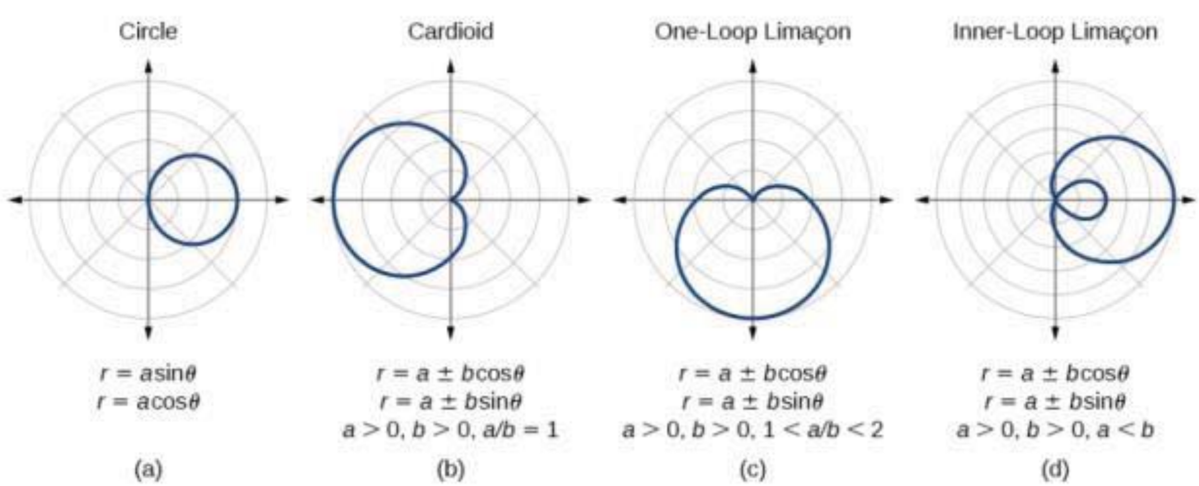


خلاصه نمودار ها

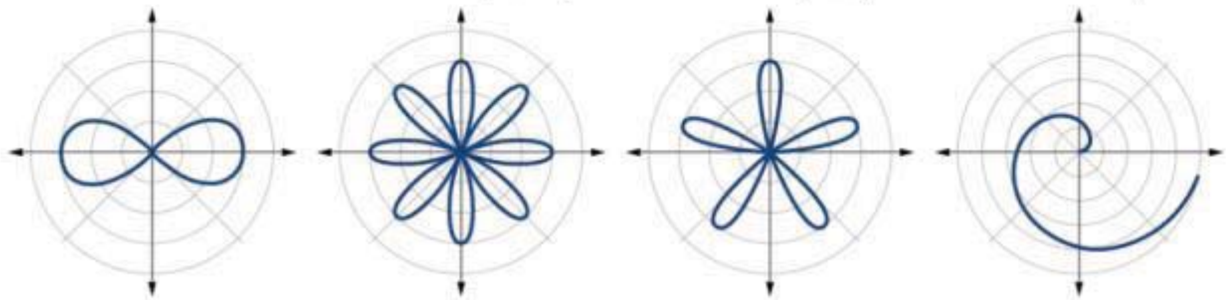








Lemniscate | Rose Curve (*n even*) | Rose Curve (*n odd*) | Archimedes' Spiral

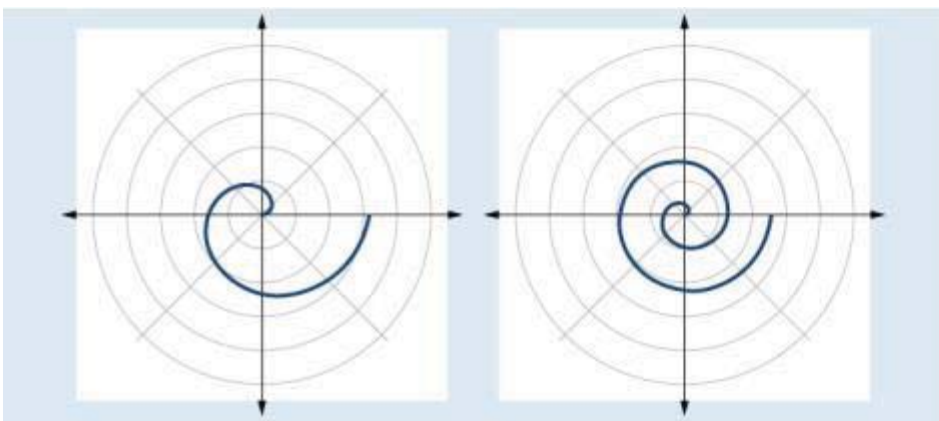


(a) $r^2 = a^2\cos 2\theta$, $r^2 = a^2\sin 2\theta$, $a \neq 0$

(b) $r = a\cos n\theta$, $r = a\sin n\theta$, n even, $2n$ petals

(c) $r = a\cos n\theta$, $r = a\sin n\theta$, n odd, n petals

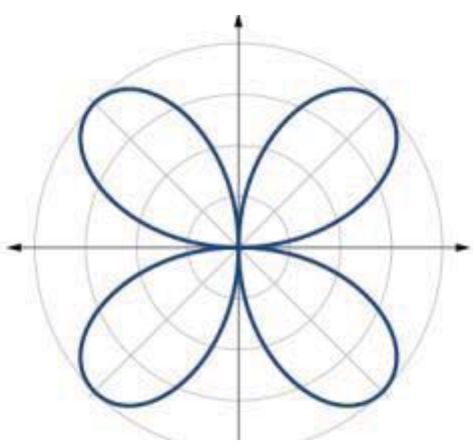
(d) $r = \theta$, $\theta \geq 0$



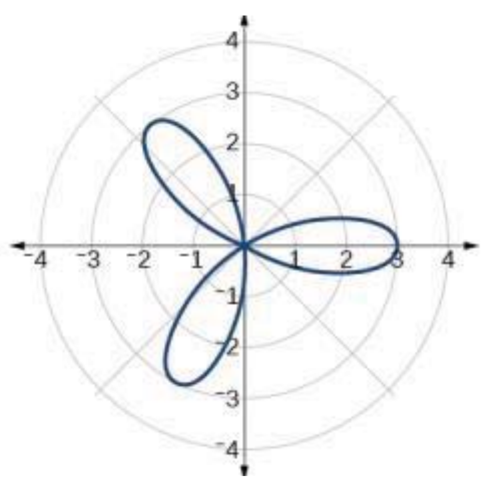
(a) $r = \theta$, $[0, 2\pi]$

(b) $r = \theta$, $[0, 4\pi]$

$r = 4\sin(2\theta)$



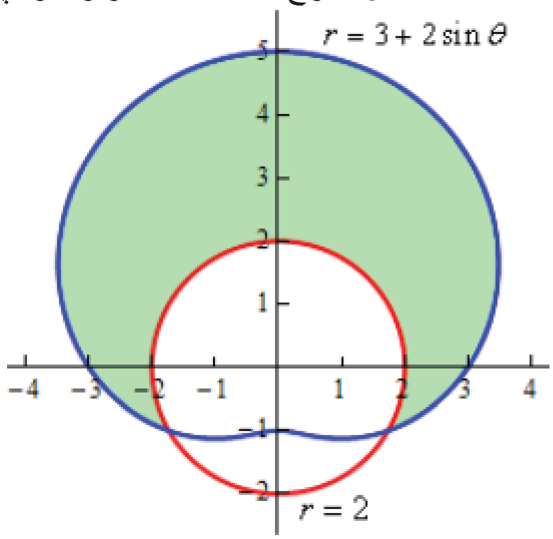
$r = 3\cos(3\theta)$



مساحت در مختصات قطبی

مساله 70

مساحت ناحیه ای که داخل $r = 3 + 2\sin\theta$ و خارج $r = 2$ قرار دارد پیدا کنید.



Type equation here.

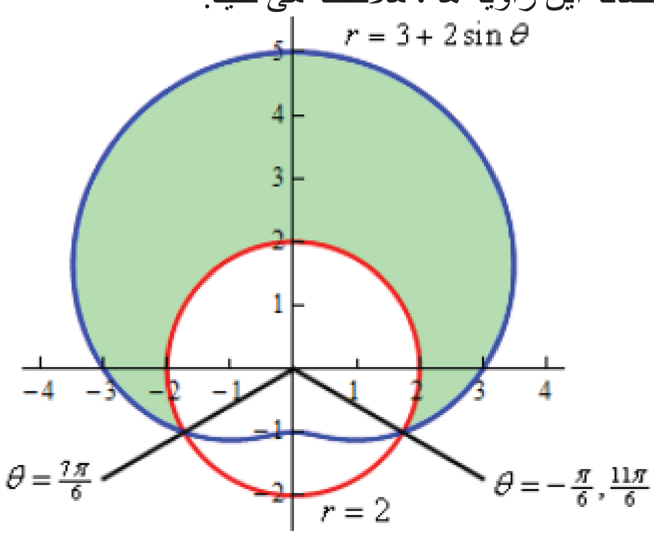
پاسخ

باید مقدار θ که در آن این دو نمودار یکدیگر را قطع می کنند ، پیدا کنیم. برای پیدا کردن این نقاط ، دو معادله را مساوی قرار می دهیم و حل می کنیم.

$$3 + 2\sin\theta = 2$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

در زیر ، نمودار بالا به اضافه این زاویه ها ، ملاحظه می کنید.

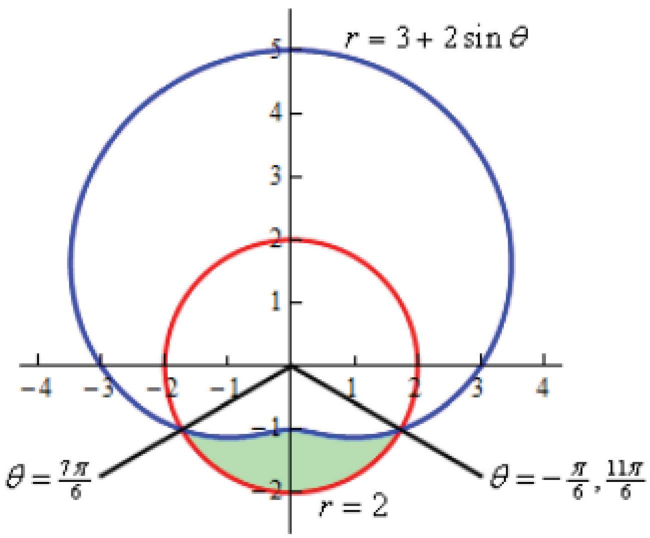


ملاحظه می کنید در سمت راست زاویه های $\frac{11\pi}{6}$ و $-\frac{\pi}{6}$ پیدا کردیم، لذا آن یکی که کوچک تر است انتخاب می کنیم. پس داریم.

$$A=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\frac{1}{2}\left((3+2\sin\theta)^2-(2)^2\right)\,d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\frac{1}{2}\left(5+12\sin\theta+4\sin^2\theta\right)\,d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\frac{1}{2}(7+12\sin\theta-2\cos(2\theta))\,d\theta$$
$$=\frac{1}{2}(7\theta-12\cos\theta-\sin(2\theta))\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}$$
$$=\frac{11\sqrt{3}}{2}+\frac{14\pi}{3}=24.187$$

مساله 71

مساحت ناحیه خارج از $r=3+2\sin\theta$ و داخل $r=2$ را پیدا کنید.



پاسخ

اینجا حدود انتگرال $\frac{11\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$ است.

$$A=\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}}\frac{1}{2}\left((2)^2-(3+2\sin\theta)^2\right)\,d\theta$$
$$=\int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}}\frac{1}{2}\left(-5-12\sin\theta-4\sin^2\theta\right)\,d\theta$$

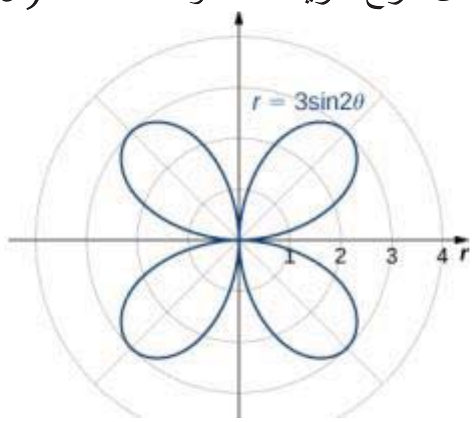
$$= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \frac{1}{2}(-7 - 12\sin\theta + 2\cos(2\theta))\ d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(-7\theta + 12\cos\theta + \sin(2\theta))\Big|_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}}$$

$$= \frac{11\sqrt{3}}{2} - \frac{7\pi}{3} = 2.196$$

مساله 72

مطلوب است مساحت یک گلبرگ از گل سرخ تعریف شده توسط معادله $r = 3\sin(2\theta)$



پاسخ

هنگامی که $\theta = 0$ است داریم $r = 3\sin\big(2(0)\big) = 0$, همچنین $r = 0$ است هنگامی که $\theta = \frac{\pi}{2}$ است. پس داریم.

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)]^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2}[3\sin(2\theta)]^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} 9\sin^2(2\theta) d\theta.$$

با استفاده از $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2}$ و با $\alpha = 2\theta$ داریم.

$$A = \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/2} 9\sin^2(2\theta) d\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{9}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{(1-\cos(4\theta))}{2}\,d\theta \\
&= \frac{9}{4}(\int_0^{\pi/2} 1-\cos(4\theta)d\theta) \\
&= \frac{9}{4}(\theta - \frac{\sin(4\theta)}{4}\Big|_0^{\pi/2} \\
&= \frac{9}{4}(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin 2\pi}{4}) - \frac{9}{4}(0 - \frac{\sin 4(0)}{4}) \\
&= \frac{9\pi}{8}
\end{aligned}
$$

بخش 2
معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول
مساله 1
مطلوب است جواب کلی معادله دیفرانسیل معمولی زیر

$$\boldsymbol{xy' + y = y^2}$$

پاسخ
معادله را می توان به صورت های زیر نوشت.

$$x\frac{dy}{dx} = y^2 - y$$

$$\frac{dy}{y^2 - y} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{dy}{y(y-1)} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{dy}{y-1} - \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$log_e(y-1) - log_e y = log_e x + log_e c$$

ساده می کنیم.

$$log_e\frac{y-1}{y} = log_e cx$$

و در نهایت

$$y - 1 = cxy$$

مساله 2
مساله با مقادیر اولیه زیر را حل کنید.

$$\boldsymbol{(y+1)\frac{dy}{dx} = x^2y - y, \quad y(3) = -e}$$

پاسخ
معادله را باز نویسی می کنیم.

$$(y+1)\frac{dy}{dx}=y(x^2-1)$$

$$\frac{y+1}{y}dy=(x^2-1)dx$$

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)dy=(x^2-1)dx$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$y+\ln y=\frac{x^3}{3}-x+C$$

شرط اول داده شده $y(3)=-e$ را جانشین می کنیم. پس داریم.

$$-e-1=9-3+C$$

$$C=-e-7$$

پس ، جواب را می توان به صورت زیر نوشت.

$$y+\ln y=\frac{x^3}{3}-x-e-7$$

مساله 3

جواب کلی‌معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$\boldsymbol{xy'=x+y.}$$

پاسخ

طرفین را بر x تقسیم می کنیم.

$$\frac{dy}{dx}=1+\frac{y}{x} \qquad \textbf{[a]}$$

فرض می کنیم $y=ux$ باشد. نسبت به x مشتق می گیریم.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x+u \qquad \textbf{[b]}$$

معادله $[b]$ را در $[a]$ جانشین می کنیم.

$$\frac{du}{dx}x+u=1+u$$

$$\frac{du}{dx}x = 1$$

$$du = \frac{dx}{x}$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$u = \ln x + \ln C = \ln(Cx)$$

جانشین می کنیم $u = \frac{y}{x}$ پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = x\ln(Cx)$$

مساله 4

مطلوب است جواب کلی معادله دیفرانسیل زیر.

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x - y}{x + y}}$$

پاسخ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1-(x+y)}{x+y} = \frac{1}{x+y} - 1 \qquad \textbf{[a]}$$

فرض می کنیم $u = x + y$ باشد ، نسبت به x مشتق می گیریم.

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1 \qquad \textbf{[b]}$$

معادله $[b]$ را در $[a]$ جانشین می کنیم.

$$\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{1}{u} - 1$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}$$

$$udu = dx$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\frac{u^2}{2}=x+\frac{C}{2}$$

$$u^2=2x+C$$

جانشین می کنیم $u=x+y$ پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$(x+y)^2=2x+C$$

مساله 5

مساله مقادیر اولیه زیر را حل کنید.

$$\boldsymbol{x^2\frac{dy}{dx}=(x-y)^2+xy,\qquad y(1)=0}$$

پاسخ

طرفین را بر x^2 تقسیم می کنیم.

$$\frac{dy}{dx}=\left(1-\frac{y}{x}\right)^2+\frac{y}{x} \qquad \textbf{[a]}$$

فرض می کنیم $y=ux$ باشد ، بر حسب x مشتق می گیریم.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}x+u \qquad \textbf{[b]}$$

$$\frac{du}{dx}x=(1-u)^2$$

$$\frac{du}{(1-u)^2}=\frac{dx}{x}$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\frac{1}{1-u}=\ln x+C$$

$$(1-\mathrm{u})(\ln x+C)=1$$

جانشین می کنیم $u=\frac{y}{x}$ پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$\left(1-\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right)(\ln x+C)=1$$

$$(\mathrm{x}-\mathrm{y})(\ln x+C)=x \qquad \textbf{[c]}$$

شرط اولیه $y(1) - 0$ جانشین می کنیم.

$$(\ln 1 + C) = 1$$

$$C = 1 - \ln 1$$

پس جواب به صورت زیر است.

$$(\mathrm{x} - \mathrm{y})(\ln x + 1 - \ln 1) = x$$

$$(\mathrm{x} - \mathrm{y})(\ln x + 1) = x$$

مساله 6

مطلوب است جواب کلی معادله دیفرانسیل معمولی زیر.

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 5y + 1}{5x + 2y - 1}}$$

پاسخ

جانشین می کنیم. $x = X + h\,, y = Y + k$ پس داریم.

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X + 5Y + 2h + 5k + 1}{5X + 2Y + 5h + 2k - 1} \qquad [\mathbf{a}]$$

معادله $[a]$ را می توان به شکل متجانس تبدیل کرد.

$$2h + 5k + 1 = 0$$

$$5h + 2k - 1 = 0 \qquad [\mathbf{b}]$$

با حل معادله های $[b]$ داریم.

$$h = \frac{1}{3}, k = -\frac{1}{3}$$

پا شکل متجانس معادله $[a]$ را می توان به صورت زیر بیان کرد.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2X + 5Y}{5X + 2Y} \qquad [\mathbf{c}]$$

فرض می کنیم $Y + UX$ باشد ، بر حسب X مشتق می گیریم.

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dU}{dX}X + U \qquad [\mathbf{d}]$$

معادله $[d]$ را در $[c]$ جانشین می کنیم.

$$\frac{dU}{dX}X + U = \frac{2+5U}{5+2U}$$

$$\frac{dU}{dX}X = \frac{2+5U}{5+2U} - U$$

$$\frac{dU}{dX}X = \frac{2+5U-5U-2U^2}{5+2U}$$

$$\frac{dU}{dX}X = \frac{2(1-U^2)}{5+2U}$$

$$\frac{(5+2U)}{(1-U^2)}dU = 2\frac{dX}{X}$$

$$\left[\frac{7}{2(1-U)} + \frac{3}{2(1+U)}\right]dU = 2\frac{dX}{X}$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$-\frac{7}{2}ln(1-U) + \frac{3}{2}ln(1+U) = 2lnX + 2lnC1$$

$$3\,ln(1+U) - 7\,ln(1-U) = 4\,ln(C1X)$$

$$ln\left[\frac{(1+U)^3}{(1-U)^7}\right] = ln(C1X)^4$$

$$\frac{(1+U)^3}{(1-U)^7} = (C1X)^4$$

$$(1+U)^3 = CX^4(1-U)^7$$

جانشین می کنیم $U = \frac{Y}{X}$ پس داریم.

$$\left(\frac{X+Y}{X}\right)^3 = CX^4\left(\frac{X-Y}{X}\right)^7$$

$$(X+Y)^3 = C(X-Y)^7$$

با جانشین کردن $X = x - \frac{1}{3}$ و $Y = y + \frac{1}{3}$ داریم.

$$(x+y)^3 = C\left(x-y-\frac{2}{3}\right)^7$$

مساله 7

مطلوب است جواب کلی معادله دیفرانسیل معمولی زیر.

$$\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y+4}{4x+6y+5}}$$

پاسخ

باز نویسی می کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y+4}{2(2x+3y)+5} \qquad [\mathbf{a}]$$

فرض می کنیم $u = 2x+3y$ باشد ، نسبت به x مشتق می گیریم.

$$\frac{du}{dx} = 2 + 3\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{du}{dx} - 2\right) \qquad [\mathbf{b}]$$

معادله $[b]$ را در $[a]$ جانشین می کنیم.

$$\frac{1}{3}\left(\frac{du}{dx} - 2\right) = \frac{u+4}{2u+5}$$

$$\frac{du}{dx} - 2 = \frac{3(u+4)}{2u+5}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{3(u+4)}{2u+5} + 2$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{3u+12+4u+10}{2u+5}=\frac{7u+22}{2u+5}$$

$$\frac{2u+5}{7u+22}du=dx$$

$$\frac{1}{7}\left[2-\frac{9}{7u+22}\right]du=dx$$

$$\frac{1}{7}\left[2-\frac{9}{7u+22}\right]du=dx$$

$$\left[2-\frac{9}{7u+22}\right]du=7dx$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$2u-\frac{9}{7}ln(7u+22)=7x+C1$$

$$14u-9\ ln(7u+22)=49x+7C1$$

جانشین می کنیم $u=2x+3y$ پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$14(2x+3y)-9\ ln(14x+21y+22)=49x+C$$

مساله 8

مطلوب است جواب کلی معادله دیفرانسیل معمولی زیر.

$$\left(-\frac{y}{x^2}+2\cos 2x\right)dx+\left(\frac{1}{x}-2\sin 2y\right)dy=0$$

پاسخ

ابتدا کامل بودن معادله را چک می کنیم. پس داریم.

$$M=-\frac{y}{x^2}+2\cos 2x \qquad [a]$$

$$N=\frac{1}{x}-2\sin 2y \qquad [b]$$

معادله $[a]$ را نسبت به y و معادله $[b]$ را نسبت به x مشتق می گیریم.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{x^2} \qquad [c]$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \qquad [d]$$

ملاحظه می شود $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ است ، پس معادله داده شده ، کامل است.
جواب کلی داریم.

$$u = \int M\, dx + k(y)$$

$$= \int \left(-\frac{y}{x^2} + 2\cos 2x\right) dx + k(y)$$

$$= \left(\frac{y}{x} + \sin 2x\right) + k(y) \qquad [e]$$

می دانیم که

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = \frac{1}{x} - 2\sin 2y$$

$$\frac{1}{x} + \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{1}{x} - 2\sin 2y$$

$$\frac{\partial k}{\partial y} = -2\sin 2y$$

$$k(y) = \cos 2y - C$$

با جانشین کردن $k(y)$ در $[e]$ جواب کلی رابه صورت زیر می‌توان بیان کرد.

