بنام خدا

ریاضیات مهندسی

جلد دوم

Engineering Mathematics

تألیف

انوشیروان صراف

دبیر اسبق دبیرستانهای تهران و شیراز

(سال های ۱۳۴۲ ـ ۱۳۶۵)

مدرس سابق دانشگاه ایالتی میسوری

(سال های ۱۹۹۶ـ۲۰۰۹)

آدرس ایمیل

John_Sarraf@yahoo.com

بنام خداوند جان و خرد
فصل اول
سری های توانی ، سری تایلور
Power Series, Taylor Series
بخش اول
دنباله ها ، سری ها
Sequences, Series

مقدمه

در فصل پنجم جلد اول ریاضیات مهندسی مینا ، انتگرال های مختلط را از طریق فرمول انتگرال کاشی محاسبه کردیم. در فصل دوم این جلد از ریاضیات مهندسی ، روش دیگری برای محاسبه انتگرال های مختلط را مورد بر رسی قرار خواهیم داد. اما ، قبل از بحث در مورد این روش ، لازم است سری های توانی و مخصوصا سری تایلور را بشناسیم.
پس در این بخش توجه خود را روی این موضوع متمرکز می کنیم.

بخش 1.1
دنباله ها ، سری ها ، تست همگرایی
Sequences, Series, Convergence Tests

مفهوم اصلی دنباله ها و سری مختلط و تست همگرایی و واگرایی آنها خیلی شبیه مفاهیم اعداد حقیقی است که در حسابان دیده ایم. **پس اگر در مورد دنباله ها و سری های حقیقی مشکلی ندارید و همه را بخوبی بخاطر دارید ، می توانید این بخش را نا ددیده بگیرید و به بخش بعدی بپردازید.**

دنباله ها Sequences

یک دنباله عبارت است از یک مجموعه نا متناهی $\{z_0, z_1, z_2, z_3, \cdots\}$ اعداد مختلط. معمولا یک دنباله مختلط را به صورت z_n نشان می دهند ، اینجا n یک عدد صحیح مثبت است. هر یک از $z_0, z_1, \cdots$ را **جمله Term** می نامند.

یک **دنباله حقیقی** ، دنباله ای است که جملات آن حقیقی باشد.

همگرایی Convergence

یک دنباله همگرا A Convergent Sequence دنباله ای است که دارای یک حد c باشد ، و به صورت زیر نوشته می شود.

$$\lim_{n\to\infty} z_n = c \quad \text{یا} \quad z_n \to c$$

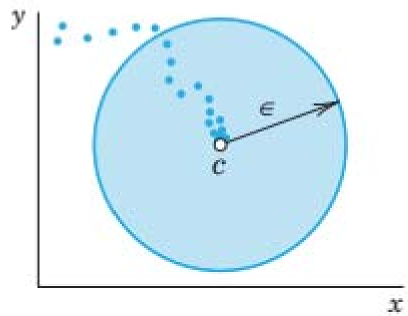
بر اساس تعریف **حد** این یعنی برای هر $\varepsilon > 0$ می توانیم یک N پیدا کنیم ، بطوری که برای تمام $n > N$ ها داشته باشیم

$$|z_n - c| < \epsilon \qquad (1)$$

از نظر هندسی ، برای $n > N$ تمام جمله های z_n داخل دیسک باز با شعاع ε و مرکز c قرار دارند و فقط تعداد محدودی از جمله ها داخل دیسک قرار ندارند. تصویر شماره 1

تصویر شماره 1

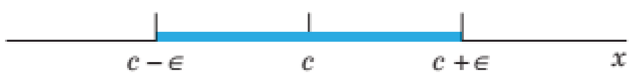
دنباله مختلط همگرا



برای یک دنباله حقیقی ، شماره (1) یک بازه باز بطول 2ε و نقطه میانی c روی محور حقیقی ، تصویر شماره 2

تصویر شماره 2

دنباله حقیقی همگرا



مثال 1

دنباله های همگرا و واگرا Convergent and Divergent Sequences

دنباله زیر به صفر همگرا است.

$$\left\{\frac{i^n}{n}\right\} = \left\{i, -\frac{1}{2}, -\frac{i}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right\}$$

دنباله زیر ، واگرا است.

$$\{i^n\} = \{i, -1, -i, 1, \cdots\}$$

همچنین $\{z_n\}$ با $z_n = (1+i)^n$ واگرا است.

