فصل دوم
Chapter Two
سری لورن ، انتگرال گیری باقیمانده
Laurent Series, Residue Integration
بخش اول
Section One
سری لوران
Laurent Series

هدف اصلی این فصل ، یاد گیری روش قدرتمند دیگری برای محاسبه انتگرال های مختلط و انتگرال های حقیقی به خصوص ، که بنام **انتگرال گیری باقیمانده** معروف است. بخاطر بیاورید که اولین روش محاسبه انتگرال های مختلط با استفاده از فرمول انتگرال کاشی بود. سپس سری تایلور را یاد گرفتیم. و حالا ، سری تایلور را تعمیم می دهیم.

بخش 2.1

سری لوران Laurent Series

توجه سری لوران با سری مک لورن اشتباه نشود. همانطور که در بخش 1.4 گفتیم ، یک سری مک لورن ، سری تایلور است با مرکز $z_0 = 0$ یعنی سری مک لورن به صورت زیر است.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$
$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

سری لوران ، **سری تایلور تعمیم یافته** است. یا **Generalize Taylor Series**

اگر در یک کار برد، بخواهیم یک تابع $f(z)$ به صورت توان های $z - z_0$ وقتی که $f(z)$ در z_0 تکین است بسط دهیم ، نمی توانیم یک سری تایلور را بکار بریم. در عوض می توانیم یک نوع جدید سری ، بنام **سری لوران Laurent Series** بکار بریم.

متاسفانه بعضی استادان محترم دانشگاه های ایران مک لورن Maclaurin را با لوران Laurent یکی دانسته اند.

در هر حال بگذریم.

سری لوران شامل توان های اعداد صحیح مثبت $z - z_0$ است و همچنین **توان های اعداد صحیح منفی** $z - z_0$ است. این یک شکل جدید است.

یک سری لوران همچنین برای طبقه بندی تکینگی ها ، بخش 2.2 و یک روش قدرتمند انتگرال گیری بخش 2.3 بکار می رود.
یک سری لوران $f(z)$ در چنبرک هم همگرا است. در صورتی که سری تایلور در چنبرک وا گرا است.

قضیه 1
قضیه لوران
فرض می کنیم $f(z)$ در یک دامنه شامل دو دائره های هم مرکز C_1 و C_2 با مرکز z_0 و چنبرک بین آنها ، تحلیلی باشد. تصویر شماره 1 پس $f(z)$ می تواند توسط سری لوران

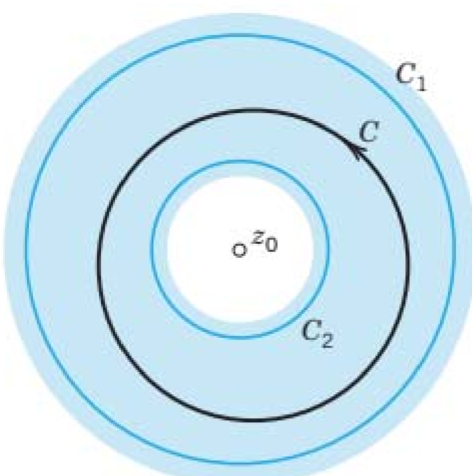
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$
$$= a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \tag{1}$$
$$\cdots + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots$$

شامل توان های منفی و غیر منفی نمایش داده شود. ضریب های این سری لوران به صورت انتگرال زیر است.

$$(2) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}}\,dz^*, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C (z^*-z_0)^{n-1} f(z^*)\,dz^*,$$

این انتگرال مطابق معمول که قبلا مکرر گفته ایم ، خلاف جهت عقربه ساعت در هر مسیر بسته ساده C که درچنبرک و قرار دارد و دائره داخلی را دوهت می کنند. تصویر شماره 1
این سری همگرا است و نمایش $f(z)$ در چنبرک بزرگ شده ، است.

تصویر شماره 1
قضیه لوران



توضیح بجای (1) و (2) می توان نوشت.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \tag{1'}$$

و ضریب ها ، متبسق زیر هستند.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}}\, dz^* \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{2'}$$

مثال 1

بکار بردن سری مک لورن Use of Maclaurin Series

مطلوب است سری لوران $z^{-5}\sin z$ با مرکز 0

پاسخ

بر اساس (14) بخش 1.4 داریم.

$$z^{-5}\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-4} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} z^2 + - \cdots \qquad (|z| > 0).$$

اینجا ، چنبرک همگرایی ، تمام صفحه مختصات مختلط است ، بدون مبدا و قسمت اصلی سری در صفر مطابق زیر است.

$$z^{-4} - \tfrac{1}{6} z^{-2}.$$

مثال 2

جانشین کردن Substitution

مطلوب است سری لوران $z^2 e^{\frac{1}{z}}$ با مرکز صفر.

پاسخ

بر اساس (12) بخش 1.4 با بکار بردن z بجای $\frac{1}{z}$ سری لوران بدست می آوریم که قسمت اصلی آن ، سری نا متناهی زیر است.

$$z^2 e^{1/z} = z^2\left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots\right) = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \cdots \qquad (|z| > 0).$$

مثال 3

بسط $\frac{1}{1-z}$

(a)

$$\frac{1}{1-z}$$

بسط دهید با توان های غیر منفی z

(b)

$$\frac{1}{1-z}$$

بسط دهید با توان های منفی $z)$

پاسخ

(a)

اگر $|z| < 1$ باشد ، داریم.

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

(b)

اگر $|z| > 1$ باشد ، داریم.

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z(1-z^{-1})} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \cdots$$

مثال 4

بسط لوران در چنبرک های هم مرکز مختلف

Laurent Expansions in Different Concentric Annuli

مطلوب است تمام سری های لوران زیر با مرکز صفر

$$\frac{1}{z^3 - z^4}$$

پاسخ

با ضرب کردن در $\frac{1}{z^3}$, از مثال 3 داریم.

اگر $1 > |z| > 0$ باشد ، داریم.

$$\frac{1}{z^3 - z^4} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \cdots \qquad \text{(I)}$$

اگر $|z| > 1$ باشد ، داریم.

$$\frac{1}{z^3 - z^4} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+4}} = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \cdots \qquad \text{(II)}$$

مثال 5

استفاده از کسر ها جزئی Use of Partial Fractions

مطلوب است تمام سری های تایلور و لوران تابع زیر ، با مرکز 0

$$f(z) = \frac{-2z + 3}{z^2 - 3z + 2}$$

پاسخ

بر حسب کسر های جزئی

$$f(z) = -\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}.$$

قسمت های (a) و (b) مثال 3 کسر اول را پیاده می کند. برای کسر دوم اگر $(|z| < 2)$, باشد

$$-\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2\left(1 - \frac{1}{2}z\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \qquad \text{(c)}$$

اگر $(|z| > 2)$. باشد

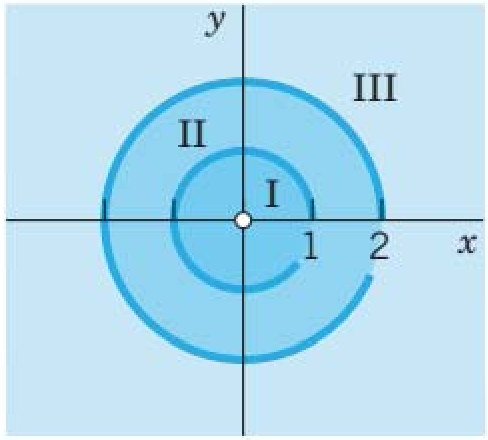
$$-\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{z\left(1 - \frac{2}{z}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} \qquad \text{(d)}$$

(I)

از (a) و (c) برای $|z| < 1$ معتبر است .تصویر شماره 2

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n = \frac{3}{2} + \frac{5}{4}z + \frac{9}{8}z^2 + \cdots.$$

تصویر شماره 2
ناحیه همگرایی مثال 5



(II)

از (c) و (d) برای $1 < |z| < 2,$ معتبر است.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}z^2 + \cdots - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \cdots.$$

(III)

از (d) و (b) برای $|z| > 2,$ معتبر است.

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 1) \frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{2}{z} - \frac{3}{z^2} - \frac{5}{z^3} - \frac{9}{z^4} - \cdots.$$

اگر $f(z)$ در قضیه لوران ، داخل C_2 تحلیلی باشد ، ضریب های b_n در (2) صفر هستند ، براساس قضیه انتگرال کاشی ،بطوری که سری لوران به سری تایلور تقلیل پیدا mi کند.مثال های $3(a)$ و $5(I)$ این موضوع را نشان می دهند.

تمرینات بخش 2.1

تمرین 1

مطلوب عصر سری لوران برای تابع زیر اطراف $z_0 = 0$ و ناحیه ای که آن سری معتبر است مشخص کنید.

$$f(z) = \frac{z+1}{z}$$

پاسخ

$$f(z) = 1 + \frac{1}{z}.$$

این سری لوران است ، در $0 < |z| < \infty.$ معتبر است. یعنی در یک ناحیه نا متناهی.

تمرین 2

مطلوب است سری لوران برای تابع زیر اطراف $z_0 = i$ همچنین ناحیه ای که این جواب معتبر است مشخص کنید. قسمت تکین را مشخص کنید.

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1}$$

پاسخ

با استفاده از کسر های پاره ای داریم.

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}.$$

چون $\frac{1}{z+i}$ در $z = i$ تحلیلی است ، پس یک بسط سری تایلور دارد. آنرا با استفاده از سری هندسی پیدا می کنیم.

$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{1+(z-i)/(2i)} = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{z-i}{2i})^n$$

پس سری لوران ، مطابق زیر است.

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i} + \frac{1}{4i}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{z-i}{2i})^n$$

قسمت تکین ، اولین جمله است. ناحیه همگرایی

$$0 < |z-i| < 2.$$

است.

تمرین 3

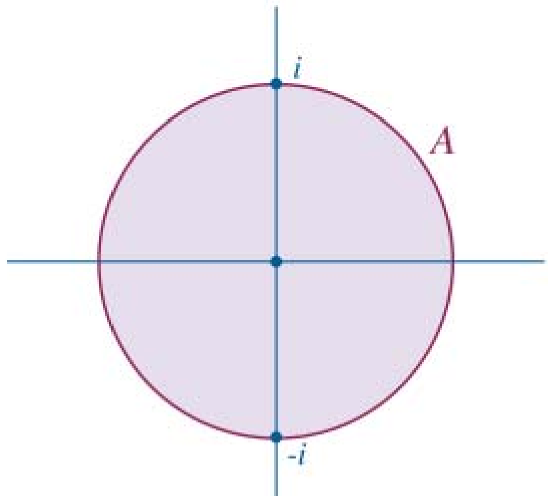
سری لوران برای

$$f(z) = \frac{z+1}{z^3(z^2+1)}$$

در ناحیه $A\colon 0 < |z| < 1$ به مرکز $z = 0.$ محاسبه کنید.

پاسخ

این تابع تکینگی در $z = 0, \pm i.$ دارد لذا در ناحیه A تحلیلی است.



در تصویر بالا ، نقاط تکینگی در $z = 0, \pm i$ نشان داده شده است.

در $z = 0$ داریم.

$$f(z) = \frac{1}{z^3}(1+z)(1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ \dots).$$

با ضرب کردن داریم.

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1 + z + z^2 - z^3 - \ \dots$$

تمرین 4

مطلوب است سری لوران تابع زیر اطراف $z = 0$

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

در ناحیه های زیر.

$$\text{(i)} \quad \text{the region } A_1 : 0 < |z| < 1$$
$$\text{(ii)} \quad \text{the region } A_2 : 1 < |z| < \infty.$$

پاسخ

برای (i) داریم.

$$f(z) = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}(1 + z + z^2 + \ \dots) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \ \dots$$

برای (ii) چون سری هندسی برای $\frac{1}{1-z}$ در A_2 همگرا نیست ، شکل دیگری لازم داریم.

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z(1 - 1/z)} = \frac{1}{z^2}(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ \dots)$$

تمرین 5

مطلوب است سری لوران تابع زیر اطراف 0

$$f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$$

پاسخ

بخاطر آورید که سری تایلور برای $w \in \mathbb{C}$ ، e^w به صورت زیر است.

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$$

جانشین می کنیم $z \neq 0$, $w = \frac{1}{z}$ پس داریم.

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n},$$

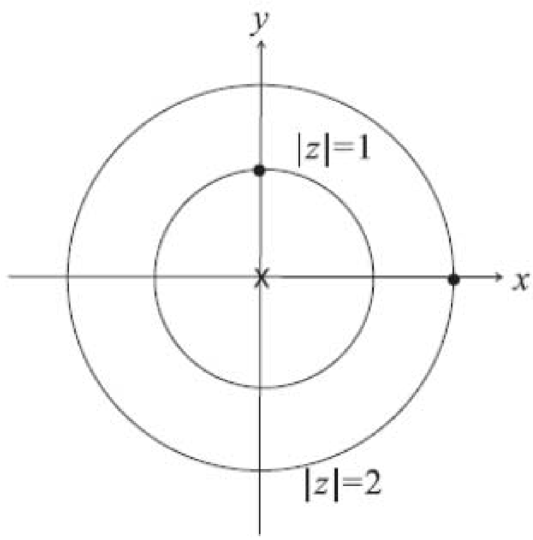
و لذا

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 e^{\frac{1}{z}} \\ &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-2}} \\ &= z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3! z} + \frac{1}{4! z^2} + \cdots \end{aligned}$$

تمرین 6

مطلوب است تمام بسط های ممکن تایلور و لوران برای تابع زیردر $z_0 = 0$
سپس ناحیه همگرایی هر کدام را مشخص کنید.

