فصل سوم
Chapter 3
نگاشت همدیس
Conformal Mapping
بخش اول
Section One
هندسه تابع های تحلیلی
Geometry of Analytic Functions

بخش 3.1
هندسی تابع های تحلیلی Geometry of Analytic Functions
نگاشت همدیس Conformal Mapping

مقدمه
نگاشت های همدیس برای مهندسین و فیزیک دان ها وسیله گرانبها هستند در حل مسائل تئوری بالقوه
مشخصه نگاشت های همدیس این است که زاویه ها را بدون تغییر نگاه می دارند ، بجز در نقاط بحرانی.
و کمک می کنند تابع های تحلیلی را تصویر کنند.

ابتدا ، اجازه دهید نگاشت را به زبان ساده تعریف کنیم. اینجا کمی زبان ریاضی را ساده تر می کنیم تا برای همگان ، حتی خود اینجانب مفهوم نگاشت واضح و روشن شود.

کلمه نگاشت یعنی نگاشتن یا نوشتن یا نگاریدن .
حتما کلمه نگارستان شنیده اید. نگارستان یعنی جایی که در آن انواع نقش و نگار ها نقاشی شده.
در جبر هم کلمه تابع را دیده اید. مثلا تابع $y = f(x)$ را در نظر بگیرید. اگر به x یک مقدار بدهیم تصویر آن در y منعکس می شود. مثلا $f(x) = y^2$ را در نظر بگیرید. اگر $x =$ 2باشد ، تصویر آن در y عدد 4 است. اینجا می گوییم تصویر $x = 2$ می شود $y = 4$

بر می گردیم به کلمه نگاشت. یا **Mapping**
رسم نمودار یک تابع مختلط $w = f(z)$ مشکل است , زیرا چهار بعد لازم است. دو بعد برای z و دو بعد برای w.
پس , برا ی مجسم کردن آنها ، ازنگاشت استفاده می کنیم. $w = f(z)$ یعنی یک نقطه در صفحه مختلط z می گیریم وآنرا **نگاشت** یا **می فرستیم** به یک نقطه در صفحه مختلط w .

این کلمات و سمبل ها را بکار می بریم.

*) یک تابع $w = f(z)$ را می گوییم **نگاشت** یا **فرستادن** z به w ·

*) یا می نویسیم $z \mapsto w$ یا $z \mapsto f(z)$ و می خوانیم z نگاشته می شود به w یا z فرستاده می شود به w ·

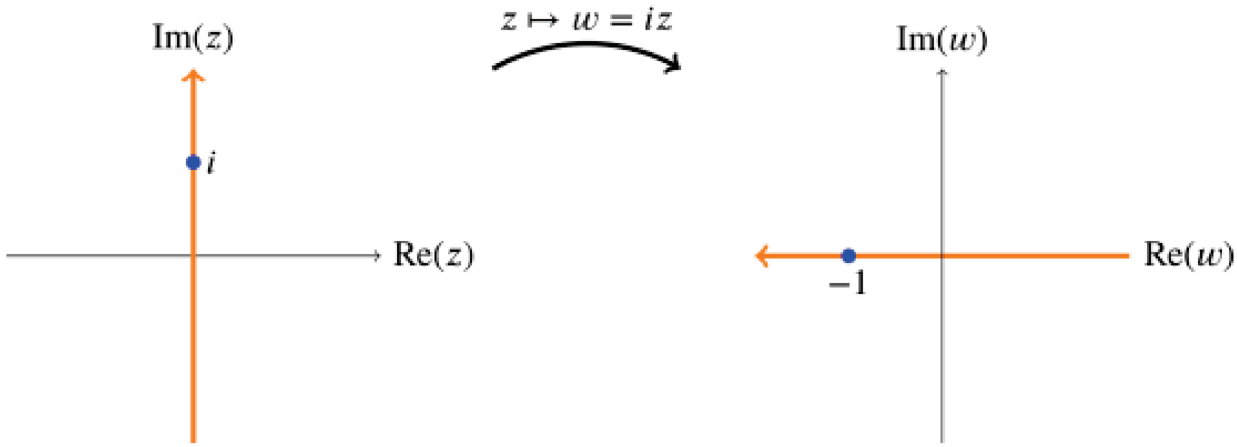
*) می گوییم w تصویر z است .

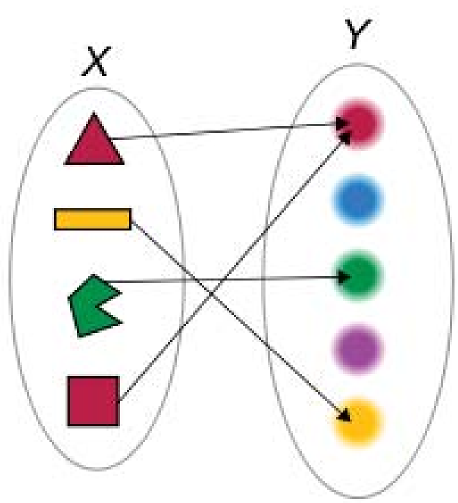
*) اگر در صفحه z یک مجموعه نقاط داریم ، می گوییم تصویر آن مجموعه تحت نگاشت.

مثلا .تحت نگاشت $z \mapsto iz$ تصویر محور مجازی z محور حقیقی w است.

تصویر 1

تصویر محور مجازی تحت $z \mapsto iz$





نگاشت شکل های x به رنگ متناظرشان در y

مثال 1

نگاشت $w = z^2$

برای مجسم کردن این ، صفحه z را سمت چپ و صفحه w را سمت راست قرار می دهیم. سپس چند منحنی و نواحی در صفحه z رسم می کنیم و تصویر متناظر آن تحت z^2 در صفحه w رسم می کنیم.

در تصویر شماره 2 نشان می دهیم که اشعه ها از صفحه سمت چپ نگاشت یا فرستاده شده اند توسط z^2 به صفحه سمت راست.

(1

اشعه L_2 در $\frac{\pi}{4}$ رادیان نگاشته شده یا فرستاده شده به اشعه $f\,(L_2)$ در $\frac{\pi}{2}$ رادیان .

(2

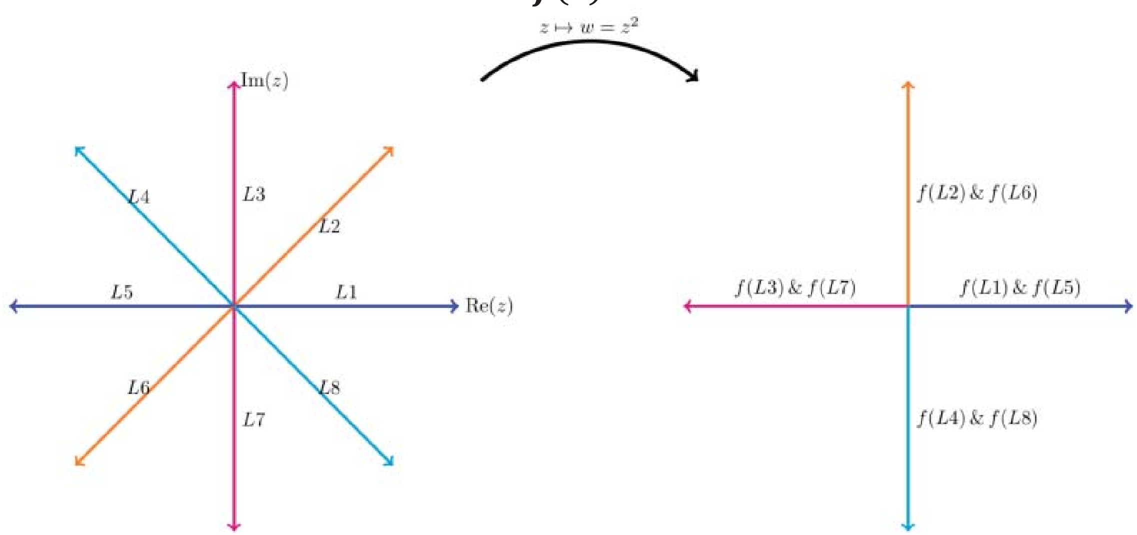
اشعه های L_2 و L_6 هر دو به یک اشعه ، نگاشت یا فرستاده شده اند.

(3

یک اشعه در زاویه θ نگاشته یا فرستاده شده به اشعه به زاویه 2θ .

تصویر شماره 2

$\boldsymbol{f(z) = z^2}$



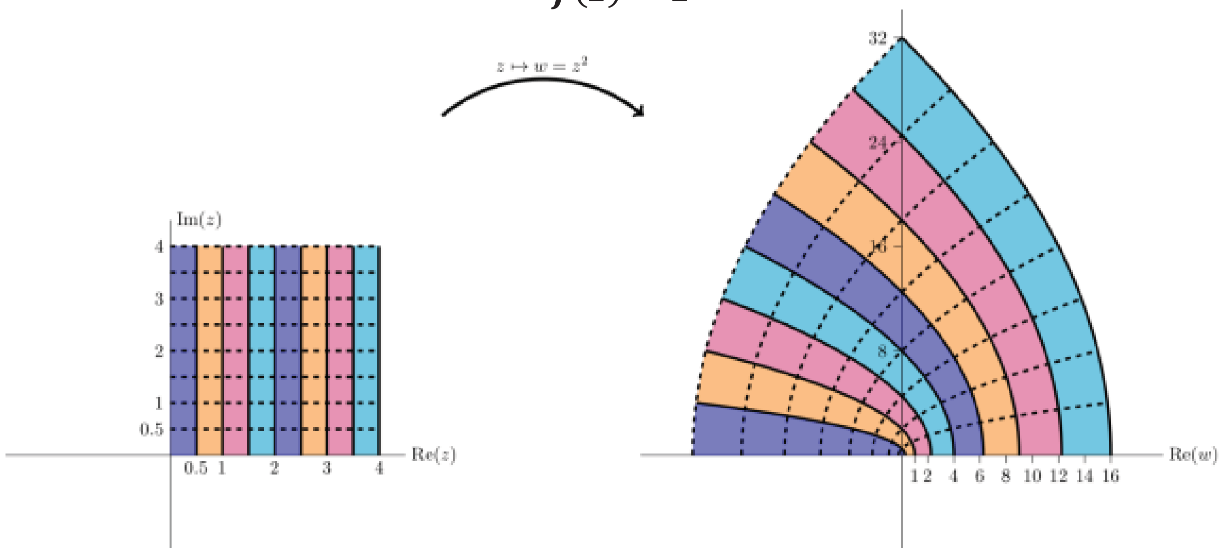
در تصویر شماره 3 منظره دیگری از نگاشت را ملاحظه می کنید. اینجا نوار های عمودی در ربع اول نگاشت شده یا فرستاده شده به ربع اول و دوم.