مثال 2

دنباله های قسمت های حقیقی و مجازی Sequences of the Real and Imaginary Parts

دنباله $\{z_n\}$ با

$$z_n = x_n + iy_n = 1 - \frac{1}{n^2} + i\left(2 + \frac{4}{n}\right)$$
$$= 6i, \frac{3}{4} + 4i, \frac{8}{9} + \frac{10i}{3}, \frac{15}{16} + 3i, \cdots$$

همگرا است با حد $c = 1 + 2i$ ، ملاحظه می شود که $\{x_n\}$ در قسمت حقیقی دارای حد 1 است و $\{y_n\}$ در قسمت مجازی دارای حد 2 است.

قضیه زیر توضیح می دهد که همگرا یی یک دنباله مختلط ، می تواند ارجاع شود به دو دنباله های حقیقی قسمت های حقیقی و قسمت های مجازی.

قضیه 1
دنباله های قسمت های حقیقی و مجازی
Sequences of the Real and the Imaginary Parts

یک دنباله $z_1, z_2, \cdots, z_n$ اعداد مختلط $z_n = x_n + iy_n$ به $c = a + ib$ همگرا است ، اگر و فقط اگر دنباله قسمت های حقیقی $x_1, x_2, \cdots$ به a و دنباله قسمت های مجازی $y_1, y_2, \cdots$ به b همگرا باشد .

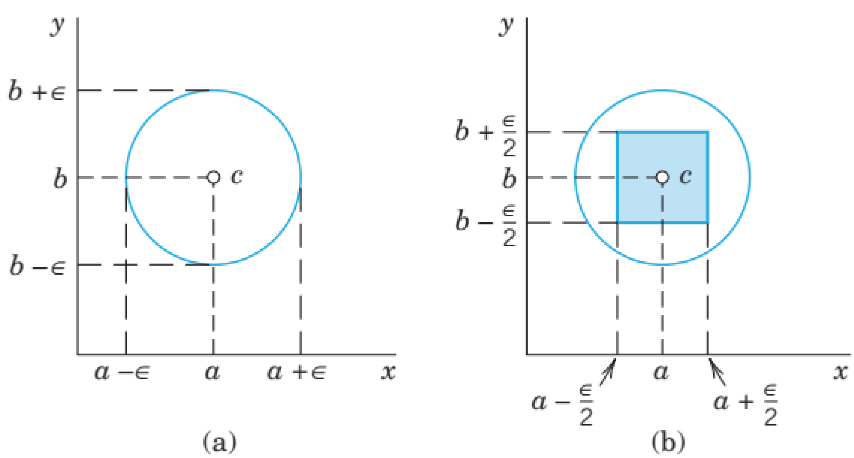
اثبات

همگرا یی $z_n \to c = a + ib$ دلالت می کند که $x_n \to a$ و $y_n \to b$ زیرا اگر $|z_n - c| < \varepsilon$ باشد ، پس z_n داخل دائره با شعاع ϵ اطراف $c = a + bi$ قرار دارد. بطوری که

$$|x_n - a| < \epsilon, \qquad |y_n - b| < \epsilon.$$

تصویر شماره $3a$

تصویر شماره 3



بر عکس ، اگر $x_n \to a$ و $y_n \to b$ هنگامی که $n \to \infty$ پس برای یک $\varepsilon > 0$ می توانیم N را بقدری بزرگ انتخاب کنیم ، بطوری که برای هر $n > N$ داشته باشیم.