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z-2)} \quad \text{at } z_0 = 0.$$



پاسخ

دو تکینگی وجود دارد یعنی در $z = i$ و $z = 2$

نواحی مدور یا چنبرکی ممکن برای تحلیلی بودن به صورت های زیر است.

$$\text{(i)}\ |z| < 1, \quad \text{(ii)}\ 1 < |z| < 2, \quad \text{(iii)}\ |z| > 2.$$

برای $|z| < 1$

$$\frac{1}{z-i} = \frac{i}{1-\frac{z}{i}} = i\left[1+\frac{z}{i}+\cdots+\left(\frac{z^n}{i^n}\right)+\right]$$

برای $|z| < 2$

$$\frac{1}{z-2} = \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left[1+\frac{z}{2}+\cdots+\left(\frac{z}{2}\right)^n+\cdots\right]$$

پس

$$f(z) = \frac{1}{i-2}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z-2}\right) = \frac{1}{i-2}\left[i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{i}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{i-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{i}\right)^{n-1}+\frac{1}{2^{n+1}}\right]z^n.$$

این یک سری تایلور است که داخل دیسک $|z| < 1$ همگرا است.

برای $1 < |z| < 2$

معتبر برای $|z| > 1$

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{i}{z}}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n$$

معتبر برای $|z|<2$

$$\frac{1}{z-2}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$$

معتبر برای $1<|z|<2.$

$$f(z)=\frac{1}{i-2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i^n}{z^{n+1}}+\frac{z^n}{2^{n+1}}\right)\right]$$

برای $|z|>2$

معتبر برای $|z|>1$

$$\frac{1}{z-i}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{z^{n+1}}$$

معتبر برای $|z|>2$

$$\frac{1}{z-2}=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

معتبر برای $|z|>2.$

$$f(z)=\frac{1}{i-2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(i^n-2^n)\frac{1}{z^{n+1}}\right]$$

تمرین 7

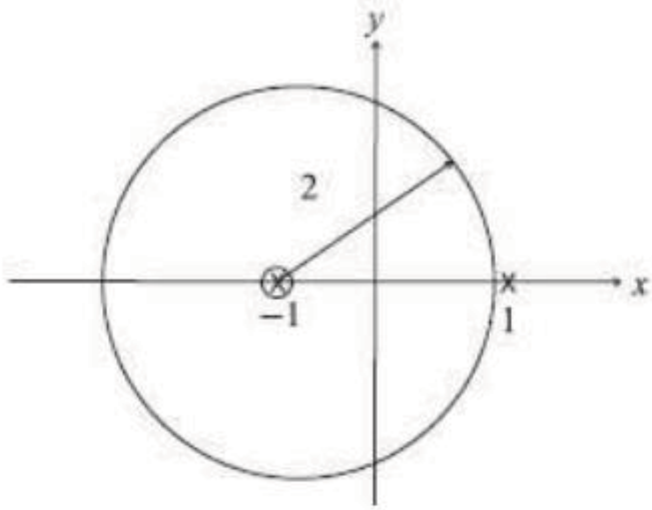
مطلوب است تمام سری های لوران ممکن تابع زیر در $\alpha = -1$

$$f(z)=\frac{1}{1-z^2}$$

پاسخ

تابع دارای دو نقطه تکینگی دارد در نقاط $z=\pm 1$

دو ناحیه چنبرک وجود دارد
(i)
$$0 < |z+1| < 2$$
و
(ii)
$$|z+1>1|$$
که در آنجا ، تابع در همه جا داخل ناحیه مربوطه ، تحلیلی است.



$$\text{(i)}\ 0 < |z+1| < 2$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z^2} &= \frac{1}{2(z+1)\left(1-\frac{z+1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2(z+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+1)^k}{2^k} \\ &= \frac{1}{2(z+1)} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z+1) + \frac{1}{16}(z+1)^2 + \cdots . \end{aligned}$$

بسط بالا در

$$\left|\frac{z+1}{2}\right| < 1$$

و

$$z+1 \neq 0.$$

معتبر است.

برای هر منحنی بسته ساده C_1 که کاملا داخل $|z+1|<2$ بطوری که نقطه $z=-1$ را محاصره کند ، داریم.

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{1}{1-z^2}\,dz=\frac{1}{2}.$$

(ii) $|z+1|>2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z^2} &= -\frac{1}{(z+1)^2\left(1-\frac{2}{z+1}\right)}\\ &= -\frac{1}{(z+1)^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^k}{(z+1)^k}\end{aligned}$$

چون داریم.

$$\left|\frac{2}{z+1}\right|<1$$

پس

$$= -\left[\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{2}{(z+1)^3}+\frac{4}{(z+1)^4}+\cdots\right].$$

برای هر منحنی بسته ساده C_2 که کاملا داخل $|z+1|=2$ داریم.

$$c_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{1}{1-z^2}\,dz=0.$$

بخش 2.2
## تکینگی ها و صفر ها. بی نهایت		Singularities and Zeros. Infinity

بطور کلی ، یک **نقطه تکین یا ویژه** یک تابع تحلیلی $f(z)$ یک نقطه z_0 است که در آن $f(z)$ تحلیلی نیست. **یک صفر** عبارت است از یک z که در آن $f(z) = 0$ است. تعریف های دقیق تر در ذیل می آید. در این بخش نشان می دهیم که سری لوران را می توان برای طبقه بندی تکینگی ها و سری تایلو برای بحث صفر ها بکار برد.

می گوییم یک تابع $f(z)$ **تکین است** Is Singular یا **یک تکینگی** Has a Singularity در یک نقطه $z = z_0$ دارد اگر $f(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی نیست ، اما هر همسایگی $z = z_0$ دارای نقاطی است که در آن $f(z)$ تحلیلی است. همچنین می گوییم $z = z_0$ یک **نقطه تکین** $f(z)$ است.

می گوییم $z = z_0$ یک **تکینگی تک و تنها ی** $f(z)$ است ، اگر $z = z_0$ دارای یک همسایگی است بدون تکینگی بیشتر $f(z)$

مثلا $\tan z$ دارای تکینگیی های تک و تنها در $\cdots, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}$ است ، اما $\tan\frac{1}{z}$ در صفر تکینگی غیرتک و تنها دارد. به عبارت دیگر در تمام همسایگی صفر ، دارای تکینگی است.

تکینگی های تک و تنها ی $f(z)$ در $z = z_0$ را می توان توسط سری لوران طبقه بندی کرد.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{1}$$

که در **همسایگی بلا فاصله** In the Immediate Neighborhood نقطه تکین $z = z_0$ معتبر است ، بجز خود z_0 یعنی در ناحیه به شکل زیر.

$$0 < |z - z_0| < R.$$

مجموع سری اول بالا ، در $z = z_0$ تحلیلی است. سری دوم ، که شامل توان های منفی باشد ، **قسمت اساسی** Principal Part شماره (1) نامیده می شود. اگر شامل جمله های محدودی باشد ، به صورت زیر است.

$$\frac{b_1}{z - z_0} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \qquad (b_m \neq 0). \tag{2}$$

در این صورت تکینگی $f(z)$ در $z = z_0$ را یک **قطب** Pole و m را **مرتبه** Order می نامند. قطب های مرتبه اول را **قطب های ساده** Simple Poles می نامند.

اگرقسمت اساسی شماره (1) دارای جمله های نا متناهی باشد می گوییم $f(z)$ در $z = z_0$ دارای یک **تکینگی اساسی تک و تنها** **Isolated Essential Singularity** است.

مثال 1
قطب ها ، تکینگی های اساسی Poles. Essential Singularities
تابع

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^5} + \frac{3}{(z-2)^2}$$

دارای یک قطب ساده در $z = 0$ است و یک قطب مرتبه پنجم در $z = 2$ دارد. مثال هایی که دارای تکینگی اساسی تک و تنها در $z = 0$ هستند ، به صورت زیر هستند.

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots$$

و

$$\sin\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - + \cdots.$$

مثال 2
رفتار نزدیک یک قطب Behavior Near a Pole
تابع $f(z) = \frac{1}{z^2}$ در $z = 0$ دارای یک قطب است ، و $|f(z)| \to \infty$ هنگامی که $z \to 0$ این قضیه زیر را توضیح می دهد.

قضیه 1
قطب ها **Poles**
اگر $f(z)$ تحلیلی باشد و یک قطب در $z = z_0$ داشته باشد ، پس $|f(z)| \to \infty$ هنگامی که $z \to z_0$ به هر طریق.

مثال 3
رفتار نزدیک یک تکینگی اساسی Behavior Near an Essential Singularity
تابع $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ یک تکینگی اساسی در $z = 0$ دارد. هیچ حدی برای نزدیک شدن در امتدا د محور مجازی ندارد. اگر در امتداد مقادیر حقیقی مثبت z به طرف 0 برود ، تابع نا متناهی می

شود. اما اگر در امتدا مقدار حقیقی منفی z به طرف 0 برود ، تابع به طرف صفر نزدیک می شود.
در همسایگی بسیار کوچک $z = 0$ مقدار $c = c_0 e^{i\alpha}$ می گیرد

قضیه 2
قضیه پیکارد Picard's Theorem
اگر $f(z)$ تحلیلی باشد و یک تکینگی اساسی تک و تنها در یک نقطه z_0 داشته باشد ، هر مقداری به خود می گیرد ، با حد اکثر یک مقدار استثنایی در همسایگی بسیار کوچک z_0

تکینگی قابل حذف Removable Singularity
می گوییم یک تابع $f(z)$ **یک تکینگی قابل حذف** در $z = z_0$ دارد اگر $f(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی نباشد ، اما می تواند تحلیلی بشود با تخصیص دادن یک مقدار مناسب $f(z_0)$, چنین تکینگی ها مهم نیستند ، زیرا میتوان آنها را حذف کرد. مثلا $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ در $z = 0$ تحلیلی می شود ، اگر $f(0) = 1$ تعریف کنیم.

صفر های تابع های تحلیلی Zeros of Analytic Functions
یک **صفر** یک تابع تحلیلی $f(z)$ در یک دامنه D یک $z = z_0$ در D است بطوری که $f(z_0) = 0$ است. یک صفر دارای مرتبه n است اگر نه فقط f بلکه مشتق های $f', f'', \cdots, f^{(n-1)}$ هم ، همگی در $z = z_0$ صفر هستند، اما $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ است.
یک صفر مرتبه اول هم یک **صفر ساده Simple Zero** نامیده می شود. برای یک صفر مرتبه دوم

$$f(z_0) = f'(z_0) = 0$$

اما $f''(z_0) \neq 0$

مثال 4
صفر ها Zeros
تابع $1 + z^2$ صفر ساده در $\pm i$ دارد. تابع $(1 - z^4)^2$ صفر مرتبه دوم در ± 1 و $\pm i$ دارد. تابع $(z - a)^3$ صفر مرتبه سوم در $z = a$ دارد. تابع e^z هیچ صفری ندارد.
تابع $\sin z$ صفر های ساده در $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ دارد و $\sin^2 z$ صفر های مرتبه دوم در نقاط گفته شده دارد. تابع $1 - \cos z$ صفر های مرتبه دوم در $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$ دارد.
تابع $(1 - \cos z)^2$ صفر های مرتبه چهارم در نقاط گفته شده دارد.

سری تایلور دریک صفر Taylor Series at a Zero

در یک صفر مرتبه n ام $z = z_0$ تابع $f(z)$ ،مشتق های
$f'(z_0), \cdots, f^{(n-1)}(z_0)$ صفر هستند. پس چند اولین ضریب ها
$a_0, \cdots, a_{n-1}$ سری تایلور (1) بخش 1.4 هم صفر هستند ، در صورتی که
$a_n \neq 0$ است ، پس سری به شکلزیر است.

$$f(z) = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots \tag{3}$$
$$= (z - z_0)^n [a_n + a_{n+1}(z - z_0) + a_{n+2}(z - z_0)^2 + \cdots] \quad (a_n \neq 0).$$

این از خصوصیات چنین صفری است. زیرا اگر $f(z)$ یک چنین سری تایلور داشته باشد ، دارای صفر مرتبه n ام در $z = z_0$ است.

قضیه 3
صفر ها Zeros

صفر های یک تابع تحلیلی $f(z)\ (\not\equiv 0)$ ، تک و تنها است ، یعنی هر یک از آنها یک همسایگی دارد که شامل هیچ صفر دیگری از $f(z)$ نیست.