تصویر شماره 3

$$z^2 = (x^2 - y^2) \pm 2xy$$

یا

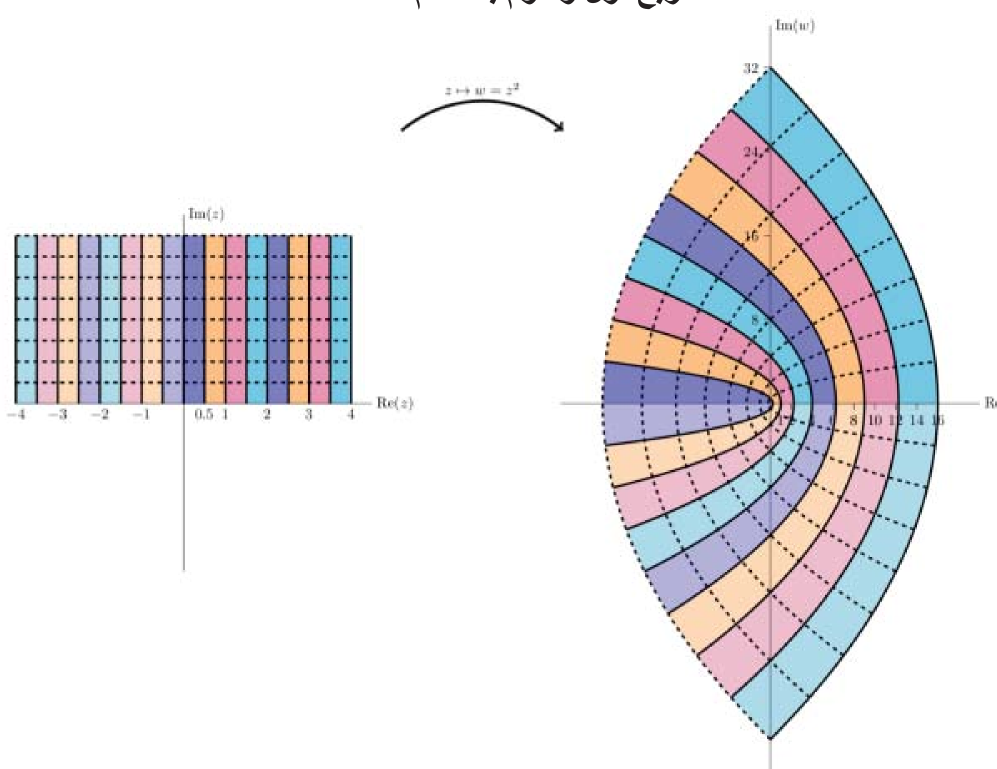
$$f(z) = z^2$$



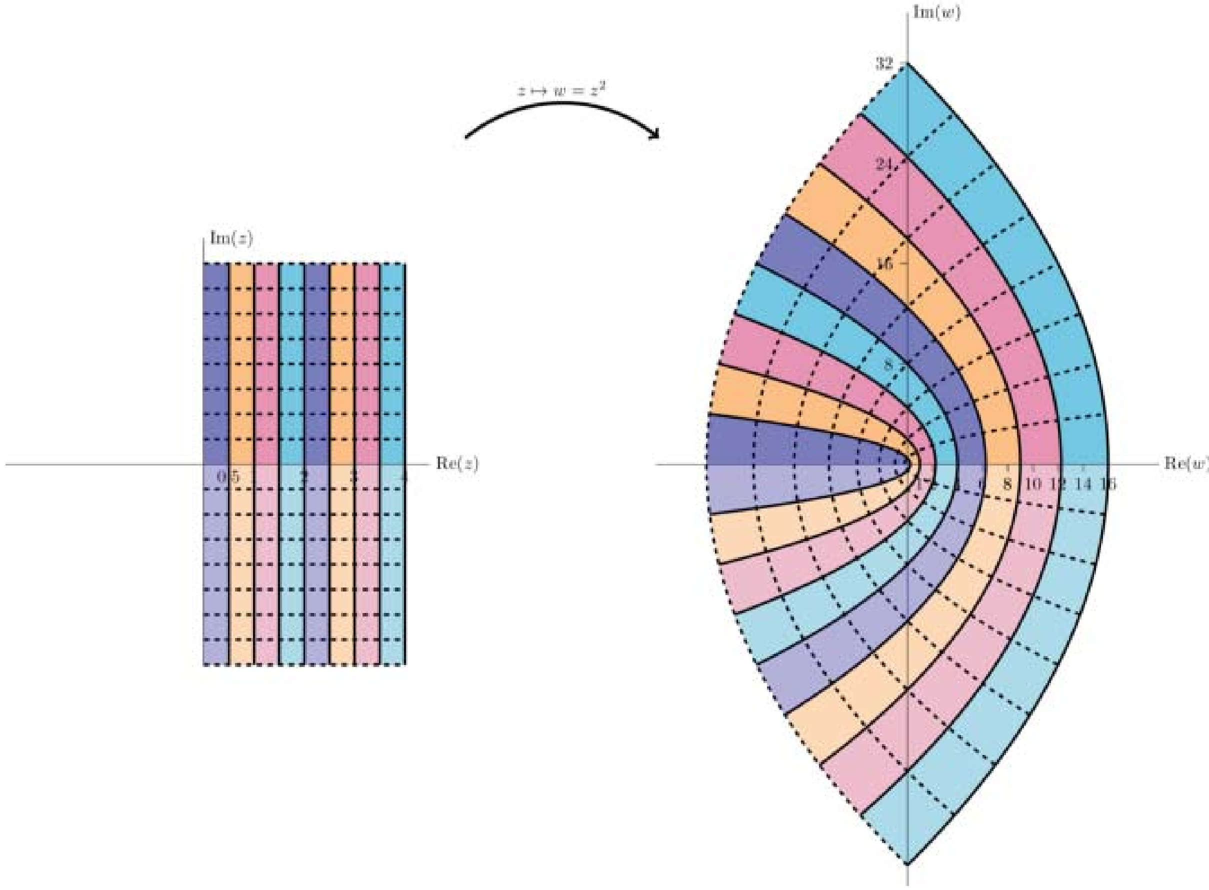
تصویرشماره 4

$$f(z) = z^2$$

نگاشت ربع اول و دوم به تمام صفحه



تصویرشماره 5



در تصویر شماره 5 ربع اول و چهارم در تمام صفحه نگاشته شده است که مانند تصویر شماره 4 است. به این علت که ربع چهارم مساوی است با منهای ربع دوم ، یعنی $z^2 = (-z)^2$

اجازه دهید یک مثال ساده بیاوریم که چرا نگاشت یک نمودار شبیه اصل نمودار نیست. و اصلا نگاشت در زندگی روز مره چه نقشی دارد.
همه شما نقشه کشور عزیزمان که شبیه گربه است ، دیدده اید .خوب ، چگونه خاک ایران عزیز ، روی کاغذ ، به صورت گربه در امده؟ همان طور که می دانید کلمه نقشه به انگلیسی می شود Map کلمه نگاشت هم به انگلیسی Mapping است. یا مثال دیگر ، نقشه یک ساختمان که مهندس رسم می کند ، با خود ساختمان تفاوت فیزیکی دارد.

حالا بر می گردیم به مثال های دیگر نگاشت.

تعریف نگاشت Definition of Mapping

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad (1)$$

$$(z = x + iy)$$

شماره (1) یک تابع مختلط یک متغیر مختلط ، دامنه اش در D در صفحه مختلط z به یک صفحه مختلط w در برد آن منتقل می کند. یا به عبارتی نگاشت می کند یا می فرستد. یا Mapping

برای هر نقطه z_0 در D ، نقطه $w_0 = f(z_0)$ **تصویر** z_0 نسبت به f نامیده می شود.

مثال 2
نگاهی متفاوت به مثال 1
نگاشت $w = f(x) = z^2$

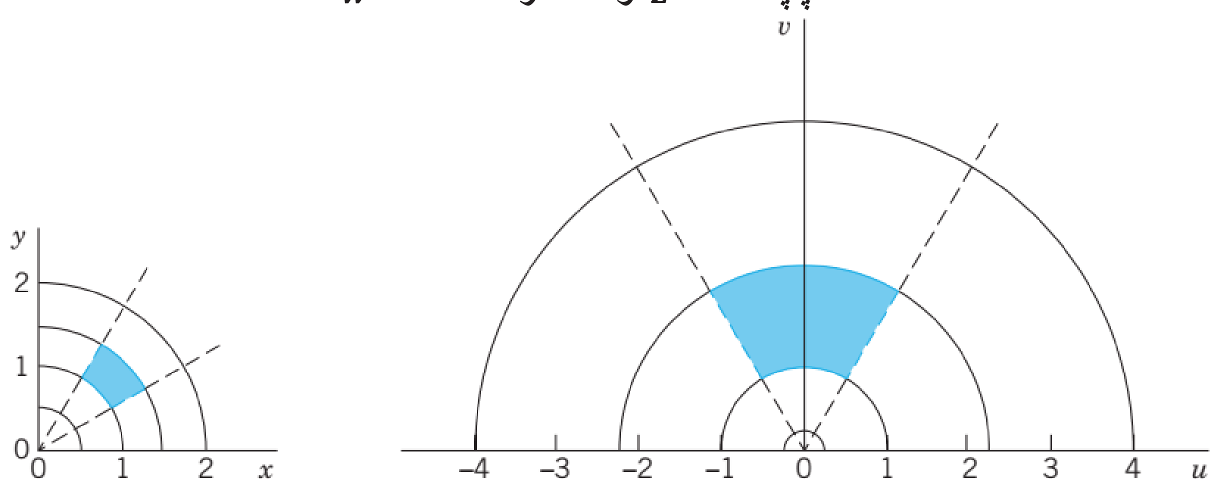
با استفاده از شکل های قطبی $z = re^{i\theta}$ و $w = Re^{i\phi}$ داریم
$w = z^2 = r^2 e^{2i\theta}$ ،
با مقایسه قدر مطلق ها و شناسه ها داریم $R = r^2$ و $\phi = 2\theta$ ، پس دائره های $r = r_0$ نگاشته می شوند یا فرستاده می شوند به دائره های $R = r_0^2$ و اشعه های $\theta = \theta_0$ نگاشته می شوند به اشعه های $\phi = 2\theta_0$ ، تصویر شماره 5 این را نشان می دهد
برای ناحیه

$$1 \leqq |z| \leqq \tfrac{3}{2},\ \pi/6 \leqq \theta \leqq \pi/3,$$

که نگاشته شده در ناحیه

$$1 \leqq |w| \leqq \tfrac{9}{4},\ \pi/3 \leqq \theta \leqq 2\pi/3.$$

تصویر شماره 5
سمت چپ صفحه z و سمت راست صفحه w



در صفحه کارتزین داریم $z = x + iy$ و

$$u = \operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2, \qquad v = \operatorname{Im}(z^2) = 2xy.$$