$$u = \frac{y}{x} + \sin 2x + \cos 2y = C$$

یا جواب کلی را می توان به صورت زیر پیدا کرد.

$$u = \int N\,dy + l(x)$$

$$= \int \left(\frac{1}{x} - 2\sin 2y\right) dy + l(x)$$

$$= \left(\frac{y}{x} + \cos 2y\right) + l(x) \qquad [f]$$

باز می دانیم که

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = -\frac{y}{x^2} + 2\cos 2x$$

$$-\frac{y}{x^2} + \frac{\partial l}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} + 2\cos 2x$$

$$\frac{\partial l}{\partial x} = 2\cos 2x$$

$$l(x) = \sin 2x$$

پس با جانشین کردن $l(x)$ در $[f]$ جواب کلی به صورت زیر است.

$$u = \frac{y}{x} + \sin 2x + \cos 2y = C$$

مساله 9

مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\boldsymbol{e^y dx + (xe^y - 1)dy = 0, \quad y(5) = 0}$$

پاسخ

ابتدا کامل بودن معادله را چک می کنیم.   پس داریم.

$$M = e^y \qquad [a]$$

$$N = xe^y - 1 \qquad [b]$$

معادله M را برا حسب y و N را بر حسب x مشتق می گیریم.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^y \qquad [c]$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = e^y \qquad [d]$$

داریم $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ است ، پس معادله دیفرانسیل داده شده ، کامل است.
جواب کلی به صورت زیر می توان بدست آورد.

$$u = \int M\,dx + k(y)$$

$$= \int e^y\,dx + k(y)$$

$$= xe^y + k(y) \qquad [e]$$

می دانیم

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N = xe^y - 1$$

$$xe^y + \frac{\partial k}{\partial y} = xe^y - 1$$

$$\frac{\partial k}{\partial y} = -1$$

$$k(y) = y$$

پس $k(y)$ را در $[e]$ جانشین می کنیم ، جواب کلی می تواند به صورت زیر بیان شود.

$$u = xe^y + y = C$$

شرط داده شده را جانشین می کنیم.

$$(5 + 0) = C$$

$$C = 5$$

پس جواب به صورت زیر می توان بیان کرد.

$$xe^y + y = 5$$

مساله 10

مطلوب است جواب مخصوص معادله دیفرانسیل معمولی منوط به شرط اولیه داده شده.

$$(x^4 + y^2)dx - xydy = 0, \quad y(2) = 1$$

پاسخ

معادله داده شده ، کامل نیست ، پس

$$P = x^4 + y^2$$

$$Q = -xy$$

پس ،عامل انتگرال گیری به صورت زیر بدست می آید.

$$F(x) = e^{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx}$$

$$= e^{\int \frac{1}{-xy}(2y+y)dx}$$

$$= e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = e^{-3lnx} = e^{lnx^{-3}} = x^{-3} \qquad = \frac{1}{x^3}$$

معادله دیفرانسیل داده شده ، یک معادله کامل می شود اگر آنرا در عامل انتگرال گیری ضرب کنیم.

$$M = FP = \frac{x^4 + y^2}{x^3}$$

$$N = -\frac{xy}{x^3} = -\frac{y}{x^2}$$

پس جواب کلی به صورت زیر می توان بدست آورد.

$$u = \int N\, dy + l(x)$$

$$= \int \left(-\frac{y}{x^2}\right) dy + l(x)$$

$$= -\frac{y^2}{2x^2} + l(x)$$

باز می دانیم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M = \frac{x^4 + y^2}{x^3}$$

$$\frac{y^2}{x^3} + \frac{\partial l}{\partial x} = x + \frac{y^2}{x^3}$$

$$\frac{\partial l}{\partial x} = x$$

$$l(x) = \frac{x^2}{2}$$

پس ، با جانشین کردن $l(x)$, جواب کلی به صورت زیر می توان بیان کرد.

$$u = -\frac{y^2}{2x^2} + \frac{x^2}{2} = C$$

با جانشین کردن شرط اولیه ، داریم.

$$-\frac{1}{8} + \frac{4}{2} = C$$

$$C = \frac{15}{8}$$

پس با جانشین کردن C , جواب مخصوص را بدست می آوریم.

$$-\frac{y^2}{2x^2} + \frac{x^2}{2} = \frac{15}{8}$$

$$x^2 - \frac{y^2}{x^2} = \frac{15}{4}$$

مساله 11
مطلوب است جواب کلی مادله دیفرانسیل معمولی زیر.

$$\boldsymbol{(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy - 6x^2 = 0}$$

پاسخ

طرفین را بر $(1 + x^2)$ تقسیم می کنیم.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{6x^2}{1+x^2}$$

با مقایسه با شکل استاندارد معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول خطی ، داریم.

$$p(x) = \frac{2x}{1+x^2} \qquad r(x) = \frac{6x^2}{1+x^2}$$

پس

$$h = \int p dx = \int \frac{2x}{1+x^2} dx = ln(1+x^2)$$

$$e^h = e^{ln(1+x^2)} = 1 + x^2 \quad \text{and} \quad e^{-h} = \frac{1}{1+x^2}$$

جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = e^{-h}\int e^h r\, dx + Ce^{-h}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\int (1+x^2)\frac{6x^2}{1+x^2} dx + C\frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}\int 6x^2\, dx + \frac{C}{1+x^2}$$

$$= \frac{2x^3}{(1+x^2)} + \frac{C}{1+x^2}$$

همچنین می توان نوشت.

$$y(1+x^2) = 2x^3 + C$$

مساله 12

مطلوب است جواب مخصوص معادله دیفرانسیل معمولی ، منوط به شرط اولیه داده شده.

$$\boldsymbol{x\frac{dy}{dx} + 3y = \frac{sinx}{x^2}, \quad y(\pi/2) = 1}$$

پاسخ
باز نویسی می کنیم.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{3}{x}y=\frac{sinx}{x^3}$$

با مقایسه با شکل استاندارد ، داریم.

$$p(x)=\frac{3}{x} \qquad\qquad r(x)=\frac{sinx}{x^3}$$

پس

$$h=\int pdx=\int\frac{3}{x}dx=3lnx=lnx^3$$

$$e^h=e^{lnx^3}=x^3 \qquad \text{and} \quad e^{-h}=\frac{1}{x^3}$$

پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$y \quad =e^{-h}\int e^h r\,dx+Ce^{-h}$$

$$=\frac{1}{x^3}\int x^3\frac{sinx}{x^3}dx+C\frac{1}{x^3}$$

$$=\frac{1}{x^3}\int sinx\,dx+\frac{C}{x^3}$$

$$=-\frac{cosx}{x^3}+\frac{C}{x^3}$$

شرط اولیه را جانشین می کنیم.

$$1=0+\frac{8C}{\pi^3}$$

$$C=\frac{\pi^3}{8}$$

با جانشین کردن C , جواب مخصوص به صورت زیر است.

$$y=-\frac{cosx}{x^3}+\frac{\pi^3}{8}\frac{1}{x^3} \qquad x^3y+cosx=\frac{\pi^3}{8}$$

مساله 13
مطلوب است جواب کلی معادله دیفرانسیل معمولیِ زیر.

$$\frac{dy}{dx} = y(1 + ye^x)$$

پاسخ
باز نویسی می کنیم.

$$\frac{dy}{dx} - y = y^2 e^x$$

بامقایسه با معادله بر نولی ، داریم.

$$p(x) = -1 \qquad g(x) = e^x \quad \text{and} \quad a = 2$$

پس

$$h = \int (1-a)p\,dx = \int dx = x$$

$$e^h = e^x \quad e^{-h} = e^{-x}$$

پس جواب کلی به صورت u به صورت زیر بدست می آید.

$$u = e^{-h}\int e^h(1-a)g\,dx + C1\,e^{-h}$$

$$= e^{-x}\int e^x(-e^x)\,dx + C1\,e^{-x}$$

$$= -e^{-x}\int e^{2x}\,dx + C1\,e^{-x}$$

$$= -\frac{e^x}{2} + C1\,e^{-x}$$

جانشین می کنیم

$$u = y^{1-a} = y^{1-2} = y^{-1}$$

پس جواب کلی را می توان به صورت زیر بیان کرد.

$$y^{-1} = -\frac{e^x}{2} + C1e^{-x} = \frac{-e^x + 2C1e^{-x}}{2} = \frac{-e^x + Ce^{-x}}{2}$$

$$y(Ce^{-x} - e^x) = 2$$

بخش 4.3
معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم
مساله 1
تابع های $y_1 = \sin(2x)$ و $y_2 = \cos(2x)$ جواب های معادله دیفرانسیل معمولی متجانس خطی زیر است.

$$\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$$

نشان دهید هر ترکیب خطی y_1 و y_2 هم ، جواب معادله دیفرانسیل داده شده است.
پاسخ
فرض می کنیم $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ یک ترکیب خطی y_1 و y_2 هم یک جواب معادله دیفرانسیل داده شده باشد. همچنین فرض می کنیم $c_1 = 2$ و $c_2 = -3$ باشد.

$$y = 2\,sin2x - 3cos2x \qquad \textbf{[a]}$$

دو مرتبه مشتق می گیریم. پس داریم.

$$y'' = -8\,sin2x + 12cos2x \qquad \textbf{[b]}$$

معادلات $[a]$ و $[b]$ را در معادله دیفرانسیل داده شده می گذاریم.

$$y'' + 4y \qquad = -8\,sin2x + 12cos2x + 4(2\,sin2x - 3cos2x)$$

$$= -8\,sin2x + 12cos2x + 8\,sin2x - 12cos2x = 0$$

نشان داده شد.

مساله 2
مطلوب است جواب کلی معادله دیفرانسیل زیر.

$$\boldsymbol{y'' - 2y' - 3 = 0.}$$

پاسخ
فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ یک جواب معادله دیفرانسیل داده شده باشد ، معادله مشخصه را بدست می آوریم.

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = -1,\ \ \lambda_2 = 3$$

پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$$

مساله 3

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -6$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب معادله دیفرانسیل داده شده باشد. معادله مشخصه را بدست می آوریم.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1$$

پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} \qquad \textbf{[a]}$$

ازمعادله $[a]$ مشتق می گیریم.

$$y' = c_2 e^{-x} - (c_1 + c_2 x)e^{-x} \qquad \textbf{[b]}$$

شرط اولیه $y(0) = 4$ را در معادله $[a]$ جانشین می کنیم.

$$4 = (c_1 + 0) \times 1 \qquad \therefore \quad c_1 = 4$$

حالا شرط اولیه $y'(0) = -6$ و مقدار c_1 را در معادله $[b]$ می گذاریم.

$$-6 = c_2 - (4 + 0) \times 1 \qquad \therefore \quad c_2 = -2$$

با جانشین کردن c_1 و c_2 در معادله $[a]$ جواب مخصوص را بدست می آوریم.

$$y = (4 - 2x)e^{-x}$$

مساله 4

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -5$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب معادله دیفرانسیل داده شده باشد. معادله مشخصه را بدست می آوریم.

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = -2 \pm i$$

جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = e^{-2x}(A\,cosx + B\,sinx) \qquad \textbf{[a]}$$

از معادله $[a]$ مشتق می گیریم.

$$y' = -2e^{-2x}(A\,cosx + B\,sinx) + e^{-2x}(-A\,sinx + B\,cosx) \qquad \textbf{[b]}$$

شرط اولیه داده شده $y(0) = 2$ در معادله $[a]$ می گذاریم.

$$2 = A \qquad \therefore \quad A = 2$$

حالا ، شرط اولیه $y'(0) = -5$ و A را در معادله $[b]$ می گذاریم.

$$-5 = -2A + B \qquad \therefore \quad B = -5 + 2 \times 2 = -1$$

حالا ، A و B را در $[a]$ می گذاریم و جواب مخصوص را بدست می آوریم.

$$y = e^{-2x}(2\,cosx - \,sinx)$$

مساله 5

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\boldsymbol{x^2y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = x^m$ جواب معادله دیفرانسیل داده شده باشد. معادله مشخصه را پیدا می کیم.

$$m^2 + (-4-1)m + 6 = 0$$

$$m^2 - 5m + 6 = 0$$

$$(m-2)(m-3) = 0$$

$$m_1 = 2,\;\; m_2 = 3$$

پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = c_1x^2 + c_2x^3 \qquad [a]$$

از $[a]$ مشتق می گیریم.

$$y' = 2c_1x + 3c_2x^2 \qquad [b]$$

شرط اولیه $y(1) = 1$ را در $[a]$ می گذاریم.

$$1 = c_1 + c_2 \qquad [c]$$

حالا ، شرط اولیه $y'(1) = 0$ را در $[b]$ می گذاریم.

$$0 = 2c_1 + 3c_2 \qquad [d]$$

معادله های $[c]$ و $[d]$ را حل می کنیم.

$$c_1 = 3 \qquad c_2 = -2$$

حالا ، c_1 و c_2 را در $[a]$ می گذاریم و جواب مخصوص بدست می آید.

$$y = 3x^2 - 2x^3$$

مساله 6

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\boldsymbol{x^2y'' + 3xy' + y = 0, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = -2}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = x^m$ جواب معادله دیفرانسیل داده شده باشد. معادله مشخصه را بدست می آوریم.

$$m^2 + (3-1)m + 1 = 0$$

$$m^2 + 2m + 1 = 0$$

$$(m+1)^2 = 0$$

$$m_{1,2} = -1$$

جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = (c_1 + c_2 lnx)x^{-1} = \frac{c_1 + c_2 lnx}{x} \qquad [a]$$

از $[a]$ مشتق می گیریم.

$$y' = \frac{c_2 - c_1 - c_2 lnx}{x^2} \qquad [b]$$

شرط اولیه $y(1) = 4$ را در $[a]$ می گذاریم.

$$4 = c_1 + c_2 ln1 \qquad \textbf{[c]}$$

شرط اولیه $y'(1) = -2$ در $[b]$ می گذاریم.

$$-2 = c_2 - c_1 - c_2 ln1 \qquad \textbf{[d]}$$

معادلات $[c]$ و $[d]$ را حل می کنیم.

$$c_1 = 4 \quad c_2 = 2$$

مقادیر c_1 و c_2 را در $[a]$ می گذاریم. ، جواب مخصوص را بدست می آوریم.

$$y = \frac{4 + 2lnx}{x}$$

مساله 7
جواب کلی معادله دیفرانسیل معمولی زیر را پیدا کنید.

$$\boldsymbol{x^2y'' - xy' + 2y = 0}$$

پاسخ
فرض می کنیم $y = x^m$ جواب معادله دیفرانسیل داده شده باشد. معادله مشخصه را بدست می آوریم.

$$m^2 + (-1-1)m + 2 = 0$$

$$m^2 - 2m + 2 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$$

$$m_{1,2} = 1 \pm i$$

جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = x[A\,cos(lnx) + B\,sin(lnx)]$$

مساله 8
مطلوب است رانسکین برای جوابهای اساسی زیر. همچنین با استفاده از نسبت ها ، نشان دهید ، مستقل خطی هستند.

$$\boldsymbol{e^{-2x}, xe^{-2x}}$$

پاسخ

$$y_1 = e^{-2x}\, y_2 = xe^{-2x}.$$

هستند.

$$\frac{y_2}{y_1} = x$$

یک عدد ثابت نیست، پس اینجا y_1 و y_2 مستقل خطی هستند .از y_1و y_2 نسبت به x مشتق می گیریم.

$$y_1' = -2e^{-2x}, \quad y_2 = e^{-2x}(1-2x)$$

همچنین می توان نشان داد راسکین به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} W &= y_1y'_2 - y_2y'_1 \\ &= e^{-2x}.e^{-2x}(1-2x) - xe^{-2x}.(-2e^{-2x}) \\ &= e^{-4x}(1-2x+2x) \\ &= e^{-4x} \neq 0 \end{aligned}$$

همچنین ، راسکین را می توان با استفاده نسبت ها م بدست آورد.

$$W = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' {y_1}^2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{xe^{-2x}}{e^{-2x}}\right)(e^{-2x})^2 = 1.e^{-4x} = e^{-4x} \neq 0$$

یا

$$W = -\left(\frac{y_1}{y_2}\right)' {y_2}^2 = -\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-2x}}{xe^{-2x}}\right)(xe^{-2x})^2 = \frac{1}{x^2}.x^2e^{-4x} = e^{-4x} \neq 0$$

مساله 9

مطلوب است یک جواب کلی حقیقی معادله دیفرانسیل زیر.

$$\boldsymbol{y'' + 3y' + 2y = 24e^{2x}}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب قسمت متجانس معادله دیفرانسیل داده شده باشد. معادله مشخصه را پیدا می کنیم.

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$$

پس ، جواب قسمت متجانس معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است.

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

برای تابع اجباری $r(x)$ فرض می کنیم جواب مخصوص به صورت زیر است.

$$y_p = Ae^{2x} \qquad \textbf{[a]}$$

از $[a]$ دو مرتبه مشتق می گیریم.

$$y_p{}' = 2Ae^{2x} \quad y_p{}'' = 4Ae^{2x}$$

چون y_p هم جواب است ، پس معادله دیفرانسیل داده شده را بر قرار می کند. یعنی

$$4Ae^{2x} + 3(2Ae^{2x}) + 2(Ae^{2x}) = 24e^{2x}$$

$$(4A + 6A + 2A)e^{2x} = 24e^{2x}$$

$$12A = 24 \qquad [\because e^{2x} \neq 0\,]$$

$$A = 2$$

مقدار A را در $[a]$ می گذاریم.

$$y_p = 2e^{2x}$$

پس جواب کلی معادله داده شده به صورت زیر است.

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + 2e^{2x}$$

مساله 10

مطلوب است یک جواب کلی حقیقی برای معادله دیفرانسیل زیر.

$$\boldsymbol{y'' + 2y' + 5y = 20\, sinx}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب قسمت متجانس معادله دیفرانسیل داده شده باشد. معادله مشخصه را پیدا می کنیم.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$$

پس جواب کلی شکل متجانس این معادله به صورت زیر است.

$$y = e^{-x}(A\,cos2x + B\,sin2x)$$

برای تابع اجباری $r(x)$ داده شده ، فرض می کنیم جواب مخصوص به صورت زیر باشد.

$$y_p = K\,cosx + M\,sinx \qquad \textbf{[a]}$$

از y_p دو مرتبه مشتق می گیریم.

$$y_p' = -K\,sinx + M\,cosx \quad y_p'' = -K\,cosx - M\,sinx$$

چون y_p هم یک جواب است ، پس معادله داده شده را بر قرار می کند.

$$(-K\,cosx - M\,sinx) + 2(-K\,sinx + M\,cosx) + 5(K\,cosx + M\,sinx) = 20sinx$$

$$(-K + 2M + 5K)\,cosx + (-M - 2K + 5M)\,sinx = 20sinx$$

$$(4K + 2M)\,cosx + (-2K + 4M)\,sinx = 20sinx$$

با مقایسه ضریب های سینوس و کسینوس

$$4K + 2M = 0 \qquad \textbf{[b]}$$

$$-2K + 4M = 20 \qquad \textbf{[c]}$$

دو معادله های بالا را حل می کنیم.

$$K = -2 \quad M = 4$$

مقادیر M و K را در $[a]$ می گذاریم.

$$y_p = -2\,cosx + 4\,sinx$$

پس جواب کلی کامل به صورت زیر است.

$$y = y_h + y_p = e^{-x}(A\,cos2x + B\,sin2x) + (-2\,cosx + 4\,sinx)$$

مساله 11

جواب کلی حقیقی را پیدا کنید.

$$\boldsymbol{y'' + 2y' + y = 4e^x + 2\,sinx}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب قسمت متجانس معادله دیفرانسیل داده شده باشد. معادله مشخصه را پیدا می کنیم.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1$$

پس جواب کلی شکل متجانس معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است.

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x}$$

برای تابع اجباری $r(x)$, فرض می کنیم جواب مخصوص ، به صورت زیر باشد.

$$y_p = Ae^x + K\, cosx + M\, sinx \qquad \textbf{[a]}$$

نسبت به y_P دو مرتبه مشتق می گیریم.

$$y_p' = Ae^x - K\, sinx + M\, cosx \qquad y_p'' = Ae^x - K\, cosx - M\, sinx$$

چون y_p هم یک جواب است ، پس باید معادله دیفرانسیل داده شده را بر قرار کند.

$$(Ae^x - K\, cosx - M\, sinx) + 2(Ae^x - K\, sinx + M\, cosx) + (Ae^x + K\, cosx + M\, sinx)$$
$$= 4e^x + 2sinx$$

$$4Ae^x + (-K + 2M + K)\, cosx + (-M - 2K + M)\, sinx = 4e^x + 2sinx$$

$$4Ae^x + (2M)\, cosx + (-2K)\, sinx = 4e^x + 2sinx$$

با مقایسه ضریب های $\sin x$, $\cos x$, e^x داریم.

$$A = 1 \qquad K = -1 \quad M = 0$$

مقادیر بالا را در $[a]$ می گذاریم.

$$y_p = e^x - \ cosx$$

پس جواب کلی کامل معادله دیفرانسیل داده شده ، به صورت زیر است.

$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + e^x - \ cosx$$

مساله 12

جواب کلی حقیقی را پیدا کنید.

$$\boldsymbol{y'' - y' - 2y = 3e^{2x}}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب قسمت متجانس معادله دیفرانسیل داده شده باشد. معادله مشخصه را پیدا می کنیم.

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = -1,\ \ \lambda_2 = 2$$

پس جواب کلی شکل متجانس معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است.

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

برای تابع اجباری $r(x)$, فرض می کنیم جواب مخصوص به صورت زیر باشد.

$$y_p = Axe^{2x} \qquad \textbf{[a]}$$

از $[a]$ دو مرتبه مشتق می گیریم.

$$y_p{}' = (2Ax + A)e^{2x} \quad y_p{}'' = (4Ax + 4A)e^{2x}$$

چون y_p هم یک جواب معادله داده شده است ، پس باید آنرا بر قرار کند.

$$(4Ax + 4A)e^{2x} - (2Ax + A)e^{2x} - 2Axe^{2x} = 3e^{2x}$$

$$(4A - A)e^{2x} = 3e^{2x}$$

$$3A = 3 \qquad [\because e^{2x} \neq 0\,]$$

$$A = 1$$

مقدار A را در $[a]$ می گذاریم.

$$y_p = xe^{2x}$$

جواب کلی کامل معادله دیفرانسیل داده شده ، به صورت زیر است.

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + xe^{2x}$$

مساله 13

مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = 8x^2,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب قسمت متجانس معادله دیفرانسیل داده شده باشد. معادله مشخصه را پیدا می کنیم.

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

$$(\lambda + 2)^2 = 0$$

$$\lambda_{1.2} = -2$$

پس جواب کلی شکل متجانس معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است.