قضیه 4
قطب ها و صفر ها Poles and Zeros

فرض کنید $f(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی باشد و دارای یک صفر مرتبه n ام در $z = z_0$ باشد.
پس $\dfrac{1}{f(z)}$ یک قطب مرتبه n ام در $z = z_0$ دارد وهمچنین $\dfrac{h(z)}{f(z)}$ به شرطی که
$h(z)$ در $z = z_0$ تحلیلی باشد ،و $h(z) \neq 0$ باش د.

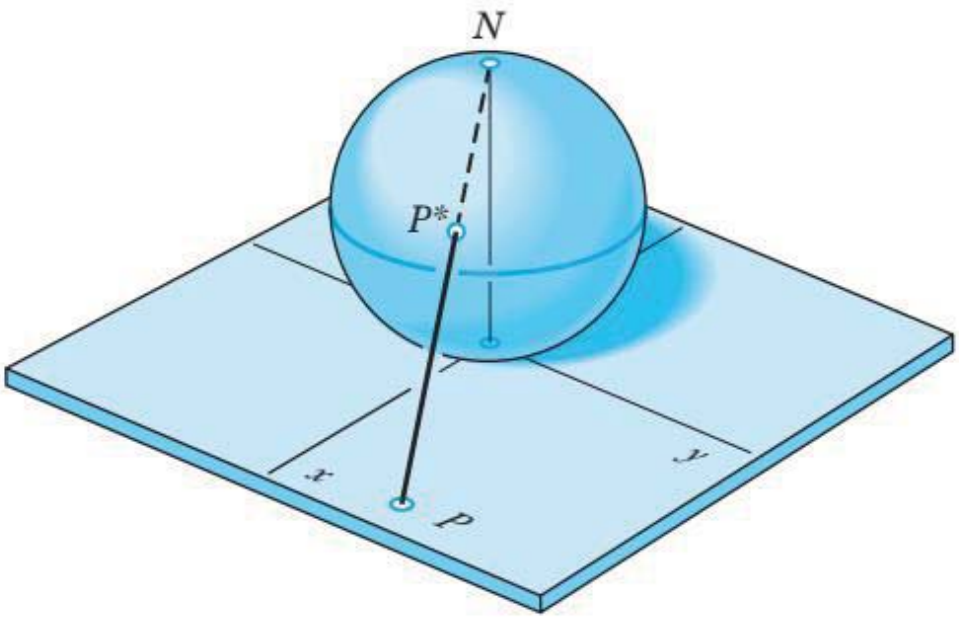
کره ریمان. نقطه در بی نهایت Riemann Sphere. Point at Infinity

هنگامی که می خواهیم تابع های مختلط برای $|z|$ خیلی بزرگ ، مورد مطالعه قرار دهیم ، معمولا صفحه مختلط درد سر آور می شود. پس در چنین مواردی ، از **کره ریمان** استفاده می کنیم . این یک کره به نام S است به قطر 1 که در $z = 0$ باصفحه z مماس است. تصویر شماره 1 فرض می کنیم ، تصویر یک نقطه P محل تلاقی P^* پاره خط PN با S باشد. N قطب شمال است بطوری که این نقطه روی قطر کره و مقابل مرکز مختصات است. پس برای هر z یک نقطه روی S قرار دارد.

بر عکس ، هر نقطه روی S نمایش یک عدد مختلط z است ، بجز برای N که مربوط به هیچ نقطه ای روی صفحه مختصات نیست. این به ما یک نقطه در بی نهایت می دهد که آنرا **نقطه در بی نهایت** می نامیم. و با ∞ نمایش می دهیم. و فرض می کنیم تصویر آن ، N باشد. صفحه مختصات مختلط

با ∞ را **صفحه مختلط گسترده** **Extended Complex Plane** می نامیم. S را **کره ریمان** می نامند.

تصویر شماره 1
کره ریمان



تحلیلی یا تکینگی در بی نهایت Analytic or Singular at Infinity

اگر بخواهیم یک تابع $f(z)$ برای $|z|$ خیلی بزرگ مورد بر رسی قرار دهیم فرض می کنیم $z = \frac{1}{w}$ باشد و $f(z) = f\left(\frac{1}{w}\right) \equiv g(w)$ در همسایگی $w = 0$ را مورد بر رسی قرار می دهیم. همچنین تعریف زیر را هم در نظر می گیریم.

$$g(0) = \lim_{w \to 0} g(w) \qquad (4)$$

اگر این حد وجود داشته باشد.

مثال 5

تابع های تحلیلی یا تکین در بی نهایت ، تابع های کامل و برخه سان

Functions Analytic or Singular at Infinity, Entire and Meromorphic Functions

تابع $f(z) = \frac{1}{z^2}$ در ∞ تحلیلی است ، زیرا $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = w^2$ در $w = 0$ تحلیلی است و $f(z)$ یک صفر مرتبه دوم در ∞ دارد.

تابع $f(z) = z^3$ در ∞ تکین است و دارای قطب مرتبه سوم است , زیرا تابع

$$g(w) = f\left(\frac{۱}{w}\right) = \frac{۱}{w^3}$$

دارای چنین قطبی در $w = 0$ است.

تابع e^z در ∞ دارای یک تکینگی اساسی است ، زیرا $e^{\frac{1}{w}}$ دارای چنین قطبی در $w = 0$ است.

به همین طریق $\cos z$ و $\sin z$ در ∞ یک تکینگی اساسی دارند.

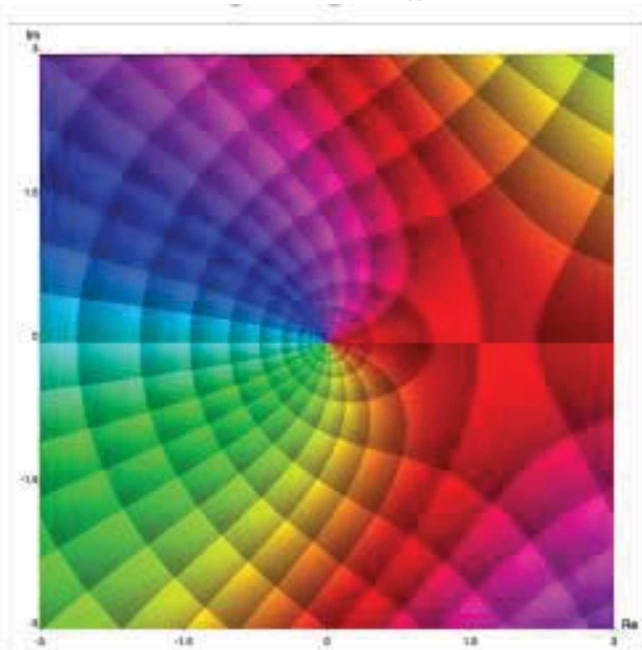
مثال 6

تصویر های

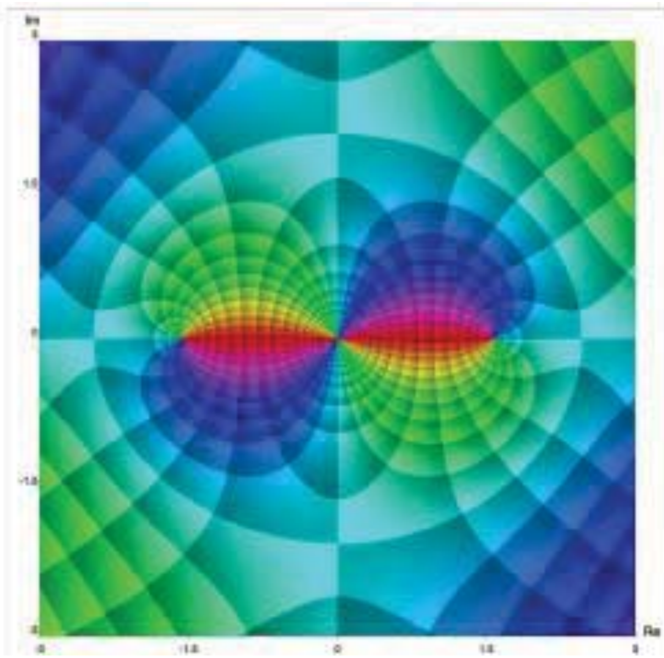
$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}, \qquad g(z) = \frac{\cos z}{z^2} \quad h(z) = \frac{\sinh z}{z^4},$$

در $z_0 = 0$ در صورتی که $|z| < 3$ حقیقی | و $3 > |z|$ مجازی| باشد.

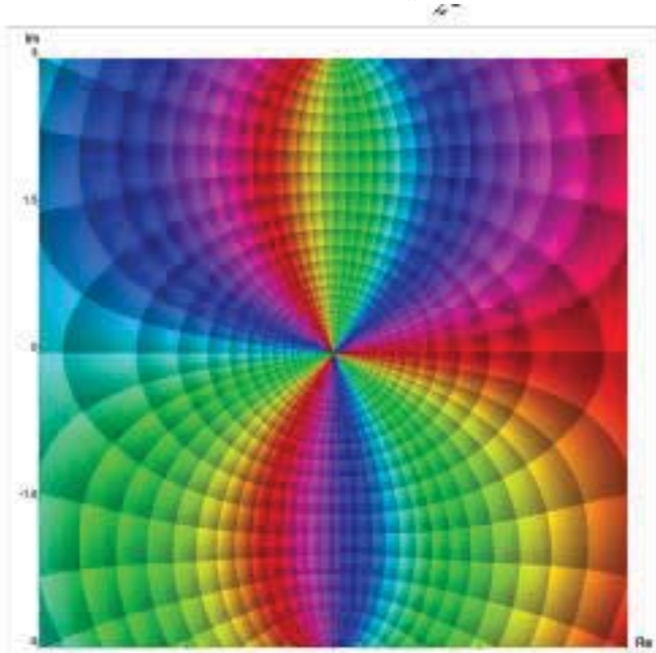
$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2},$$



$$g(z) = \frac{\cos z}{z^2}$$



$$h(z) = \frac{\sinh z}{z^4},$$



تمرینات بخش 2.2

تمرین 1

نشان دهید اگر $f(z) = \frac{1}{z^2}$ برای $z \neq 0$ باشد ، پس

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = 0.$$

پاسخ

برای یک $\varepsilon > 0$ داریم.

$$\left|\frac{1}{z^2} - 0\right| = \frac{1}{|z^2|} = \frac{1}{|z|^2} < \varepsilon$$

لذا می توانیم $|z|$ را به صورت زیر فرض کنیم.

$$|z| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = R.$$

تمرین 2

نشان دهید اگر $f(z) = \frac{1}{z-3}$ برای $z \neq 3$ باشد ، پس داریم.

$$\lim_{z\to 3} f(z) = \infty.$$

پاسخ

در حقیقت برای هر $R > 0$ نا معادله زیر

$$\frac{1}{|z-3|} > R$$

بر قرار است. اما

$$0 < |z-3| < \frac{1}{R} = \delta.$$

تمرین 3

نشان دهید برای $f(z) = e^z$ تعریف شده در

$$D = \{z : Re(z) > 0\}$$

داریم.

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty.$$

پاسخ

در حقیقت برای $M > 0$ هر گاه $x > \ln M$ باشد داریم.

$$|f(z)| = |e^z| = e^x > M$$

لذا ، کافی است فرض کنیم

$$R > max\{0, lnR\}.$$

تمرین 4

مطلوب است قطب تابع زیر در $z = 0$

$$h(z) = \frac{\sin(z)}{z^2}.$$

پاسخ

می دانیم که $\sin z$ دارای یک صفر مرتبه یک در $z = 0$ دارد و z^2 یک صفر مرتبه دوم دارد. پس $h(z)$ یک قطب مرتبه اول در $z = 0$ دارد. در حقیقت می توان این را با استفاده سری تایلور زیر ببینیم.

$$h(z) = \frac{1}{z^2}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \ \ldots\right)$$

تمرین 5

مطلوب است قطب های تابع های زیر.

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2}, \qquad g(z) = \frac{\cos z}{z^2} \quad h(z) = \frac{\sinh z}{z^4},$$

پاسخ

تابع f دارای قطب مرتبه اول در $z_0 = 0$ است. زیرا

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2}\left[\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots\right) - 1\right] \\ &= \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots, \quad (0 < |z| < \infty). \end{aligned}$$

تابع g دارای قطب مرتبه دوم زست. زیرا

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) \\ &= \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2!} + \frac{z^2}{4!} - \cdots, \quad (0 < |z| < \infty) \end{aligned}$$

تابع h دارای قطب مرتبه سوم است. زیرا

$$h(z) = \frac{1}{z^4}\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots\right)$$
$$= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z} + \frac{z}{5!} + \frac{z^3}{7!} + \cdots, \quad (0 < |z| < \infty).$$

تمرین 6

مطلوب است .تکینگی های تابع زیر.