لذا خطوط عمودی

$$x = c = \text{عدد ثابت}$$

نگاشته می شوند روی

$$u = c^2 - y^2, v = 2cy.$$

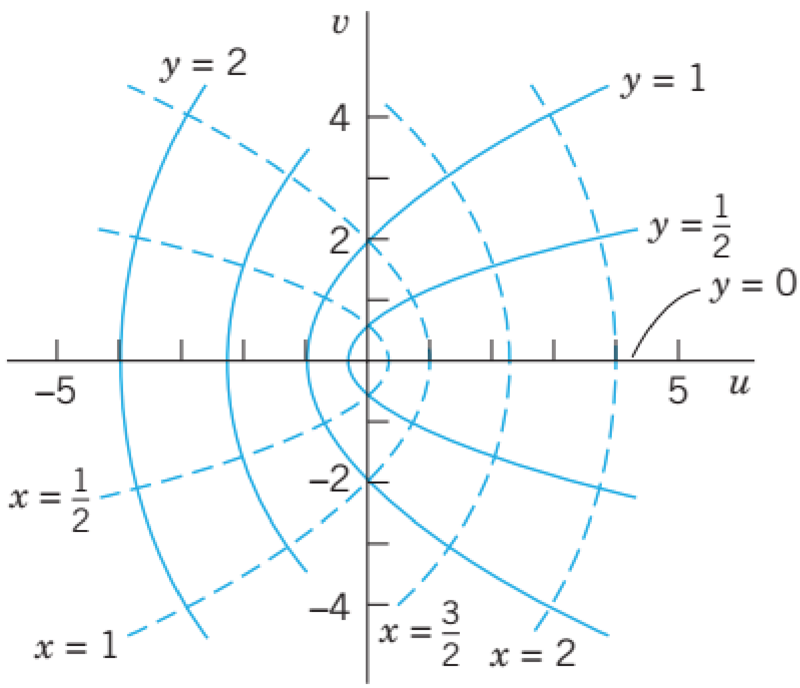
از این ، می توانیم y را حذف کنیم .پس داریم $y^2 = c^2 - u$ و $v^2 = 4c^2y^2$ ، باهم داریم.

$$v^2 = 4c^2(c^2 - u)$$

تصویر شماره 6

تصویر شماره 6

تصویر $x = c\, , y = c$ در اثر $w = z^2$



نگاشت همدیس Conformal mapping

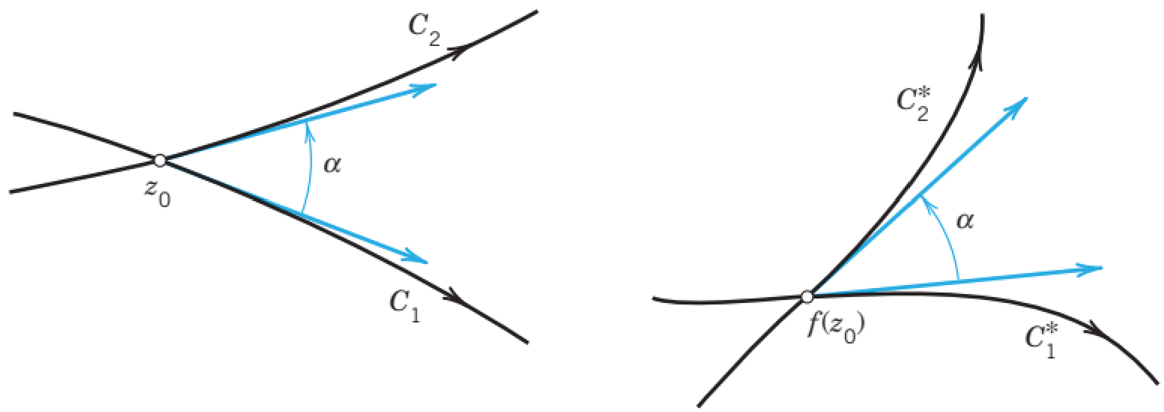
یک نگاشت $w = f(z)$ را **همدیس conformal** می نامند ، اگر آن نگاشت ، زاویه های بین منحنی های متمایل ، هم از نظر کمیّت و هم از نظر جهت حفظ کند. تصویر شماره 7

در این تصویر ، **زاویه $\boldsymbol{a(0 \le a \le \pi)}$** بین دو منحنی متقاطع C_1 و C_2 زاویه ای است که بین دو خطوط مماس در z_0 تشکیل شده. و **همدیسی** یعنی تصویر های C_2^* و C_1^* مربوط به C_2 و C_1 از نظر مقدار و جهت یکی هستند.

تصویر شماره 7

سمت چپ صفحه z و سمت راست صفحه w

منحنی های C_2 و C_1 و تندیس های مربوطه آنها یعنی C_2^* و C_1^*



قضیه 1

همدیسی بگاشت توسط تابع های تحلیلی Conformity of Mapping by Analytic Functions

نگاشت $w = f(z)$ توسط یک تابع تحلیلی ، **همدیس** است ، مگر در **نقاط بحرانی**. یعنی نقاطی که در آنها $f' = 0$ است.

مانند همیشه ، برای احتراز از اطاله کلام ، از اثبات قضیه ها صرفنظر می کنیم. اما ،این منحنی را در نظر بگیرید. این منحنی در دامنه $f(z)$ است.

$$C: \ z(t) = x(t) + iy(t) \tag{2}$$

رابطه زیر را هم از بخش های قبل ، جهت یاد آوری ذکر می کنیم.

$$\arg \dot{w} = \arg f' + \arg \dot{z} \tag{3}$$

حتما فراموش نکرده یدی که arg حروف اول Argument است به معنی ، شناسه

مثال 3

همدیسی $w = z^n$

نگاشت $w = z^n, n = 2,3, \cdots$ همدیس است بجز $z = 0$ جایی که

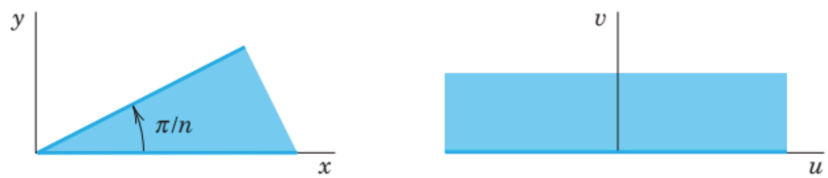
$$w' = n\, z^{n-1} = 0$$

است. برای $n = 2$ در تصویر شماره 5 نشان داده شده است. در این تصویر مشاهده می کنید که در صفر ، زاویه ها دو برابر شده اند. بطور کلی هنگام نگاشت, زاویه ها در $z = 0$ در یک

فاکتور n ضرب می شوند. لذا قطاع $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}$ نگاشته می شود یا فرستاده می شود بوسیلیه z^n به نیمه بالایی $v \geq 0$ ، تصویر شماره 8
ملاحظه می کنید که مکررا بعد از نگاشت ، کلمه فرستادن هم می آورم تا این کلمه نگاشت که ممکن است برای شما تازگی داشته باشد ، کاملا جا افتد. از این وسواس عذر می خواهم.

تصویر شماره 8

نگاشت توسط $z = z^n$



مثال 4

نگاشت $w = z + \frac{1}{z}$

بال واره جوکفسکی Joukowski Airfoil

بر حسب مختصات قطبی ، این نگاشت به صورت زیر است.

$$w = u + iv = r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta).$$

با جدا کردن قسمت های حقیق و مجازی ، داریم.

$$u = a\cos\theta, \qquad v = b\sin\theta$$

اینجا

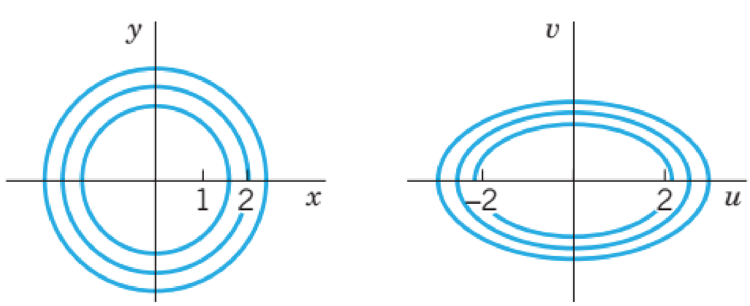
$$a = r + \frac{1}{r}, \qquad b = r - \frac{1}{r}.$$

پس دائره های $0 \neq$ عدد ثابت $= |z| = r$ نگاشت می شوند به بیضی های

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

دائره $r = 1$ نگاشت می شود به $-2 \leq u \leq 2$ محور u ، تصویر شماره 9

تصویر شماره 9



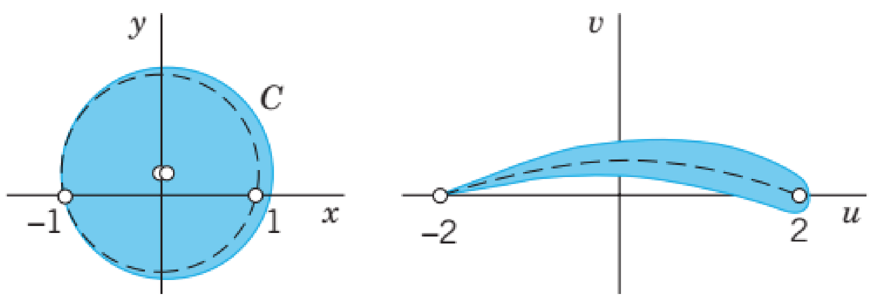
حالا ، مشتق w به صورت زیر است.

$$w' = 1 - \frac{1}{z^2} = \frac{(z+1)(z-1)}{z^2}$$

این مشتق در $z = \pm 1$ صفر است. این ها نقاطی هستند که در آنها نگاشت ، همدیس نیست. دو دائره های در تصویر 10 از $z = -1$ عبور می‌کنند. دائره بزرگ تر به یک **بال واره جو کفسکی** نگاشت می شود. دائره خط چین هم از -1 و هم از 1 عبور می کند و در یک پاره منحنی نگاشت می شود.

تصویر شماره 10

Joukowski airfoil



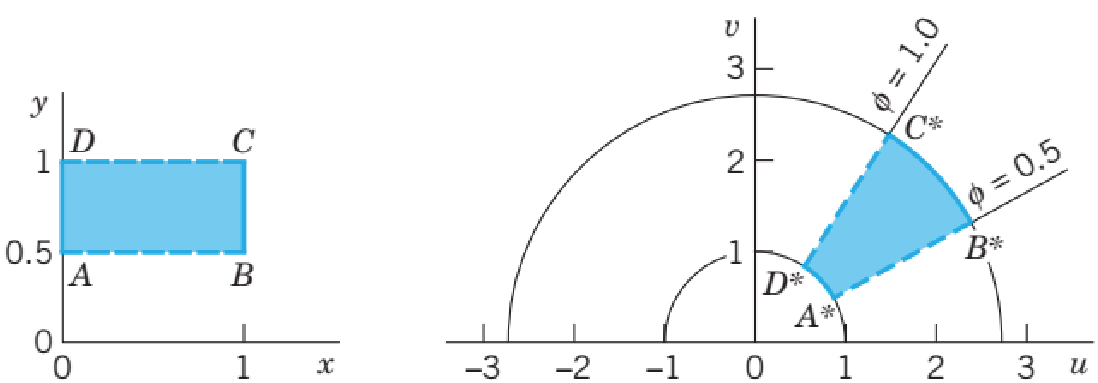
مثال 5

همدیسی $w = e^z$

می دانیم که $|e^z| = e^x$ است و $\arg z = y$ است. پس e^z خط مستقیم عمودی $x = x_0 =$ عدد ثابت نگاشت می کند به دائره $|w| = e^{x_0}$ و خط مستقیم افقی $y = y_0 =$ عدد ثابت نگاشت می کند به اشعه $\arg w = y_0$. به این ترتیب مستطیل تصویر شماره 11 تبدیل می شود یا نگاشت می شود به ناحیه ای که محدود است به اشعه هایی که در تصویر ملاحظه می کنید.