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$$

برای تابع اجباری داده شده $r(x)$ فرض می کنیم جواب مخصوص به صورت زیر باشد.

$$y_p = Ax^2 + Bx + C \qquad \textbf{[a]}$$

از y_p دو مرتبه مشتق می گیریم.

$$y_p' = 2Ax + B \qquad y_p'' = 2A$$

چون y_p هم یک جواب است ، پس باید معادله دیفرانسیل داده شده را بر قرار کند.

$$2A + 4(2Ax + B) + 4(Ax^2 + Bx + C) = 8x^2$$

$$4Ax^2 + (8A + 4B)\,x + (2A + 4B + 4C) = 8x^2$$

با مقایسه ضریب های x^2 داریم.

$$4A = 8 \qquad \therefore \quad A = 2$$

با مقایسه ضریب های x و سپس جانشین کردن مقدار A داریم.

$$8A + 4B = 0 \qquad B = -2A \qquad \therefore \qquad B = -4$$

با مقایسه جمله های ثابت و جانشین کردن مقادیر A و B

$$2A + 4B + 4C = 0 \qquad C = -\frac{A}{2} - B = -1 + 4 \qquad \therefore \quad C = 3$$

با جانشین کردن $A\,,B\,,C$ در $[a]$ داریم.

$$y_p = 2x^2 - 4x + 3$$

پس جواب کلی کامل معادله دیفرانسیل داده شده ، به صورت زیر است.

$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2 x)e^{-2x} + (2x^2 - 4x + 3) \qquad [b]$$

با مشتق گرفتن از $[b]$ داریم.

$$y' = (c_2 - 2c_1 - 2c_2 x)e^{-2x} + (4x - 4) \qquad [c]$$

با جانشین کردن شرط اولیه $y(0) = 0$ در $[b]$ داریم.

$$c_1 + 3 = 0 \qquad \therefore \quad c_1 = -3$$

باز با جانشین کردن شرط اولیه $y'(0) = 1$ و مقدار c_1 در $[c]$ داریم.

$$c_2 - 2c_1 - 4 = 1$$

$$c_2 = 2c_1 + 4 + 1 \quad = -6 + 5 \qquad \therefore \quad c_2 = -1$$

با جانشین کردن c_1 , c_2 در $[b]$ جواب مخصوص کله بدست می آوریم.

$$y = (-3 - x)e^{-2x} + (2x^2 - 4x + 3)$$

مساله 14

مساله مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$\boldsymbol{y'' - 2y' - 3y = 5e^{-x}cosx, \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب قسمت متجانس معادله دیفرانسیل داده شده باشد. معادله مشخصه را پیدا می کنیم.

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \;\; \lambda_2 = 3$$

پس جواب کلی شکل متجانس معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است.

$$y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

برای تابع اجباری داده شده $r(x)$ فرض می کنیم جواب مخصوص به صورت زیر باشد.

$$y_p = e^{-x}(K\,cosx + M\,sinx) \qquad [a]$$

از y_p دو مریبه مشتق می گیریم.

$$y_p' = e^{-x}(-K\,sinx + M\,cosx) \qquad y_p'' = e^{-x}(-K\,cosx - M\,sinx)$$

چون y_p هم یک جواب است ، پس باید معادله دیفرانسیل داده شده را بر قرار کند.

$$e^{-x}(-K\,cosx - M\,sinx) - 2e^{-x}(-K\,sinx + M\,cosx) - 3e^{-x}(K\,cosx + M\,si$$
$$= 5e^{-x}cosx$$

$$(-K - 2M - 3K)\,cosx + (-M + 2K - 3M)\,sinx = 5cosx$$

$$(-4K - 2M)\,cosx + (2K - 4M)\,sinx = 5cosx$$

با مقایسه ضریب های $\cos x$ و $\sin x$ داریم.

$$4K + 2M = 0 \qquad \textbf{[b]}$$

$$2K - 4M = 5 \qquad \textbf{[c]}$$

معادله های $[b]$ و $[c]$ را برای K و M حل می کنیم.

$$K = -\frac{1}{2} \qquad M = 1$$

مقادیر K و M را در $[a]$ می گذاریم.

$$y_p = -\frac{1}{2}\,cosx + \,sinx$$

جواب کلی کامل معادله دیفراندیل داده شده به صورت زیر است.

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + \left(-\frac{1}{2}\,cosx + \,sinx\right) \qquad \textbf{[d]}$$

از $[d]$ مشتق می گیریم.

$$y' = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{2}sinx + cosx\right) \qquad \textbf{[e]}$$

مقدار اولیه $y(0) = 0$ در $[d]$ می گذاریم.

$$c_1 + c_2 - \frac{1}{2} = 0 \qquad \textbf{[f]}$$

باز مقدار اولیه $y'(0) = 1$ در $[e]$ می گذاریم.

$$-c_1 + 2c_2 + 1 = 0 \qquad \textbf{[g]}$$

معادله های $[f]$ و $[g]$ را برای c_1 و c_2 حل می کنیم.

$$c_1 = -\frac{3}{2} \qquad c_2 = 2$$

این مقادیر را در $[d]$ می گذاریم. جواب خصوصی کامل به صورت زیر است.

$$y = \left(-\frac{3}{2}e^{-x} - 2e^{2x}\right) + \left(-\frac{1}{2}\,cosx + \,sinx\right)$$

مساله 15
مطلوب است جواب کلی حقیقی معادله دیفرانسیل زیر.

$$\boldsymbol{y'' + 2y' + 2y = 4e^{-x}\,sec^3x}$$

پاسخ
فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب قسمت متجانس معادله دیفرانسیل داده شده باشد. معادله مشخصه را پیدا می کنیم.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i$$

پس شکل متجانس اساسی معادله دیفرانسیل داده شده و رانسکین مربوطه به صورت زیر است.

$$y_1 = e^{-x}cosx, \qquad y_2 = e^{-x}sinx$$

$$\begin{aligned} W &= y_1{y_2}' - y_2{y_1}' \\ &= e^{-x}cosx\, e^{-x}(cosx - sinx) - e^{-x}sinx\, e^{-x}(-cosx - sinx) \\ &= e^{-2x}(cos^2x - sinx\, cosx + sinx\, cosx + sin^2x) \\ &= e^{-2x} \end{aligned}$$

پس جواب کلی شکل متجانس معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است.

$$y_h = e^{-x}(Acosx + Bsinx)$$

پس جواب مخصوص به صورت زیر بدست می آید.

$$\begin{aligned} y_p &= -y_1\int \frac{y_2r}{W}dx + y_2\int \frac{y_1r}{W}dx \\ &= -e^{-x}cosx\int \frac{e^{-x}sinx(\,4e^{-x}\,sec^3x)}{e^{-2x}}dx + e^{-x}sinx\int \frac{e^{-x}cosx(\,4e^{-x}\,sec^3x)}{e^{-2x}}dx \end{aligned}$$

$$= -4e^{-x}cosx\int tanx\, sec^2x\, dx + 4e^{-x}sinx\int sec^2x\, dx$$

$$= -4e^{-x}cosx \left(\frac{1}{2}sec^2x\right) + 4e^{-x}\ sinx\ tanx$$

$$= -2e^{-x}secx\ + 4e^{-x}sinx\ tanx$$

پس جواب کلی کامل معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است.

$$y = y_h + y_p = e^{-x}(Acosx + Bsinx) + (-2e^{-x}secx\ + 4e^{-x}sinx\ tanx)$$

بخش 4.4
معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه بالا
مساله 1
آیا تابع های زیر ، در هر بازه ای مستقل خطی یا وابسته خطی هستند؟ دلیل را ذکر کنید.

$$(x-1)^2, (x+1)^2,\ x$$

پاسخ
اگر فرض کنیم

$$y_1=(x-1)^2,\ y_2=(x+1)^2\ \ y_3=x$$

باشد ، این تابع ها وابسته خطی هستند اگر رابطه های زیر بر قرار باشند.

$$k_1y_1+k_2y_2+k_3y_3=0$$

$$k_1(x-1)^2+k_2(x+1)^2+k_3x=0$$

$$(k_1+k_2)x^2+(-2k_1+2k_2+k_3)x+(k_1+k_2)=0$$

در معادله های بالا k_1, k_2, k_3 همه با هم صفر نیستند.
ضریب های x^2 , x و جمله های ثابت را مساوی قرار می دهیم.

$$k_1+k_2=0 \qquad [a]$$

$$-2k_1+2k_2+k_3=0 \qquad [b]$$

$$k_1+k_2=0 \qquad [c]$$

با جانشین کردن $k_2=-k_1$ از $[a]$ یا $[c]$ در $[b]$ داریم.

$$-2k_1-2k_1+k_3=0$$

$$k_3=4k_1$$

اگر فرض کنیم $k_1=1$ باشد ، داریم. $k_2=-1$ و $k_3=4$
پس تابع های داده شده ، به صورت زیر با هم مربوط می شوند.

$$(x-1)^2-(x+1)^2+4x=0$$

وابسته خطی هستند. این را می توان با محاسبه راسکین نشان داد.

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1{}' & y_2{}' & y_3 \\ y_1{}'' & y_2{}'' & y_3{}'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} (x-1)^2 & (x+1)^2 & x \\ 2(x-1) & 2(x+1) & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

که وابستگی خطی را ثابت می کند.

مساله 2

نشان دهید که تابع های زیر ، جواب هستند و تشکیل یک پایه در هر بازه ای می دهند.

$$\mathbf{1, x, cos3x, sin\,3x;} \qquad \boldsymbol{y^{iv} + 9y'' = 0}$$

پاسخ

اگر تابع های

$$y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = cos3x \ \ y_4 = sin3x$$

تشکیل پایه یک معادله دیفرانسیل داده شده بدهند ،پس جواب کلی آن به صورت زیر است.

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3 + c_4y_4 = c_1 + c_2x + c_3cos3x + c_4sin3x$$

چند مشتق از تابع بالا می گیریم.

$$y' = c_2 - 3c_3sin3x + 3c_4cos3x$$

$$y'' = -9c_3cos3x - 9c_4sin3x$$

$$y''' = 27c_3sin3x - 27c_4cos3x$$

$$y^{iv} = 81c_3cos3x + 81c_4sin3x$$

با جانشین کردن y^{iv} و y'' در معادله دیفرانسیل داده شده

$$81c_3cos3x + 81c_4sin3x + 9(-9c_3cos3x - 9c_4sin3x) = 0$$

یا

$$0 = 0$$

که ثابت می کند تابع های داده شده بالا ، جواب هستند و تشکیل پایه یا اصل می دهند.
برای نشان دادن مستقل خطی ، راسکین را می توان محاسبه کرد.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_1' & y_2' & y_3 & y_4' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & y_4'' \\ y_1''' & y_2''' & y_3''' & y_4''' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & cos3x & sin3x \\ 0 & 1 & -3sin3x & 3cos3x \\ 0 & 0 & -9cos3x & -9sin3x \\ 0 & 0 & 27sin3x & -27cos3x \end{vmatrix} = 243(cos^2 3x + sin^2 3x) = 243 \neq 0$$

که مستقل خطی بودن را ثابت می کند.

مساله 3

مطلوب است جواب کلی معادله دیفرانسیل زیر.

$$\boldsymbol{y^{iv} - 29y'' + 100y = 0.}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب معادله دیفرانسیل داده شده باشد. تابع مشخصه زیر داریم.

$$\lambda^4 - 29\lambda^2 + 100 = 0$$

$$(\lambda^2 - 4)(\lambda^2 - 25) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2,\ \ \lambda_{3,4} = \pm 5$$

پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = c_1e^{-2x} + c_2e^{2x} + c_3e^{-5x} + c_4e^{5x}$$

مساله 4

مطلوب است جواب کلی معادله دیفرانسیل زیر

$$\boldsymbol{y''' - 5y'' + 25y' - 125y = 0.}$$

فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب معادله دیفرانسیل داده شده باشد. تابع مشخصه زیر داریم.

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 25\lambda - 125 = 0$$

$$(\lambda - 5)(\lambda^2 + 25) = 0$$

$$\lambda_1 = 5,\ \ \lambda_{2,3} = \pm 5i$$

پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = c_1e^{5x} + c_2cos5x + c_3sin5x$$

مساله 5

مساله مقدار اولیه زیرا را حل کنید.

$$\boldsymbol{3y''' + 5y'' + y' - y = 0,\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1,\qquad y''(0) = -1}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب معادله دیفرانسیل داده شده باشد. تابع مشخصه زیر داریم.

$$3\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

$$3\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda^2 + 2\lambda - \lambda - 1 = 0$$

$$3\lambda^2(\lambda + 1) + 2\lambda(\lambda + 1) - (\lambda + 1) = 0$$

$$(\lambda + 1)(3\lambda^2 + 2\lambda - 1) = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 1)(3\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1, \lambda_3 = \frac{1}{3}$$

پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} + c_3 e^{\frac{x}{3}} \qquad \textbf{[a]}$$

دو مرتبه مشتق می گیریم.

$$y' = c_2 e^{-x} - (c_1 + c_2 x)e^{-x} + \frac{1}{3} c_3 e^{\frac{x}{3}} \qquad \textbf{[b]}$$

$$y'' = -2c_2 e^{-x} - (c_1 + c_2 x)e^{-x} + \frac{1}{9} c_3 e^{\frac{x}{3}} \qquad \textbf{[c]}$$

شرط اولیه $y(0) = 0$ در $[a]$ جانشین می کنیم.

$$0 = c_1 + c_3 \qquad \therefore \quad c_1 + c_3 = 0 \qquad \textbf{[d]}$$

به همیبن طریق شرط اولیه $y'(0) = 1$ را در $[b]$ می گذاریم.

$$1 = c_2 - c_1 + \frac{c_3}{3} \qquad \therefore \quad -c_1 + c_2 + \frac{c_3}{3} = 1 \qquad \textbf{[e]}$$

باز ، شرط اولیه $y''(0) = -1$ را در $[c]$ می گذاریم.

$$-1 = -2c_2 - c_1 + \frac{c_3}{9} \qquad \therefore \quad -c_1 - 2c_2 + \frac{c_3}{9} = -1 \qquad \textbf{[f]}$$

معادلات $[d], [e], [f]$ را برای c_1, c_2, c_3 حل می کنیم.

$$c_1 = -\frac{9}{16} \qquad c_2 = \frac{1}{4} \qquad c_3 = \frac{9}{16}$$

مقادیر بالا را در $[a]$ می گذاریم. جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = \left(-\frac{9}{16} + \frac{1}{4}x\right)e^{-x} + \frac{9}{16} e^{\frac{x}{3}}$$

مساله 6

مطلوب است جواب کلی معادله دیفرانسیل زیر

$$\boldsymbol{y^{iv} - 8y''' + 32y'' - 64y' + 64y = 0.}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب معادله دیفرانسیل داده شده باشد. تابع مشخصه زیر داریم.

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 32\lambda^2 - 64\lambda + 64 = 0$$

$$(\lambda^2 - 4\lambda + 8)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2,3,4} = -2 \pm 2i$$

پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = e^{-2x}[(A + Bx)cos2x + (C + Dx)]sin2x$$

مساله 7

مطلوب است جواب کلی حقیقی معادله زیر.

$$\boldsymbol{y''' - 2y'' - 5y' + 6y = (e^{2x} + 3)^2}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب قسمت متجانس معادله دیفرانسیل داده شده باشد. تابع مشخصه زیر داریم.

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = -2, \qquad \lambda_3 = 3$$

جواب کلی شکل متجانس معادله دیفرانسیل به صورت زیراست.

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{3x}$$

تابع اجباری $r(x)$ را می توان به صورت زیر بسط داد.

$$r(x) = e^{4x} + 6e^{2x} + 9$$

برای این تابع اجباری $r(x)$ فرض می کنیم جواب مخصوص به صورت زیر باشد.

$$y_p = Ae^{4x} + Be^{2x} + C \qquad \textbf{[a]}$$

چندین مشتق می گیریم.

$$y_p' = 4Ae^{4x} + 2Be^{2x} \quad , \quad y_p'' = 16Ae^{4x} + 4Be^{2x} \quad \text{and} \quad y_p''' = 64Ae^{4x} + 8Be^{2x}$$

چون y_p هم یک جواب است ، پس باید معادله دیفرانسیل داده شده را بر قرار کند.

$$64Ae^{4x} + 8Be^{2x} - 2(16Ae^{4x} + 4Be^{2x}) - 5(4Ae^{4x} + 2Be^{2x}) + 6(Ae^{4x} + Be^{2x} + C)$$
$$= e^{4x} + 6e^{2x} + 9$$

$$(64A - 32A - 20A + 6A)e^{4x} + (8B - 8B - 10A + 6B)e^{2x} + 6C = e^{4x} + 6e^{2x} + 9$$

$$(18A)e^{4x} + (-4B)e^{2x} + 6C = e^{4x} + 6e^{2x} + 9$$

با مقایسه ضرب های e^{2x} , e^{4x} و جمله های ثابت داریم.

$$18A = 1 \qquad \therefore \qquad A = \frac{1}{18}$$

$$-4B = 6 \qquad \therefore \qquad B = -\frac{3}{2}$$

$$6C = 9 \qquad \therefore \qquad C = \frac{3}{2}$$

با جانشین کردن A، B، C در $[a]$ داریم.

$$y_p = \frac{1}{18}e^{4x} - \frac{3}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}$$

پس جواب کلی کامل این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$y = y_h + y_p = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3e^{3x} + \frac{1}{18}e^{4x} - \frac{3}{2}e^{2x} + \frac{3}{2}$$

مساله 8

مطلوب است جواب کلی حقیقی معادله دیفرانسیل زیر.

$$\boldsymbol{y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب قسمت متجانس معادله دیفرانسیل داده شده باشد. تابع مشخصه زیر داریم.

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 = 2$$

پس سه جواب های مستقل خطی شکل متجانس این معادله دیفرانسیل ، به صورت زیر هستند.

$$y_1 = 1 \qquad y_2 = e^x \qquad \text{and} \quad y_3 = e^{2x}$$

پس جواب کلی قسمت متجانس این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x}$$

برای معادله اجباری $r(x)$ می توانیم جواب مخصوص را پیدا کنیم با استفاده از روش تغییر پارامتر ها

$$y_p(x) = y_1(x)\int \frac{W_1(x)}{W(x)}r(x)dx + y_2(x)\int \frac{W_2(x)}{W(x)}r(x)dx + y_3(x)\int \frac{W_3(x)}{W(x)}r(x)dx \qquad [a]$$

اینجا

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ {y_1}' & {y_2}' & {y_3}' \\ {y_1}'' & {y_2}'' & {y_3}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 4e^{3x} - 2e^{3x} = 2e^{3x}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & {y_2}' & {y_3}' \\ 1 & {y_2}'' & {y_3}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 1 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ {y_1}' & 0 & {y_3}' \\ {y_1}'' & 1 & {y_3}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{2x} \\ 0 & 0 & 2e^{2x} \\ 0 & 1 & 4e^{2x} \end{vmatrix} = -2e^{2x}$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ {y_1}' & {y_2}' & 0 \\ {y_1}'' & {y_2}'' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 0 \\ 0 & e^x & 1 \end{vmatrix} = e^x$$

با جانشین کردن w_1 , w_2 , w_3 , w در $[a]$ داریم.

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \int \frac{e^{3x}}{2e^{3x}}\left(\frac{e^x}{1+e^{-x}}\right)dx + e^x\int \frac{-2e^{2x}}{2e^{3x}}\left(\frac{e^x}{1+e^{-x}}\right)dx + e^{2x}\int \frac{e^x}{2e^{3x}}\left(\frac{e^x}{1+e^{-x}}\right)dx \\ &= \int \frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{1+e^{-x}}\right)dx - e^x\int \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)dx + e^{2x}\int \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}ln(e^x+1) - e^x[ln(e^{-x}+1) - ln(e^{-x})] + \frac{1}{2}e^{2x}ln(e^{-x}+1) \end{aligned}$$

پس جواب کلی کامل این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} y = y_h + y_p = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x} + \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}ln(e^x+1) - e^x[ln(e^{-x}+1) - ln(e^{-x})] \\ + \frac{1}{2}e^{2x}ln(e^{-x}+1) \end{aligned}$$

مساله 9

مطلوب است جواب کلی حقیقی معادله دیفرانسیل زیر.

$$\boldsymbol{y''' + y'' + y' + y = e^x + e^{-x} + \sin x}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب قسمت متجانس معادله دیفرانسیل داده شده باشد. تابع مشخصه زیر داریم.

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_{2,3} = \pm i$$

پس ، جواب کلی شکل متجانس معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است.

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 cosx + c_3 sinx$$

برای این تابع اجباری $r(x)$ فرض می کنیم جواب مخصوص به صورت زیر باشد.

$$y_p = Ae^x + Bxe^{-x} + Kx\ cosx + Mx\ sinx \qquad \textbf{[a]}$$

سه مرتبه از y_p مشتق می گیریم.

$$y_p' = Ae^x + Be^{-x} - Bxe^{-x} + Mx\ cosx - Kx\ sinx + K\ cosx + M\ sinx$$

$$y_p'' = Ae^x - 2Be^{-x} + Bxe^{-x} - Kx\ cosx - Mx\ sinx + 2M\ cosx - 2K\ sinx$$

$$y_p''' = Ae^x + 3Be^{-x} - Bxe^{-x} - Mx\ cosx + Kx\ sinx - 3K\ cosx - 3M\ sinx$$

چون y_p هم یک جواب است ، پس باید معادله دیفرانسیل داده شده را بر قرار کند.یعنی

$$\begin{aligned}(Ae^x &+ 3Be^{-x} - Bxe^{-x} - Mx\ cosx + Kx\ sinx - 3K\ cosx - 3M\ sinx)\\ &+ (Ae^x - 2Be^{-x} + Bxe^{-x} - Kx\ cosx - Mx\ sinx + 2M\ cosx\\ &- 2K\ sinx)\\ &+ (Ae^x + Be^{-x} - Bxe^{-x} + Mx\ cosx - Kx\ sinx + K\ cosx + M\ sinx)\\ &+ (Ae^x + Bxe^{-x} + Kx\ cosx + Mx\ sinx) = e^x + e^{-x} + \sin x\end{aligned}$$

$$4Ae^x + 2Be^{-x} + (2M - 2K)\ cosx + (-2M - 2K)\ sinx = e^x + e^{-x} + \sin x$$

با مقایسه ضریب های e^x و e^{-x}

$$4A = 1 \qquad \therefore \qquad A = \frac{1}{4}$$

$$2B = 1 \qquad \therefore \qquad B = \frac{1}{2}$$

به همین طریق با مقایسه ضریب های $\cos x$ و $\sin x$

$$2M - 2K = 0 \qquad \textbf{[b]}$$

$$-2M - 2K = 1 \qquad \textbf{[c]}$$

معادله های $[b]$ و $[c]$ برای K و M حل می کنیم.

$$K = -\frac{1}{4} \qquad \text{and} \qquad M = -\frac{1}{4}$$

مقادیر $A\,,B\,,K\,,M$ را در $[a]$ می گذاریم.

$$y_p = \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{4}x\,cosx - \frac{1}{4}x\,sinx$$

پس جواب کلی کامل معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است.