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \qquad |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}.$$

این دو نا مساوی ها دلالت می کنند که $z_n = x_n + iy_n$ داخل یک مربع با مرکزیت c و **ضلع** ε قرار دارد. لذا z_n باید داخل یک دائره با شعاع ε و مرکز c قرار داشته باشد. تصویر شماره $3b$

سری Series

اگر یک دنباله $z_1, z_2, \cdots, z_m$ داشته باشیم ، می توان دنباله جمع های

$$s_1 = z_1, \qquad s_2 = z_1 + z_2, \qquad s_3 = z_1 + z_2 + z_3, \quad \cdots$$

را تشکیل دهیم. و بطور کلی برای $n = 1,2, \cdots$ داشته باشیم.

$$s_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n \tag{2}$$

اینجا S_n را **جمع پاره ای** n ام سری بی کران

$$\sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + \cdots. \tag{3}$$

نامیده می شود . اینجا $z_1, z_2, \cdots$ را جمله های سری می نامند.

یک سری همگرا A Convergent Series. یک سری است که سلسله جمع های پاره ای آن ، همگرا باشد. یعنی

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s.$$

و می نویسیم

$$s = \sum_{m=1}^{\infty} z_m = z_1 + z_2 + \cdots$$

اینجا s را **جمع** یا **مقدار** سری می نامیم. یک سری که همگرا نباشد ، سری وا گرا می نامیم.

اگر جمله های S_n را از شماره (3) حذف کنیم ، پس باقی می ماند

$$R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + z_{n+3} + \cdots . \qquad (4)$$

به فرمول بالا می گوییم **باقیمانده remainder سری** (3) بعد از جمله z_n ۰ واضح است که اگر (3) همگرا باشد ، وجمع S داشته باشد ، پس

$$s = s_n + R_n,$$

و لذا

$$R_n = s - s_n.$$

حالا ، بر اساس تعریف همگرا یی $S_n \to S$; لذا $R_n \to 0$۰ در عمل ، هنگامی که S نا شناخته است و تقریب S_n را محاسبه می کنیم ، پس $|R_n|$ مقدار خطا است ، و $R_n \to 0$ یعنی می توانیم $|R_n|$ را هر قدر بخواهیم کوچک کنیم ، و این کار را با بزرگ کردن n انجام می دهیم.

قضیه 2

قسمت های حقیقی و مجازی Real and Imaginary Parts

سری (3) با $z_m = x_m + iy_m$ همگرا است و دارای جمع $S = u + iv$ است ، اگر و فقط اگر $x_1 + x_2 + \cdots$ همگرا باشد و دارای جمع u باشد و $y_1 + y_2 + \cdots$ همگرا باشد و دارای جمع v باشد.

تست های همگرا یی و وا گرا یی سری

قضیه 3

وا گرا یی

اگر یک سری $z_1 + z_2 + \cdots$ همگرا باشد ، پس $\lim_{m\to\infty} z_m = 0$ است. لذا اگر این رابطه بر قرار نباشد ، سری وا گرا است.

توجه $z_m \to 0$ برای همگرا یی لازم است ، اما کافی نیست زیرا

همان طور که در حسابان دیده اید ، سری هار مونیک زیر

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

وا گرا است.

قضیه 4

قانون همگرا یی کاشی برای سری Cauchy's Convergence Principle for Series

یک سری $z_1 + z_2 + \cdots$ همگرا است اگر و فقط اگر برای هر $\varepsilon > 0$ بتوانیم یک N پیدا کنیم بطوری که برای هر $n > N$ و $p = 1,2.\cdots$ داشته باشیم.

$$(5) \quad |z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \epsilon$$

همگرا یی مطلق Absolute Convergence

یک سری $z_1 + z_2 + \cdots$ مطلقا همگرا است اگرسری قدر مطلق های جمله ها ی

$$\sum_{m=1}^{\infty} |z_m| = |z_1| + |z_2| + \cdots$$

همگرا باشد.