تصویر شماره 11

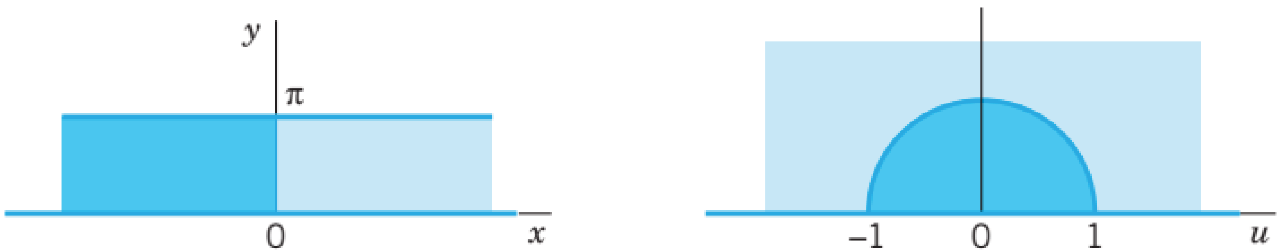
نگاشت $w = e^z$



ناحیه اصلی $-\pi < \arg z \le \pi$ از e^z در صفحه z بطور همدیس نگاشته می شود به تمام صفحه w بدون مبدا $w = 0$ زیرا $e^z = 0$ هنگامی که هیچ z وجود ندارد. تصویر شماره 12

تصویر شماره 12

نگاشت $w = e^z$

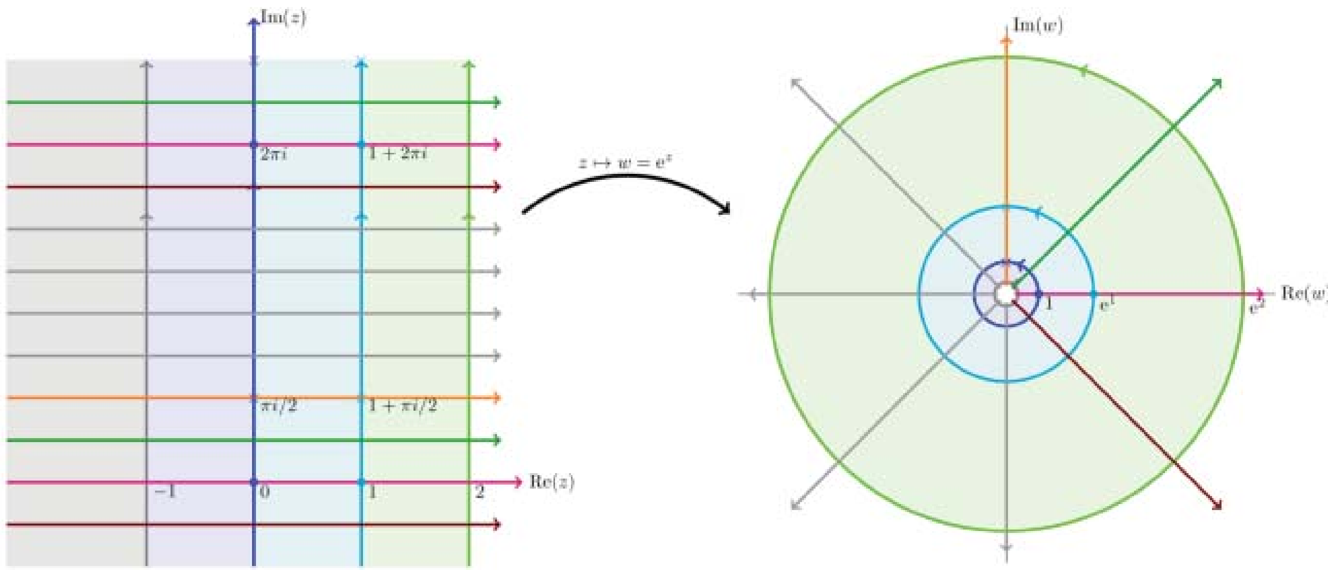


مثال 6

نگاهی دیگر به $w = e^z$

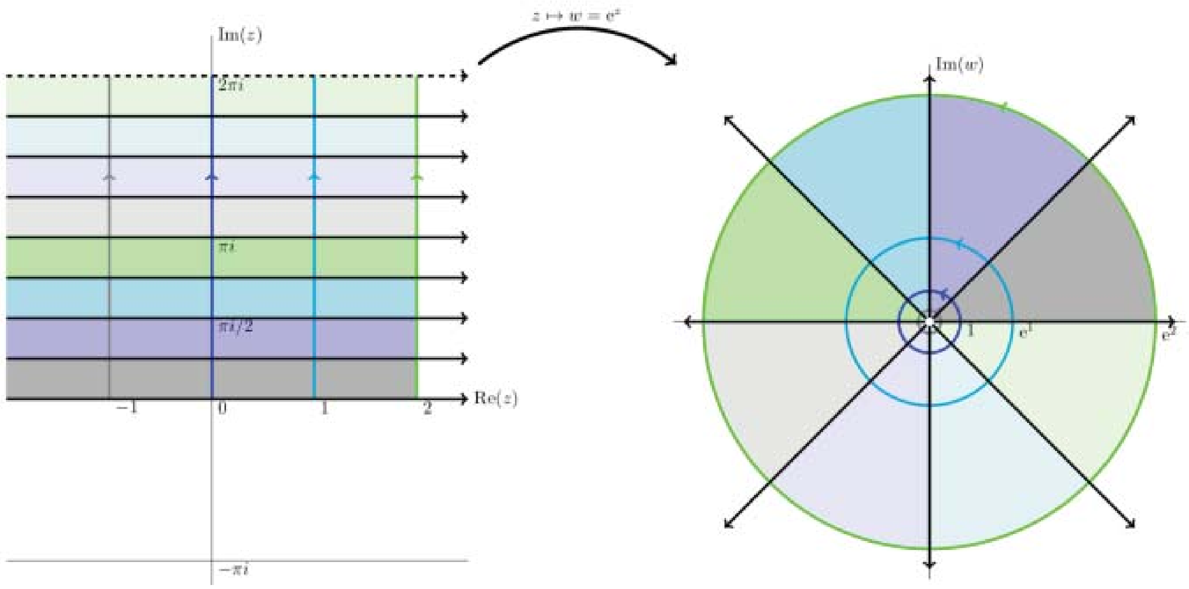
اینجا چند نمودار معرفی می‌کنیم و نشان می دهیم چگونه تابع نمایی z به w فرستاده می شود. یا نگاشت می شود. تصویر شماره 13

تصویر شماره 13



ملاحظه می کنید که خطوط عمودی نگاشته می شوند به دائره ها و خطوط افقی به اشعه هایی از مبدا تصویر شماره 14 اساسا همین چیز ها را نشان می دهد. تابع نمایی ، نوار های افقی را به قطاع های مدور می فرستد.

تصویر شماره 14



تمرینات بخش 3.1

تمرین 1

نشان دهید نگاشت $w = f(z) = \cos z$ همدیس است در

$$z_1 = i \,, z_2 = 1 \,, z_3 = \pi + i$$

و زاویه چرخش $a = \arg f'(z)$ در نقاط گفته شده.

پاسخ

چون $f'(z) = -\sin z$ است ، پس نتیجه می گیریم که نگاشت $w = \cos z$ در تمام نقاط همدیس است بجز در $z = n\pi$ اینجا n یک عدد صحیح است. محاسبه نشان می دهد که

$$f'(i) = -i \sinh 1 \quad , \quad f'(1) = -\sin 1 \;\; , \;\; f'(\pi + 1) = i \sinh 1$$

لذا ، زاویه چرخش به صورت زیر است.

$$a_1 = \arg f'(i) = -\frac{\pi}{2}$$

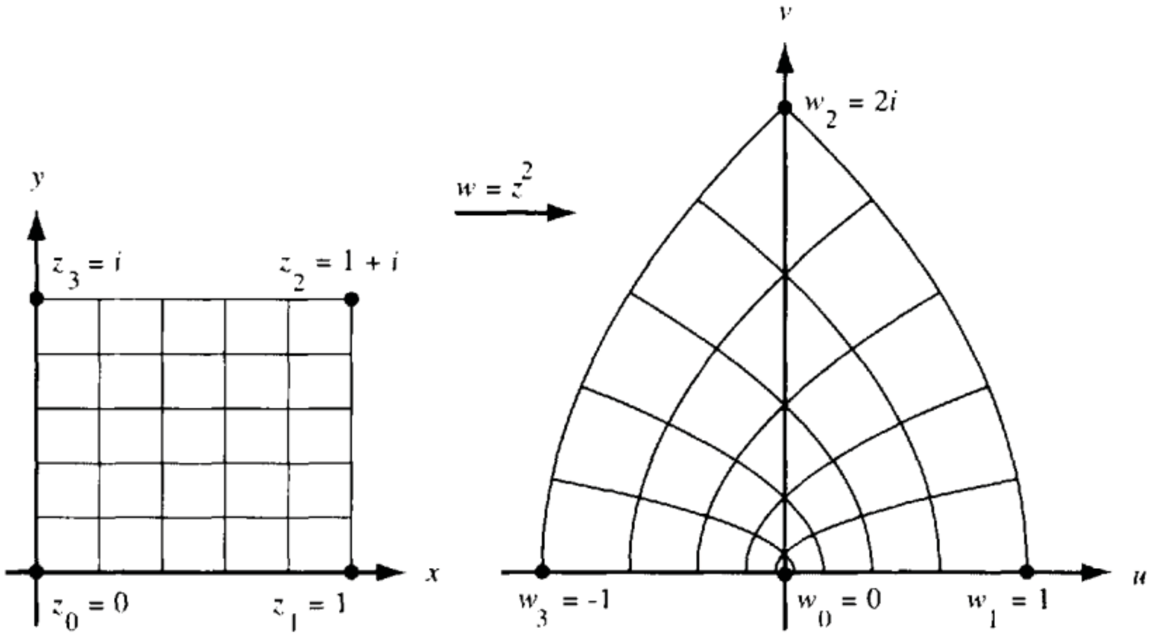
$$a_2 = \arg f'(1) = \pi$$

$$a_3 = \arg f'(\pi + i) = \frac{\pi}{2}$$

تمرین 2

نشان دهید نگاشت $w = f(z) = z^2$ همدیس است. و سپس در مورد این نگاشت که در تصویر شماره 15 ملاحظه می کنید ، توضیح دهید.

تصویر شماره 15



پاسخ

چون $f'(z) = 2z$ است ، پس نگاشت $w = z^2$ برای تمام $z \neq 0$ ها ، همدیس است.