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2},$$

پاسخ

تابع f در $z_0 = 0$ یک تکینگی دارد. زیرا از نمایش سری لوران داریم.

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left[1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \cdots, \quad (0 < |z| < \infty).$$

در این حالت اگر $f(0) = \frac{1}{2}$ باشد ، f تحلیلی می شود. چون $z = 0$ یک نقطه تکین قابل حذف است پس f باید تحلیلی باشد در یک همسایگی $0 < |z| < \varepsilon$.

تمرین 7

نشان دهید تابع زیر دارای یک تکینگی اساسی در $z_0 = 0$ است.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}$$

پاسخ

چون داریم.

$$f(z) = 1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}, \quad (0 < |z| < \infty).$$

تمرین 8

برای هر یک از چهار تابع زیر ، تمام تکینگی ها را پیدا کنید و بگویید آیا آنها قابل حذف است ، قطب است و یا اساسی.

$$z\cos(z^{-1})$$
$$z^{-2}\log(z+1)$$
$$z^{-1}(\cos(z)-1)$$
$$\frac{\cos(z)}{\sin(z)(e^{z}-1)}$$

پاسخ

$$z\cos(z^{-1})$$

تنها تکینگی در 0 است. با استفاده از بسط سری $\cos z$, سری لوران $\cos(z^{-1})$ در صفر بدست می آوریم. این یک تکینگی اساسی است. پس $z\cos(z^{-1})$ یک تکینگی اساسی در صفر دارد.

$$z^{-2}\log(z+1)$$

تنها تکینگی در صفحه مختصات با حذف $([-1,-\infty)$ در صفر است. داریم.

$$\log(z+1)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}\cdots$$

پس

$$z^{-2}\log(z+1)=z^{-1}-\frac{1}{2}+\frac{z}{3}\cdots$$

پس در صفر یک قطب ساده وجود دارد با قسمت اصلی $\frac{1}{z}$

$$z^{-1}(\cos(z)-1)$$

تنها یک تکینگی در صفر وجود دارد. بسط سری توانی $\cos(z)-1$ اطراف صفر ، مطابق زیر است.

$$\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4!}\cdots$$

پس ، تکینگی قابل حذف است.

$\frac{\cos(z)}{\sin(z)(e^z-1)}$

تکینگی ها در صفر های $\sin(z)$ و e^z-1 یعنی در $n\pi$ و $i2n\pi$ است برای عدد صحیح n.

این صفر ها همه ساده هستند. پس برای $n \neq 0$ قطب های ساده بدست می آوریم و در $z = 0$ قطب های مرتبه دوم بدست می آوریم. برای $n \neq 0$ باقیمانده قطب ساده در $n\pi$ به صورت زیر است.

$$\lim_{z\to\pi n}(z-\pi n)\frac{\cos(z)}{\sin(z)(e^z-1)} = \frac{\cos(\pi n)}{\cos(\pi n)(e^{n\pi}-1)} = \frac{1}{e^{n\pi}-1}$$

برای $n \neq 0$ باقیمانده قطب ساده در $2\pi ni$ به صورت زیر است.

$$\lim_{z\to 2\pi ni}(z-2\pi ni)\frac{\cos(z)}{\sin(z)(e^z-1)} = \frac{\cos(2\pi ni)}{\sin(2\pi ni)} = -i\coth(2\pi n)$$

تمرین 9

مطلوب است صفر و مرتبه تابع زیر.

$$f(z) = \cos(z) - 1 + z^2/2$$

پاسخ

این تابع یک صفر مرتبه چهار در $z = 0$ دارد. زیرا

$$f(z) = \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

تمرین 10

مطلوب است صفر تابع زیر.

$$f(z) = sinz.$$

پاسخ

واضح است که $\sin z = 0$ برای $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$ و $f'(z) = \cos z \neq 0$ برای این مقادیر. لذا $f(z)$ یک صفر ساده در

$$z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots$$

دارد.

تمرین 11

مطلوب است تکینگی تابع های زیر.

$$f(z) = \frac{z^2}{z-2} \quad و \quad g(z) = \frac{z}{z(z+1)}$$

پاسخ

تکینگی $f(z) = \frac{z^2}{z-2}$ در $z = 2$

تکینگی $g(z) = \frac{z}{z(z+1)}$ در $z = 0$ و $z = -1$

تمرین 12

مطلوب است صفر و نوع تکینگی تابع زیر.

$$f(z) = \frac{z-2}{z^2} sin \frac{1}{z-1}.$$

پاسخ

صفر های یک تابع $f(z)$ از طریق $f(z) = 0$ بدست می آیاند.

$$z - 2 = 0, sin \frac{1}{z-1} = 0.,\ z = 2, \frac{1}{z-1} = n\pi\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$
$$z = 2, \frac{1}{z-1} = n\pi\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$
$$z = 2, 1 + \frac{1}{n\pi}\ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

واضح است که $z = 1$ یک تکینگی اساسی تک و تنها است. قطب های تابع از طریق

$$z^2 = 0, z = 0.$$

بدست می آید. لذا $z = 0$ یک قطب مرتبه دو است.

بخش 2.3
روش انتگرال گیری باقیمانده Residue Integration Method

حالا روش دیگری برای محاسبه انتگرال مورد بررسی قرار می دهیم. بخاطر آورید که انتگرال های مختلط را از طریق فرمول کاشی محاسبه کردیم. در فصل قبل در مورد سری های توانی و مخصوصا سری تایلو ر صحبت کردیم. و در مورد تکینگی ها ، صفر ها ی توابع مختلف بحث کردیم. این کار های سخت ما حالا به نیجه مطلوب می رسد. یعنی محاسبه انتگرال های مختلط با روش باقیمانده.

هدف روش انتگرال گیری باقیمانده کاشی ، محاسبه انتگرال های به صورت زیر است.

$$\oint_C f(z)\, dz$$

انتگرال بالا اطراف یک مسیر بسته ساده C محاسبه می شود، ایده به صورت زیر است.

اگر $f(z)$ همه جا روی C و داخل آن ، تحلیلی باشد ، چنین انتگرالی بر اساس قضیه انتگرال کاشی ، صفر است ، و لذا کار ما تمام است.

اما ، مساله متفاوت است ، اگر $f(z)$ در یک نقطه $z = z_0$ داخل C یک تکینگی داشته باشد ، اما جاهای دیگر تحلیلی باشد ، خواه روی C یا داخل آن. در این صورت $f(z)$ یک سری لوران دارد.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots$$

که در تمام نقاط نزدیک $z = z_0$ همگرا است ، بجز در خود $z = z_0$, در یک دامنه به شکل $0 < |z - z_0| < R$.

حالا ، نکته کلیدی داریم. ضریب b_1 اولین توان منفی $\frac{1}{z-z_0}$ این سری لوران ، توسط فرمول انتگرال زیر با $n = 1$ در بخش های قبل داده شد. یعنی

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\, dz.$$

حالا ، چون می توانیم با روش های مختلف , سری لوران را پیدا کنیم ، بدون استفاده از فرمول های انتگرال برای ضریب ها ، می توانیم b_1 را توسط آن روش ها و سپس استفاده از فرمول b_1 برای محاسبه انتگرال استفاده کنیم. یعنی

$$\oint_C f(z)\, dz = 2\pi i b_1. \qquad \textbf{(1)}$$

ضریب b_1 را **باقیمانده** $f(z)$ در $z = z_0$ می نامند و به صورت زیر نمایش می دهند.

$$b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z). \qquad (2)$$

اگر توضیحات بالا کمی بغرنج است ، با مثال های زیر موضوع روشن می شود.

مثال 1
محاسبه یک انتگرال بوسیله یک باقیمانده
Evaluation of an Integral by Means of a Residue
مطلوب است انتگرال تابع زیر خلاف جهت عقربه ساعت اطراف دائره واحد C

$$f(z) = z^{-4} \sin z$$

پاسخ
بر اساس فرمول (14) بخش 1.4 جلد دوم ریاضیات مهندسی مینا ، سری لوران را بدست می آوریم.

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{1}{5!} - \frac{z^3}{7!} + - \cdots$$

این سری برای $|z| > 0$ همگرا است. این سری نشان می دهد که $f(z)$ یک قطب مرتبه سوم در $z = 0$ و باقیمانده $b_1 = -\frac{1}{3!}$ است. بر اساس فرمول (1) بالا ، جواب زیر را پیدا می کنیم.

$$\oint_C \frac{\sin z}{z^4}\, dz = 2\pi i b_1 = -\frac{\pi i}{3}.$$

مثال 2
احتیاط !سری صحیح لوران را بکار برید.
Caution! Use the Right Laurent Series!
انتگرال تابع زیر را خلاف جهت عقربه ساعت اطراف دائره $C: |z| = \frac{1}{2}$. محاسبه کنید.

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^4}$$

پاسخ

$$z^3 - z^4 = z^3(1 - z)$$

پس $f(x)$ در $z = 0$ و $z = 1$ تکین است. $z = 1$ خارج از C است. پس این مورد توجه ما نیست. پس باقیمانده $f(z)$ در صفر احتیاج داریم. این را از سری لوران که برای $0 < |z| < 1$ همگرا است پیدا می کنیم. این را از فرمول شماره (1) بخش 2.1 جلد دوم ریاضیات مهندسی مینا پیدا می کنیم.

$$\frac{1}{z^3 - z^4} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \cdots \qquad (0 < |z| < 1).$$

از فرمول بالا ، ملاحظه می شود که باقیمانده 1 است. با انتگرال گرفتن خلاف جهت عقربه ساعت داریم.

$$\oint_C \frac{dz}{z^3 - z^4} = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -2\pi i.$$

احتیاط اگر سری (II) در مثال 4 بخش 2.1 را بکار می بردیم .یعنی

$$\frac{1}{z^3 - z^4} = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^6} - \cdots \qquad (|z| > 1),$$

جواب خلع بدست می آوردیم. زیرا این سری هیچ توان $\frac{1}{z}$ ندارد.

فرمول ها ی باقیمانده ها Formulas for Residues

برای محاسبه یک باقیمانده در قطب ، لازم نیست یک سری کامل لوران ایجاد کنیم ، بلکه با صرفه جوئی دروقت ، می توان فرمول هایی برای باقیمانده ها ، یک مرتبه و برای همیشه ، پیدا کرد.

قطب های ساده در z_0

Simple Poles at z_0

اولین فرمول برای یک باقیمانده در یک قطب ساده ، به صورت زیر است.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z). \qquad \textbf{(3)}$$

در فرمول بالا Res حروف اول کلمه Residue است به معنی باقیمانده

دومین فرمول برای باقیمانده در یک قطب ساده به صورت زیر است.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \qquad \textbf{(4)}$$

در فرمول (4) فرض می کنیم

$f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ با $p(z_0) \neq 0$ و $q(z)$ دارد z_0 یک صفر ساده در

بطوری که $f(z)$ در z_0 یک قطب ساده دارد. بر اساس قضیه 4 بخش 2.2 جلد دوم ریاضیات مهندسی مینا.

مثال 3
باقیمانده در یک قطب ساده Residue at a Simple Pole
تابع

$$f(z)=\frac{9z+i}{z^3+z}$$

یک قطب ساده در i دارد ، زیرا

$$z^2+1=(z+i)(z-i)$$

و شماره (3) باقیمانده زیر را به ما می دهد.

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{9z+i}{z(z^2+1)} = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{9z+i}{z(z+i)(z-i)} = \left[\frac{9z+i}{z(z+i)}\right]_{z=i} = \frac{10i}{-2} = -5i.$$

بر اساس (4) با $p(i)=9i+i$ و $q'(z)=3z^2+1$ نتیجه تائید می شود.

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{9z+i}{z(z^2+1)} = \left[\frac{9z+i}{3z^2+1}\right]_{z=i} = \frac{10i}{-2} = -5i.$$

قطب ها با هر مرتبه در z_0

Poles of Any Order at z_0

باقیمانده $f(z)$ با یک قطب مرتبه n ام در z_0 به صورت زیر است.

(5)
$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]\right\}.$$

برای یک قطب مرتبه دوم یعنی $m=2$ داریم.

(5*)
$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\{[(z-z_0)^2 f(z)]'\}.$$

مثال 4

باقیمانده در یک قطب با مرتبه بالا تر Residue at a Pole of Higher Order

تابع

$$f(z)=\frac{50z}{z^3+2z^2-7z+4}$$

یک قطب مرتبه دوم در $z=1$ دارد ، زیرا مخرج به صورت زیر ساده می شود.

$$z^3+2z^2-7z+4=(z+4)(z-1)^2$$

بر اساس (5^*) باقیمانده زیر بدست می آوریم.