اگر $z_1 + z_2 + \cdots$ همگرا باشد ، اما $|z_1| + |z_2| + \cdots$ وا گرا باشد ، پس سری $z_1 + z_2 + \cdots$
بطور مشروط همگرا Conditionally Convergent است.

مثال 3
یک سری همگرای مشروط A Conditionally Convergent Series
سری

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + - \cdots$$

همگرا است ، اما مشروط ، زیرا سری هارمونیک وا گرا است ، همان طور که در بالا بعد از قضیه 3 گفته شد.

اگر یک سری مطلقا همگرا باشد ، آن سری همگرا است.

قضیه 5
تست مقایسه Comparison Test
اگر یک سری $z_1 + z_2 + \cdots$ داده شده باشد و بتوانیم یک سری همگرای $b_1 + b_2 + \cdots$ با جمله های حقیقی غیر صفر پیدا کنیم ، بطوری که

$$|z_1| \leqq b_1, |z_2| \leqq b_2, \cdots$$

باشد ، پس آن سری سری داده شده همگرا ، و حتی مطلقا همگرا است.

یک سری مقایسه خوب ، سری هندسی است.

قضیه 6

سری هندسی Geometric Series

سری هندسی

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m = 1 + q + q^2 + \cdots \qquad \textbf{(6*)}$$

با جمع

$$\frac{1}{1-q}$$

اگر $|q| < 1$ باشدهمگرا است و،   وا گرا است اگر $|q| \geq 1$ باشد.

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}\,. \qquad \textbf{(6)}$$

قضیه 7

تست Ratio Test nesbat

اگر یک سری $z_1 + z_2 + \cdots$ با $z_n \neq 0\ (n = 1,2,\cdots)$ این خصوصیات را داشته باشد که برای هر $n > N$ نا مساوی زیر بر قرار باشد.

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \leqq q < 1 \qquad (7)$$

پس این سری مطلقا همگرا است. اگر برای $n > N$ داشته باشیم

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geqq 1 \qquad (8)$$

سری واگرا است.

توجه نا مساوی (7) دلالت می کند که

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1$$

اما دلالت نمی کند سری همگرا است ، زیرا همان طور که قبلا گفتیم ، سری هارمونیک که نا مساوی زیر را برای تمام n ها بر قرار می کند

$$\frac{z_n+1}{z_n}=\frac{n}{n+1}<1$$

وا گرا است.

قضیه 8

تست نسبت Ratio Test

اگر یک سری $z_1+z_2+\cdots$ با $z_n\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$ داشته باشیم بطوری که

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=L,$$

پس

الف - اگر $L<1$ باشد ، پس سری مطلقا همگرا است.

ب - اگر $L>1$ باشد ، پس سری وا گرا است.

ج - اگر $L=1$ باشد ، سری ممکن است همگرا باشد یا منکن است وا گرا باشد .

مثال 4

تست نسبت

آیا سری زیر همگرا است یا وا گرا؟

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(100+75i)^n}{n!}=1+(100+75i)+\frac{1}{2!}(100+75i)^2+\cdots$$

پاسخ

بر اساس قضیه 8 این سری همگرا است ، زیرا

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\frac{|100+75i|^{n+1}/(n+1)!}{|100+75i|^n/n!}=\frac{|100+75i|}{n+1}=\frac{125}{n+1}\qquad\to\qquad L=0.$$

مثال 5

قضیه 7 کلی تر از قضیه 8

فرض کنید $a_n=\frac{i}{2^{3n}}$ و $b_n=\frac{1}{2^{3n+1}}$ باشد. آیا سری زیر همگرا است یا وا گرا؟

$$a_0+b_0+a_1+b_1+\cdots=i+\frac{1}{2}+\frac{i}{8}+\frac{1}{16}+\frac{i}{64}+\frac{1}{128}+\cdots$$

پاسخ

خارج قسمت های مقادیر مطلق جمله های متوالی به صورت زیر است

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4},\cdots$$

پس بر اساس قضیه 7 سری همگرا است. چون دامنه این خارج قسمت ها حدی ندارد ، قضیه 8 کار برد ندارد.