حالا توضیح در مورد تصویر شماره 15

تابع $w = f(z) = z^2$ مربع $S = \{x + iy; 0 < x < 1, 0 < y < i\}$ را به ناحیه در نیمه بالای صفحه $Im\ (w) > 0$ که زیر سهمی

$$u = 1 - \frac{1}{4}v^2 \quad u = -1 + \frac{1}{4}v^2$$

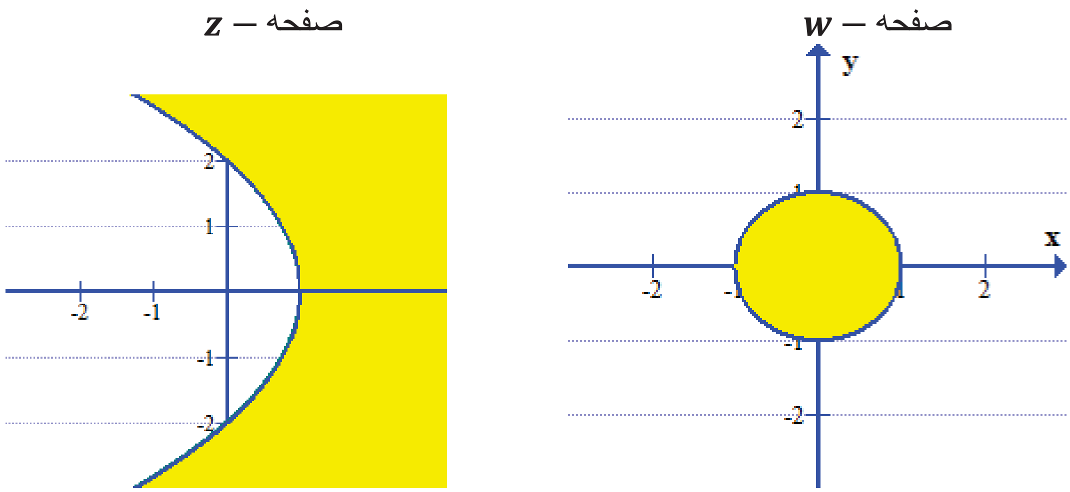
قرار دارد ، نگاشت می کند.

زاویه های قائمه در راس های $z_1 = 1\ , z_2 = 1 + i\ , z_3 = i$ نگاشت می شوند به ترتیب به زاویه های قائمه $w_1 = 1\ , w_2 = 2i\ , w_3 = -1$ ، در $z_0 = 0$ داریم $f'(0) = 0$ و $f''(0) \neq 0$ ، لذا زاویه های در راس z_0 با فاکتور $k = 2$ بزرگ می شوند. مخصوصا می بینیم که زاویه قائمه در $z_0 = 0$ نگاشت می شود به زاویه راست در $w_0 = 0$ ،

تمرین 3 یک مساله چالشی

نشان دهید که نگاشت $w = \frac{2}{\sqrt{z}} - 1$ ناحیه خارج سهمی $y^2 = 4(1-x)$ را به داخل دایره واحد در صفحه w می فرستد. تصویر شماره 16

تصویر شماره 16



پاسخ

داریم.

$$w = \frac{2}{\sqrt{z}} - 1 \implies (w+1)^2 = \frac{4}{z} \qquad (1)$$

اگر $|w| = 1$ دائره واحد باشد در صفحه w , پس فرض می کنیم $w = e^{i\phi}$, پس بر اساس فرمول (1) بالا ، داریم.

$$\left(e^{i\phi} + 1\right)^2 = \frac{4}{r\, e^{i\theta}}$$

اینجا $z = re^{i\theta}$ است. یا

$$1 + e^{i\phi} = \frac{2}{\sqrt{r}}\, e^{\frac{-i\theta}{2}} \qquad (2)$$

حالا ، داریم.

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi \quad \text{و} \quad e^{\frac{-i\theta}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}$$

با مساوی قرار دادن قسمت های حقیقی و مجازی هر دو طرف در (2) ,

$$1 + \cos\phi = \left(\frac{2}{\sqrt{r}}\right)\cos\frac{\theta}{2} \quad \text{و} \quad \sin\phi = -\left(\frac{2}{\sqrt{r}}\right)\sin\frac{\theta}{2}$$

$$\cos^2\phi + \sin^2\phi = \left[\left(\frac{2}{\sqrt{r}}\right)\cos\frac{\theta}{2} - 1\right]^2 + \left(\frac{4}{r}\right)\sin^2\frac{\theta}{2}$$
$$\Longrightarrow \frac{4}{r} - \left(\frac{4}{\sqrt{r}}\right)\cos\frac{\theta}{2} = 0$$

یعنی ،

$$\frac{1}{r} = \cos^2\frac{\theta}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{2}{r} = 1 + \cos\theta \qquad (3)$$

معادله (3) نمایش یک سهمی است در صفحه z ۰

حالا برای نقاط داخلی دیرن واحد $|w| = 1$, داریم $w = a\, e^{i\phi}(a < 1)$ ۰ این را در (1) می گذاریم ، پس داریم.

$$\left(a\, e^{i\phi} + 1\right)^2 = \frac{4}{r\, e^{i\theta}} \quad \text{یا} \quad 1 + a\, e^{i\phi} = \left(\frac{2}{\sqrt{r}}\right) e^{\frac{-i\theta}{2}}$$

با مساوی قرار دادن قسمت های حقیقی و مجازی هر دو طرف

$$1 + a\cos\phi = \left(\frac{2}{\sqrt{r}}\right)\cos\frac{\theta}{2} \quad \text{و} \quad a\ \sin\phi = -\left(\frac{2}{\sqrt{r}}\right)\sin\frac{\theta}{2}$$

پس

$$a^2 = \left[\left(\frac{2}{\sqrt{r}}\right)\cos\frac{\theta}{2} - 1\right]^2 + \left(\frac{4}{r}\right)\ \sin^2\frac{\theta}{2}$$

یا

$$\frac{4}{r} - \left(\frac{4}{\sqrt{r}}\right)\cos\frac{\theta}{2} = a^2 - 1 < 0 \quad \text{چون} \quad a < 1$$

یا

$$\frac{1}{\sqrt{r}} < \cos\frac{\theta}{2}$$

یا

$$r > \frac{2}{1 + \cos\theta}$$

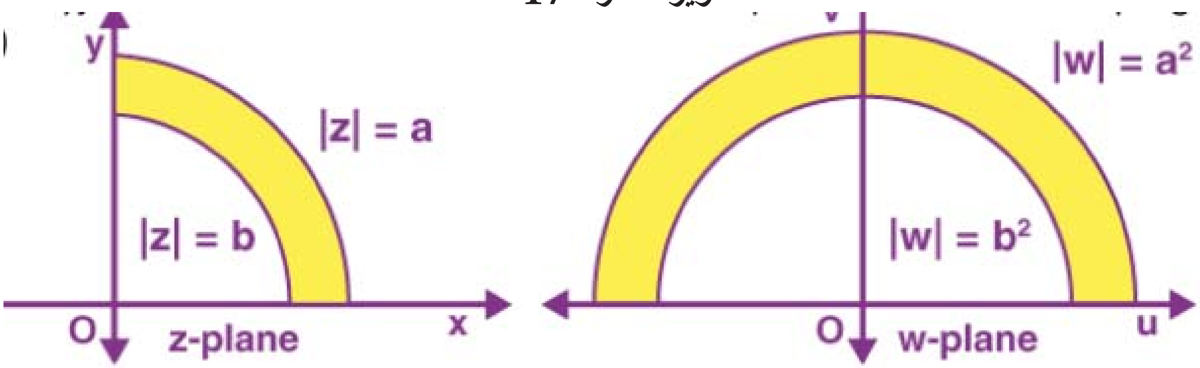
این نشان می دهد که (r, θ) خارج از سهمی قرار دارد. لذا نقاط خارجی سهمی مربوط می شود به نقاط داخلی دائره در صفحه w ۰

تمرین 4 یک مساله چالشی

ناحیه بین دائره های $a < b$ ، $|z| = b$ و $|z| = a$ در ربع اول صفحه z داریم.

تصویر شماره 17 ، در مورد نگاشت $w = f(z) = z^2$ در صفحه w بحث کنید و چک کنید آیا این نگاشت ، همدیس است یا نه.

تصویر شماره 17



پاسخ

اگر داشته باشیم $w = z^2$ پس فرض می کنیم $w = R\,e^{i\phi}$ و $z = r\,e^{i\theta}$ پس داریم.

$$R\,e^{i\phi} = r^2 e^{i\,2\theta}$$

یعنی

$$R = r^2 \quad \text{و} \quad \phi = 2\theta$$

حالا ،ربع دائره $|z| = r = a \;, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ در صفحه z نگاشت می شود به یک نیم دائره

$$|w| = R = a^2 \,, 0 \leq \phi \leq \pi \;(\text{چون } R = r^2 \text{ و } \phi = 2\theta\;)$$

در صفحه w .

به همین طریق ربع دائره $|z| = r = b \;, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ در صفحه z نگاشت می شود به نیم دائره

$$|w| = R = b^2 \,, 0 \leq \phi \leq \pi \;(\text{چون } R = r^2 \text{ و } \phi = 2\theta\;)$$

در صفحه w .

این نشان می دهد که ناحیه حلقوی بین ربع دائره $|z| = a$ و $|z| = b$ در ربع اول صفحه z نگاشت می شود به ناحیه حلقوی بین $|w| = a^2$ و $|w| = b^2$ در نیمه بالایی صفحه w همانطور که در تصویر نشان داده شده است.

حالا اجازه دهید چک کنیم آیا این نگاشت ، همدیس است یا نه. طرفین $w = z^2$ را بر حسب z مشتق می گیریم ، پس برای هر z در ناحیه داده شده داریم.

$$\frac{dw}{dz} = 2z \neq 0$$

لذا ، نگاشت داده شده ، همدیس است.

تمرین 5 یک مساله چالشی

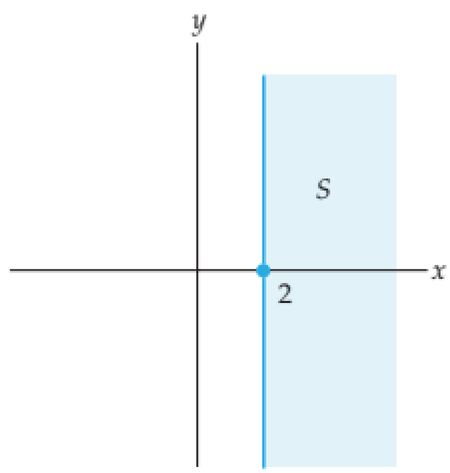
تصویر نیم صفحه توسط $w = iz$

Image of a Half-Plane under $w = iz$

مطلوب است تصویر نیم صفحه $Re\,(z) \geq 2$ توسط نگاشت $w = iz$ و نمودار را رسم کنید. توجه مکررا گفته ایم که Re دو حروف اول کلمه Real است به معنی حقیقی. تصویر شماره 18

تصویر شماره 18

نیم صفحه S



پاسخ

فرض می کنیم S نیم صفحه ای باشد که شامل تمام نقاط مختلط z است ، با $Re(z \geq 2)$ ۰
اولین خط عمودی $x = 2$ از صفحه S درتصویر شماره 18 را در نظر بگیرید. برای هر نقطه z روی این خط داریم $z = 2 + iy$ ، اینجا $-\infty < y < \infty$ است. مقدار $f(z) = iz$ در یک نقطه روی این خط

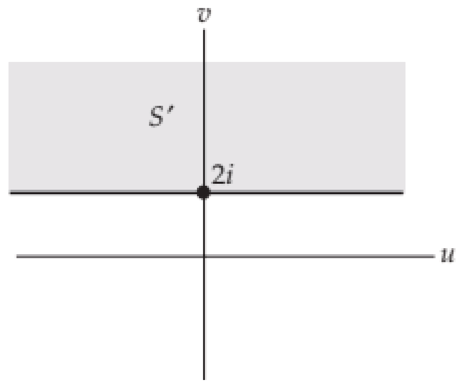
$$w = f(2 + iy) = i\,(2 + iy) = -y + 2i.$$

است. چون مجموعه نقاط

$$w = -y + 2i, \ -\infty < y < \infty,$$

خط $v = 2$ در صفحه w است ، پس نتیجه می گیریم که خط عمودی $x = 2$ در صفحه z نگاشته می شود به خط افقی $v = 2$ در صفحه w توسط نگاشست $w = iz$ ۰ لذا خط عمودی در تصویر شماره 18 به خط افقی در تصویر شماره 19 نگاشته می شود.