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2cosx + c_3sinx + \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{2}xe^{-x} - \frac{1}{4}x\,cosx - \frac{1}{4}x\,sinx$$

مساله 10

مطلوب است جواب کلی حقیقی معادله دیفرانسیل زیر.

$$\boldsymbol{y^{iv} - 2y'' + y = e^x + sinx}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب قسمت متجانس معادله دیفرانسیل داده شده باشد. تابع مشخصه زیر داریم.

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda^2 - 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,3} = -1,\ \ \lambda_{2,4} = 1$$

پس ، جواب کلی شکل متجانس معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است.

$$y_h = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3xe^{-x} + c_4xe^x$$

برای این تابع اجباری $r(x)$ فرض می کنیم جواب مخصوص به صورت زیر باشد.

$$y_p = Ax^2e^x + Kcosx + Msinx \qquad \textbf{[a]}$$

چهار مرتبه از y_p مشتق می گیریم.

$$y_p' = 2Axe^x + Ax^2e^x + M\,cosx - K\,sinx$$

$$y_p'' = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x - Kcosx - M\,sinx$$

$$y_p''' = 6Ae^x + 6Axe^x + Ax^2e^x + Kcosx - M\,sinx$$

$$y_p{}^{iv} = 12Ae^x + 8Axe^x + Ax^2e^x + Kcosx + M\,sinx$$

چون y_p هم یک جواب است ، پس باید معادله دیفرانسیل داده شده را بر قرار کند.یعنی

$$\left[12Ae^x + 8Axe^x + Ax^2e^x + Kcosx + M\,sinx\right] - 2\left[2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x - Kcosx - M\,sinx\right] + \left[Ax^2e^x + Kcosx + Msinx\right] = e^x + sinx$$

$$8Ae^x + 4Kcosx + 4Msinx = e^x + sinx$$

با مقایسه ضریب های $e^x\ , \cos x\ , \sin x$ داریم.

$$8A = 1 \qquad \therefore \qquad A = \frac{1}{8}$$

$$4K = 0 \qquad \therefore \qquad K = 0$$

$$4M = 1 \qquad \therefore \qquad M = \frac{1}{4}$$

مقادیر $A, K\ , M$ را در $[a]$ می گذاریم.

$$y_p = \frac{1}{8}x^2e^x + \frac{1}{4}sinx$$

پس جواب کلی کامل معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است.

$$y = y_h + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^x + c_3xe^{-x} + c_4xe^x + \frac{1}{8}x^2e^x + \frac{1}{4}sinx$$

مساله 11

مطلوب است جواب کلی حقیقی معادله دیفرانسیل زیر.

$$\boldsymbol{y^{iv} + 2y'' + y = 3 + cos2x}$$

پاسخ

فرض می کنیم $y = e^{\lambda x}$ جواب قسمت متجانس معادله دیفرانسیل داده شده باشد. تابع مشخصه زیر داریم.

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,3} = i,\ \ \lambda_{2,4} = -i$$

پس ، جواب کلی شکل متجانس معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است.

$$y = (Ax + B)cosx + (Cx + D)sinx$$

برای این تابع اجباری $r(x)$ فرض می کنیم جواب مخصوص به صورت زیر باشد.

$$y_p = E + Kcos2x + Msin2x \qquad \textbf{[a]}$$

چهار مرتبه از y_p مشتق می گیریم.

$$y_p' = 2M\ cos2x - 2K\ sin2x$$

$$y_p'' = -4K\ cos2x - 4M\ sin2x$$

$$y_p''' = -8M\ cos2x + 8K\ sin2x$$

$$y_p{}^{iv} = 16K\ cos2x + 16M\ sin2x$$

چون y_p هم یک جواب است ، پس باید معادله دیفرانسیل داده شده را بر قرار کند.یعنی

$$[16K\ cos2x + 16M\ sin2x] + 2[-4K\ cos2x - 4M\ sin2x] + [E + Kcos2x + Msin2x] = 3 + cos2x$$

$$E + 9Kcos2x + 9Msin2x = 3 + cos2x$$

با مقایسه ضریب های جمله های ثابت و $\cos 2x$ و $\sin 2x$ داریم.

$$E = 3 \qquad \therefore \qquad E = 3$$

$$9K = 1 \qquad \therefore \qquad K = \frac{1}{9}$$

$$9M = 0 \qquad \therefore \qquad M = 0$$

مقادیر $A\ , K\ , M$ را در $[a]$ می گذاریم.

$$y_p = 3 + \frac{1}{9}cos2x$$

پس جواب کلی کامل معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است.

$$y = y_h + y_p = (Ax + B)cosx + (Cx + D)sinx + 3 + \frac{1}{9}cos2x$$

بخش 4.5

دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی

مساله 1

ابتدا معادله دیفرانسیل داده شده را به صورت دستگاه معادلات دیفرانسیل تبدیل کنید و سپس یک جواب کلی برای آن پیدا کنید.

$$\boldsymbol{y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0}$$

پاسخ

می توانیم معادله دیفرانسیل داده شده را به دستگاه تبدیل کنیم.

$$y_1 = y, y_2 = y' y_3 = y''$$

مشتق می گیریم.

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3$$

$$y_3' = y''' = 6y'' - 11y' + 6y = 6y_3 - 11y_2 + 6y_1$$

حالا ، به صورت ماتریس می نویسیم.

$$\begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

پس ، معادله مشخصه به صورت زیر است.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 6 & -11 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(-6\lambda + \lambda^2 + 11) + 6 = 0$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

بردار مخصوص مرتبط با $\lambda_1 = 1$ به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} -\lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 1 \\ 6 & -11 & 6-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 6 & -11 & 5\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}^{(1)}=\begin{Bmatrix}0\\0\\0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}^{(1)}=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}$$

به همین طریق بردار مخصوص $\lambda_3 = 3$, $\lambda_2 = 2$ به صورت های زیر است.

$$\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}^{(2)}=\begin{Bmatrix}1\\2\\4\end{Bmatrix}\quad \begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}^{(3)}=\begin{Bmatrix}1\\3\\9\end{Bmatrix}$$

پس جواب کلی دستگاه به صورت زیر است.

$$\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{Bmatrix}=c_1\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}^{(1)}e^{\lambda_1 t}+c_2\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}^{(2)}e^{\lambda_2 t}+c_3\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}^{(3)}e^{\lambda_3 t}$$

$$\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{Bmatrix}=c_1\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}e^{t}+c_2\begin{Bmatrix}1\\2\\4\end{Bmatrix}e^{2t}+c_3\begin{Bmatrix}1\\3\\9\end{Bmatrix}e^{3t}$$

پس جواب کلی معادله داده شده به صورت زیر است.

$$y=y_1=c_1e^{t}+c_2e^{2t}+c_3e^{3t}$$

مثال 2

مطلوب است جواب کلی حقیقی دستگاه زیر.

$$\boldsymbol{y_1'=y_1+2y_2+y_3}$$

$$\boldsymbol{y_2'=6y_1-y_2}$$

$$\boldsymbol{y_3'=-y_1-2y_2-y_3}$$

پاسخ

ماتریس ضریب معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 6 & -1 & 0\\ -1 & -2 & -1\end{bmatrix}$$

پس معادله مشخصه دستگاه به صورت زیر است.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 6 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(1+\lambda)^2 - 6(-2-2\lambda+2) - (1+\lambda) = 0$$

$$(1+\lambda)(1-\lambda^2-1) + 12\lambda = 0$$

$$-\lambda^2 - \lambda^3 + 12\lambda = 0$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 12\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + \lambda - 12) = 0$$

$$\lambda(\lambda-3)(\lambda+4) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -4$$

بردار ویژه مرتبط با $\lambda_1 = 0$ به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & 2 & 1 \\ 6 & -1-\lambda_1 & 0 \\ -1 & -2 & -1-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{Bmatrix}$$

به همین طریق برای $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -4$ داریم.

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

پس جواب کلی دستگاه به صورت زیر است.

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^{(2)} e^{\lambda_2 t} + c_3 \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}^{(3)} e^{\lambda_3 t}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{Bmatrix} + c_2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{Bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{-4t}$$

مساله 3

مطلوب است جواب کلی حقیقی دستگاه زیر.

$$\boldsymbol{y_1' = -8y_1 - 2y_2}$$

$$\boldsymbol{y_2' = 2y_1 - 4y_2}$$

پاسخ

ماتریس ضریب معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است.

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

معادله مشخصه دستگاه به صورت زیر است.

$$\begin{vmatrix} -8-\lambda & -2 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + 12\lambda + 32 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 + 12\lambda + 36 = 0$$

$$(\lambda + 6)^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -6$$

بردار ویژه مرتبط با $\lambda_1 = -6$ به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} -8-\lambda_1 & -2 \\ 2 & -4-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$y^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{-6t}$$

برای پیدا کردن مستقل خطی برای بردار ویژه مکرر فرض می کنیم جواب به صورت زیر باشد.

$$y^{(2)} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(1)} te^{\lambda_1 t} + \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda_1 t}$$

با مشتق گرفتن از $y^{(2)}$ و جانشین کردن آن در $y' = Ay$ داریم.

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(1)} \lambda_1 te^{\lambda_1 t} + \lambda_1 \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda_1 t} = A \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(1)} te^{\lambda_1 t} + A \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} e^{\lambda_1 t}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(1)} + \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(1)} \lambda_1 t + \lambda_1 \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(1)} t + A \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

چون $Ax = \lambda x$ است. پس داریم.

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(1)} + \lambda_1 \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = A \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$[A - \lambda_1 I] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix}$$

$$y^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} te^{-6t} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} e^{-6t}$$

پس جواب کلی دستگاه معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} e^{-6t} + c_2 \left[\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} t + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{Bmatrix} \right] e^{-6t}$$

بخش 4.6
حل سری توانی معادلات دیفرانسیل معمولی
مساله 1
مطلوب است شعاع همگرایی سری های زیر.

$$\textbf{(a)} \qquad e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \ldots \ldots$$

$$\textbf{(b)} \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \cdots \ldots \ldots.$$

$$\textbf{(c)} \qquad \sum_{m=0}^{\infty} m!\, x^m = 1 + x + 2x^2 + \cdots \ldots \ldots$$

پاسخ
برای سری (a)

$$a_m = \frac{1}{m!} \qquad a_{m+1} = \frac{1}{(m+1)!}$$

پس شعاع همگرایی به صورت زیر است.

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{m \to \infty} \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{m \to \infty} \left|\frac{m!}{(m+1)!}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{m \to \infty} \frac{1}{(m+1)}} = \infty$$

برای سری (b)

$$a_m = 1 \quad a_{m+1} = 1$$

پس شعاع همگرایی به صورت زیر است.

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{m \to \infty} \left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{m \to \infty} \left|\frac{1}{1}\right|} = 1$$

برای سری (c)

$$a_m = m! \quad a_{m+1} = (m+1)!$$

پس ، شعاع همگرایی به صورت زیر است.

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty}\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty}\left|\frac{(m+1)!}{m!}\right|} = \frac{1}{\lim\limits_{m\to\infty}(m+1)} = 0$$

مساله 2

مطلوب است حل سری توانی توان های x معادله دیفرانسیل زیر

$$\boldsymbol{y' + xy = 0}$$

پاسخ

فرض می کنیم جواب به صورت زیر باشد.

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots.. \qquad \textbf{[a]}$$

از y مشتق می گیریم , پس داریم.

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots..$$

در معادله دیفراسیل y و y' را جانشین می کنیم. . پس داریم.

$$(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots) + x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots) = 0$$

$$a_1 + (2a_2 + a_0)x + (3a_3 + a_1)x^2 + (4a_4 + a_2)x^3 + \cdots = 0$$

ضریب های تمام توان های x را مساوی صفر قرار می دهیم. پس داریم.

$$a_1 = 0$$

$$2a_2 + a_0 = 0 \qquad \therefore \quad a_2 = -\frac{a_0}{2}$$

$$3a_3 + a_1 = 0 \qquad \therefore \quad a_3 = -\frac{a_1}{3} = 0$$

$$4a_4 + a_2 = 0 \qquad \therefore \quad a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{8}$$

مقادیر a_1 , a_2 , a_3 , a_4 در $[a]$ می گذاریم. جواب کلی معادله دیفرانسیل داده شده بدست می آوریم.

$$\begin{aligned} y &= a_0 - \frac{a_0}{2}x^2 + \frac{a_0}{8}x^4 - \cdots.. \\ &= a_0\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \cdots..\right) \\ &= a_0\left(1 + (-x^2/2) + \frac{(-x^2/2)^2}{2} - \cdots..\right) \end{aligned}$$

$$y = a_0 e^{-x^2/2}$$

مساله 3

مطلوب است حل سری توانی توان های x معادله دیفرانسیل زیر

$$\boldsymbol{y'' + 4y = 0}$$

پاسخ

فرض می کنیم جواب به صورت زیر باشد.

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots ..$$

دو مرتبه مشتق می گیریم.

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \cdots ..$$

$$y'' = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \cdots ..$$

در معادله دیفراسیل y و y' را جانشین می کنیم. . پس داریم.

$$(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \cdots) + 4(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots) = 0$$

$$(2a_2 + 4a_0) + (6a_3 + 4a_1)x + (12a_4 + 4a_2)x^2 + (20a_5 + 4a_3)x^3 + \cdots = 0$$

ضریب های تمام توان های x را مساوی صفر قرار می دهیم. پس داریم.

$$2a_2 + 4a_0 = 0 \qquad \therefore \quad a_2 = -2a_0$$

$$6a_3 + 4a_1 = 0 \qquad \therefore \quad a_3 = -\frac{2}{3}a_1$$

$$12a_4 + 4a_2 = 0 \qquad \therefore \quad a_4 = -\frac{a_2}{3} = \frac{2}{3}a_0$$

$$20a_5 + 4a_3 = 0 \qquad \therefore \quad a_5 = -\frac{a_3}{5} = \frac{2}{15}a_1$$

مقادیر a_2 , a_3 , a_4 , a_5 را در $[a]$ می گذاریم. جواب کلی معادله دیفرانسیل داده شده بدست می آید.

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1x - 2a_0x^2 - \frac{2}{3}a_1x^3 + \frac{2}{3}a_0x^4 + \frac{2}{15}a_1x^5 + \cdots .. \\ &= a_0\left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \cdots\right) + a_1\left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \cdots\right) \\ &= a_0\left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots ..\right) + \frac{a_1}{2}\left(2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \cdots ..\right) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad y = a_0 \cos 2x + \frac{a_1}{2} \sin 2x$$

مساله 4

مساله با مقدار اولیه ، از طریق سری توانی حل کنید. نمودار جمع پاره ای تا x^5 را رسم کنید.

$$(x-2)y' = xy, \quad y(0) = 4$$

پاسخ

فرض می کنیم جواب به صورت زیر باشد.

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots .. \qquad [a]$$

مشتق می گیریم.

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \cdots ..$$

در معادله دیفراسیل y و y' را جانشین می کنیم. . پس داریم

$$(x-2)(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \cdots) - x(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \cdots) = 0$$

$$(a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + 4a_4x^4 + 5a_5x^5 + \cdots) + (-2a_1 - 4a_2x - 6a_3x^2 - 8a_4x^3 - 10a_5x^4 \ldots) + (-a_0x - a_1x^2 - a_2x^3 - a_3x^4 - a_4x^5 - a_5x^6 \ldots) = 0$$

$$-2a_1 + (a_1 - 4a_2 - a_0)x + (2a_2 - 6a_3 - a_1)x^2 + (3a_3 - 8a_4 - a_2)x^3 + (4a_4 - 10a_5 - a_3)x^4 + \cdots = 0$$

ضریب های تمام توان های x را مساوی صفر قرار می دهیم. پس داریم.

$$-2a_1 = 0 \qquad \therefore \quad a_1 = 0$$

$$a_1 - 4a_2 - a_0 = 0 \qquad \therefore \quad a_2 = -\frac{a_0}{4}$$

$$2a_2 - 6a_3 - a_1 = 0 \qquad \therefore \quad a_3 = -\frac{a_1}{6} + \frac{a_2}{3} = \frac{a_2}{3} = -\frac{a_0}{12}$$

$$3a_3 - 8a_4 - a_2 = 0 \qquad \therefore \quad a_4 = -\frac{a_2}{8} + \frac{3a_3}{8} = \frac{a_0}{32} - \frac{a_0}{32} = 0$$

$$4a_4 - 10a_5 - a_3 = 0 \qquad \therefore \quad a_5 = -\frac{a_3}{10} + \frac{2a_4}{5} = \frac{a_0}{120}$$

مقادیر a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 را در $[a]$ می گذاریم. جواب کلی معادله دیفرانسیل داده شده بدست می آید

$$y = a_0 - \frac{a_0}{4}x^2 - \frac{a_0}{12}x^3 + \frac{a_0}{120}x^5 + \cdots.. \qquad [b]$$

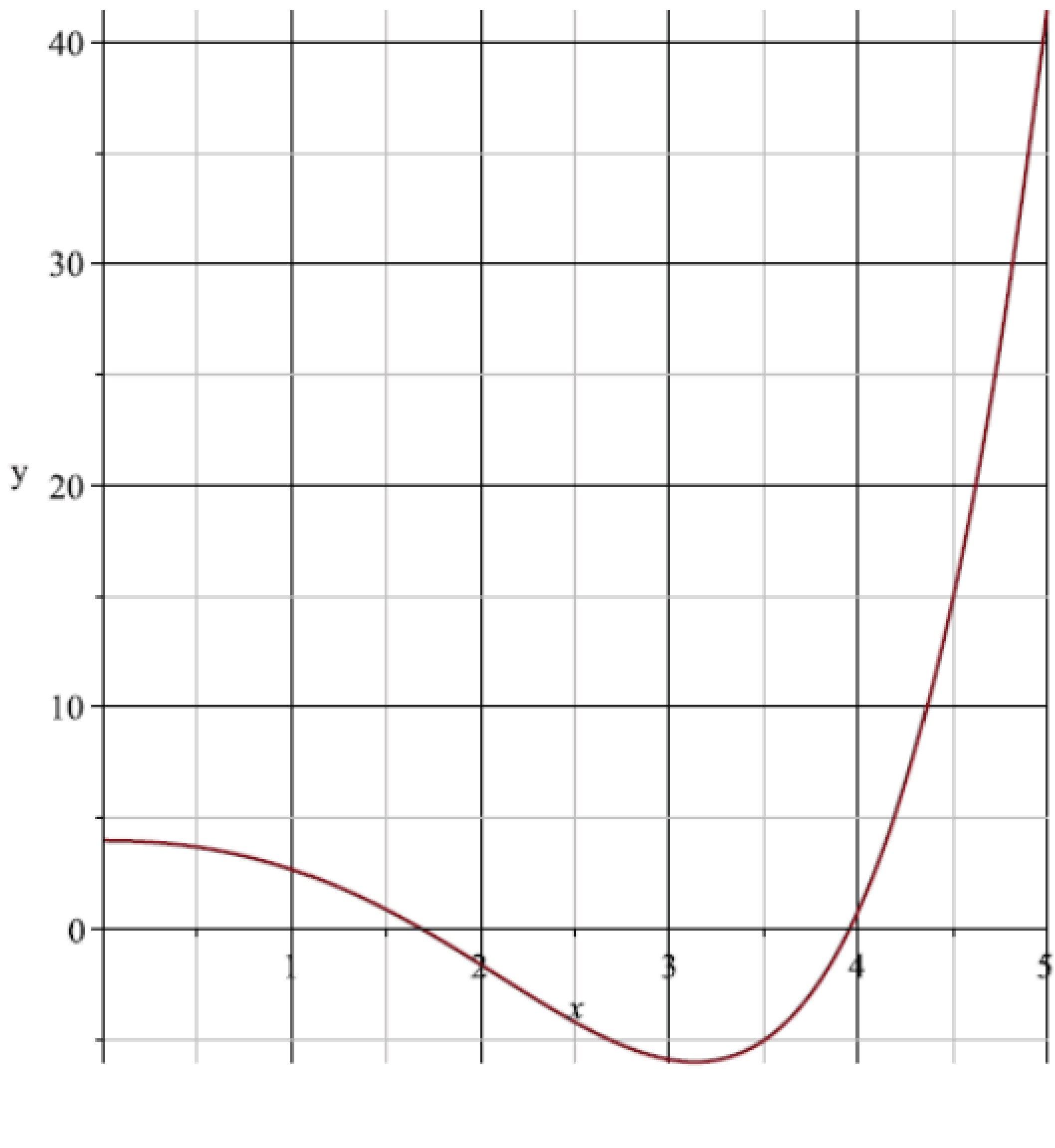
مقدار اولیه $y(0 = 4)$ را جانشین می کنیم.

$$a_0 = 4$$

مقدار a_0 در $[b]$ می گذاریم. جواب مخصوص معادله دیفرانسیل داده شده بدست می آید.

$$y = 4 - x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{30}x^5 \dots..$$

این هم نمودار



بخش 4.7
تبدیلات لاپلاس
مساله 1

مطلوب است تبدیل لاپلاس تابع های زیر.

(a) 1 (b) t (c) e^{at} (d) $\sin\omega t$ (e) $f(t)=\begin{cases}-1 & t<1\\ 1 & t\geq 1\end{cases}$

پاسخ

با استفاده از تعریف تبدیل لاپلاس برای هر کدام داریم.

(a) $$\mathcal{L}(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}.1dt \quad =\int_0^\infty e^{-st}dt \quad =-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty \quad =-\frac{1}{s}(0-1)=\frac{1}{s}$$

(b) $$\mathcal{L}(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}tdt \quad =\frac{1}{s^2}(1+e^{-st}-ste^{-st})\Big|_0^\infty \quad =\frac{1}{s^2}$$

(c) $$\mathcal{L}(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt \quad =\int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt \quad =-\frac{1}{(s-a)}e^{-(s-a)t}\Big|_0^\infty \quad =\frac{1}{(s-a)}$$

(d) $$\mathcal{L}(f)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt$$

$$=\int_0^\infty e^{-st}\sin\omega t dt \quad =\frac{e^{-st}}{s^2+\omega^2}(-s\sin\omega t-\omega\cos\omega t)\Big|_0^\infty \quad =\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\textbf{(e)}\quad \mathcal{L}(f) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

$$= \int_0^1 e^{-st}(-1)dt + \int_1^\infty e^{-st}(1)dt$$

$$= \frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^1 - \frac{1}{s}e^{-st}\Big|_1^\infty$$

$$= \frac{1}{s}(e^{-s}-1) - \frac{1}{s}(0-e^{-s}) \qquad = \frac{1}{s}(2e^{-s}-1)$$

مساله 2

مطلوب است معکوس تبدیل لاپلاس زیر.

$$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5s+1}{s^2-25}\right)}$$

پاسخ

داریم.

$$F(s) = \frac{5s+1}{s^2-25}$$

یا می توان نوشت

$$F(s) = \frac{5s}{s^2-25} + \frac{1}{s^2-25} = 5\left(\frac{s}{s^2-25}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{5}{s^2-25}\right)$$

معکوس تبدیل لاپلس به صورت زیر است.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{5\left(\frac{s}{s^2-25}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{5}{s^2-25}\right)\right\} = 5cosh5t + \frac{1}{5}sinh5t$$

مساله 3

مطلوب است تبدیل لاپلاس تابع های زیر.

$$\boldsymbol{e^{-2t} + t}$$

پاسخ

با استفاده از خطی بودن تبدیل لاپلاس داریم.

$$\mathcal{L}(f) \quad = \mathcal{L}(f)$$

$$= \mathcal{L}(e^{-2t}) + \mathcal{L}(t) \quad = \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s^2} \quad = \frac{s^2+s+2}{s^2(s+2)}$$

مساله 4

مطلوب است تبدیل لاپلاس تابع زیر.

$$\boldsymbol{f(t) = e^{at} cos\omega t.}$$

پاسخ

میدانیم.

$$\mathcal{L}(cos\omega t) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

پس با استفاده از قضیه اول جا بجا یی داریم.

$$\mathcal{L}(e^{at} cos\omega t) = \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$$

مساله 5

مطلوب است معکوس تبدیل لاپلاس زیر.

$$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{s^2-4s}\right)}$$

پاسخ

داریم.