قضیه 9
تست ریشه Root Test

اگر یک سری $z_1 + z_2 + \cdots$ داشته باشیم بطوری که برای هر $n > N$ نا مساوی زیر بر قرار باشد

$$\sqrt[n]{|z_n|} \leqq q < 1 \tag{9}$$

پس ، این سری مطلقا همگرا است. اگر برای بی نهایت n داشته باشیم

$$\sqrt[n]{|z_n|} \geqq 1, \tag{10}$$

پس این سری ، وا گرا است.

قضیه 10
تست ریشه Root Test

اگر یک سری $z_1 + z_2 + \cdots$ داشته باشیم بطوری که

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$$

پس
الف - اگر $L < 1$ باشد ، این سری همگرا است.
ب - اگر $L > 1$ باشد ، این سری وا گرا است.
ج - اگر $L = 1$ تست کار نمی کند ، نتیجه ای نمی توان گرفت.

قضیه 11
اگر $|z| < 1$ باشد ، پس سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

به طرف

$$f(z) = \frac{1}{1-z}$$

همگرا است. یعنی اگر $|z| < 1$ باشد ، پس

$$(12) \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^k + \cdots = \frac{1}{1-z}$$

قضیه 12

اگر $|z| > 1$ باشد ، پس سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$$

به طرف $f(z) = \frac{1}{z-1}$ همگرا است. یعنی اگر

$$|z| > 1$$

باشد ، پس

$$(13) \quad \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} = z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-n} + \cdots = \frac{1}{z-1}$$

و یا

$$(14) \quad -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} = -z^{-1} - z^{-2} - \cdots - z^{-n} - \cdots = \frac{1}{z-1}$$

اگر $|z| \leq 1$ باشد ، سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n}$$

وا گرا است.

تمرین بخش 1.1

چون کم و بیش مفهوم دنباله ها و سری اعداد حقیقی و مختلط شبیه است ، ابتدا چند نمونه دنباله و سری اعداد حقیقی می آوریم.

تمرین 1

نشان دهید سری زیر وا گرا است.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

پاسخ

از طریق جمع های پاره ای

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}$$

حالا به این طرح نگاه کنید.

$$s_1=\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k}=1=\frac{2}{2}$$

$$s_2=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned}s_4&=\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{k}\\&=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\\&>\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_8&=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k}\\&=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\\&>\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{5}{2}.\end{aligned}$$

لذا ، بطور کلی

$$s_{2^{n-1}} \geq \frac{n+1}{2},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

هنگامی که n به طرف بی نهایت می رود ، جمع های پاره ای به طرف بی نهایت می رود. پس بر اساس تعریف همگرایی ,این **سری هارمونیک وا گرا است.**

تمرین 2

نشان دهید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

همگرا است.

پاسخ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

پس این سری همگرا است ، بطور کلی سری به صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

را p سری می نامند ، اگر $1 < p$ باشد ، سری همگرا است اگر $p \leq 1$ باشد ، سری واگرا است.

اثبات از طریق تست انتگرال

فرض می کنیم

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

باشد. پس

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \to \infty} \int_1^M \frac{1}{x^2} dx = \lim_{M \to \infty} \left(-\frac{1}{x} \right)_1^M = 1$$

تمرین 3

نشان دهید آیا سری زیر همگرا است یا وا گرا.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

پاسخ

این سری شبیه سری زیر است

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

چون جمله های هر کدام از این دو سری ، مثبت هستند ، سلسله جمع های پاره ای هر کدام از این دو سری بطور یکنواخت صعودی است ، و علاوه بر این ، چون

$$0 < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$$

برای تمام اعداد صحیح مثبت n جمع پاره ای k ام S_k داریم.