تصویر شماره 19
تصویر S' مربوط به نیم صفحه S
توسط نگاشت $w = iz$



حالا ، تمام نیم صفحه S در تصویر شماره 18 را در نظر بگیرید. این را می توان توسط دو نا معادله زیر توصیف کرد.

$$x \geq 2 \quad و \quad -\infty < y < \infty \qquad (1)$$

برای توصیف تصویر S نگاشت $w = i\,z$ را بر حسب قسمت های حقیقی و مجازی u و v بیان می کنیم و سپس حدود ذکر شده در شماره (1) را در مورد x و y در صفحه z را بکار می بریم تا حدود u و v در صفحه w معین کنیم.
با جانشین کردن نماد z توسط $x + iy$ در $w = iz$ داریم.

$$w = i(x+iy) = -y+ix,$$

پس قمت های حقیقی و مجازی $w = iz$ عبارتند از

$$u(x,y) = -y \quad و \quad v(x,y) = x \qquad (2)$$

بر اساس (1) و (2) نتیجه می گیریم که $v \geq 2$ و $-\infty < u < \infty$ است. این ، مجموعه S' است. یعنی تصویر S توسط $w = iz$ شامل تمام نقاط $w = u + iv$ در صفحه w است بطوری که نا معادله های $v \geq 2$ و $-\infty < u < \infty$ بر قرار باشند. به عبارت دیگر S' شامل تمام نقاطی است که در نیمه صفحه بالای خط افقی $v = 2$ قرار دارند. تصویر شماره 19 ۰

تمرین 6
تصویر یک خط تحت نگاشت $w = z^2$
مطلوب است تصویر خط عمودی $x = 1$ تحت نگاشت مختلط $w = z^2$ و نمودار آنرا رسم کنید.
پاسخ
فرض می کنیم C مجموعه نقاط خط عمودی $x = 1$ باشد. و یا به عبارتی مجموعه نقاط

$$z = 1 + iy \quad با \quad -\infty < y < \infty$$

باشد. ههمن طور که در فصل های قبل دیدیم ، قسمت های حقیقی و مجازی $w = x^2$ عبارتند از

$$u(x,y) = x^2 - y^2 \quad و \quad v(x,y) = 2xy$$

است. برای یک نقطه $z = 1 + iy$ در C داریم

$$u(1,y) = 1 - y^2 \quad و \quad v(1,y) = 2y$$

این دلالت می کند که تصویر S عبارت است از نقاط $w = u + iv$ بطوری که معادله های زیر را

برای $-\infty < y < \infty$ بر قرار می کند.

$$u = 1 - y^2 \tag{3}$$

$$v = 2y \tag{4}$$

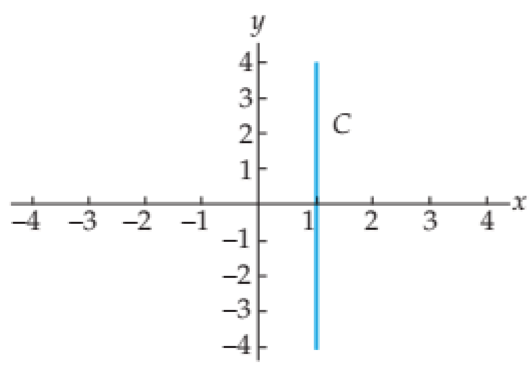
معادله های (3) و (4) معادله های پارا متری y حقیقی هستند که یک منحنی در صفحه u تعریف می کنند. با حذف y معادله کارتزین u و v پیدا می کنیم. برای این کا معادله (4) را برای y حل می کنیم و در معادله (3) قرار می دهیم. پس داریم.

$$u = 1 - \left(\frac{v}{2}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{4}. \tag{5}$$

چون y می تواند هر عدد حقیقی بگیرد و چون $v = 2y$ است. پس v در شماره (5) می تواند هر عدد حقیقی بگیرد. لذا C' تصویر C است. یعنی یک سهمی در صفحه w ۰ تصاویر 20 و 21

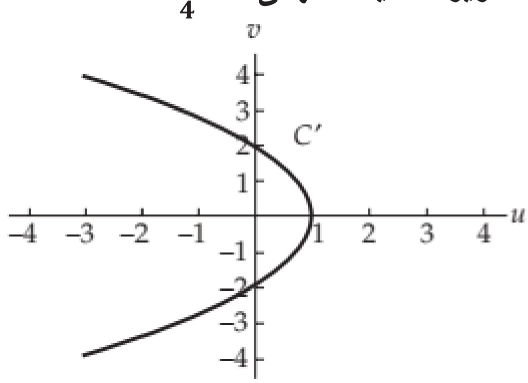
تصویر شماره 20

خط عمودی $Re(z) = 1$



تصویر شماره 21

تصویر C' یک سهمی $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$



بخش 3.2
تبدیلات کسر خطی Linear Fractional Transformations
تبدیلات مو بیس Mobius Transformations

اینجا می خواهیم یک نوع خیلی مهم نگاشت یعنی تبدیلات کسر خطی و یا تبدیلات مو بیس را مورد بحث قرار دهیم.
تبدیلات مو بیس به صورت زیر است.

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (ad-bc \neq 0) \tag{1}$$

اینجا ، a, b, c, d اعداد حقیقی یا مختلط هستند. اگر ازشماره (1) مشتق بگیریم ، داریم.

$$w' = \frac{a(cz+d)-c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}. \tag{2}$$

با توجه به شماره (2) ملاحظه می کنید که $ad-bc \neq 0$ است. این دلالت بر همدیس بودن تابع برای تمام z ها می کند. اگر $ad-bc=0$ باشد ، پس

$$w = T(z) = f(z)$$

یک تابع ثابت است.

حالت های مخصوص شماره (1) عبارتند از

$$(3)\begin{cases} w = z+b & \text{حرکت های انتقالی} \\ w = az \ \text{با}\ |a| = 1 & \text{حرکت های وضعی} \\ w = az+b & \text{تبدیلات خطی} \\ w = \dfrac{1}{z} & \text{وارونگی در دایره واحد} \end{cases}$$

در بعضی از کتب شماره (3) را به صورت زیر توصیف می کنند.

$$(3)\begin{cases} w = z+b & \text{حرکت انتقالی} \\ w = e^{i\alpha}z \ (a\ \text{حقیقی}) & \text{حرکت وضعی} \\ w = cz \ (c \neq 0\ \text{حقیقی}) & \text{انبساط یا کش آمدگی} \\ w = \dfrac{1}{z} & \text{وارونگی} \end{cases}$$

مثال 1

خواص وارونگی $\boldsymbol{w = \frac{1}{z}}$

تصویر شماره 1

در مختصات قطبی $z = re^{i\theta}$ و $w = Re^{i\phi}$ وارونگی $w = \frac{1}{z}$ می شود.

$$Re^{i\phi} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \qquad\qquad R = \frac{1}{r}, \quad \phi = -\theta.$$

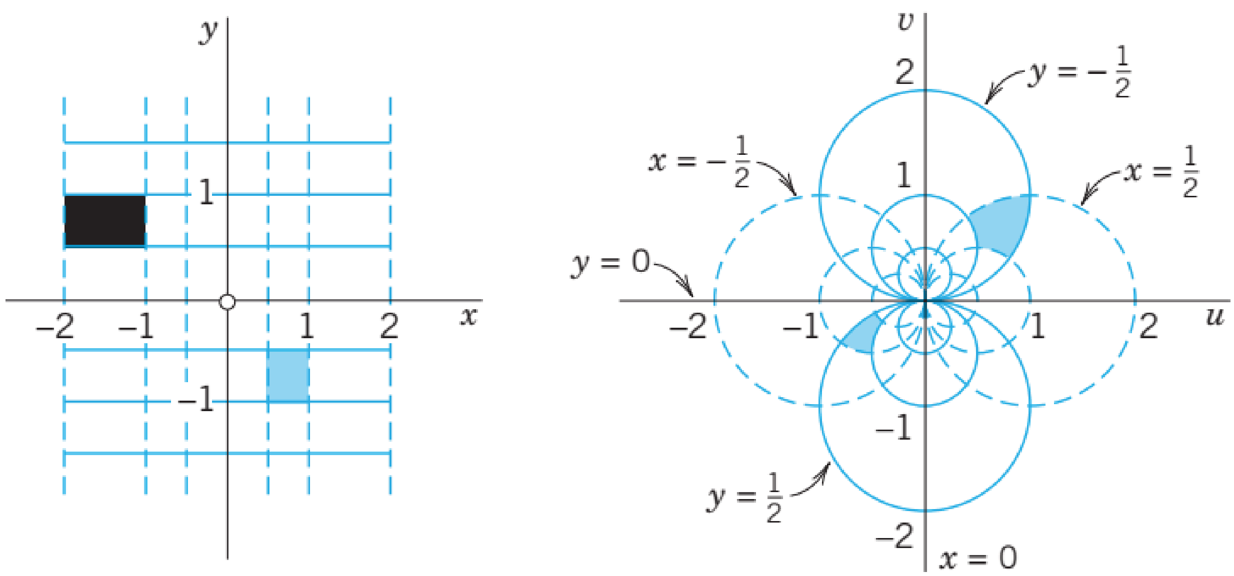
لذا ، دائره واحد $|z| = r = 1$ نگاشت می شود به دائره واحد زیر.

$$|w| = R = 1; w = e^{i\phi} = e^{-i\theta}.$$

تصویر شماره 1 نشان می دهد که $w = \frac{1}{z}$ خطوط مستقیم افقی و عمودی را به دائره ها و یا خطوط مستقیم نگاشت می کند .

تصویر شماره 1

وارونگی $\boldsymbol{w = \frac{1}{z}}$



اثبات

هر خط مشتقیم یا دایره در صفحه Z را می توان به صورت زیر نوشت.

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$$

اینجا A, B, C, D اعداد حقیقی هستند.