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2-4s} = \frac{s+1}{s(s-4)}$$

با استفاده از کسر های پاره ای ، داریم.

$$F(s) = -\frac{1}{4s} + \frac{5}{4(s-4)}$$

معکوس تبدیل لاپلاس به صورت زیر است.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{4s} + \frac{5}{4(s-4)}\right\} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}e^{4t}$$

مساله 6

مطلوب است معکوس تبدیل لاپلاس زیر.

$$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right\}}$$

پاسخ

می دانیم.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega}sin\omega t$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right\} = \int_0^t \frac{1}{\omega}sin\omega\tau\, d\tau$$

$$= \frac{1}{\omega}\left[-\frac{cos\omega\tau}{\omega}\right]_0^t = \frac{1}{\omega^2}(1-cos\omega t)$$

مساله 7

با استفاده از تبدیل لاپلاس ، مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\boldsymbol{y''-y'-6y=0,\ \ y(0)=11,\ \ \ y'(0)=28}$$

پاسخ

با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل معمولی داده شده داریم.

$$s^2Y-sy(0)-y'(0)-[sY-y(0)]-6Y=0$$

$$s^2Y-sy(0)-y'(0)-sY+y(0)-6Y=0$$

با استفاده از شرایط اولیه داده شده ، داریم.

$$s^2Y-11s-11-sY+28-6Y=0$$

$$(s^2-s-6)Y=11s-17$$

$$Y=\frac{11s-17}{(s^2-s-6)}=\frac{11s-17}{(s-3)(s+2)}=\frac{10}{s-3}+\frac{1}{s+2}$$

تبدیل لاپلاس بکار می بریم.

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{10}{s-3}+\frac{1}{s+2}\right\}=10e^{3t}+e^{-2t}$$

مساله 8

با استفاده از تبدیل لاپلاس ، مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 5$$

پاسخ

با استفاده از تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل معمولی داده شده داریم.

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - 3[sY - y(0)] + 2Y = \frac{1}{s+4}$$

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - 3sY + 3y(0) + 2Y = \frac{1}{s+4}$$

با استفاده از شرایط اولیه داده شده ، داریم.

$$s^2Y - s - 5 - 3sY + 3 + 2Y = \frac{1}{s+4}$$

$$(s^2 - 3s + 2)Y = s + 2 + \frac{1}{s+4}$$

$$Y = \frac{s+2}{(s^2-3s+2)} + \frac{1}{(s^2-3s+2)(s+4)}$$

$$Y = \frac{(s+2)(s+4)+1}{(s^2-3s+2)(s+4)}$$

$$Y = \frac{s^2+6s+9}{(s-1)(s-2)(s+4)} = -\frac{16}{5(s-1)} + \frac{25}{6(s-2)} + \frac{1}{30(s+4)}$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس ، داریم.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{16}{5(s-1)} + \frac{25}{6(s-2)} + \frac{1}{30(s+4)}\right\} = -\frac{16}{5}e^{t} + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}$$

مساله 9

مطلوب است تبدیل لاپلاس $f(t)$ با استفاده از تابع پلکانی واحد.

$$\boldsymbol{f(t)} = \begin{cases} \mathbf{1} & \boldsymbol{if}\ \mathbf{0} < t < 1 \\ \mathbf{2} & \boldsymbol{if}\ \mathbf{1} < t < 3 \\ \mathbf{4} & \boldsymbol{if}\ \mathbf{3} < t < 4 \\ \mathbf{-2} & \boldsymbol{if}\ \boldsymbol{t} > 4 \end{cases}$$

پاسخ

تابع $f(t)$ داده شده را می‌توان برحسب تابع های پلکانی واحد ، به صورت زیر بیان کرد.

$$f(t) = 1 - u(t-1) + 2u(t-1) - 2u(t-3) + 4u(t-3) - 4u(t-4) - 2u(t-4)$$

$$f(t) = 1 + u(t-1) + 2u(t-3) - 6u(t-4)$$

پس تبدیل لاپلاس آن به صورت زیر است.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{1\} + \mathcal{L}\{u(t-1)\} + \mathcal{L}\{2u(t-3)\} - \mathcal{L}\{6u(t-4)\}$$

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} + \frac{2e^{-3s}}{s} - \frac{6e^{-4s}}{s}$$

مساله 10

مطلوب است $f(t)$ اگر

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}$$

باشد.

پاسخ

داریم.

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}$$

با استفاده از کسر های پاره ای ، داریم.

$$F(s) = -\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{(s-1)}$$

پس ، معکوس تبدیل لاپلاس به صورت زیر است،

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{(s-1)}\right\} = -u(t-2) - (t-2)u(t-2) + e^{(t-2)}u(t-2)$$

مساله 11

با استفاده از تبدیل لاپلاس ، مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\boldsymbol{y'' + 4y' + 13y = \delta(t-\pi) + \delta(t-3\pi),\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0}$$

پاسخ
با استفاده از تبدیل لاپلاس داریم.

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 4[sY - y(0)] + 13Y = e^{-\pi s} + e^{-3\pi s}$$

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) + 4sY - 4y(0) + 13Y = e^{-\pi s} + e^{-3\pi s}$$

با استفاده از شرایط اولیه داریم.

$$s^2Y - s + 4sY - 4 + 13Y = e^{-\pi s} + e^{-3\pi s}$$

$$(s^2 + 4s + 13)Y = s + 4 + e^{-\pi s} + e^{-3\pi s}$$

$$Y = \frac{s+4}{s^2+4s+13} + \frac{e^{-\pi s} + e^{-3\pi s}}{s^2+4s+13}$$

$$Y = \frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{e^{-\pi s}}{(s+2)^2+3^2} + \frac{e^{-3\pi s}}{(s+2)^2+3^2}$$

با استفاده از تبدیل لاپلاس ، داریم.

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{e^{-\pi s}}{(s+2)^2+3^2} + \frac{e^{-3\pi s}}{(s+2)^2+3^2}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+3^2} + \frac{2}{3}\frac{3}{(s+2)^2+3^2} + \frac{1}{3}\frac{3e^{-\pi s}}{(s+2)^2+3^2} + \frac{1}{3}\frac{3e^{-3\pi s}}{(s+2)^2+3^2}\right\}$$

$$y(t) = e^{-2t}cos3t + \frac{2}{3}e^{-2t}sin3t + \frac{1}{3}u(t-\pi)e^{-2(t-\pi)}sin3(t-\pi)$$

$$+\frac{1}{3}u(t-3\pi)e^{-2(t-3\pi)}sin3(t-3\pi)$$

مساله 12
با استفاده از تبدیل لاپلاس ، مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y_1' = 2y_1 - y_2$$
$$y_2' = 5y_1 + 4y_2$$
$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$$

پاسخ
با استفاده از تبدیل لاپلاس دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی داده شده داریم.

$$sY_1 - y_1(0) = 2Y_1 - Y_2$$
$$sY_2 - y_2(0) = 5Y_1 + 4Y_2$$

شرایط اولیه داده شده را بکار می بریم.

$$sY_1 - 1 = 2Y_1 - Y_2$$
$$sY_2 - 0 = 5Y_1 + 4Y_2$$

باز نویسی می کنیم.

$$(s-2)Y_1 + Y_2 = 1 \qquad \textbf{[a]}$$
$$-5Y_1 + (s-4)Y_2 = 0 \qquad \textbf{[b]}$$

دستگاه $[a]$ و $[b]$ را حل می کنیم. پس داریم.

$$Y_1 = \frac{(s-4)}{s^2-6s+13} = \frac{(s-3-1)}{(s-3)^2+2^2} = \frac{(s-3)}{(s-3)^2+2^2} - \frac{1}{(s-3)^2+2^2}$$

$$Y_2 = \frac{5}{s^2-6s+13} = \frac{5}{(s-3)^2+2^2}$$

معکوس تبدیل لاپلاس را بکار می بریم، پس داریم.

$$y_1 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{(s-3)}{(s-3)^2+2^2} - \frac{1}{2}\frac{2}{(s-3)^2+2^2}\right\} = e^{3t}cos3t - \frac{1}{2}e^{3t}sin3t$$
$$y_2 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{2}\frac{2}{(s-3)^2+2^2}\right\} = \frac{5}{2}e^{3t}sin3t$$

مساله 13

با استفاده از تبدیل لاپلاس ، مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$2y_1' = -y_2 + cost$$
$$y_2' = 2y_1 + sint$$
$$y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$$

پاسخ

با استفاده از تبدیل لاپلاس دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی داده شده داریم.

$$2sY_1 - 2y_1(0) = -Y_2 + \frac{s}{s^2+1}$$
$$sY_2 - y_2(0) = 2Y_1 + \frac{1}{s^2+1}$$

شرایط اولیه داده شده را بکار می بریم.

$$2sY_1 - 0 = -Y_2 + \frac{s}{s^2+1}$$

$$sY_2 - 1 = 2Y_1 + \frac{1}{s^2+1}$$

مرتب می کنم.

$$2sY_1 + Y_2 = \frac{s}{s^2+1} \qquad [a]$$

$$-2Y_1 + sY_2 = 1 + \frac{1}{s^2+1} \qquad [b]$$

دستگاه $[a]$ و $[b]$ را حل می کنیم.

$$Y_1 = -\frac{1}{(s^2+1)^2}$$

$$Y_2 = \frac{s}{s^2+1} + \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

معکوس تبدیل لاپلاس را بکار می بریم ، پس داریم.

$$y_1 = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{-\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right\}$$

$$= -\int_0^t sin\tau \, sin(t-\tau) d\tau$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^t 2sin\tau \, sin(t-\tau) d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t [cos(2\tau - t) - cost] d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{sin(2\tau - t)}{2} - \tau cost\right]_0^t$$

$$= \frac{1}{2}[sint - tcost]$$

$$y_2 = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}+\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)}\,\frac{1}{(s^2+1)}\right\}$$

$$= cost + 2\int_0^t cos\tau\, sin(t-\tau)d\tau$$

$$= cost + \int_0^t [sint + sin(-2\tau + t)]d\tau$$

$$= cost + \left[\tau sint + \frac{cos(-2\tau+t)}{2}\right]_0^t$$

$$= cost + tsint$$

بخش 4.8 سری فوریه

یاد آوری

برای یک تابع $f(x)$ تعریف شده در بازه $(-L, L)$ بطوری که $f(x+2L) = f(x)$ باشد ، یعنی $2L$ دوره تناوب f است ، پس سری فور به صورت زیر است.

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

اینجا

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad (0,1,2.3,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \quad (1,2.3,\cdots)$$

است.

مساله 1

مطلوب است سری فوریه $f(x) = x^2$ در $-\pi < x < \pi$

پاسخ

اجازه دهید ، ابتدا مقادیر a_0 , a_n , b_n را پیدا کنیم. دوره تناوب تابع داده شده 2π است. پس

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3} \quad \Rightarrow a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx \left[\int_{-a}^{a} f(x)\,dx\right.$$

$$= \left.\begin{cases} 2\displaystyle\int_0^a f(x)dx & \text{اگر } f \text{ یک تابع زوج باشد} \\ 0 & \text{اگر } f \text{ یک تابع فرد باشد}\end{cases}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x^2\frac{\sin(nx)}{n} + 2x\left(\frac{\cos(nx)}{n^2}\right) + 2\left(-\frac{\sin(nx)}{n^2}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4(-1)^n}{n^2} \qquad \left[\sin(n\pi) = 0 \text{ و } \cos(n\pi) = (-1)^n\right] \text{ می دانیم}$$

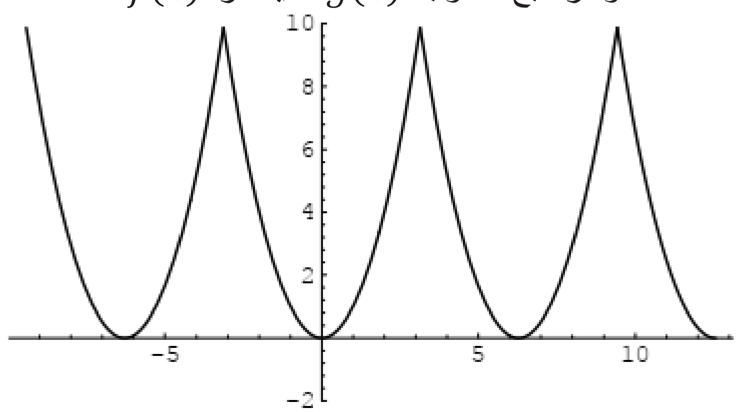
$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} -\dfrac{4}{n^2} & \text{اگر n فرد باشد} \\ \dfrac{4}{n^2} & \text{اگر n زوج باشد} \end{cases}$$

می دانیم که $x^2 \sin(nx)$ یک تابع فرد است پس $b_n = 0$ است. و در نهایت داریم.

$$x^2 = \frac{x^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} 0 * \sin(nx)$$

$$x^2 = \frac{x^2}{3} + 4\left[-\cos x + \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{9}\cos(3x) + \cdots\right]$$

نمودار تابع متناوب $g(x)$ نمایشگر $f(x)$



مساله 2

مطلوب است سری فوریه e^{ax} برای $x \in (-\pi, \pi)$

پاسخ

چون $x \in (-\pi, \pi)$ است ، پس دوره تناوب تابع داده شده 2π است. ، پس داریم.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{ax}}{a}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{ax} - e^{-ax}}{a}\right]$$

$$= \frac{2\sinh(a\pi)}{a\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ax}\cos(nx)\,dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{ax}}{a^2+n^2}(a\cos(nx)+n\sin(nx))\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{a\cos(n\pi)}{a^2+n^2}(e^{a\pi}-e^{-a\pi})$$
$$= \frac{1}{\pi}\times\frac{2a(-1)^n\times\sinh(a\pi)}{a^2+n^2}$$

به همین طریق

$$b_n = \frac{1}{\pi}\times\frac{2n(-1)^n\times\sinh(a\pi)}{a^2+n^2}$$

و در نهایت

$$e^{ax} = \frac{\sinh(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2a(-1)^n\sinh(a\pi)}{\pi(a^2+n^2)}\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(-1)^n\ \sinh(a\pi)}{\pi(a^2+n^2)}\sin(nx)$$

مساله 3

اگر $f(x)=\cos x$ باشد برای $0<x<\pi$ و $f(x)=50$ باشد برای $\pi\le x<2\pi$ و $f\left(x+2\pi\right)=f(x)\ \forall x$ باشد ، مطلوب است مجموع سری فوریه f در $x=\pi$

پاسخ

مجموع سری فوریه در $x=\pi$ به صورت زیر است.

$$\frac{1}{2}[f(\pi^-)+f(\pi^+)] = \frac{1}{2}(\cos\pi+50) = \frac{1}{2}(-1+50) = 24.5$$

مساله 4

مطلوب است سری فوریه تابع متناوب $f(x)$ بطوری که داشته باشیم.

$$f(x)=\begin{cases}-\pi & \text{اگر } -\pi<x<0\\ x & \text{اگر } 0<x<\pi\end{cases}$$

پاسخ

واضح است که دوره تنا وب تابع 2π است. پس

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -\pi\,dx$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx=-[x]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{\pi}=-\pi+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\cos(nx)\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx\,)dx$$
$$=-\left[\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin(nx)}{n}+\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_{0}^{\pi}$$
$$=\frac{\cos(n\pi)-1}{\pi n^2}$$

$$\Rightarrow a_n=\begin{cases}0 & \text{اگر n زوج باشد}\\ -\dfrac{2}{\pi n^2} & \text{اگر n فرد باشد}\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\sin(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\pi\frac{\cos(n\pi)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos(nx)}{n} + \frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_{0}^{\pi} \\
&= \frac{1-2\cos(n\pi)}{n}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow b_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{n} & \text{اگر n زوج باشد} \\ \dfrac{3}{n} & \text{اگر n فرد باشد} \end{cases}
$$

و در نهایت داریم.

$$
\begin{aligned}
f(x) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos(3x) + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right] \\
+ \left[3\sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{3}{3}\sin(3x) - \cdots\right]
\end{aligned}
$$

مساله 5

مطلوب است سری فوریه برای $f(x) = L - x$ در بازه $-L \le x \le L$

پاسخ

اجازه دهید اول ضریب ها را پیدا کنیم.

$$
A_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} L - x\,dx = L
$$

$$\begin{aligned}A_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(L-x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\\ &= \frac{1}{L}\left(\frac{L}{n^2\pi^2}\right)\left(n\pi(L-x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)-L\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\Big|_{-L}^{L}\\ &= \frac{1}{L}\left(\frac{L}{n^2\pi^2}\right)(-2n\pi L\sin(-n\pi)) = 0 \qquad n=1,2,3,\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L}(L-x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\\ &= \frac{1}{L}\left(-\frac{L}{n^2\pi^2}\right)\left[L\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)-n\pi(x-L)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]\Big|_{-L}^{L}\\ &= \frac{1}{L}\left[\frac{L^2}{n^2\pi^2}(2n\pi\cos(n\pi)-2\sin(n\pi))\right] = \frac{2L(-1)^n}{n\pi} \qquad n=1,2,3,\dots\end{aligned}$$

ملاحظه می کنید که $A_0 \neq 0$ است و $A_n = 0$ است برای $n = 1,2,3,\cdots$
پس ، سری فوریه به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\\ &= A_0+\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)+\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = L+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L(-1)^n}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\end{aligned}$$

مساله 6
مطلوب است سری فوریه

$$f(x)=\begin{cases}L & \text{اگر} \quad -L\le x\le 0\\ 2x & \text{اگر} \quad 0\le x\le L\end{cases}$$

در بازه $-L \le x \le L$
پاسخ
چون تابع تکه ای داریم ، کار با ضریب ها کمی بد قلق است.

$$A_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\ dx = \frac{1}{2L}\left[\int_{-L}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{L} f(x)\ dx\right]$$
$$= \frac{1}{2L}\left[\int_{-L}^{0} L\,dx + \int_{0}^{L} 2x\,dx\right] = \frac{1}{2L}\left[L^2 + L^2\right] = L$$

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L}\left[\int_{-L}^{0} f(x)\cos\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right) dx + \int_{0}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right) dx\right]$$
$$= \frac{1}{L}\left[\int_{-L}^{0} L\cos\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right) dx + \int_{0}^{L} 2x\cos\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right) dx\right]$$

اینجا ، بهتر است هر کدام را جدا ، بر رسی کنیم.

$$\int_{-L}^{0} L\cos\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right) dx = \left(\frac{L^2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right)\right)\Bigg|_{-L}^{0} = \frac{L^2}{n\pi}\sin(n\pi) = 0$$

$$\int_{0}^{L} 2x\cos\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right) dx = \left(\frac{2L}{n^2\pi^2}\right)\left(L\cos\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right) + n\pi x\sin\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right)\right)\Bigg|_{0}^{L}$$
$$= \left(\frac{2L}{n^2\pi^2}\right)\left(L\cos(n\pi) + n\pi L\sin(n\pi) - L\cos(0)\right)$$
$$= \left(\frac{2L^2}{n^2\pi^2}\right)\left((-1)^n - 1\right)$$

پس ، حالا همه را کنار هم می گذاریم.

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L}\left[0 + \left(\frac{2L^2}{n^2\pi^2}\right)\left((-1)^n - 1\right)\right]$$
$$= \frac{2L}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right) \quad , \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

حالا ، ضریب سینوس را پیدا می کنیم.

$$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L}\left[\int_{-L}^{0} f(x)\sin\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right) dx + \int_{0}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right) dx\right]$$
$$= \frac{1}{L}\left[\int_{-L}^{0} L\sin\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right) dx + \int_{0}^{L} 2x\sin\left(\frac{n\,\pi x}{L}\right) dx\right]$$

اینجا هم هر کدام را جدا ، بر رسی می کنیم.

$$\int_{-L}^{0} L\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \left(-\frac{L^2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\Big|_{-L}^{0} = \frac{L^2}{n\pi}(-1+\cos(n\pi)) = \frac{L^2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\begin{aligned}\int_{0}^{L} 2x\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx &= \left(\frac{2L}{n^2\pi^2}\right)\left(L\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - n\pi x\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)\Big|_{0}^{L}\\ &= \left(\frac{2L}{n^2\pi^2}\right)(L\sin(n\pi) - n\pi L\cos(n\pi))\\ &= \left(\frac{2L^2}{n^2\pi^2}\right)\left(-n\pi(-1)^n\right) = -\frac{2L^2}{n\pi}(-1)^n\end{aligned}$$

کنار هم می گذاریم.

$$\begin{aligned}B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx &= \frac{1}{L}\left[\frac{L^2}{n\pi}\left((-1)^n - 1\right) - \frac{2L^2}{n\pi}(-1)^n\right]\\ &= \frac{L}{n\pi}\left[-1-(-1)^n\right] = -\frac{L}{n\pi}\left(1+(-1)^n\right) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots\end{aligned}$$

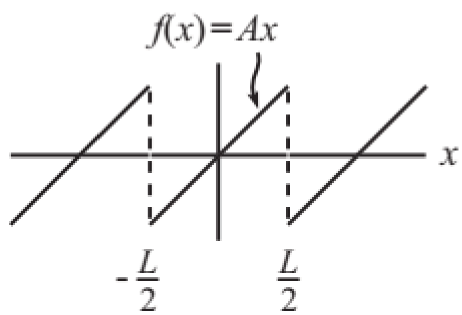
در نهایت.

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\\ &= L + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\left(1+(-1)^n\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\end{aligned}$$

مساله 7

تابع دندانه اره Saw-tooth Function

مطلوب است سری فوریه برای تابع متناوب تصویر زیر.



این تابع به صورت زیر تعریف شده است. این تابع دارای دوره تناوب L است.

$$f(x) = Ax \quad ، \quad -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$$

پاسخ

چون این تابع یک تابع فرد است ، پس فقط $b_n \neq 0$ است. پس داریم.