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2+1} < \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

چون سری سمت راست بالا ، همگرا است ، پس سری زیر همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

تمرین 4

نشان دهید آیا سری زیر همگرا است یا واگرا.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1/2}.$$

این سری شبیه سری واگرای زیر است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

سلسله جمع های پاره ای هر کدام از این دو سری بطور یکنواخت ، صعودی است. و برای هر عدد صحیح مثبت n داریم

$$\frac{1}{n-1/2} > \frac{1}{n} > 0$$

پس k ام جمع پاره ای S_k سری زیر

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-1/2}$$

نا معادله زیر را بر قرار می کند

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n - 1/2} > \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}.$$

چون سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

به طرف بی نهایت وا گرا است ، سلسله جمع های پاره ای

$$\sum_{n-1}^{k} \frac{1}{n}$$

بی کران است ، در نتیجه S_k یک دنباله بی کران است ، و لذا وا گرا است. نتیجه می گیریم سری زیر وا گرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n - 1/2}$$

تمرین 5

مطلوب است یک فرمول برای جمله n ام دنباله حسابی زیر.

1 $2, 5, 8, \ldots$

2 $107, 98, 89, \ldots.$

پاسخ

(1

چون $a = 2$ و $d = 3$ است ، پس

$$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1.$$

است.

(2

اینجا $a = 107$ و $d = -9$ است. پس

$$a_n = 107 + (n-1) \times -9 = 116 - 9n.$$

تمرین 6

آیا عدد 203 متعلق به دنباله حسابی $3,7,11,\cdots$ است؟

پاسخ

اینجا $a = 3$ و $d = 4$ است ، پس

$$a_n = 3 + (n-1) \times 4 = 4n - 1.$$

حالا

$$4n - 1 = 203:$$

قرار می دهیم و برای n حل می کنیم. پس داریم

$$n = 51.$$

لذا 203 جمله 51 ام دنباله است.

تمرین 7

مطلوب است فرمول جمله n ام دنباله هندسی زیر

1 $2, 6, 18, \ldots$

2 $486, 162, 54, \ldots.$

پاسخ

(1

اینجا $a = 2$ و $r = 3$ پس

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}.$$

(2

اینجا $a = 486$ و $r = \frac{1}{3}$ است ، پس

$$a_n = 486 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

تمرین 8

آیا عدد 48 متعلق به دنباله هندسی زیر است؟

$$3072, 1536, 768, \ldots?$$

پاسخ

اینجا $a = 3072$ و $r = \frac{1}{2}$ است. پس

$$a_n = 3072 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

حالا

$$3072 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 48.$$

قرار می دهیم. پس داریم.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{64},$$
$$2^{n-1} = 64 = 2^6,$$

و لذا $n = 7$ است. در نهایت 48 ام جمله این دنباله است.

تمرین 9

آیا عدد 6072 متعلق به دنباله هندسی زیر است؟

$$3, -6, 12, -24, 48, \ldots?$$

پاسخ

اینجا $a = 3$ و $r = -2$ است. پس

$$a_n = 3 \times (-2)^{n-1}.$$

حالا

$$3 \times (-2)^{n-1} = 6072.$$

قرار می دهیم. پس داریم.

$$(-2)^{n-1} = 2024.$$

اما 6072 یک توان دو نیست. پس 6072 به این دنباله تعلق ندارد.

تمرین 10

آیا سری زیر همگرا است یا وا گرا؟

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2 - n^3}{10 + 2n^3}$$

پاسخ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - n^3}{10 + 2n^3} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

پس این سری ، وا گرا است.

تمرین 11

آیا سری زیر همگرا است یا وا گر؟ اگر همگرا است جمع را محاسبه کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$$

پاسخ

فرمول کلی جمع های پاره ای این سری به صورت زیر است.