اگر $A = 0$ باشد ، پس فرمول بالا یک خط مستقیم می شود. اگر $A \neq 0$ باشد ، پس فرمول بالا یک دائره می شود. بر حسب z و $\overline{z}$ این معادله می شود

$$Az\bar{z} + B\,\frac{z + \bar{z}}{2} + C\,\frac{z - \bar{z}}{2i} + D = 0.$$

$$w = \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{w}$$

حالا ، در معادله زیر بجای z می نویسیم $\frac{1}{w}$

$$Az\bar{z} + B\,\frac{z + \bar{z}}{2} + C\,\frac{z - \bar{z}}{2i} + D = 0.$$

را در $w\overline{w}$ ضرب می کنیم ، پس داریم.

$$A + B\,\frac{\overline{w} + w}{2} + C\,\frac{\overline{w} - w}{2i} + Dw\overline{w} = 0$$

یا بر حسب u و v داریم.

$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0.$$

فرمول بالا نمایش یک دائره است اگر $D \neq 0$ باشد ، و یک خط مشتقیم است اگر $D = 0$ باشد.
فرمول بالا می گوید بجای x و y می توان z و $\overline{z}$ بکار برد.

با کمال تعجب ، هر تبدیل کسر خطی خاصیت اثبات بالا را دارد.

قضیه 1
دائره ها و خطوط مستقیم.

هر تبدیل کسر خطی شماره (1) دوایر و خطوط در صفحه z به دوایر و خطوط در صفحه w نگاشت می کند.

نگاشت وارون شماره (1) را با حل شماره (1) برای z بدست می آوریم. این هم یک تبدیل کسر خطی است.

$$z = \frac{dw - b}{-cw + a}. \qquad (4)$$

هنگامی که $c \neq 0$ است ، پس

$$cw - a = 0 \quad \Rightarrow \quad w = \frac{a}{c}$$

حالا ، فرض می کنیم $\frac{a}{c}$ تصویر $z = \infty$ باشد. با این تغییرات ، تبدیل کسر خطی (1) می شود نگاشت یک به یک صفحه بسط داده شده صفحه z به صفحه بسط داده شده w

نقاط ثابت Fixed Points

نقاط ثابت یک نگاشت $w = f(z)$ نقاطی هستند که در خودشان نگاشت می شوند ، یعنی در نگاشت ثابت می مانند. پس شکل زیر را دارند.

$$w = f(z) = z.$$

نگاشت این همانی Identity Mapping

نگاشت این همانی $w = z$ هر نقطه ، به صورت یک نقطه ثابت دارد. نگاشت $w = \overline{z}$ دارای بی نهایت نقاط ثابت دارد.

برای (1) شرط نقطه ثابت $w = z$ به صورت زیر است.

$$z = \frac{az + b}{cz + d}, \qquad (5)$$

پس

$$cz^2 - (a - d)z - b = 0.$$

قضیه 2

نقاط ثابت Fixed Points

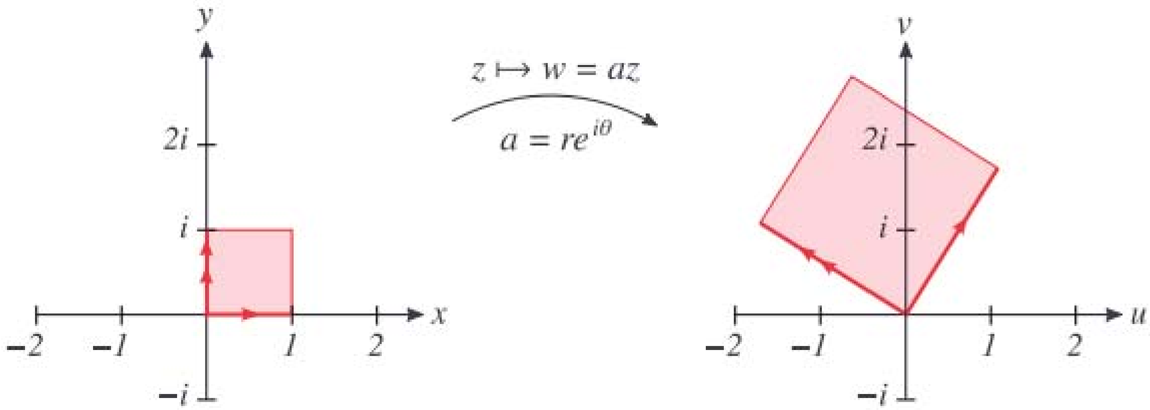
یک تبدیل کسر خطی حد اکثر دو نقطه ثابت دارد. اگر یک تبدیل کسر خطی سه نقطه ثابت داشته باشد ، پس باید آن نگاشت این همانی $w = z$ باشد.

مثال 2

فرض کنید $T(z) = az$ باشد. اگر $a = r$ حقیقی باشد ، این مقیاس یا اندازه صفحه را معین می کند. اگر $a = e^{i\theta}$ باشد ، صفحه را می چرخاند. اگر $a = re^{i\theta}$ باشد ، هر دو کار را انجام می دهد. تصویر شماره 2

تصویر شماره 2

ضرب در $a = re^{i\theta}$ به مقیاس r و چرخش به اندازه θ



توجه داشته باشید که T تبدیل کسر خطی است با ضریب های

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

مثال 3

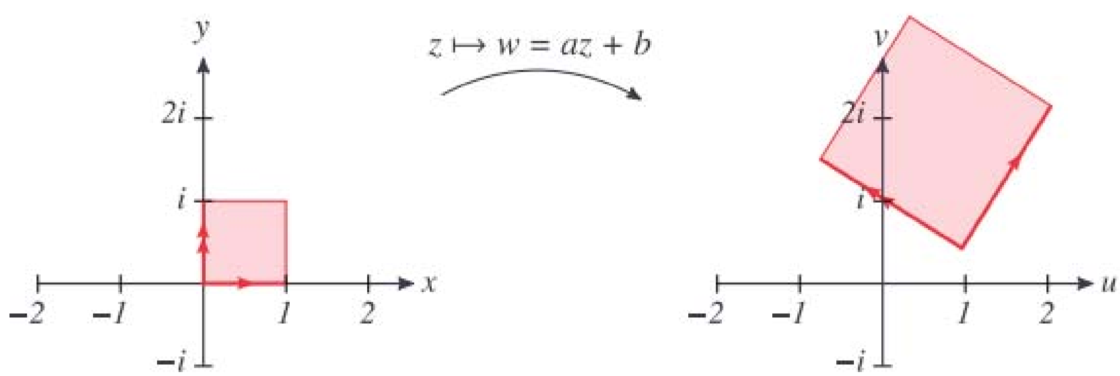
فرض کنید $T = az + b$ باشد. با اضافه کردن b یعنی به اندازه b حرکت انتقالی انجام می دهیم. تصویر شماره 3

توجه داشته باشید که ضریب ها به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

تصویر شماره 3

به اندازه b حرکت انتقالی انجام می دهیم.



تمرینات بخش 3.2

تمرین 1

مطلوب است یک تبدیل مو بیس که شامل یک وارن باشد ، یعنی باید $c \neq 0$, و فقط یک نقطه ثابت داشته باشد.

پاسخ

شکل استاندارد تبدیل های مو بیس را در نظر می گیریم. نقاط ثابت ، هنگامی است که

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \quad \Leftrightarrow \quad cz^2 + (d-a)z - b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{a-d \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c},$$

با فرض این که $c \neq 0$ باشد. هنگام محاسبه رادیکا ل بر حسب اعداد مختلط باید مواظب باشیم. این معادله فقط یک ریشه دارد هنگامی که $(d-a)^2 = -4bc$ است. دو امکان وجود دارد.

الف - اگر $a = 3, d = 1, b = -1, c = 1$ باشد داریم

$$f(z) = \frac{3z-1}{z+1},$$

که در این صورت فقط یک نقطه ثابت داریم وآن هم 1 است.

ب - اگر $a = 1+2i\ , d = 1\ , b = 1, c = 1$ باشد داریم.

$$f(z) = \frac{(1+2i)z+1}{z+1}.$$

که در این صورت فقط یک نقطه ثابت دارد و آن هم i است.

البته ، بی نهایت گزینش وجود دارد. بستگی به انتخاب ما در مورد مقادیر اعداد ثابت a, b, c, d دارد.

تمرین 2

مطلوب است یک تبدیل مو بیس که دارای دو نقطه ثابت $3i$ و $1+i$ باشد.

پاسخ

با توجه به تمرین 1 نقاط متمایز α و β نقاط ثابت هستند ، وقتی که

$$(z-\alpha)(z-\beta) = cz^2 + (d-a)z - b$$

باشد ، و این هنگامی اتفاق می افتد که

$$c = 1,\ a - d = \alpha + \beta,\ b = -\alpha\beta.$$

باشد.

فرض می کنیم k یک عدد ثابت مغایر با α یا β باشد. پس یک مجموعه جواب های ممکن $a = k$ و $d = k - \alpha - \beta$ است. و این مقادیر به ما

$$T(z) = \frac{kz - \alpha\beta}{z + k - \alpha - \beta}.$$

می دهند.

توجه کنید اگر $k = \alpha$ یا $k = \beta$ باشد ، چه اتفاقی می افتد. برای این مساله داده شده ، فرض می کنیم $k = 1$ باشد ، پس داریم.

$$T(z) = \frac{z + 3 - 3i}{z - 4i}.$$

چک می کنیم.

$$T(3i) = \frac{3}{-i} = 3i$$

و

$$T(1+i) = \frac{4-2i}{1-3i} = \frac{1}{5}(2-i)(1+3i) = \frac{1}{5}(5+5i) = 1+i.$$

باز هم مانند تمرین 1 بی نهایت گزینه داریم.

تمرین 3

مطلوب است تصویر ربع اول در اثر تبدیل مو بیس $f(z) = \frac{2z+1}{z+1}$

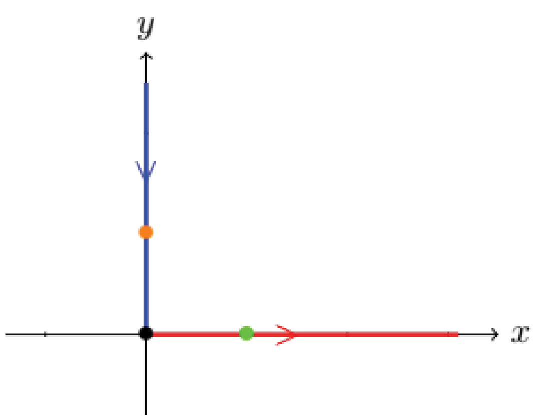
پاسخ

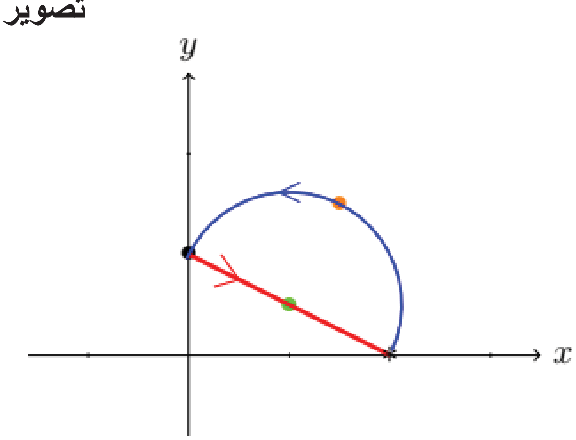
ابتدا مقادیر زیر را بدست می آوریم.

$$f(\infty) = 2, \quad f(i) = \frac{3i}{1+i} = \frac{3}{2}i(1-i) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i, \quad f(0) = i, \quad f(1) = 1 + \frac{1}{2}i, \quad f(\infty) = 2.$$

با توجه به این نقاط به ترتیب از چپ به راست ، ربع اول را در تصویر سمت چپ ملاحظه می کنید. چون خط آبی در تصویر سمت چپ ، از قطب تابع نمی گذرد .تصویر آن یک دائره است. چون خط قرمز در تصویر سمت چپ از قطب تابع نمی گذرد ، تصویر آن یک خط خواهد بود. این منحنی ها و جهت مربوطه آنها در سمت راست تصویر شماره 2 ملاحظه می کنید.