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} Ax\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx.$$

با انتگرال گیری جز به جز داریم.

$$\begin{aligned}\int x\sin(rx)\,dx &= x\Big(-\frac{1}{r}\cos(rx)\Big)dx - \int -\frac{1}{r}\cos(rx)\,dx \\ &= -\frac{x}{r}\cos(rx) + \frac{1}{r^2}\sin(rx).\end{aligned}$$

با قرار دادن $r \equiv \frac{2\pi n}{L}$ داریم.

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{2A}{L}\left[-x\Big(\frac{L}{2\pi n}\Big)\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\Big|_{-L/2}^{L/2} + \Big(\frac{L}{2\pi n}\Big)^2\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\Big|_{-L/2}^{L/2}\right] \\ &= \Big(-\frac{AL}{2\pi n}\cos(\pi n) - \frac{AL}{2\pi n}\cos(-\pi n)\Big) + 0 \\ &= -\frac{AL}{\pi n}\cos(\pi n) \\ &= (-1)^{n+1}\frac{AL}{\pi n}.\end{aligned}$$

پس داریم.

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{AL}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \\ &= \frac{AL}{\pi}\left[\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{6\pi x}{L}\right) - \cdots\right].\end{aligned}$$

مساله 8

مشخص کنید آیا تابع های زیر زوج هستند یا فرد یا هیچ کدام.

(a) $\sin(x)$ (c) $|x-1|$
(b) e^x (d) x^5 (e) $x^3\sin(x)$

پاسخ

(a) و (d) فرد ، (b) و (c) هیچ کدام ، (e) زوج

مساله 9

مطلوب است ضریب a_0 برای $f(x) = x\sin x$ در $(0,2\pi)$

پاسخ

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x dx$$
$$= \frac{1}{\pi}[x(-\cos x) + \int \cos x.1dx]$$
$$= \frac{1}{\pi}[-x\cos x + \sin x]_0^{2\pi} = -2$$

مساله 10

مطلوب است ضریب a_0 برای $f(x) = x - 1$ در $(-\pi,\pi)$

پاسخ

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (x-1)dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} - \pi\right] - \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2} + \pi\right]$$
$$= -2$$

مساله 11

اگر داشته باشیم.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر} \quad -2 < x < 0 \\ 1 & \text{اگر} \quad 0 < x < 2 \end{cases}$$

مطلوب است ضریب فوریه a_n در سریفوریه

پاسخ

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-2}^{0}0dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}1.\cos(\frac{n\pi x}{2})dx$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\sin(\frac{n\pi x}{2})}{\frac{n\pi}{2}}\Bigg]_0^2=\frac{1}{n\pi}[\sin(n\pi)-0]=0$$

مساله 12

مطلوب است سری فوریه تابع $f(x)=x$ در $-\pi\le x\le\pi$

پاسخ

چون $f(x)$ فرد است ، پس $a_n=0$ است برای $n\ge 0$ پس لازم است b_n را برای $n\ge 1$ پیدا کنیم.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(nx)dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}+\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_{-\pi}^{\pi}.$$

$$b_n=-\frac{2}{n}\cos(n\pi)=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

در نهایت.

$$f(x)\sim 2\left(\sin(x)-\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{\sin(3x)}{3}....\right).$$

مساله 13

مطلوب است سری فوریه تابع زیر.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0\\ \pi, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

پاسخ

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0dx+\int_{0}^{\pi}\pi dx\right)=\frac{\pi}{2},\quad a_n=\int_{0}^{\pi}\pi\cos(nx)dx=0,\quad n\ge 1,$$

$$b_n=\int_{0}^{\pi}\pi\sin(nx)dx=\frac{1}{n}(1-\cos(n\pi))=\frac{1}{n}(1-(-1)^n).$$

لذا $b_{2n}=0$ است. و

$$b_{2n+1} = \frac{2}{2n+1}.$$

در نهایت

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + 2\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots\right).$$

مساله 14

مطلوب است سری فوریه تابع زیر.

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & -\pi \le x < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

پاسخ

چون این تابع همان تابع مساله 13 است منهای عدد ثابت $\frac{\pi}{2}$ لذا سری فوریه $f(x)$ به صورت زیر است.

$$f(x) \sim 2\left(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \dots\right).$$

مساله 15

مطلوب است سری فوریه تابع زیر

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

پاسخ

چون $L = 2$ است ، داریم.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4}\int_0^2 x\,dx = \frac{1}{2}, \\ a_n &= \frac{1}{2}\int_0^2 x\cos\left(n\frac{\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}(\frac{2}{n\pi})^2(\cos(n\pi)-1) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\right)^2((-1)^n-1), \\ b_n &= \frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\left(n\frac{\pi x}{2}\right)dx = -\frac{2\cos(n\pi)}{n\pi} = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} \end{aligned}$$

برای $n \ge 1$ پس داریم.

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n^2\pi^2}((-1)^n-1)\cos\left(n\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\left(n\frac{\pi x}{2}\right)\right].$$

یاد آوری

اگر $f(x)$ یک تابع پیوسته باشد پس سری فوریه $f(x)$ به $f(x)$ همگرا است. اگر $f(x)$ یک تابع پلکانی باشد سری فوریه $f(x)$ به

$$\frac{1}{2}\left(f(x^-)+f(x^+)\right)$$

همگرا است.

مساله 16

اگر داشته باشیم

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{برای } -\pi\le x<0\\ \pi-2x & \text{برای } 0\le x<\pi\end{cases}$$

مطلوب است همگرایی سری فوتریه تابع بالا

پاسخ

$$f^\wedge(x)=\begin{cases}0 & \text{برای } x=-\pi\\ -x & \text{برای } -\pi<x<0\\ \dfrac{\pi}{2} & \text{برای } x=0\\ \pi-2x & \text{برای } 0<x<\pi\end{cases}$$

مساله 17

مطلوب است ضریب های کسینوس تابع زیر تعریف شده در $[0,\pi)$

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{برای } 0\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ \pi-x & \text{برای } \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases}$$

پاسخ

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}x\cos(nx)\,\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\frac{\pi}{4}\\ \frac{8}{\pi n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)\end{cases}$$

اگر $n=0$ باشد $a_n=\dfrac{\pi}{4}$ است ، اگر $n\ge 1$ باشد ، پس

$$a_n = \frac{8}{\pi n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\ \sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

است.

مساله 18

مطلوب است ضریب های سینوس تابع زیر تعریف شده در $[0,\pi)$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{برای } 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{برای } \frac{\pi}{2} \le x < \pi \end{cases}$$

پاسخ

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{16}{\pi n^2}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\sin^3\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

یاد آوری

با نوشتن $\sin(nx)$ و $\cos(nx)$ بر حسب e^{inx} و e^{-inx} می توانیم شکل مختلط سری فوریه را بدست آوریم.

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) + b_n\frac{1}{i2}(e^{inx} - e^{-inx})\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}(a_n - ib_n)\,e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)\,e^{-inx}\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{inx} \end{aligned}$$

اینجا

$$C_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & \text{برای } n \ge 1 \\ \frac{a_0}{2} & \text{برای } n = 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & \text{برای } n \le -1 \end{cases}$$

بخش 4.9

بردار ها Vectors

یاد آوری

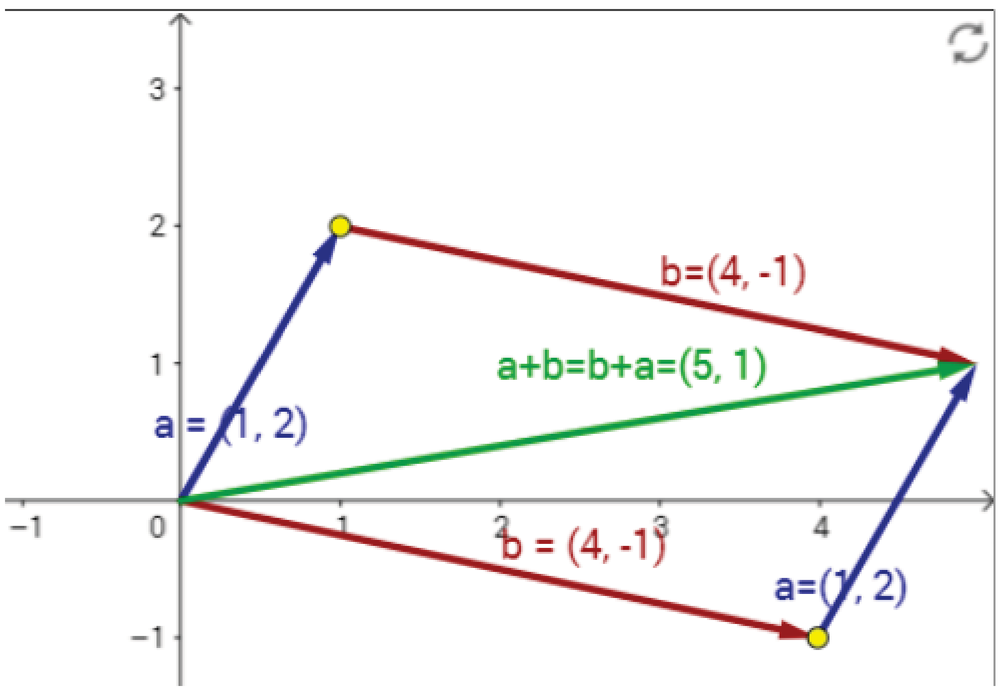
بردار ها را با حروف کوچک برجسته نشان می دهند. اما هنگام نوشتن با دست ، چون امکان برجسته نشان دادن حروف وجود ندارد ، تک بردار روی حروف می گذاریم. مانند $\boldsymbol{a}$ و $\vec{a}$.

اگر بنویسیم $A(1,2)$ یعنی مختصات نقطه A اعداد 1 و 2 است اما اگر بنویسیم $\boldsymbol{a} = (1,2)$ یعنی مختصات نقطه انتهایی بردار 1 و 2 است. و بردار از مرکز شروع می شود.

مساله 1

اگر داشته باشیم. $\boldsymbol{a} = (1,2)$ و $\boldsymbol{b} = (4,-1)$ مطلوب است $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ و سپس آنها را رسم کنید.

پاسخ



مساله 2

اگر داشته باشیم

$$\boldsymbol{a} = (a_1, -5,6)\,, \boldsymbol{b} = (3, b_2, b_3)\ , \boldsymbol{c} = (3, -5,1)$$

مطلوب است $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ و $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$

پاسخ

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

است اگر $a_1 = 3\,, b_2 = -5\ , b_3 = 6$ باشد.

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$$

است اگر $b_2 = -5\,, b_3 = 1$ باشد.

مساله 3

اگر $\boldsymbol{a} = (8,13)$ و $\boldsymbol{b} = (26,7)$ باشد ، مطلوب است $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$

پاسخ

$$\mathbf{c} = (8, 13) + (26, 7) = (8+26, 13+7) = (34, 20)$$

مساله 4

اگر $\boldsymbol{k} = (4,5)$ و $\boldsymbol{v} = (12,2)$ باشد ، مطلوب است $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{k}$

پاسخ

$$\mathbf{a} = (12, 2) + -(4, 5) = (12, 2) + (-4, -5) = (12-4, 2-5) = (8, -3)$$

مساله 5

مطلوب است مقدار $\boldsymbol{b} = (6,8)$

پاسخ

$$\|\boldsymbol{b}\| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$$

مساله 6

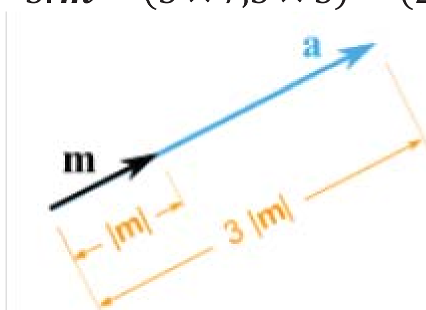
بردار $\boldsymbol{m} = (7,3)$ را در عدد 3 ضرب کنید. یعنی ضرب نقطه ای

توضیح

در زبان انگلیسی برای ضرب دو عدد یک نقطه بکار می برند و به آن Dot Product می گویند. که به فارسی می گوییم ضرب نقطه ای مثلا $4.5 = 20$

پاسخ

$$\boldsymbol{a} = 3.\boldsymbol{m} = (3 \times 7{,}3 \times 3) = (21{,}9)$$



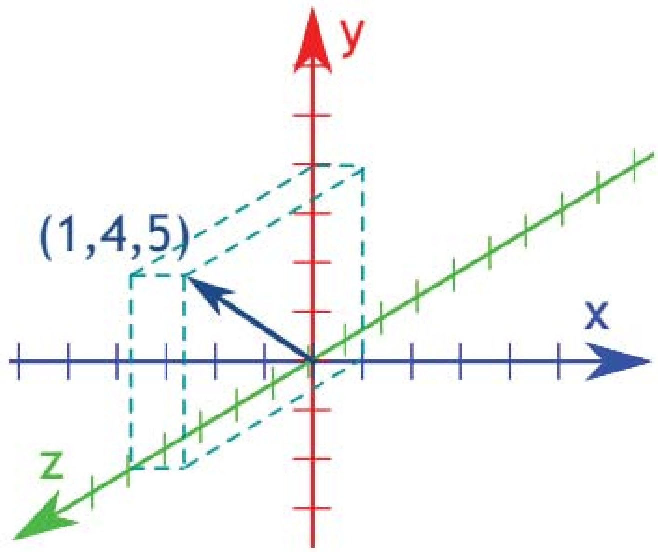
ملاحظه می کنید که در ضرب نقطه ای ، جهت بردار تغییر نمی کند. البته نتیجه ضرب نقطه ای یا ضرب یک عدد در بردار ، یک بردار است بدون تغییر جهت.

مساله 7

نمودار بردار $\boldsymbol{a} = (1,4,5)$ را رسم کنید.

پاسخ

ابتدا یک واحد سمت راست محور x جدا می کنیم ، از آنجا چهار واحد به طرف بالا ی محور y از آنجا پنج واحد در سمت مثبت محور z اینجا نقطه انتهایی بردار است. از مرکز تا این نقطه یک پیکان رسم می کنیم.



یاد آوری

برای تبدیل از مختصات کارتزین (x,y) به مختصات قطبی (r,θ) داریم.

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

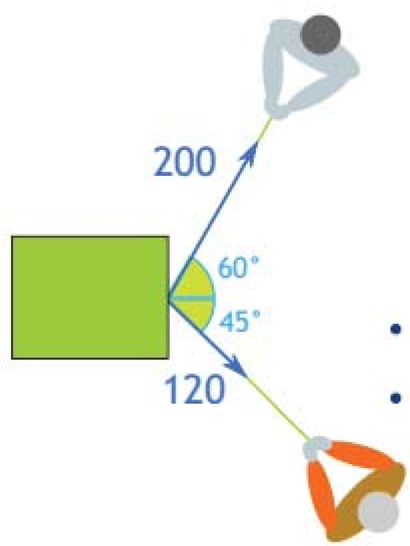
برای تبدیل از مختصات قطبی (r,θ) به مختصاتکارتزین (x,y) داریم.

$$x=r\times\cos(\theta)$$

$$y=r\times\sin(\theta)$$

مساله 8

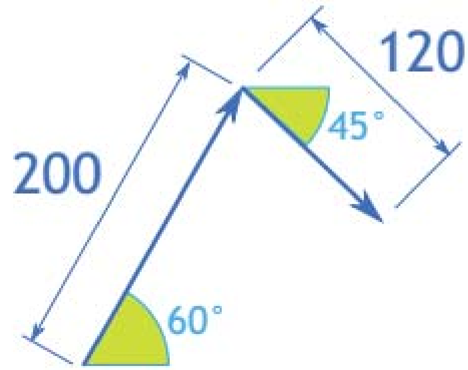
سعد و آرمان در حال کشیدن یک جعبه هستند. نیروی کشش سعد 200 نیوتن با زاویه 60° نیروی کشش آرمان 120 نیوتن با زاویه 45° مطابق تصویر.



مطلوب است براینده نیرو ها و جهت آن.

پاسخ

اجازه دهید دو بردار را جمع کنیم



از قطبی به دکارتی تبدیل می کنیم با دو رقم اعشاری.

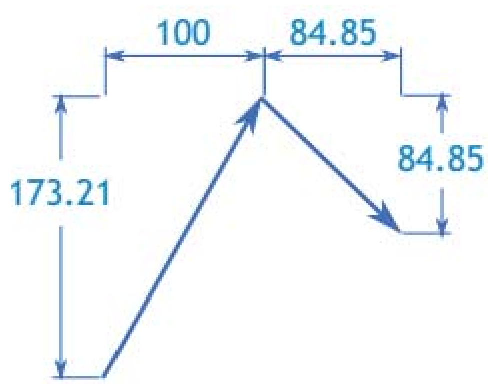
بردار سعد

- $x = r \times \cos(\theta) = 200 \times \cos(60°) = 200 \times 0.5 = 100$
- $y = r \times \sin(\theta) = 200 \times \sin(60°) = 200 \times 0.8660 = 173.21$

بردار آرمان

- $x = r \times \cos(\theta) = 120 \times \cos(-45°) = 120 \times 0.7071 = 84.85$
- $y = r \times \sin(\theta) = 120 \times \sin(-45°) = 120 \times -0.7071 = -84.85$

پس داریم.



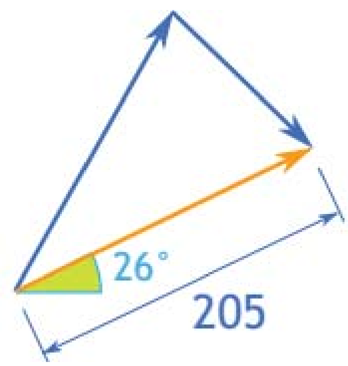
حالا ، نیرو ها را با هم جمع می کنیم.

$$(100,173.21) + (84.85, -84.85) = (184.85, 88.36)$$

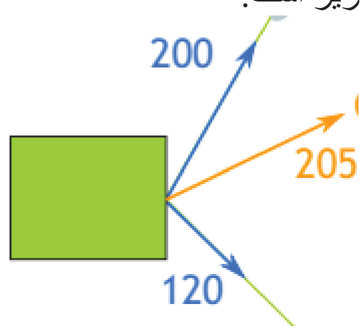
جواب بالا در مختصات دکارتی است ,به مختصات قطبی بر می گردانیم.

- $r = \sqrt{(x^2 + y^2)} = \sqrt{(184.85^2 + 88.36^2)} = 204.88$
- $\theta = \tan^{-1}(y / x) = \tan^{-1}(88.36 / 184.85) = 25.5°$

جواب بالا را گرد می کنیم. پس داریم.



براین‌د نیروها و جهت آن به صورت زیر است.



مساله 9

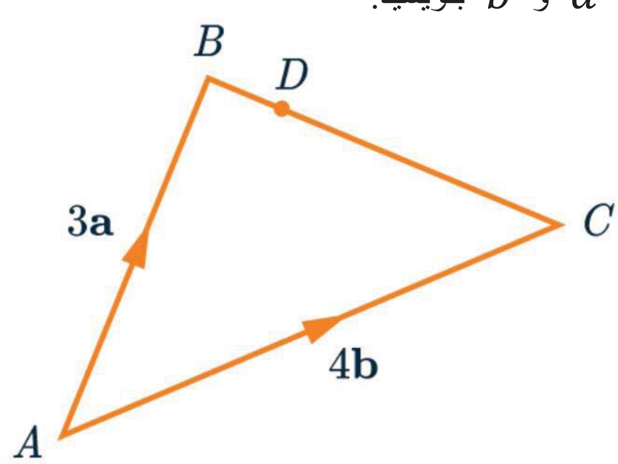
در تصویر زیر ، بردار های زیر را داریم.

$$\overrightarrow{AB} = 3a \text{ و } \overrightarrow{AC} = 4b$$

نقطه D روی خط BC قرار دارد بطوری که نسبت BD به DC مثل نسبت 1 به 3 است ، یعنی

$$BD : DC = 1 : 3$$

بردار $\overrightarrow{AD}$ را بر حسب a و b بنویسید.



پاسخ

برای پیدا کردن $\overrightarrow{AD}$ باید دو بردار زیر را با هم جمع کنیم. یعنی

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$$

می دانیم که $\overrightarrow{AB}=3a$ است. اما ، باید $\overrightarrow{BD}$ را پیدا کنیم. می دانیم که

$$BD:DC=1:3$$

است. پس نقطه D در یک چهارم طول $\overrightarrow{BC}$ قرار دارد. از طرف دیگر داریم.

$$\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=-3a+4b$$

حالا باید عبارت بالا را در $\frac{1}{4}$ ضرب کنیم.

$$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}(3a+4b)=-\frac{3}{4}a+b$$

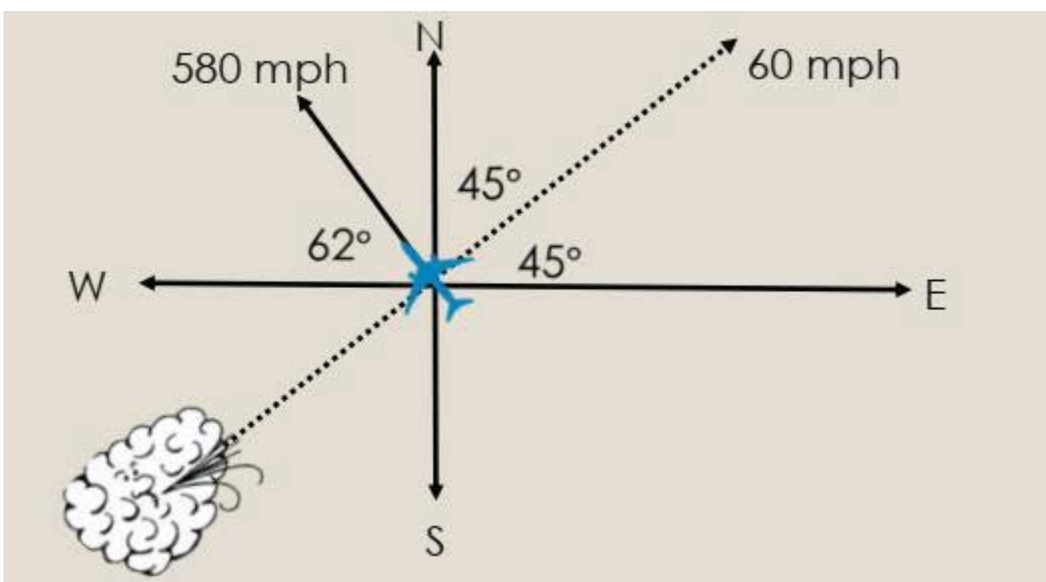
باید $\overrightarrow{AB}$ را با جواب جمع کنیم.

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=3a+\left(-\frac{3}{4}a+b\right)=\frac{9}{4}a+b$$

پس جواب بر حسب a و b پیدا کردیم.

مساله 10

یک هواپیما از شهر M به شهر S با سرعت 580 مایل در ساعت و زاویه 332° در حال پرواز است. باد با سرعت 60 مایل در ساعت از جنوب غربی با زاویه 45° میوزد.
مطلوب است سرعت و زاویه



پاسخ

نیروها

هواپیما: $< -580\cos(62), 580\sin(62) >$

باد $< 60\cos(45), 60\sin(45) >$

نیروها را جمع می کنیم.