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[(z-1)^2 f(z)]=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{50z}{z+4}\right)=\frac{200}{5^2}=8.$$

چندین تکینگی داخل منحنی تراز Several Singularities inside the Contour

قضیه باقیمانده Residue Theorem

فرض می کنیم $f(z)$ داخل یک مسیر بسته ساده C و روی C تحلیلی باشد. بجز تعداد محدودی نقاط تکین

$$z_1, z_2, \cdots, z_k$$

داخل C

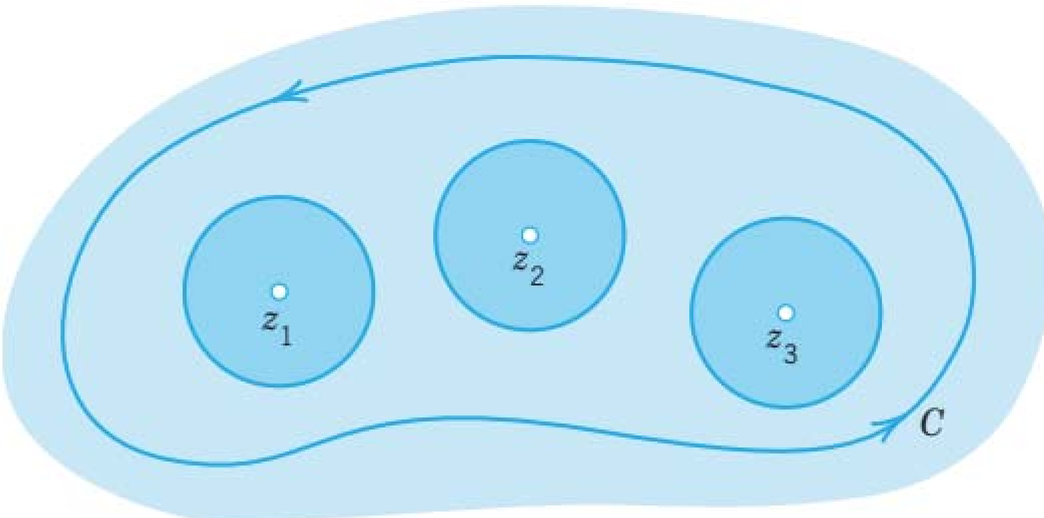
پس انتگرال $f(z)$ که خلاف جهت عقربه ساعت گرد C محاسبه می شود ، مساوی است با $2\pi i$ ضرب در مجموع باقیمانده های $f(z)$ در

$$z_1, z_2, \cdots, z_k$$

یعنی

$$\oint_C f(z)\,dz=2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z). \qquad \textbf{(6)}$$

تصویر شماره 1
قضیه باقیمانده



مثال 5
محاسبه انتگرال بوسیله قضیه باقیمانده ، چندین منحنی تراز
Integration by the Residue Theorem, Several Contours
انتگرال زیر را خلاف جهت عقربه ساعت گرد هر مسیر بسته ساده محاسبه کنید.

$$\oint_C \frac{4-3z}{z^2-z}\,dz$$

بطوری که
$(a$
صفر و 1 داخل C باشند.
$(b$
صفر داخل و 1 خارج باشند.
$(c$
یک داخل و صفر خارج باشند.
$(d$
صفر و 1 خارج باشند.
پاسخ
انتگراند قطب های ساده در صفر و 1 دارند با باقیمانده های زیر

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{4-3z}{z(z-1)} = \left[\frac{4-3z}{z-1}\right]_{z=0} = -4, \qquad \operatorname*{Res}_{z=1} \frac{4-3z}{z(z-1)} = \left[\frac{4-3z}{z}\right]_{z=1} = 1.$$

پس جواب ها به صورت های زیر هستند.

(a) $2\pi i(-4 + 1) = -6\pi i$, (b) $-8\pi i$, (c) $2\pi i$, (d) 0.

مثال 6

کار برد دیگر قضیه باقیمانده Another Application of the Residue Theorem

انتگرال

$$\frac{\tan z}{z^2 - 1}$$

را خلاف جهت عقربه ساعت گرد دائره زیر

$$C: |z| = \tfrac{3}{2}.$$

محاسبه کنید.

پاسخ

می دانیم که $\tan z$ در $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \cdots$ تحلیلی نیست. اما , تمام این نقاط خارج از منحنی ترا ز C قرار دارند. چون مخرج

$$z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$$

است. پس تابع داده شده قطب های ساده در ± 1 دارد. پس بر اساس (4) داریم.

$$\oint_C \frac{\tan z}{z^2 - 1}\, dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{\tan z}{z^2 - 1} + \operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{\tan z}{z^2 - 1}\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{\tan z}{2z}\bigg|_{z=1} + \frac{\tan z}{2z}\bigg|_{z=-1}\right)$$

$$= 2\pi i \tan 1 = 9.7855i.$$

مثال 7

قطب ها و تکینگی های اساسی Poles and Essential Singularities

انتگرا ل زیر را محاسبه کنید

$$\oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} + ze^{\pi/z}\right) dz.$$

درصورتی که C بیضی زیر باشد.

$$9x^2 + y^2 = 9$$

پاسخ

چون در $\pm 2i$ و ± 2 داریم.

$$z^4 - 16 = 0$$

پس اولین جمله انتگراند ، قطب های ساده در $\pm 2i$ داخل C دارد ، با باقیمانده های زیر

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} = \left[\frac{ze^{\pi z}}{4z^3}\right]_{z=2i} = -\frac{1}{16},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4 - 16} = \left[\frac{ze^{\pi z}}{4z^3}\right]_{z=-2i} = -\frac{1}{16}$$

و همین اولین انتگراند در ± 2 قطب های ساده دارد که داخل C هستند ، پس مورد توجه ما نیستند.

دومین جمله انتگراند یک تکینگی اساسی در صفر دارد ، با باقیمانده $\frac{\pi^2}{2}$ که به صورت زیر بدست می آید.

$$ze^{\pi/z} = z\left(1 + \frac{\pi}{z} + \frac{\pi^2}{2!z^2} + \frac{\pi^3}{3!z^3} + \cdots\right) = z + \pi + \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{1}{z} + \cdots \qquad (|z| > 0).$$

بر اساس قضیه باقیمانده ، جواب به صورت زیر است.

$$2\pi i(-\tfrac{1}{16} - \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{2}\pi^2) = \pi(\pi^2 - \tfrac{1}{4})i = 30.221i$$

مثال 8

در نظر داشته باشید

اگر C نقطه z_0 را محصور کند ، پس بر اساس قضیه کاشی گورسات

$$\oint_C (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & ; \ n = -1 \\ 0 & ; \ \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

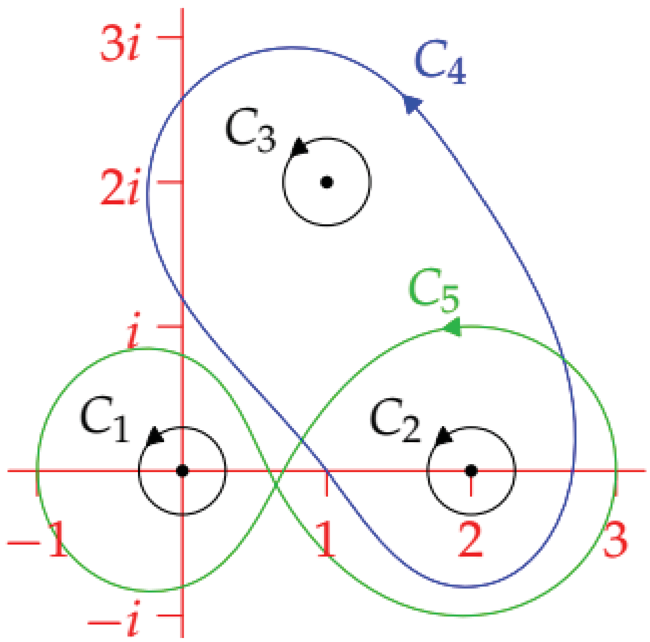
حالا ، تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f(z) = \frac{3}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{5i}{z-2} + \frac{1}{z-1-2i}$$

این تابع تحلیلی است بجز در نقاط

$$z_1 = 0, z_2 = 2, z_3 = 1 + 2i.$$

چند منحنی را در زیر ملاحظه می کنید.



انتگرال اطراف دائره کوچک C_1 داریم.

$$\oint_{C_1} f(z)\,dz = 3\oint_{C_1}\frac{dz}{z}+\oint_{C_1}\frac{dz}{z^2}+\oint_{C_1}\frac{5i\,dz}{z-2}+\oint_{C_1}\frac{dz}{z-1-2i}$$
$$= 3\cdot 2\pi i+0+0+0=6\pi i$$

به همین طریق

$$\oint_{C_2} f(z)\,dz = 5i\oint_{C_2}\frac{dz}{z-2} = -10\pi, \qquad \oint_{C_3} f(z)\,dz = \oint_{C_3}\frac{dz}{z-1-2i} = 2\pi i$$

جالب تر منحنی های C_4 و C_5 هستند. چون $f(z)$ روی و داخل C_4 و C_2/C_3 تحلیلی است پس بر اساس قضیه کاشی گورسات داریم

$$\oint_{C_4} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz + \oint_{C_3} f(z)\,dz = 2\pi(i-5)$$

منحنی C_5 کمی احتیاج به فوت و فن دارد. اما اگر آنرا شامل دو منحنی تراز تصور کنیم ، کار آسان می شود. اول z_2 را خلاف جهت عقربه ساعت احاطه می کند وبعد z_1 را موافق جهت عقربه ساعت دور می زند. پس نتیجه می گیریم.

$$\int_{C_5} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz - \oint_{C_1} f(z)\,dz = -2\pi(5+3i)$$

پس نتیجه می گیریم که مقدار هر انتگرال اطراف یک منحنی تراز بسته ساده را به صورت یک تلفیق خطی محاسبه کرد. یعنی

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \lambda_1 \oint_{C_1} f + \lambda_2 \oint_{C_2} f + \lambda_3 \oint_{C_3} f$$

اینجا λ_k نمایش تعداد دفعات که C اطراف z_k خلاف جهت عقربه ساعت می چرخد.

تمرینات بخش 2.3

تمرین 1

مطلوب است باقیمانده تابع زیر.

$$f(z) = e^{1/2z}$$

پاسخ

$$f(z) = e^{1/2z} = 1 + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2(2z)^2} + \ \dots$$

این تابع در صفر یک تکینگی تک و تنها دارد. بر اساس سری لوران ، ملاحظه می شود که

$$\mathrm{Res}(f, 0) = 1/2.$$

تمرین 2

مطلوب است قطب و باقیمانده تابع زیر در $z = 0$

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{4}{z} + 5 + 6z.$$

پاسخ

این تابع یک قطب مرتبه سوم در $z = 0$ دار و

$$\mathrm{Res}(f, 0) = 4.$$

تممرین 3

مطلوب است باقیمانده تابع زیر در $z = 0$

$$f(z) = \cos(z) = 1 - z^2/2! + \ \dots$$

پاسخ

این تابع در $z = 0$ تحلیلی است و

$$\mathrm{Res}(f, 0) = 0.$$

تمرین 4

مطلوب است باقیمانده تابع زیر در $z = 0$

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

$$= \frac{1}{z}(z - \frac{z^3}{3!} + \ \ldots) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \ \ldots$$

پاسخ

این تابع یک تکینگی قابل حذف در $z = 0$ است ، پس

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 0.$$

تمرین 5

مطلوب است قطب ها و باقیمانده های تابع زیر.

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}.$$

پاسخ

با استفاده از کسر های پاره ای داریم.

$$f(z) = \frac{z}{(z - i)(z + i)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z - i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z + i}.$$

قطب ها در $z = \pm i$ هستند .برای هر یک ، باقیمانده را محاسبه می کنیم.

در $z = i$ داریم.

$$f(z) = \frac{1}{2} * \frac{1}{z - i} + \quad \text{i یک تحلیلی در}$$

پس قطب ساده است و

$$\operatorname{Res}(f, i) = 1/2.$$

است.

در $z - i$ داریم.

$$f(z) = \frac{1}{2} * \frac{1}{z-i} +$$ یک تحلیلی در $-i$

پس قطب ساده است و

$$\text{Res}(f, -i) = 1/2.$$

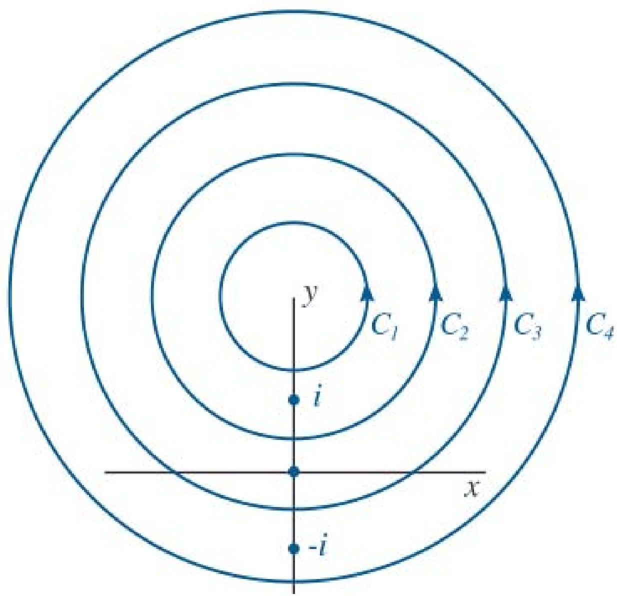
تمرین 6

فرض کنید داشته باشیم.

$$f(z) = \frac{1}{z(z^2+1)}.$$

مطلوب است $\int f(z)\, dz$ روی هر یک از منحنی های تراز

$$C_1, C_2, C_3, C_4$$



پاسخ

قطب های $f(z)$ در $z = 0, \pm i$ هستند. پس داریم.