تصویر شماره 2





نقاط رنگی ورردی با خروجی مطابقت دارند. ستاره در سمت راست نمایش ∞ است. لذا تصویر ربع اول ، در اثر نگاشت ، نیمه بالایی دائره است به مرکزیت $1+\frac{1}{2}\,i$ به شعاع $\frac{\sqrt{5}}{2}$
چند نقطه نمونه می توانیم چک کنیم، با انتخاب چند عدد مناسب داریم.

$$f(-i/2)=0,\qquad f(-1)=\infty,\qquad f((1+i)/2)=\frac{1+2i}{(3+i)/2}=\frac{1}{5}\,(1+2i)(3-i)=1+i.$$

دو مقادیر اول ، نشان می دهند که نقاط بیرون ربع اول نگاشت می شوند به نقاط بیرون دائره. سومین مقدار نشان می دهد ، نقاط داخل ربع اول ، نگاشت شده به درون دایره. همان طور که انتظار می رفت.

تمرین 4
مطلوب است نقاط ثابت تابع زیر.

$$S(z)=\frac{z+2}{3z+5}.$$

پاسخ
اگر داشته باشیم

$$\frac{z+2}{3z+5}=z,$$

پس

$$3z^2+(5-1)z-2=0,$$

$$z=\frac{-4\pm\sqrt{16+24}}{6}=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{3}.$$

تمرین 5
فرض کنید داشته باشیم

$$S(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

اینجا $ad-bc\neq 0$ و $c=1$ است. با شرایط زیر.

- $S(0)=0;$
- $S(1)=1;$
- $S(\infty)=2.$

مطلوب است a,b,c,d
پاسخ
هر یک از شرایط داده شده را بکار می بریم.
چون $S(0)=\frac{b}{d}=0$ پس $b=0$ است. لذا $S(z)=\frac{az}{z+d}$ است.
چون $S(1)=\frac{a}{1+d}=1$ پس داریم $a=d+1$،

چون $S(\infty)=\frac{a}{1}=2$ پس داریم $a=2$ و لذا $d=1$ است.
پس $a=2, b=0, c=1, d=1$
در نهایت
$$S(z)=\frac{2z}{z+1}.$$

بخش 3.3

تبدیلات کسر خطی مخصوص Special Linear Fractional Transformations

بحث تبدیلات کسر خطی را ادامه می دهیم. در بخش 3.2 گفییم.

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (1)$$

به شرطی که

$$(ad - bc \neq 0)$$

اینجا $az + b$ و $cz + d$ خطی هستند. همچنین a, b, c, d, z اعداد مختلط هستند.
این تبدیل می تواند به صورت ماتریس زیر نشان داده شود.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

عکس این تبدیل به صورت زیر است

$$f'(w) = \frac{dw - b}{-cw + a} = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

با استفاده از ماتریس داریم.

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

شماره (1) دامنه های به خصوصی را به دامنه های دیگری ، نگاشت می کند. قضیه 1 زیر وسیله ای به ما میدهد برای ساختن تبدیلات کسر خطی مورد نظر
نگاشت شماره (1) توسط a, b, c, d مشخص می شود. در حقیقت توسط کسر های سه تا از این اعداد ثابت نسبت به چهارمی ، پس سه شرط ، یک نگاشت را مشخص می کند.

در بعضی از کتب ، شماره (1) را به صورت زیر می نویسند.

$$w = f(z) = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

قضیه 1

سه نقطه و تصاویر داده شده آنها Three Points and Their Images Given

سه نقطه متمایز z_1, z_2, z_3 می توان به سه نقطه متمایز داده شده w_1, w_2, w_3 نگاشت کرد فقط و فقط توسط یک تبدیل کسر خطی $w = f(z)$ ، این نگاشت توسط معادله زیر انجام می شود.

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\cdot\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\cdot\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}. \qquad \textbf{(2)}$$

اگر یکی از این نقاط ∞ داده شده باشد ، بجای آن تفاضلی که این نقطه را شامل می شود ، باید 1 بگذاریم.

نگاشت دامنه های استاندارد توسط قضیه 1
Mapping of Standard Domains by Theorem 1

با استفاده از قضیه 1 می توانیم تبدیلات کسر خطی چند دامنه مفید را پیدا کرد. ما آنها را دامنه های استاندارد می نامیم. برای این کار از اصل زیر استفاده می کنیم.
اصل Principle
سه نقطه مرزی z_1, z_2, z_3 در دامنه D در صفحه z مشخص کنید.
تصویر آنها w_1, w_2, w_3 روی مرز تصویر D^* مرتبط با D در صفحه w انتخاب کنید.
نگاشت را از شماره (2) بدست آورید.

مثال 1
نگاشت یک نیم صفحه روی یک دیسک Mapping of a Half-Plane onto a Disk
تصویر شماره 1
مطلوب است تبدیل کسر خطی (1) که $z_1=-1,\ z_2=0, z_3=1$ را به

$$w_1=-1, w_2=-i, w_3=1$$

نگاشت می کند.

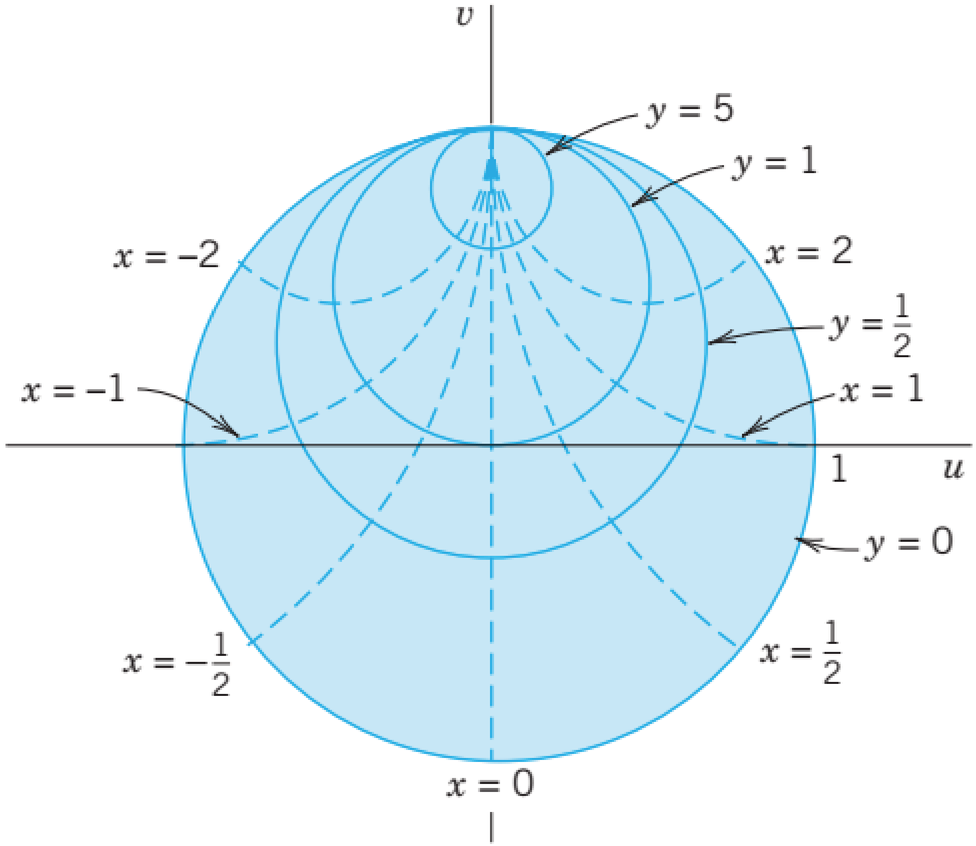
پاسخ
برا اساس (2) داریم.

$$\frac{w-(-1)}{w-1}\cdot\frac{-i-1}{-i-(-1)}=\frac{z-(-1)}{z-1}\cdot\frac{0-1}{0-(-1)},$$

پس

$$w=\frac{z-i}{-iz+1}.$$

تصویر شماره 1



اجازه دهید نشان دهیم می توانیم خواص مخصوص چنین نگاشتی را بدون محاسبه زیادی ، مشخص کرد.

برای $z = x$ داریم $w = \frac{x-i}{-ix+1}$ پس $|w| = 1$ است. لذا محور x به دائره واحد نگاشت می شود. چون $z = i$ است ، پس $w = 0$ است ، نیمه بالایی صفحه نگاشت می شود به داخل آن دائره و نیمه پائینی صفحه به بیرون آن دائره نگاشت می شود $z = 0, i, \infty$ به

$$w = -i, 0, i$$

نگاشت می شود. بطوری که قسمت مثبت محور مجازی نگاشت می شود به پاره خط

$$S: u = 0, -1 \leq v \leq 1$$

مثال 2

در صورت وجود ∞

مطلوب است تبدیل کسر خطی که $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty$ را به

$$w_1 = -1, w_2 = -i, w_3 = 1$$

نگاشت می کند.

پاسخ

بر اساس (2) داریم.

$$w = \frac{z - i}{z + i}.$$

مثال 3

نگاشت یک دیسک به یک نیم صفحه Mapping of a Disk onto a Half-Plane

مطلوب است تبدیل کسر خطی که $z_1 = -1, z_2 = i, z_3 = 1$ به

$$w_1 = 0, w_2 = i, w_3 = \infty$$

نگاشت می کند. بطوری که دیسک واحد به نیمه راست صفحه نگاشت می کند.

پاسخ

براساس (2) بجای

$$\frac{i - \infty}{w - \infty}$$

می گذاریم 1 پس داریم.

$$w = -\frac{z + 1}{z - 1}.$$

مثال 4

نگاشت نیم صفحه به نیم صفحه

مطلوب است تبدیل کسر خطی که $z_1 = -2, z_2 = 0, z_3 = 2$ را به

$$w_1 = \infty, w_2 = \frac{1}{4}, w_3 = \frac{3}{8}$$

نگاشت می کند.

پاسخ

بر اساس (2) داریم.

$$w = \frac{z + 1}{2z + 4}$$

نگاشت دیسک ها به دیسک ها

$$\boxed{w = \frac{z - z_0}{cz - 1},} \qquad c = \bar{z}_0, \qquad |z_0| < 1. \tag{3}$$

مثال 5

نگاشت دیسک واحد به دیسک واحد.

در شماره (3)

$$z_0 = \frac{1}{2}$$

قرار می دهیم.

$$w = \frac{2z - 1}{z - 2}$$

تصویر شماره 2

تصویر شماره 2