نتیجه: $< -580\cos(62) + 60\cos(45), 580\sin(62) + 60\sin(45) >$

$= < -229.867, 554.536 >$

در نتیجه سرعت و زاویه حرکت هواپیما به صورت زیر است.

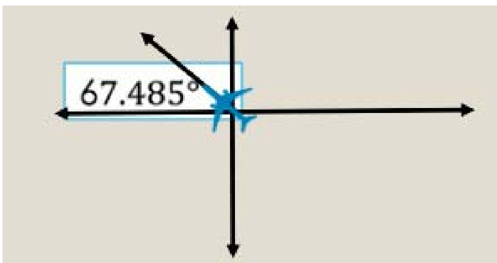
سرعت

$|r| = \sqrt{(-229.867)^2 + (554.536)^2} = 600.691$ مایل در ساعت

زاویه

$$\tan\theta = \frac{554.536}{-229.867} \Rightarrow \tan^{-1}\frac{554.536}{-229.867} = -67.485^\circ$$

نمودار نهایی

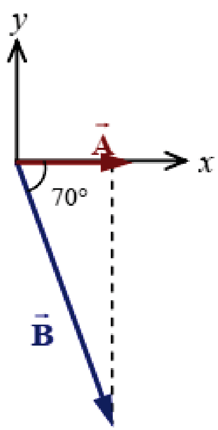


مساله 11

در تصویر زیر طول $\vec{A}$ مساوی 50 واحد است و طول $\vec{B}$ مساوی 120 واحد است. مطلوب است

الف - B_x

ب - B_y



پاسخ

$B_x = 120\cos 70^{\circ} = 41$ واحد
$B_y = 120\sin 70^{\circ} = 113$ واحد

مساله **12**

یک توپ با شتاب Velocity اولیه 70 فوت در ثانیه و با زاویه 35° نسبت به افق پرتاب می شود. مطلوب است مولفه های عمودی و افقی شتاب.

پاسخ

فرض می کنیم v شتاب باشد با استفاده از اطلاعات داده شده v را به صورت بردار واحد می نویسیم.

$$v = 70(\cos(35^{\circ}))i + 70(\sin(35^{\circ}))j$$

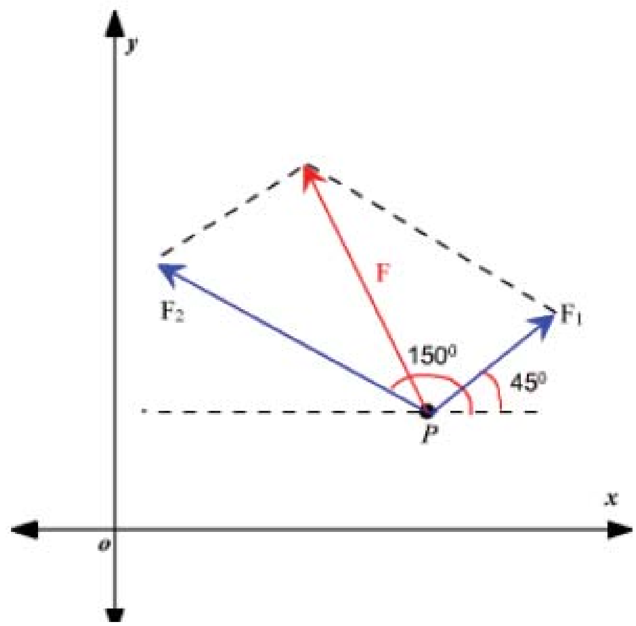
ساده می کنیم.

$$v \approx 37.34i + 40.15j$$

لذا مولفه افقی 37.34 فوت در ثانیه و مولفه عمودی 40.15 فوت در ثانیه است.

مساله 13

دو نیرو ی $\boldsymbol{F_1}$ و $\boldsymbol{F_2}$ به ترتیب با کمیّت های 20 و 30 پوند روی یک جسم در نقطه P عمل می کنند. تصویر زیر. مطلوب است برایند نیرو هایی که روی P عمل می کند.



پاسخ

$$\mathrm{F}_1 = (20\cos(45^{\circ}))\, i + (20\sin(45^{\circ}))\, j$$
$$= 20\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) i + 20\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) j$$
$$= 10\sqrt{2}i + 10\sqrt{2}j$$

$$\mathrm{F}_2 = (30\cos(150^\circ))\,i + (30\sin(150^\circ))\,j$$
$$= 30\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i + 30\left(\frac{1}{2}\right)j$$
$$= -15\sqrt{3}i + 15j$$

پس نیروی برایند به صورت زیر است.

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$$
$$= \left(10\sqrt{2}\,i + 10\sqrt{2}j\right) + \left(-15\sqrt{3}\,i + 15j\right)$$
$$= \left(10\sqrt{2} - 15\sqrt{3}\right)i + \left(10\sqrt{2} + 15\right)j$$
$$\approx -12i + 29j$$

یاد آوری

کار انجام شده W توسط یک نیروی F که در طول یک بردار D حرکت می کند به صورت زیر بدست می آید.

$$W = F * D$$

مساله 14

یک نیرو که توسط بردار $\boldsymbol{F} = \langle 2{,}3\rangle$ مشخص می شود ، یک شئی را از نقطه $\langle 1{,}3\rangle$ به نقطه $\langle 5{,}9\rangle$ حرکت می دهد. مطلوب است کار انجام شده.

پاسخ

ابتداجا بجایی را پیدا می کنیم.

$$D = \langle 5-1{,}9-3\rangle = \langle 4{,}6\rangle$$

با استفاده از فرمول بالا ، کار انجام شده

$$W = \boldsymbol{F}.D = \langle 2{,}3\rangle * \langle 4{,}6\rangle = 26$$

اگر واحد نیرو پوند و مسافت بر حسب فوت باشد ، پس کار انجام شده 26 فوت ــپوند است.

یاد آوری

یک بردار را هم به صورت زیر می توان نشان داد.

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}\ .$$

ضرب نقطه ای دو بردار $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ به صورت زیر است. اینجا ϕ زاویه بین دو بردار است.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\phi$$

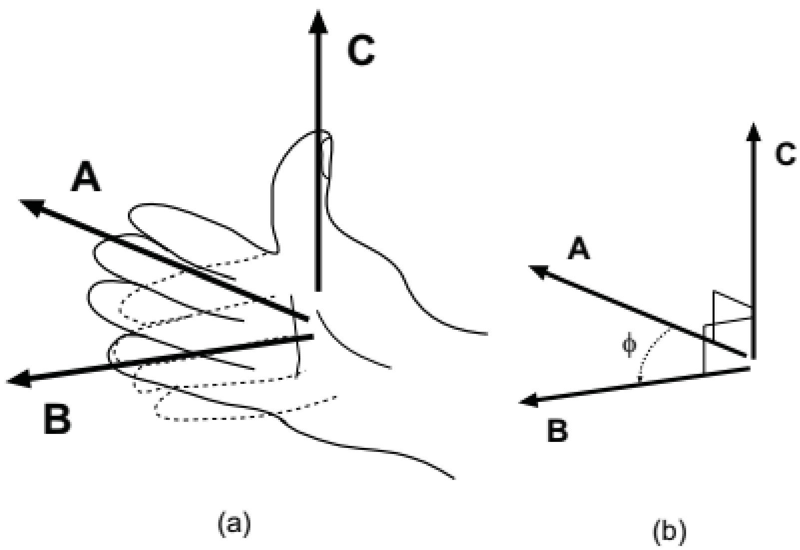
حاصل ضربدری یا Cross Product به صورت زیر است.

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$$

مقدار c به صورت زیر است.

$$c = ab\sin\phi$$

اینجا $\boldsymbol{c}$ یک بردار است که جهت آن عمود است به صفحه ای که شامل $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ است.



حاصل ضربدری به صورت زیر است.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\mathbf{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\mathbf{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\mathbf{k}$$

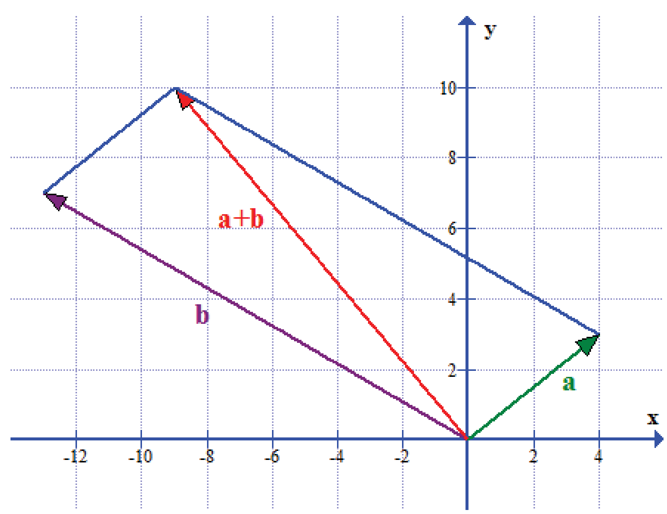
$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

مساله 15

اگر $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$ و $\boldsymbol{b}=-13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}$ باشد ، مطلوب است $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ و مقدار و جهت $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$

پاسخ

$$\begin{aligned}\mathbf{a}+\mathbf{b} &= (4.0-13.0)\mathbf{i}+(3.0+7.0)\mathbf{j}\\ &= -9.0\mathbf{i}+10.0\mathbf{j}\end{aligned}$$



با استفاده از نتیجه بالا داریم.

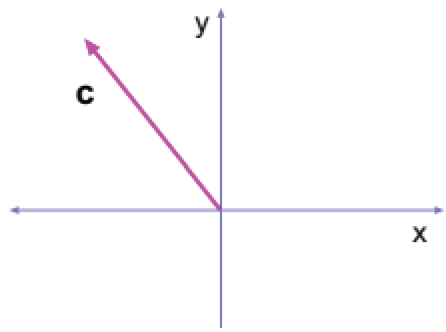
$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = \sqrt{(-9.0)^2 + (10.0)^2} = 13.4$$

اگر $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ باشد ، پس داریم.

$$\tan\theta = \left(\frac{c_y}{c_x}\right) = -1.11$$

$$\theta = \tan^{-1}(-1.11) = -48.0°$$

تصویر زیر بردار $\boldsymbol{c}$ را نشان می دهدکه دقیقا مانند تصویر بالا است.



مساله 16

بردار A از مبدا شروع می شود تا نقطه ای که مختصات قطبی آن $(7, 70^{\circ})$ و بردار B از مبدا شروع می شود تا نقطه ای که مختصات قطبی آن $(4, 130^{\circ})$ است. مطلوب است $A \cdot B$

پاسخ

می دانیم که

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\phi$$

مقدار یا طول دو بردار را داریم. $A = 7$ و $B = 4$ و زاویه بین آنها به صورت زیر بدست می آوریم.

$$\phi = 130° - 70° = 60° \ .$$

پس داریم.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\phi = (7)(4)\cos 60° = 14$$

مساله 17

مطلوب است زاویه بین

$$\mathbf{A} = -5\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

و

$$\mathbf{B} = -2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}.$$

پاسخ

باز هم از فرمول زیر استفاده می کنیم.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos\phi$$

پس ابتدا مقدار یا طول A و B را پیدا می کنیم.

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2 + (2)^2} = 6.164$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 2.828$$

ضرب نقطه ای آنها هم به صورت زیر است.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = (-5)(0) + (-3)(-2) + (2)(-2) = 2$$

در نهایت داریم.

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{2}{(6.164)(2.828)} = 0.114$$

لذا

$$\phi = 83.4^\circ$$

مساله 18

دو بردار زیر را داریم.

$$\mathbf{A} = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

و

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

مطلوب است

$$\textbf{(a)}\ \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

و

(b) زاویه بین A و B

پاسخ

می دانیم

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k}$$

و

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

پس داریم.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (0-0)\mathbf{i} + (0-0)\mathbf{j} + ((-9)-(8))\mathbf{k} = -17\mathbf{k}$$

برای پیدا کردن زاویه بین A و B بهتر است از ضرب نقطه ای استفاده کنیم.

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = 5 \qquad B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(2)^2 + (3)^2} = 3.61$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = (-3)(2) + (4)(3) = 6$$

$$\cos\phi = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{AB} = \frac{6}{(5)(3.61)} = 0.333$$

$$\phi = 70.6^\circ$$

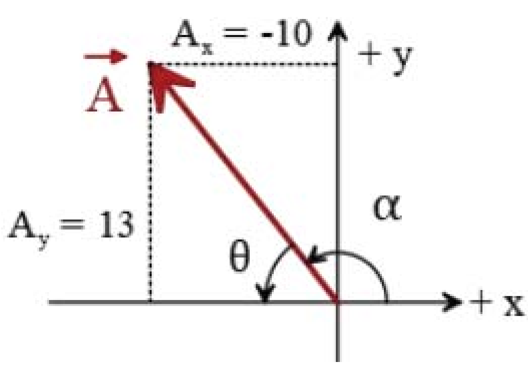
مساله 19

مولفه x یک بردار -10 و مولفه y آن 13 است. مطلوب است مقدار و جهت این بردار.

پاسخ

$$\begin{aligned} |\vec{A}| &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\ &= \sqrt{(-10)^2 + (13)^2} \\ &= 16.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \arctan \frac{A_y}{A_x} \\ &= \arctan \frac{13}{-10} \\ &= -52^\circ \end{aligned}$$



مساله 20

مطلوب است مختصات x و y بردار زیر

یک بردار 10 متری که با قسمت مثبت x یک زاویه 30^0 ایجاد می کند.

پاسخ

می دانیم که

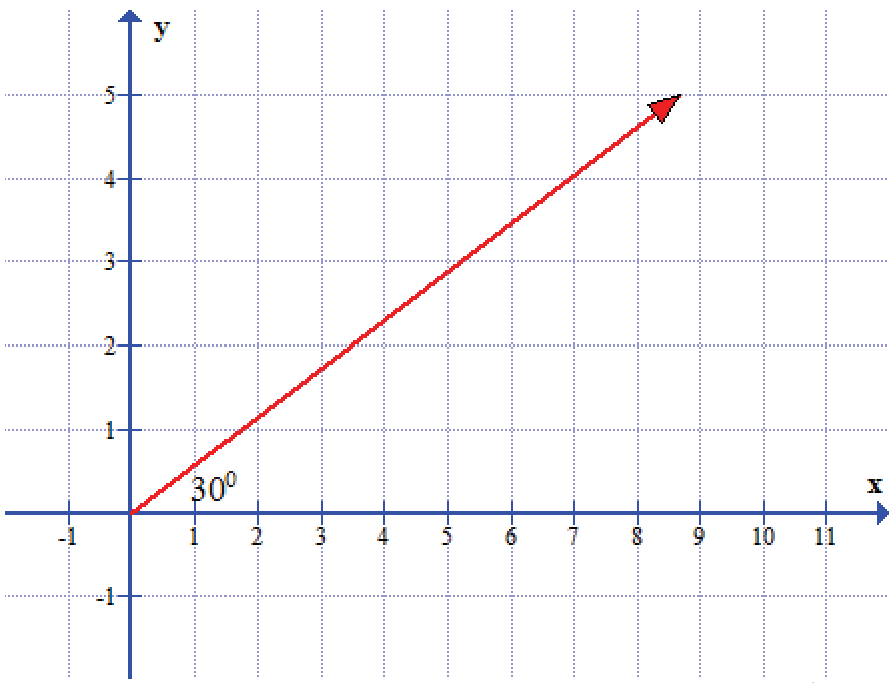
$$R_x = |\vec{R}|\cos\theta$$
$$R_y = |\vec{R}|\sin\theta$$

پس

$$\begin{aligned}R_x &= |\vec{R}|\cos\theta\\ &= (10)\cos 30^\circ\\ &= 5\sqrt{3} \quad \mathrm{m}\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}R_y &= |\vec{R}|\sin\theta\\ &= (10)\sin 30^\circ\\ &= 5 \quad \mathrm{m}\end{aligned}$$



امتحان می کنیم ببنیم آیا طول بردار در حقیقت 10 متر است.

$$|R| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 + (5)^2} = \sqrt{(25*3)+25}$$
$$= \sqrt{100} = 10\,m$$

مساله 21

مطلوب است مختصات x و y بردار زیر

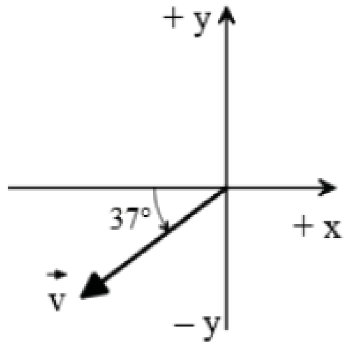
یک بردار شتاب Velocity یا میزان پیمایش مسافت نسبت به زمان

به طول 20 متر در ثانیه که یک زاویه 37° خلاف جهت عقربه ساعت

نسبت به محور $-x$ می سازد

پاسخ

زاویه نسبت به قسمت منفی x در تصویر زیر ملاحظه می شود.

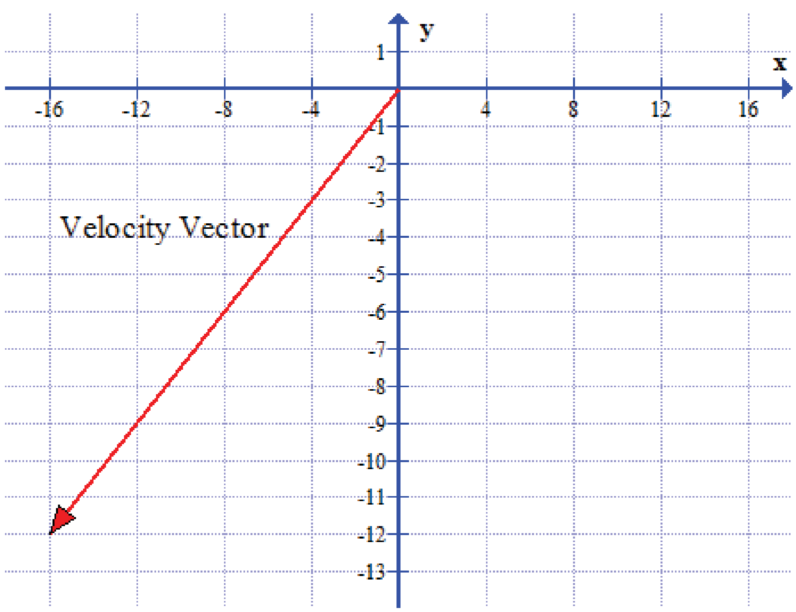


برای اندازه گرفتن آن نسبت به $+x$ در جهت خلاف عقربه ساعت ، باید آنرا با 180° اضافه کنیم پس داریم.

$$180^{\circ}+37^{\circ}=217^{\circ}$$

پس مختصات این بردار به صورت زیر بدست می آوریم. نام بردار هم $\vec{v}$ می گذاریم. v حرف اول $Velocity$ است.

$$\begin{aligned} v_x &= |\vec{v}|\cos\theta \\ &= (20)\cos 217^{\circ} \\ &= -16 \quad \mathrm{m/s} \\ v_y &= |\vec{v}|\sin\theta \\ &= (20)\sin 217^{\circ} \\ &= -12 \quad \mathrm{m/s} \end{aligned}$$



مساله 22

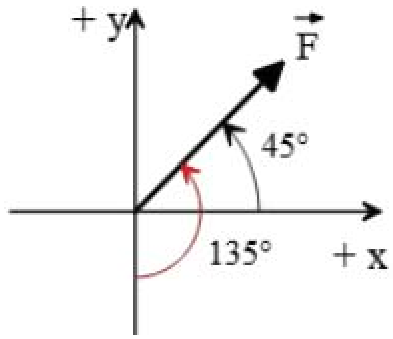
مطلوب است مختصات x و y بردار زیر

یک بردار نیروی $20\ N$ که نسبت به محور $-y$

خلاف جهت عقربه ساعت یک زاویه 135° می سازد.

پاسخ

اینجا ، جهت بردار نیرو از جهت $-y$ اندازه گرفته می شود. مطابق تصویر زیر.



همانطور که در تصویر بالا ملاحظه می کنید این نیرو نسبت به $+x$ یک زاویه 45° می سازد. پس داریم.

$$\begin{aligned} F_x &= |\vec{F}|\cos\theta \\ &= (80)\cos 45^\circ \\ &= 40\sqrt{2} \quad \mathrm{N} \end{aligned}$$

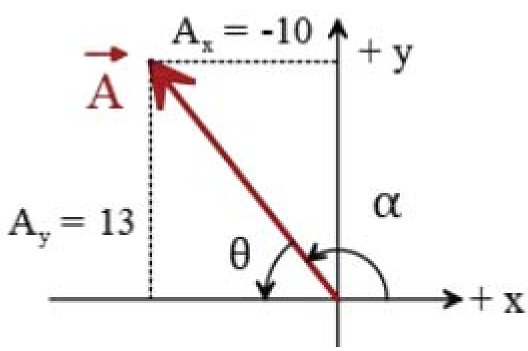
$$\begin{aligned} F_y &= |\vec{F}|\sin\theta \\ &= (80)\sin 45^\circ \\ &= 40\sqrt{2} \quad \mathrm{N} \end{aligned}$$

مساله 23

مولفه x یک بردار -10 واحد و مولفه y آن 13 واحد است. مطلوب است اندازه و جهت بردار.

پاسخ

اگر بردار را $\vec{A}$ بنامیم ، داریم. تصویر زیر



$$\begin{aligned}|\vec{A}| &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2}\\ &= \sqrt{(-10)^2 + (13)^2}\\ &= 16.4\\ \theta &= \arctan \frac{A_y}{A_x}\\ &= \arctan \frac{13}{-10}\\ &= -52^\circ\end{aligned}$$

نکته مهم

اگر بردار در ربع اول یا ربع چهارم باشد ، زاویه ای که از فرمول بالا بدست می آید صحیح است. اما ، اگر بردار در ربع دوم یا سوم باشد ، باید 180° به زاویه ای که بدست آمده ، اضافه کنیم. پس جواب صحیح این مساله به صورت زیر است , زیرا این بردار در ربع دوم قرار دارد.

$$\alpha = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$$

مساله 24

یک کشتی مسافت 200 کیلو متر از نقطه A به نقطه B در جهت مشرق طی می کند وسپس از نقطه B به نقطه مقصد C در جهت جنوب طی طریق می کند.

(a)

بردار جا بجای را به صورت مولفه بنویسید.