در $z = 0$

$$g(z) = zf(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

در صفر تحلیلی است ، پس قطب ، ساده است و

$$\text{Res}(f, 0) = g(0) = 1.$$

در $z = i$

$$g(z) = (z - i)f(z) = \frac{1}{z(z + i)}$$

در i تحلیلی است ، پس قطب ، ساده است و

$$\text{Res}(f, i) = g(i) = -1/2.$$

در $z = -i$

$$g(z) = (z + i)f(z) = \frac{1}{z(z - i)}$$

در $-i$ تحلیلی است ، پس قطب ، ساده است. و داریم.

$$\text{Res}(f, -i) = g(-i) = -1/2.$$

با استفاده از قضیه باقیمانده , چون f داخل C_1 تحلیلی است ، پس داریم.

$$\int_{C_1} f(z)\, dz = 0$$

همچنین

$$\int_{C_2} f(z)\, dz = 2\pi i \text{Res}(f, i) = -\pi i$$

$$\int_{C_3} f(z)\, dz = 2\pi i[\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 0)] = \pi i$$

$$\int_{C_4} f(z)\, dz = 2\pi i[\text{Res}(f, i) + \text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, -i)] = 0.$$

تمرین **7**
انتگرال زیر را محاسبه کنید.

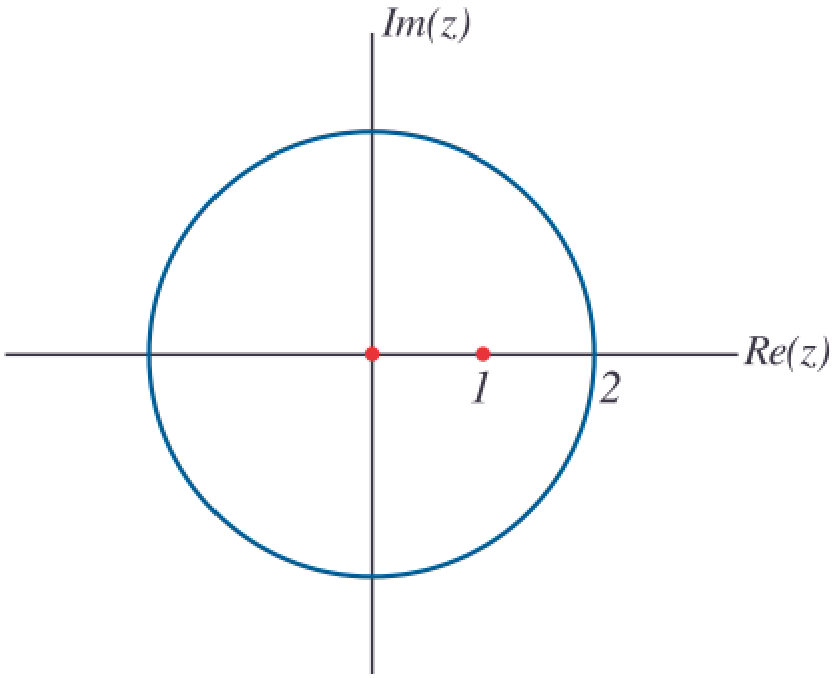
$$\int_{|z|=2} \frac{5z - 2}{z(z - 1)}\, dz.$$

پاسخ
فرض می کنیم

$$f(z) = \frac{5z - 2}{z(z - 1)}.$$

باشد. قطب ها در $z = 0\ ,1$ هستند و منحنی تراز هر دو را در بر می گیرد.

قطب ها داخل منحنی تراز



در $z = 0$

$$g(z) = zf(z) = \frac{5z - 2}{(z - 1)}$$

در صفر تحلیلی است ، قطب ساده است و

$$\text{Res}(f, 0) = g(0) = 2.$$

در $z = 1$

$$g(z) = (z - 1)f(z) = \frac{5z - 2}{z}$$

در 1 تحلیلی است ، پس قطب ساده است و

$$\text{Res}(f, 1) = g(1) = 3.$$

و در نهایت

$$\int_C \frac{5z - 2}{z(z - 1)}\, dz = 2\pi i[\text{Res}(f, 0) + \text{Res}(f, 1)] = 10\pi i.$$

تمرین 8
انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin(1/z)\, dz.$$

پاسخ
فرض می کنیم

$$f(z) = z^2 \sin(1/z).$$

باشد. f در $z = 0$ یک تکینگی تک و تنها دارد. با استفاده از سری تایلور برای $\sin(w)$ داریم.

$$z^2 \sin(1/z) = z^2 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \ \ldots \right) = z - \frac{1/6}{z} + \ \ldots$$

پس

$$\mathrm{Res}(f, 0) = b_1 = -1/6.$$

لذا بر اساس قضیه باقیمانده ، داریم.

$$\int_{|z|=1} z^2 \sin(1/z)\, dz = 2\pi i \mathrm{Res}(f, 0) = -\frac{i\pi}{3}.$$

تمرین 9
انتگرال زیر را محاسبه کنید.

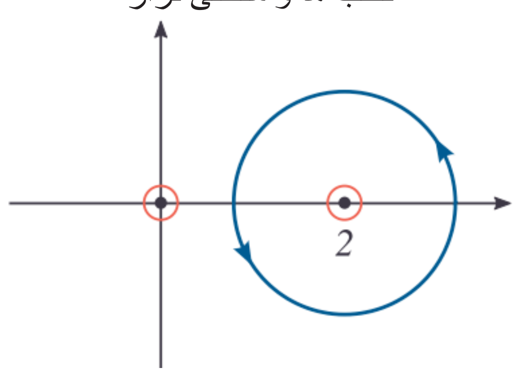
$$\int_C \frac{dz}{z(z-2)^4}\, dz,$$

در صورتی که

$$C : |z-2| = 1.$$

باشد.

قطب ها و منحنی تراز



پاسخ
فرض می کنیم

$$f(z) = \frac{1}{z(z-2)^4}.$$

تکینگی در $z = 0$ خارج از منحنی تراز انتگرال گیری است ، پس نقشی در انتگرال گیری ندارد.
برای استفاده از قضیه باقیمانده ، لازم است باقیمانده f در $z = 2$ پیدا کنیم. راه های مختلفی وجود دارند. یکی به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{1}{2+(z-2)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(z-2)/2} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \frac{z-2}{2} + \frac{(z-2)^2}{4} - \frac{(z-2)^3}{8} + \;..) \end{aligned}$$

این در

$$0 < |z-2| < 2$$

معتبر است. پس

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)^4} \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{2(z-2)^4} - \frac{1}{4(z-2)^3} + \frac{1}{8(z-2)^2} - \frac{1}{16(z-2)} + \;\ldots$$

پس

$$\text{Res}(f, 2) = -1/16$$

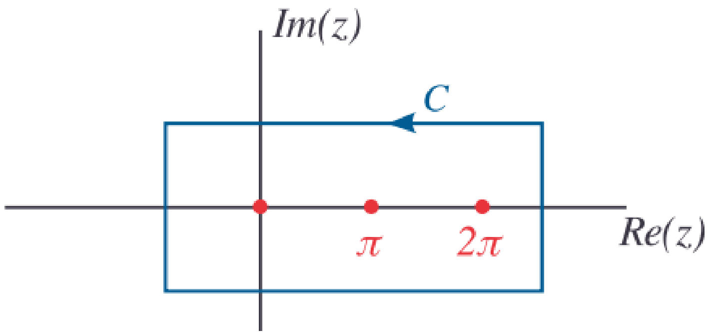
است ، و

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \text{Res}(f, 2) = -\frac{\pi i}{8}.$$

تمرین 10
انتگرال زیر را

$$\int_C \frac{1}{\sin(z)}\, dz$$

روی منحنی تراز زیر محاسبه کنید.



پاسخ

فرض می کنیم

$$f(z) = 1/\sin(z).$$

سه قطب داخل C در 0، π , 2π وجود دارد. می توانیم باقیمانده ها را از طریق گرفتن حد از

$$(z - z_0) f(z).$$

پیدا کنیم. هر یک از این حد ها با استفاده **از قاعده لاپیتال L'Hospital 's Rule** محاسبه می کنیم.

در $z = 0$

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{\sin(z)} = \lim_{z\to 0} \frac{1}{\cos(z)} = 1.$$

چون این حد وجود دارد پس $z = 0$ یک قطب ساده است. و داریم.

$$\mathrm{Res}(f, 0) = 1.$$

در $z = \pi$

$$\lim_{z\to \pi} \frac{z-\pi}{\sin(z)} = \lim_{z\to \pi} \frac{1}{\cos(z)} = -1.$$

چون این حد وجود دارد ، پس $z = \pi$ یک قطب ساده است ، و

$$\mathrm{Res}(f, \pi) = -1.$$

در $z = 2\pi$

به همان دلیل داریم.

$$\mathrm{Res}(f, 2\pi) = 1.$$

پس بر اساس قضیه باقیمانده داریم.

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i[\mathrm{Res}(f, 0) + \mathrm{Res}(f, \pi) + \mathrm{Res}(f, 2\pi)] = 2\pi i.$$

بخش 2.4
انتگرال گیری باقیمانده انتگرال های حقیقی
Residue Integration of Real Integrals
با کامل تعجب ، انتگرال گیری باقیمانده را می توان برای محاسبه انتگرال بعضی انتگرال های پیچیده بکار برد. این مزیت آنالیز مختلط بر آنالیز حقیقی است.

انتگرال های تابع های گویای کسینوس و سینوس
Integrals of Rational Functions of $\cos\theta$ and $\sin\theta$
ابتدا انتگرال های نوع زیر را بر رسی می کنیم.

$$J = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta \qquad (1)$$

اینجا $F(\cos\theta, \sin\theta)$ یک تابع گویای $\cos\theta$ و $\sin\theta$ است. مثلا

$$\frac{\sin^2\theta}{5 - 4\cos\theta}$$

و در بازه انتگرال گیری ، کران دار است، با قرار دادن $e^{i\theta} = z$ داریم.

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right). \qquad (2)$$

چون F بر حسب $\cos\theta$ و $\sin\theta$ گویا است ، معادله (2) نشان می دهد که F یک تابع گویا ی z است. یعنی $f(z)$ ٠

چون $\frac{dz}{d\theta} = ie^{i\theta}$ است، پس داریم $d\theta = \frac{dz}{iz}$ و انتگرال داده شده به صورت زیر می شود.

$$J = \oint_C f(z)\frac{dz}{iz} \qquad (3)$$

و چون در (1) دامنه θ از 0 تا 2π است ، دامنه متغیر $z = e^{i\theta}$ یک دور خلاف عقربه ساعت گرد دایره واحد $|z| = 1$ است.

مثال 1
یک انتگرال نوع (1)
با استفاده از روش بالا ، نشان دهید

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = 2\pi.$$

پاسخ
برا اساس شماره (2) داریم.

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$$

و لذا

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

پس انتگرال به صورت زیر است.

$$\oint_C \frac{dz/iz}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \oint_C \frac{dz}{-\frac{i}{2}(z^2-2\sqrt{2}z+1)}$$

$$= -\frac{2}{i}\oint_C \frac{dz}{(z-\sqrt{2}-1)(z-\sqrt{2}+1)}.$$

ملاحظه می شود که انتگراند یک قطب ساده در $z_1 = \sqrt{2}+1$ خارج از دائره واحد است که مورد توجه ما نیست. و یک قطب ساده در $z_2 = \sqrt{2}-1$ داخل C دارد با باقیمانده زیر.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} \frac{1}{(z-\sqrt{2}-1)(z-\sqrt{2}+1)} = \left[\frac{1}{z-\sqrt{2}-1}\right]_{z=\sqrt{2}-1}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

پس جواب

$$2\pi i\left(\frac{-2}{i}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi$$

در جواب بالا ، $\frac{-2}{i}$ فاکتور جلو انتگرال آخر است.

نمونه دیگر انتگرال های خاص
انتگرال به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx. \tag{4}$$

چنین انتگرالی که بازه انتگرال گیری ، محدود نیست ، **انتگرال ناسره** **Improper Integral** می نامند. و دارای مفهوم زیر است.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} f(x)\,dx. \tag{5$'$}$$

اگر هر دو حد وجود داشته باشند دو انتگرال را به صورت زیر ادغام می کنیم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx. \tag{5}$$

حد در شماره (5) را **مقدار اصلی کاشی** انتگرال می نامند و به صورت زیر نوشته می شود.

$$\text{pr. v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

در انتگرال بالا Pr حروف اول Principal است به معنی اصلی و V حرف اول Value است به معنی مقدار. پس **مقدار اصلی کاشی** می شود **Cauchy Principal Value**

حتی ممکن است حد $(5')$ هم وجود نداشته باشد ، مانند

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} x\,dx = \lim_{R\to\infty} \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{2}\right) = 0,$$

اما

$$\lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} x\,dx = \infty.$$

فرض می کنیم تابع $f(x)$ در (4) یک تابع گویای حقیقی باشد که مخرج آن برای تمام x های حقیقی غیر صفر باشد و درجه آن حد اقل دو واحد بزرگ تر از درجه صورت باشد. پس حد

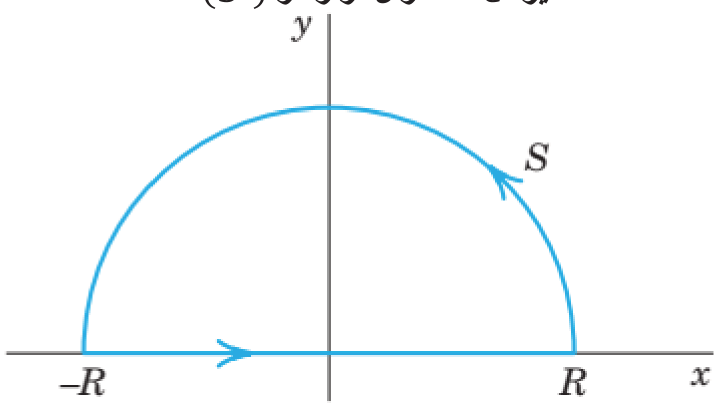
$(5')$ وجود دارد و می توانیم از (5) شروع کنیم. می توان همان انتگرال تراز را در نظر گرفت.

$$\oint_C f(z)\,dz \qquad (5^*)$$

گرد یک مسیر C تصویر شماره 1

تصویر شماره 1

مسیر C انتگرال تراز در (5^*)



چون $f(x)$ گویا است ، پس $f(z)$ تعداد محدودی قطب در نیمه بالا یی صفحه مختصات دارد ، و اگر R را به اندازه کافی بزرگ انتخاب کنیم ، پس C همه این قطب ها را احاطه می کند. بر اساس قضیه باقیمانده داریم.

$$\oint_C f(z)\,dz = \int_S f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$$

جمع شامل تمام باقیمانده های $f(z)$ درنقاط نیمه بالایی صفحه مختصات ، آنجا که $f(z)$ یک قطب دارد. پس داریم.

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) - \int_S f(z)\,dz. \qquad (6)$$

هنگامی که R به بی نهایت نزدیک می شود ، (5) و (6) نتیجه زیر را می دهند.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) \qquad (7)$$

مثال 2

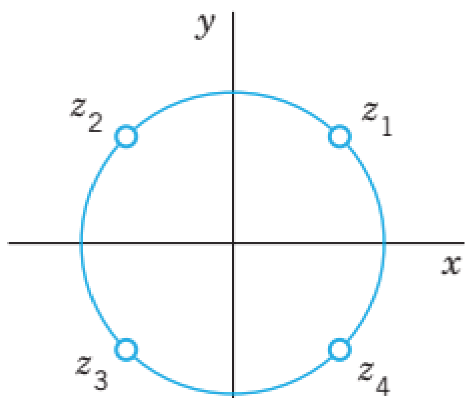
یک انتگرال ناسره از صفر تا ∞

An Improper Integral from 0 to ∞

با استفاده از (7) نشان دهید

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

تصویر شماره 2 برای مثال 2



پاسخ

در حقیقت $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ چهار قطب ساده در نقاط زیر دارد.

$$z_1 = e^{\pi i/4}, \qquad z_2 = e^{3\pi i/4}, \qquad z_3 = e^{-3\pi i/4}, \qquad z_4 = e^{-\pi i/4}.$$

دو قطب اول این قطب ها در نیمه بالا یی صفحه قرار دارند. تصویر شماره 2

براساس شماره (4) بخش 2.3 جلدد دوم ریاضیات مهندسی مینا داریم.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^4)'}\right]_{z=z_1} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_1} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4} = -\frac{1}{4}e^{\pi i/4}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^4)'}\right]_{z=z_2} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_2} = \frac{1}{4}e^{-9\pi i/4} = \frac{1}{4}e^{-\pi i/4}.$$

اینجا ، $e^{\pi i} = -1$ و $e^{-2\pi 1} = 1$ بکار بردیم. براساس شماره (7) همین بخش و فرمول های زیر

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$
$$\sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

داریم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = -\frac{2\pi i}{4}\left(e^{\pi i/4} - e^{-\pi i/4}\right) = -\frac{2\pi i}{4} \cdot 2i \sin\frac{\pi}{4} = \pi \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

چون $\frac{1}{1+x^4}$ یک تابع زوج است پس داریم.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

انتگرا ل های فوریه Fourier Integrals

روش محاسبه (4) با ایجاد یک تراز بسته ، تصویر شماره 1, داریم.

$$(8) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\, dx \quad \text{و} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\, dx$$

اینجا ، s یک عدد حقیقی است.

اگر $f(x)$ یک تابع گویا باشد و شرط شماره (4) در مورد درجه ها بر قرار باشد ، می توانیم انتگرال مربوطه زیر را در نظر بگیریم. اینجا s حقیقی و مثبت است.

$$\oint_C f(z)e^{isz}\, dz$$

مسیر همان تصویر شماره 1 است. بجای (7) حالا ، شماره (9) بدست می آوریم.

$$(9) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}\, dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}\left[f(z)e^{isz}\right] \qquad (s > 0)$$

اینجا باقیمانده های $f(z)e^{isz}$ در قطب ها آن در نیمه بالای صفحه مختصات .

با محاسبه قسمت های حقیقی و مجازی هر دو طرف (9) داریم.

$$\textbf{(10)} \qquad \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\, dx &= -2\pi \sum \operatorname{Im} \operatorname{Res}\left[f(z)e^{isz}\right], \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\, dx &= 2\pi \sum \operatorname{Re} \operatorname{Res}\left[f(z)e^{isz}\right]. \end{aligned} \qquad (s > 0)$$

مثال 3
کار برد شماره 10
نشان دید

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{k^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{k}e^{-ks}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{k^2+x^2}\,dx = 0 \qquad (s>0, k>0).$$

پاسخ
در حقیقت

$$\frac{e^{isz}}{k^2+z^2}$$

فقط یک قطب در نیم صفحه بالا دارد ، به عبارتی ، یک قطب ساده در $z = ik$, و بر اساس (4) بخش 2.3 داریم.

$$\operatorname*{Res}_{z=ik} \frac{e^{isz}}{k^2+z^2} = \left[\frac{e^{isz}}{2z}\right]_{z=ik} = \frac{e^{-ks}}{2ik}.$$

پس

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{k^2+x^2}\,dx = 2\pi i\,\frac{e^{-ks}}{2ik} = \frac{\pi}{k}e^{-ks}.$$

چون $e^{isx} = \cos sx + i\sin sx$ ، است ، این نتیجه بالا را به ما می دهد.

نوع دیگر انتگرال ناسره Another Kind of Improper Integral
انتگرال زیر را در نظر بگیرید.

$$\int_A^B f(x)\,dx \qquad (11)$$

انتگراند این انتگرال در یک نقطه a در بازه انتگرال گیری ، نا متناهی می شود،

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty.$$

بر اساس تعریف ، این انتگرال (11) یعنی

$$\int_A^B f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_A^{a-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^B f(x)\,dx \tag{12}$$

اینجا ϵ و η مستقلا ، به صفر نزدیک می شوند. البته از طریق مقادیر مثبت. ممکن است هیچ یک از این دو حد وجود داشته باشد ، اما حد زیر وجود دارد.

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_A^{a-\epsilon} f(x)\,dx + \int_{a+\epsilon}^B f(x)\,dx\right] \tag{13}$$

به حد بالا ، **مقدار اصلی کاشی Cauchy Principal Value** انتگرال می نامند. وبه صورت زیر نوشته زیر نوشته می شود.

$$\text{pr. v.}\int_A^B f(x)\,dx.$$

مثلا

$$\text{pr. v.}\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{-\epsilon}\frac{dx}{x^3} + \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{x^3}\right] = 0;$$

قضیه 1

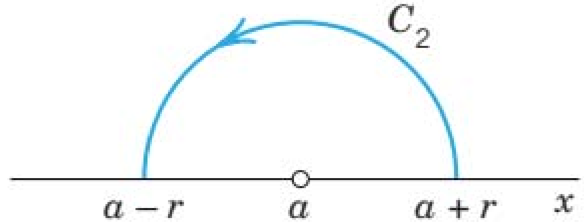
قطب های ساده روی محور حقیقی Simple Poles on the Real Axis

اگر $f(x)$ در $z = a$ روی محور حقیقی ، یک قطب ساده داشته باشد ، پس

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_2} f(z)\,dz = \pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z).$$

تصویر شماره 3

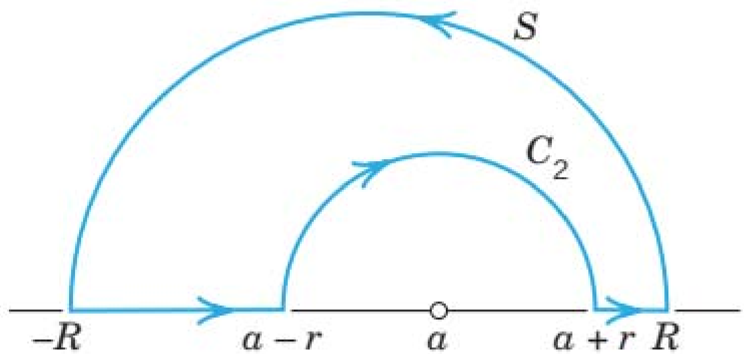
تصویر شماره 3
قضیه 1



اگر $f(z)$ چندین قطب ساده روی محور حقیقی داشته باشد ، پس فرمول لازم به صورت زیر است.

$$\text{pr. v.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) + \pi i \sum \operatorname{Res} f(z) \qquad \textbf{(14)}$$

تصویر شماره 4
کار برد قضیه 1



مثال 4
قطب ها روی محور حقیقی Poles on the Real Axis
مقدار اصلی زیر را پیدا کنید.

$$\text{pr. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 1)}.$$

پاسخ
چون داریم.

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2),$$

انتگراند $f(x)$ که برای z مختلط در نظر گرفته شده ، قطب های ساده در

$$z = 1, \qquad \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \left[\frac{1}{(z-2)(z^2+1)}\right]_{z=1}$$

$$= -\frac{1}{2},$$

$$z = 2, \qquad \operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \left[\frac{1}{(z-1)(z^2+1)} \right]_{z=2}$$

$$= \frac{1}{5},$$

$$z = i, \qquad \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \left[\frac{1}{(z^2-3z+2)(z+i)} \right]_{z=i}$$

$$= \frac{1}{6+2i} = \frac{3-i}{20},$$

و در $z = -i$ در نیمه پائینی صفحه که اینجا مورد نظر ما نیست ، بر اساس (14) جواب زیر بدست می آوریم.

$$\text{pr. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-3x+2)(x^2+1)} = 2\pi i\left(\frac{3-i}{20}\right) + \pi i\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{10}.$$

تمرینات بخش 2.4

تمرین 1

نشان دهید

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+a\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \ -1 < a < 1.$$

پاسخ

برای $a = 0$ چیزی نیست که بخواهیم ثابت کنیم. پس فرض می کنیم $a \neq 0$ است.