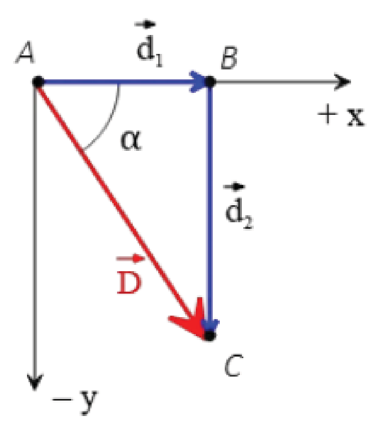
(b)

فاصله بین A و c چه قدر است. به عبارت دیگر طول بردار جا بجایی

(c)

بردار جا بجایی چه زاویه ای با قسمت مثبت محور x می سازد؟

پاسخ



در تصویر بالا $\overrightarrow{d_1}$ یعنی مسیر یا جهت اول $\overrightarrow{d_2}$ یعنی مسیر یا جهت دوم و $\vec{D}$ بردار جا بجایی است

(a)

$$\vec{D} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2$$
$$= 200\,\hat{i} - 300\,\hat{j}$$

(b)

$$|\vec{D}| = \sqrt{D_x^2 + D_y^2}$$
$$= \sqrt{(200)^2 + (-300)^2}$$
$$= 500 \quad \mathbf{km}$$

(c)

زاویه ای که یک بردار نسبت به محور $+x$ خلاف جهت عقربه ساعت می سازد از طریق زیر بدست می آید.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{D_y}{D_x}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{-300}{200}\right)$$

$$= -56.3°$$

یاد آوری

تابع مکان عبارت است از فاصله یک شئی نسبت به یک نقطه مرجع و با $r(t)$ یه $s(t)$ نشان می دهند. تابع جهت هم دارد ، پس می تواند مثبت یا منفی باشد.

سرعت متوسط

$$\text{سرعت متوسط} = \frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}$$

$$\text{میزان پیمایش مسافت نسبت به زمان} = \frac{\text{تغییر مکان}}{\text{تغییر زمان}}$$

برای پیدا کردن میزان پیمایش مسافت نسبت به زمان یا تندی Velocity

$$v(t) = r'(t)$$

سرعت یا Speed

$$s = |v(t)|$$

برای پیدا کردن شتاب یا Acceleration

$$a(t) = v'(t)$$

مساله 25

مطلوب است بردارتندی $v(t)$ اگر بردارمکان به صورت زیر باشد.

$$\mathbf{r}(t) = 3t\hat{\mathbf{i}} + 2t^2\hat{\mathbf{j}} + \sin(t)\hat{\mathbf{k}}.$$

پاسخ

طبق تعریف , تندی مشتق تابع مکان است.
پس کافی است مشتق تابع مکان را پیدا کنیم.

$$\mathbf{v}(t) = 3\hat{\mathbf{i}} + 4t\hat{\mathbf{j}} + \cos(t)\hat{\mathbf{k}}.$$

مساله 26

فرض کنید یک جسم در طول محور x حرکت می کند بطوری که مکان آن در زمان t به صورت زیر باشد.

$$s(t) = 3t^2 + 8t - 2t^{\frac{5}{2}}$$

تندی و شتاب به صورت تابع های t محاسبه کنید. سپس مشخص کنید در کدام جهت ، راست یا چپ ، آن جسم در حال حرکت است هنگامی که $t = 1$ است. و آیا تندی و سرعت آن در حال اضافه شدن یا کم شدن است؟

پاسخ

برای پیدا کردن تندی ، مشتق مکان اولیه را محاسبه می کنیم.

$$v(t) = s'(t) = 6t + 8 - 5t^{\frac{3}{2}}$$

برای پیدا کردن شتاب ، مشتق تندی را محاسبه می کنیم.

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 6 - \tfrac{15}{2}t^{\frac{1}{2}}$$

برای مشخص کردن جهت شئی در $t = 1$ عدد 1 را در تابع تدی می گذاریم.

$$v(1) = 6(1) + 8 - 5(1)^{\frac{3}{2}}$$

$$v(1) = 9$$

چون $v(1)$ مثبت است ، می توان نتیجه گرفت که شئی در جهت مثبت یعنی بت طرف راست حرکت می کند.

برای این که مشخص کنیم آیا تندی در حال افزایش است یا بر عکس ، عدد 1 را در تابع شتاب می گذاریم. زیرا این میزان تغییر تندی را به ما می دهد ، و چون شتاب مشتق تندی است ، داریم.

$$a(1) = 6 - \tfrac{15}{2}(1)^{\frac{1}{2}}$$

$$a(1) = -\tfrac{3}{2}$$

چون شتاب در $t = 1$ منفی است ، تندی در آن نقطه در حال کم شدن است.

چون تندی در $t=1$ در حل کم شدن است ، این یعنی سرعت هم در حال کم شدن است.

یاد آوری
تندی لحظه ای عبارت است از تندی یک شئی در یک لحظه معین در زمان

مساله 27
اگر تابع مکان یک شئی به صورت زیر باشد

$$s(t)=5t^3+2t-8$$

اینجا s بر حسب متر و t بر حسب ثانیه ااست.
الف - در زمان $t=0$ تندی شئی چه مقدار است؟
ب - در زمان $t=25$ تندی شئی چه قدر است؟
ج - اگر حرکت در $8:45$ صبح شروع شود ، تندی در ساعت $8:51$ صبح چه قدر است؟

پاسخ
ابتدا ، مشتق $s(t)$ را پیدا می کنیم.

$$s'(t)=v(t)=15t^2+2$$

برای پیدا کردن تندی در $t=0$ این عدد را در $v(t)$ می گذاریم.

$$v(0)=15(0)^2+2$$

$$v(0)=2$$

یعنی تندی در $t=0$ برابر است با 2 متر در ثانیه.
برای پیدا کردن تندی در $t=25$ این عدد را در $v(t)$ می گذاریم.

$$v(25)=15(25)^2+2$$

$$v(25)=9,377$$

پس تندی در $t=25$ مساوی 9,377 متر در ثانیه است.
در $8:45$ صبح که حرکت شروع می شود ، این یعنی $t=0$ است. سئوال در مورد تندی بعد از 6 دقیقه است. باید دقیقه را به ثانیه تبدیل کنیم.

$$t=6*60=360 \text{ ثانیه}$$

پس داریم.

$$v(360)=15(360)^2+2$$

$$v(360)=1,944,002$$

یعنی تندی درساعت $8:51$ صبح معادل متر در ثانیه 1,944,002 است.

بخش 4.10
معادلات دیفرانسیل پاره ای

مساله 1
اگر داشته باشیم.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + y\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

هرکدام از جوابهای زیر در مورد معادله بالا صدق می کند ، علامت بزنید.
الف - مرتبه اول
ب - مرتبه دوم
ج - مرتبه سوم
د - معمولی
ه - پاره ای
و- خطی
ز- غیر خطی
پاسخ
مرتبه سوم ، معمولی ، غیر خطی

مساله 2
اگر داشته باشیم.

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\psi}{d\xi}\right) = e^{-\psi}$$

هرکدام از جوابهای زیر در مورد معادله بالا صدق می کند ، علامت بزنید.
الف - مرتبه اول
ب - مرتبه دوم
ج - مرتبه سوم
د - معمولی
ه - پاره ای
و- خطی
ز- غیر خطی

پاسخ
مرتبه دوم ، معمولی ، غیر خطی

مساله 3
نشان دهید اگر a یک عدد ثابت باشد ، پس $u(x,y) = \sin(at)\cos(x)$ یک جواب معادله دفرانسیل پاره ای زیر است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (2)$$

پاسخ

چون a یک عدد ثابت است ، پس مشتق های پاره ای نسبت به t به صورت زیر است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\cos(at)\cos(x)\,, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a^2\sin(at)\sin(x) \qquad (3)$$

علاوه بر این داریم.

$$u_x = -\sin(at)\sin(x) \quad \text{و} \quad u_{xx} = -\sin(at)\cos(x)$$

بطوری که

$$a^2\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a^2\sin(at)\cos(x) \qquad (4)$$

چون (3) و (4) یکی است ، پس

$u(x,t) = \sin(at)\cos(x)$ یک جواب معادله زیر است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

مساله 4

مطلوب است جواب کلی معادله دیفرانسیل پاره ای زیر.

$$u_x + u_y - u = 0$$

پاسخ

ابتدا داریم $a = 1\,, b = 1\,, c = u$ ، رابطه بین دیفرانسیل ها به صورت زیر است.

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{u}$$

می توانیم دیفرانسیل ها به سه صورت جفت کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = 1\ , \qquad \frac{du}{dx} = u\ , \quad \frac{du}{dy} = u$$

فقط دو تا از این ها مستقل هستند. روی اولی متمرکز می شویم.

معادله اول منحنی های ممیز در صفحه xy به ما میدهد. این معادله به آسانی حل می شود ، پس داریم.

$$y = x = c_1$$

معادله دوم به صورت زیر حل می شود.

$$u = c_2 e^x$$

هدف پیدا کردن جواب کلی برای معادله دیفرانسیل است. چون $u = u(x, y)$ است ، انتگرال گیری از عدد ثابت ، در حقیقت یک عدد ثابت نیست ، بلکه ثابت نسبت به x است. در حقیقت یک تابع ثابت اختیاری است. در حقیقت می توانیم آنرا یک تابع c_1 تصور کنیم ، یعنی عدد ثابت انتگرال تابع اول. پس ، فرض می کنیم $c_2 = G(c_1)$ اینجا G یک تابع اختیاری است. چون $c_1 = y - x$ است ، می توانیم جواب کلی معادله دیفرانسیل را به صورت زیر بنویسیم.

$$u(x, y) = G(y - x)e^x$$

مساله 5

نشان دهید $u(x, t) = e^y \sin(x)$ یک جواب معادله لاپلاس زیر است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

پاسخ

برای شروع داریم. $u_{xx} = -e^y \sin(x)$ و $u_x = e^y \cos(x)$ علاوه بر این داریم

$$u_y = e^y \sin(x) \text{ و } u_{yy} = e^y \sin(x)$$

است ، بطوری که

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^y \sin(x) + e^y \sin(x) = 0$$

یاد آوری

تفکیک متغیر ها

معادله	جواب کلی
$y'' + \omega^2 y = 0$	$y(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$
$y' = ky$	$y(t) = Pe^{kt}$
$y'' - \omega^2 y = 0$	$y(x) = A\cosh(\omega x) + B\sinh(\omega x)$

مساله 6

برای عدد ثابت k مطلوب است جواب تفکیکی معادله حرارت زیر

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

پاسخ

در معادله داده شده

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

جانشین می کنیم ، پس داریم.

$$\frac{\partial}{\partial t}(X(x)T(t)) = k\frac{\partial^2}{\partial x^2}(X(x)T(t))$$

چون $X(x)$ وابسته به t نیست و چم $T(t)$ وابسته به x نیست ، پس داریم.

$$X\left(x\right)\frac{\partial}{\partial t}T\left(t\right)=kT\left(t\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}X\left(x\right)$$

که بعد از محاسبه مشتق ها داریم.

$$X\left(x\right)T'\left(t\right)=kT\left(t\right)X''\left(x\right)$$

برای تفکیک متغیر ها ، طرفه را به $kX(x)T(t)$ تقسیم می کنیم ، پس داریم.

$$\frac{X\left(x\right)T'\left(t\right)}{kX\left(x\right)T\left(t\right)}=\frac{kT\left(t\right)X''\left(x\right)}{kX\left(x\right)T\left(t\right)}$$

که ساده می شود به

$$\frac{T'\left(t\right)}{kT\left(t\right)}=\frac{X''\left(x\right)}{X\left(x\right)}$$

پس یک عدد ثابت λ وجود دارد ، بطوری که داریم.

$$\frac{T'}{kT}=\lambda \quad \text{و} \quad \frac{X''}{X}=\lambda$$

این معادله ها به معادله های دیفرانسیل زیر تبدیل می شوند.

$$T'=\lambda kT \quad \text{و} \quad X''=\lambda x$$

جواب معادله اول یک تابع نمایی به صورت زیر است.

$$T\left(t\right)=Pe^{\lambda kt}$$

اگر $\lambda>0$ باشد. اما ، حرارت به ∞ می رود. که از نظر فیزیکی امکان ندارد. پس فرض می کنیم $\lambda<0$ باشد ، یعنی بگوییم $\lambda=-\omega^2$ اینجا ω یک عدد است. در نتیجه ، داریم.

$$X''=-\omega^2X \quad \text{یا} \quad X''+\omega^2X=0$$

معادله $X''+\omega^2X=0$ یک نوسانگر هارمونیک است که دارای جواب زیر است.

$$X\left(x\right)=A\cos\left(\omega x\right)+B\sin\left(\omega x\right)$$

در نتیجه جواب تفکیک شده معادله حرارت به صورت زیر است.

$$u\left(x,t\right)=X\left(x\right)T\left(t\right)=Pe^{-\omega^2kt}\left(A\cos\left(\omega x\right)+B\sin\left(\omega x\right)\right)$$

باید توجه داشت که یک **جواب تفکیک شده** برای یک معادله دیفرانسیل پاره ای ، **تنها جواب نیست**.

مساله 7

مطلوب است جواب تفکیک شده برای معادله زیر.

$$F_x+2xF_y=0.$$

پاسخ

شکل تفکیک شده $F(x,y)=X(x)\,Y(y)$ منتج به

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(X\left(x\right)Y\left(y\right)\right)+2x\frac{\partial}{\partial y}\left(X\left(x\right)Y\left(y\right)\right)=0$$

می شود ، که در نتیجه به

$$X'(x)\,Y(y) = -2xX(x)\,Y'(y)$$

تبدیل می شود. طرفین را به $X(x)Y(y)$ تقسیم می کنیم ، پس داریم.

$$\frac{X'(x)}{-2xX(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)}$$

اما ، یک تابع x می تواند مساوی یک تابع y باشد ، برای تمام x ها و y ها فقط اگر هر دو تابع ثابت باشند. پس یک عدد ثابت λ وجود دارد ، بطوری که

$$\frac{X'(x)}{-2xX(x)} = \lambda \quad \text{و} \quad \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda$$

در نتیجه $Y'(y) = \lambda Y(y)$ که دلالت می کند $Y(y) = C_1e^{\lambda y}$ اما $X'(x) = \lambda xX(x)$ است بطوری که تفکیک متغیر ها منتج می شود به

$$\frac{dX}{dx} = -2\lambda xX \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dX}{X} = \lambda x dx$$

پس

$$\int \frac{dX}{X} = \lambda \int x\,dx$$

است ، که نتیجه می شود

$$\begin{aligned} \ln|X| &= -\lambda x^2 + C_2 \\ |X| &= e^{-\lambda x^2 + C_2} \\ X(x) &= \pm e^{C_2} e^{-\lambda x^2} \end{aligned}$$

پس ، فرض می کنیم $C_3 = \pm e^{C_2}$ باشد ، پس

$$Y(y) = C_3 e^{\frac{x^2}{2}}$$

است و جواب تفکیک شده

$$F(x,y) = Ce^{-\lambda x^2} e^{\lambda y} = Ce^{\lambda\left(y - x^2\right)}$$

اینجا $C = C_1C_3$ یک عدد ثابت دلخواه است.

مساله 8

مطلوب است جواب معادله موج یک بعدی زیر

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (5)$$

مشروط به شرط زیر.

$$u(0,t) = 0 \ \text{و}\ u(l,t) = 0 \qquad (6)$$

پاسخ

برای این کار $u(x,t) = X(x)T(t)$ در معادله می گذاریم ، پس داریم.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(X(x)T(t)\right) = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(X(x)T(t)\right) \quad \Longrightarrow \quad X(x)T''(t) = a^2 T(t)X''(x)$$

برای تفکیک کردن متغیر ها ، طرفین را بر $a^2X(x)T(t)$ تقسیم می کنیم.

$$\frac{X(x)T''(t)}{a^2X(x)T(t)} = \frac{a^2T(t)X''(x)}{a^2X(x)T(t)}$$

این را هم ساده می کنیم.

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

در نتیجه ، باید یک λ وجود داشته باشد بطوری که

$$\frac{T''}{a^2T} = \lambda \quad \text{و} \quad X'' = \lambda X$$

اگر $\lambda > 0$ نوسانات بی نهایت بزرگ می شوند ، از نظر فیزیکی امکان ندارد. پس ، فرض می کنیم λ منفی باشد یعنی بگوییم $\lambda = -\omega^2$ باشد ، اینجا ω یک عدد است. در نتیجه داریم.

$$T'' = -a^2\omega^2 T \quad \text{و} \quad X'' = -\omega^2 X$$

هر دو معادله نوسانگر های هارمونیک هستند ، بطوری که جوابهای کلی به صورت زیر هستند.

$$T(t) = A_1\cos(a\omega t)+B_1\sin(a\omega t) \quad \text{و} \quad X(x) = A_2\cos(\omega x)+B_2\sin(\omega x)$$

اینجا A_1, A_2, B_1, B_2 اعداد ثابت اختیاری هستند.

حالا ، اجازه دهید روی $X(x)$ تمرکز کنیم. شرایط مرزی دلالت می کند که

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0 \quad \text{و} \quad u(l,t) = X(l)T(t) = 0$$

اگر فرض کنیم $T(t) = 0$ باشد ، پس جواب $u(x,t) = 0$ است برای تمام t ها. این را می گویند جواب بدیهی ، زیرا این جواب مربوط می شود به هنگامی که زه بدون حرکت است. برا ی دوری از جواب بدیهی ، فرض می کنیم

$$X(0) = 0 \quad \text{و} \quad X(l) = 0$$

باشد. اما ،

$$X(x) = A_2\cos(\omega x) + B_2\sin(\omega x)$$

است ، بطوری که $X(0) = 0$ دلالت می کند که

$$0 = A_2\cos(0) + B_2\sin(0) = A_2$$

پس $A_2 = 0$ است و

$$X(x) = B_2\sin(\omega x)$$

شرط مرزی $X(l) = 0$ دلالت می کند که

$$B_2\sin(\omega l) = 0$$

اگر فرض کنیم $B_2 = 0$ باشد ، باز هم جواب بدیهی بدست می آوریم. برای دوری از جواب بدیهی ، فرض می کنیم $\sin(\omega t) = 0$ باشد که در این هم دلالت می کند

$$\omega l = n\pi$$

باشد ، برای هر عدد صحیح n

پس ، یک جواب برای $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$ برای هر n داریم این یعنی

$$X_n(x) = B_2 \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

یک جواب برای زه مرتعش برای هر n داریم. در نتیجه برای هر n یک جواب تفکیک شده به صورت زیر داریم.

$$u_n(x,t) = \left[A_1 \cos\left(\frac{an\pi}{l}t\right) + B_1 \sin\left(\frac{an\pi}{l}t\right)\right] B_2 \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (7)$$

مساله 9

روش تفکیک متغیر ها را در مورد معادله زیر بکار برید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0$$

پاسخ

اینجا یک معادله حرارت داریم بدون منبع و با مرز های کاملا عایق

پس ، فرض می کنیم حاصلضرب جواب به صورت زیر باشد.

$$u(x,t) = \varphi(x)\, G(t)$$

لذا دو معادله های دیفرانسیل معمولی را که باید حل کنیم ، به صورت زیر هستند.

$$\frac{dG}{dt} = -k\lambda G \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\lambda\varphi$$

حالا ، اجئزه دهید جواب حاصلضرب را در شرط های مرزی بگذاریم.

$$\frac{\partial\left(G(t)\,\varphi(x)\right)}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad \frac{\partial\left(G(t)\,\varphi(x)\right)}{\partial x}(L,t) = 0$$

$$G(t)\,\frac{d\varphi}{dx}(0) = 0 \qquad G(t)\,\frac{d\varphi}{dx}(L) = 0$$

اگر بخواهیم از جواب بدیهی اجتناب کنیم ، نمی توانیم داشته باشیم $G(t) = 0$ برای هر t پس باید داشته نشیم.

$$\frac{d\varphi}{dx}(0) = 0 \qquad \frac{d\varphi}{dx}(L) = 0$$

و در نهایت بدست می آوریم

$$\frac{dG}{dt} = -k\lambda G \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi = 0$$
$$\frac{d\varphi}{dx}(0) = 0 \qquad \frac{d\varphi}{dx}(L) = 0$$

مساله 10

روش تفکیک متغیر ها را در مورد معادله زیر بکار برید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
$$u\left(x,0\right) = f\left(x\right) \qquad u\left(-L,t\right) = u\left(L,t\right) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}\left(-L,t\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\left(L,t\right)$$

پاسخ

ملاحظه می شود که این شرایط مرزی ، شرایط مرزی متجانش هستند. آنها را باز نویسی می کنیم.
پس داریم.

$$u\left(x,t\right) = \varphi\left(x\right)G\left(t\right)$$

و دو معادله دیفرانسیل معمولی که باید حل کنیم ، به صورت زیر هستند.

$$\frac{dG}{dt} = -k\lambda G \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\lambda\varphi$$

حالا ، شرایط مرزی باز نویسی شده را در جواب حاصلضرب می گذاریم.

$$G\left(t\right)\varphi\left(-L\right) - G\left(t\right)\varphi\left(L\right) = G\left(t\right)\left[\varphi\left(-L\right) - \varphi\left(L\right)\right] = 0$$
$$G\left(t\right)\frac{d\varphi}{dx}\left(-L\right) - G\left(t\right)\frac{d\varphi}{dx}\left(L\right) = G\left(t\right)\left[\frac{d\varphi}{dx}\left(-L\right) - \frac{d\varphi}{dx}\left(L\right)\right] = 0$$

ملاحظه می شود برای این که جواب غیر بدیهی بدست آوریم ، باید

$$\varphi\left(-L\right) - \varphi\left(L\right) = 0 \qquad \frac{d\varphi}{dx}\left(-L\right) - \frac{d\varphi}{dx}\left(L\right) = 0$$
$$\varphi\left(-L\right) = \varphi\left(L\right) \qquad \frac{d\varphi}{dx}\left(-L\right) = \frac{d\varphi}{dx}\left(L\right)$$

پس با استفاده از تفکیک متغیر ها ، خواهیم داشت.

$$\frac{dG}{dt} = -k\lambda G \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi = 0$$
$$\varphi\left(-L\right) = \varphi\left(L\right) \qquad \frac{d\varphi}{dx}\left(-L\right) = \frac{d\varphi}{dx}\left(L\right)$$

مساله 11

روش تفکیک متغیر ها را در مورد معادله زیر بکار برید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0$$

پاسخ

مقداری از کار ها را در چند مساله قبل انجام دادیم. پس اجئزه دهید جواب حاصلضرب زیر را $u(x,t) = \varphi(x)\, h(t)$ ،

جانشین کنیم ، پس داریم.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varphi(x)\, h(t)) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varphi(x)\, h(t))$$

$$\varphi(x)\, \frac{d^2 h}{dt^2} = c^2\, h(t)\, \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$$

$$\frac{1}{c^2\, h} \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$$

حالا ، با معرفی عدد ثابت تفکیک داریم.

$$\frac{1}{c^2\, h} \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\lambda$$

دو معادله دیفرانسیل معمولی که باید حل کنیم به صورت زیر هستند.

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h \qquad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\lambda \varphi$$

شرایط مرزی مانند مثال های قبل است. پس با جانشین کردن جواب حاصلضرب در شرایط مرزی ، داریم.

$$\varphi(0) = 0 \qquad \varphi(L) = 0$$

بکار بردن تغییر متغیر ها در مورد این مساله داریم.

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h \qquad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\lambda \varphi$$

$$\varphi(0) = 0 \qquad \varphi(L) = 0$$