می خواهیم انتگراند را به یک تابع با متغیر مختلط تبدیل کنیم و سپس

$$z = e^{i\theta}, \ 0 \le \theta \le 2\pi,$$

قرار دهیم بطوری که انتگرال روی دائره واحد C باشد. چون

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

پس داریم

$$\sin\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i} \quad \text{و} \quad dz = ie^{i\theta}\,d\theta$$

یعنی

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

پس

$$I = \int_C \frac{dz}{\imath z(1 + a(z - z^{-1})/2\imath))}$$
$$= \int_C \frac{2dz}{az^2 + 2\imath z - a} = \frac{2}{a}\int_C \frac{dz}{(z - z_1)(z - z_2)},$$

اینجا z_1 و z_2 ریشه های چند جمله ای زیر است

$$z^2 + \frac{2\imath}{a}z - 1.$$

ملاحظه می شود که

$$z_1 = \frac{(-1 + \sqrt{1 - a^2})\imath}{a}, \ z_2 = \frac{(-1 - \sqrt{1 - a^2})\imath}{a.}$$

واضح است که $|z_2| > 1$ است. چون $z_1 z_2 = -1$ است ، پس $|z_1| < 1$ است .پس روی دائره واحد C , انتگراند هیچ تکینگی ندارد و تنها تکینرگی داخل دائره ، یک قطب ساده است در $z = z_1$ • باقیمانده در این نیقته به صورت زیر است.

$$R_{z_1} = 2/a(z_1 - z_2) = 1/\imath\sqrt{1 - a^2}.$$

پس بر اساس قضیه باقیمانده ، داریم.

$$I = 2\pi\imath R_{z_1} = 2\pi/\sqrt{1 - a^2}.$$

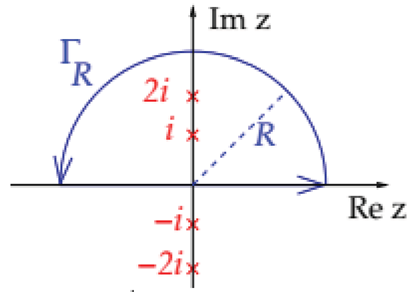
تمرین 2

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx \ \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

پاسخ

$$\oint_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)} dz$$



$$= \int_{-R}^{R} dx \, \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} + \int_{S_R} dz \, \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$$

بر اساس قضیه باقیمانده

$$\oint_{\Gamma_R} = 2\pi i[\mathrm{Res}_{z=+i}\mathrm{f} + \mathrm{Res}_{z=+2i}\mathrm{f}] = 2\pi i(-\frac{1}{6i} + \frac{1}{3i}) = \frac{\pi}{3} \; .$$

تمرین 3

مطلوب است.

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{1}{2+\cos\theta}$$

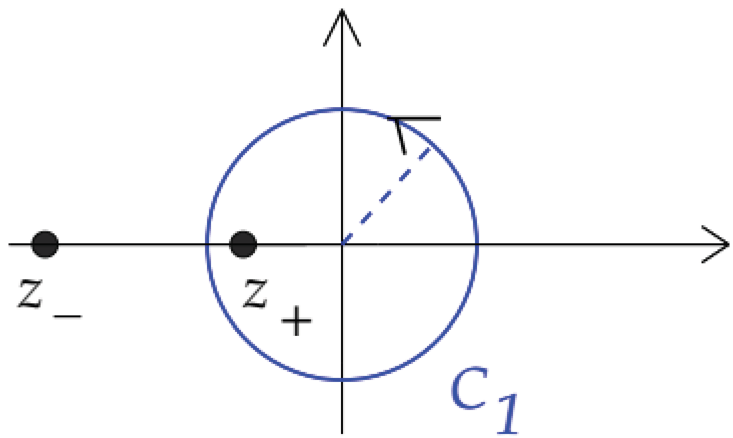
پاسخ

$$z = e^{i\theta} \quad ; \quad dz = iz d\theta \quad ; \quad \cos\theta = \frac{z+1/z}{2}$$

پس

$$I = \oint_{C_1} dz \, \frac{1}{iz} \, \frac{1}{2+(z+1/z)/2} = \oint_{C_1} dz \, \frac{2}{i} \, \frac{1}{z^2+4z+1}$$

$$z_{\pm} = -2 \pm \sqrt{3}$$



بر اساس قضیه باقیمانده

$$I = 2\pi i\ [\mathrm{Res}_{z=z_+} \mathrm{f}] = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \quad .$$

تمرین 4
مطلوب است.

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2+\sin\theta} d\theta.$$

پاسخ
یاد آوری

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

همچنین

$$dz = ie^{i\theta} d\theta$$

و

$$d\theta = dz/(iz).$$

پس با این تغییرات داریم.

$$J = \oint_{|z|=1} f(z)dz$$

در این حالت f تحلیلی است و می توانیم باقیمانده را محاسبه کنیم.

پس با این مقدمات تابع اصلی

$$J=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta}{2+\sin\theta}d\theta.$$

به صورت زیر می شود.

$$J=\oint_{|z|=1}\frac{i(z+z^{-1})}{4i+z-z^{-1}}\frac{dz}{iz}=\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)}{z(z^2+4iz-1)}dz$$

تابع

$$f(z)=\frac{(z^2+1)}{z(z^2+4iz-1)}=\frac{p(z)}{q(z)}$$

یک تابع گویا است با قطب ها ی در صفر چند جمله ای

$$q(z)=z(z^2+4iz-1)$$

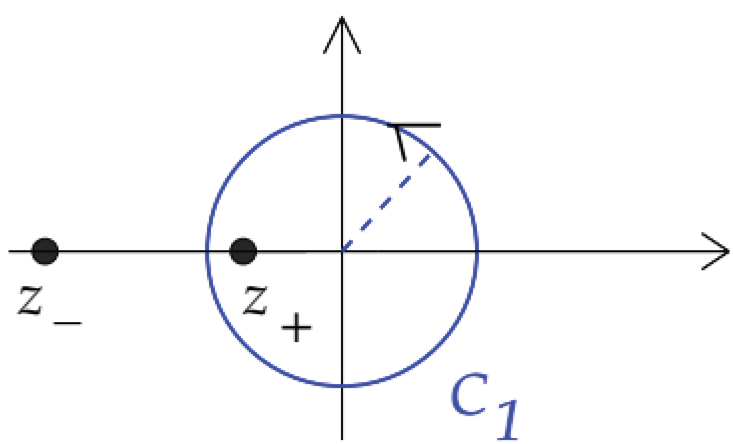
این ، سه صفر دارد.

$$z_1=0\,,z_2=i\left(-2+\sqrt{3}\right),z_3=i\left(-2-\sqrt{3}\right)$$

دو صفر های اول داخل دائره واحد هستند ، پس

$$J=2\pi i(\mathrm{Res}_{z_1}f(z)+\mathrm{Res}_{z_2}f(z))=2\pi i\left(\frac{p(z_1)}{q'(z_1)}+\frac{p(z_2)}{q'(z_2)}\right)=0$$

تصویر زیر نشان می دهد که z_3 خارج دائره واحد است.



تمرین 5

مطلوب است.

$$\int_0^{\pi}\frac{2}{3\sin 2x+5}dx$$

پاسخ

متغیر را تغییر می دهیم. $2x=\theta$، پس داریم.

$$\int_0^2 \pi \frac{1}{3\sin\theta+5}d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{2i}{3z-3z^{-1}+10i}\frac{dz}{iz}$$
$$= \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{3z^2+10iz-3}$$

تابع را با دو قطب $z_1 = \frac{-i}{3}$ و $z_2 = -3i$ انتگرال می گیریم. یکی از آنها داخل دائره واحد است. پس

$$\oint_{|z|=1} \frac{2dz}{3z^2+10iz-3}dz = 2\pi i \mathrm{Res}_{z_1} \frac{2}{3z^2+10iz-3} = \frac{4\pi i}{3(z_1-z_2)} = \frac{\pi}{2}$$

تمرین 6

مطلوب است

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+1}dx$$

پاسخ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+1}dx = 2\pi i \sum_{z_j} \mathrm{Res}_{z_j} \frac{z+1}{z^4+1}$$

صفر های z^4+1 پیدا می کنیم و آنها مطابق زیر هستند.

$$z_1 = e^{i\pi/4}, \quad z_2 = e^{3\pi/4}$$

و داریم.

$$z_1+z_2 = \sqrt{2}i,\ z_1^2+z_2^2 = 0$$

و لذا

$$\mathrm{Res}_{z_j} \frac{z+1}{z^4+1} = \frac{z_j+1}{4z_j^3} = \frac{z_j^2+z_j}{4z_j^4} = \frac{-z_j^2-z_j}{4}$$

در نهایت

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+1}dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

تمرین 7
مطلوب است.

$$\int_0^{2\pi} \frac{cos2\theta}{5+4cos\theta}d\theta.$$

پاسخ
با تغییر متغیر داریم.

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{2i\theta}}{5+2\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)}d\theta$$

$$= \text{قسمت حقیقی} \oint_C \frac{z^2}{5+2\left(z+\frac{1}{z}\right)}\left(\frac{dz}{iz}\right)$$

$$= \text{قسمت حقیقی} \frac{1}{i}\oint_C \frac{z^2}{2z^2+5z+2}dz$$

تکینگی ها ، با حل معادله زیر بدست می آید.

$$2z^2+5z+2=0$$

پس

$$z=-\frac{1}{2},-2$$

پس

$$z=-\frac{1}{2}$$

تنها قطبی است که در دائره واحد زیر قرار دارد.

$$C=|z|=1$$

باقیمانده $f(z)$ در $z=-\frac{1}{2}$ به صورت زیر است.

$$R=limit_{z\rightarrow-\frac{1}{2}}\left(z+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{z^2}{i(2z+1)(z+2)}=\frac{1}{12i}$$

لذا بر اساس قضیه باقیمانده کاشی داریم.

$$I=\oint_c f(z)\,dz=2\pi i\left(\frac{1}{12i}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

تمرین 8

با استفاده از انتگرال گیری تراز ، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x+2}{x^4+10x^2+9}dx$$

پاسخ

منحنی تراز نیم دائره با مرکز مبدا را در نیمه بالایی صفحه و قطر آن روی محور حقیقی در نظر بگیرید.

هنگامی که $|z| \to \infty$ داریم.

$$,zf(z) = \frac{z^3+z^2+2z}{z^4+10z^2+9} \to 0$$

علاوه بر این

$$z^4+10z^2+9=0$$

$$(z^2+1)(z^2+9)=0$$

$$z=+i,-i,+3i,-3i.$$

قطب هایی که در نیمه بالای صفحه قرار دارند $z=i$ ، $3i$ هستند. پس در $z=i$ داریم.

$$\text{باقیمانده} = lim_{z\to i}\frac{(z-i)(z^2+z+2)}{(z-i)(z+i)(z^2+9)} = \frac{1+i}{16i}$$

در $z=3i$ داریم.

$$\text{باقیمانده} = lim_{z\to 3i}\frac{(z-3i)(z^2+z+2)}{(z^2+1)(z-3i)(z+3i)} = \frac{7-3i}{48i}$$

و در نهایت

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+x+2}{x^4+10x^2+9}dx = 2\pi i\left[\frac{1+i}{16i}+\frac{7-3i}{48i}\right] = \frac{5\pi}{12}.$$

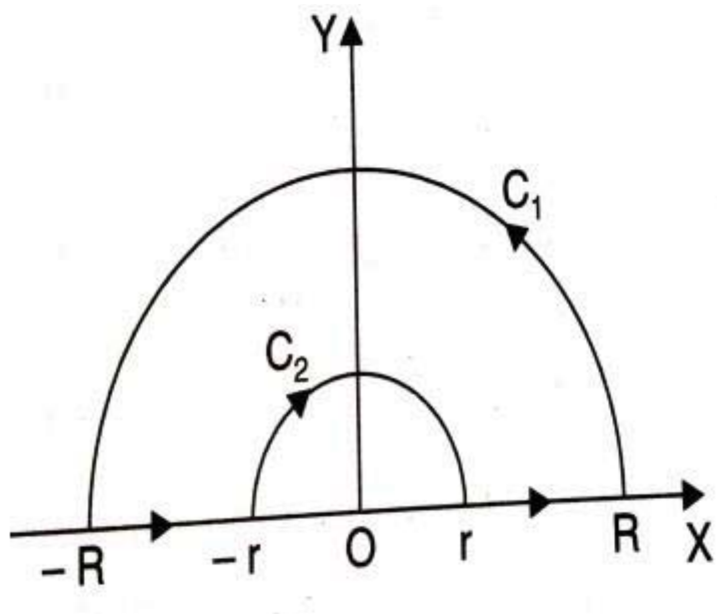
تمرین 9
انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

پاسخ
انتگرال زیر را در نظر بگیرید

$$\int_c \frac{e^{iz}}{z}\,dz = \int_c f(z)\,dz$$

چهار حالت داریم.
(1
محور حقیقی از r تا R
(2
نیمه بالای نیم دائره بزرگ $C_1, |z| = R$
(3
محور حقیقی از $-R$ تا $-r$
(4
نیمه بالایی نیم دائره کوچک $C_2, |z| = r$
تصویر زیر را ملاحظه کنید.



چون هیچ تکینگی داخل منحنی تراز C وجود ندارد ، برا اساس قضیه کاشی داریم.

$$\int_c f(z)\,dz = \int_r^R f(x)\,dx + \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{-R}^{-r} f(x)\,dx + \int_{C_2} f(z) = 0.....(1)$$

و بر اساس گزاره جردان داریم.

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = 0$$

یاد آوری

گزاره جردان Jordan's Lemma

اگر تنها تکینگی های $g(x)$ در قطب ها باشد ،و مسیر تراز C_R یک نیم دائره با شعاع R در نیم صفحه بالایی صفحه انتگرال باشد ، پس

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} g(z)\,dz = 0$$

با قرار دادن $z = re^{i\theta}$ و $dz = rie^{i\theta}\,d\theta$ داریم

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = -\pi i$$

پس هنگامی که $r \to 0$ و $R \to \infty$ داریم.

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + (-\pi i) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \pi i$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx = \pi i$$

با مساوی قرار دادن قسمت های مجازی طرفین ، داریم.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \pi$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$