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3^{i-1}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

حالا ، حد دنباله جمع های پاره ای به صورت زیر است.

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2}$$

چون دنباله جمع های پاره ای ، همگرا است ، پس سری هم ، همگرا است. و مقدار سر ی به صورت زیراست.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3}{2}$$

تمرین 12
نشان دهید دنباله زیر ، همگرا است.

$$\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$$

پاسخ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!}$$
$$= \frac{(n+1)!}{n!} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$
$$= \frac{n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1.$$

تمرین 13
با استفاده از تست نسبت ، نشان دهید سری زیر ، همگرا است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5^n/n!.$$

پاسخ
این روش مخصوصا برای سری هایی که فکتوریال دارند ، مناسب است.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}}{5^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} 5\frac{1}{(n+1)} = 0.$$

چون $1 > 0$ است ، پس این سری ، همگرا است.

تمرین 14
مطلوب است

$$\lim \frac{(2n-i)i}{n}.$$

پاسخ

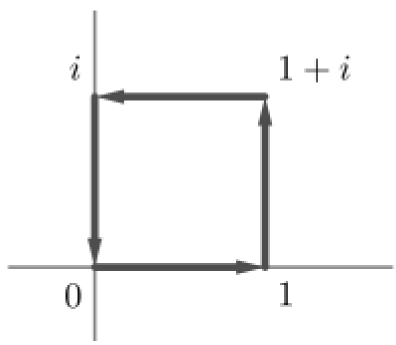
$$\lim \frac{(2n-i)i}{n} = \lim \left(\frac{1}{n} + 2i\right) = \lim \frac{1}{n} + i \lim 2 = 0 + 2i = 2i.$$

تمرین 15
آیا سری زیر همگرا است یا واگرا؟

$$\sum_{k=0}^{\infty} i^k$$

پاسخ
دنباله جمع پاره ای ، متناوب است ، و حد ندارد ، پس واگرا است.

$$1, \quad 1+i, \quad 1+i+i^2=i, \quad 1+i+i^2+i^3=0, \quad 1+i+i^2+i^3+i^4=1, \quad \ldots .$$



تمرین 15
فرض کنید w یک عدد مختلط باشد با $|w| < 1$ ۰ آیا سری زیر همگرا است یا واگرا؟

$$\sum_{k=0}^{\infty} w^k$$

پاسخ
جمع پاره ای این سری به صورت زیر است.

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} w^k = \frac{1-w^{n+1}}{1-w}.$$

چون $|w| < 1$ است پس داریم.

$$w^{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

همچنین

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-w^{n+1}}{1-w} = \frac{1}{1-w}.$$

پس این سری همگرا است. این سری یک سری هندسی است با نسبت مشترک w .

تمرین 16
آیا سری های زیر همگرا هستند یا واگرا؟

$$(1)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+i}$$

$$(2)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+i}\ ،$$

پاسخ
(1
این سری همگرا است ، زیرا

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{1}{k^2+i}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^4+1}} \left(\approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)$$

(2
این سری ، واگرا است ، زیرا

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+i}\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-i}{k^2+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1} \left(\approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right)\ ،$$

اینجا Re حروف کلمه Real است یعنی قسمت حقیقی عدد مختلط.

تمرین 17
مطلوب است حد دنباله زیر.

$$z_n = \frac{\sqrt{n} + i(n+1)}{n}$$

پاسخ
می توان نوشت.

$$z_n = x_n + iy_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + i\frac{n+1}{n}.$$

زیرا

$$\frac{\sqrt{n}}{n} = \sqrt{n} * n^{-1} = n^{\frac{1}{2}} * n^{-1} = n^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

حالا ، داریم.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$$

و

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n} + i(n+1)}{n} = i.$$

ملاحظه می کنید که تمام عملیات انجام شده در این مساله ، بر اساس قواعد اعداد حقیقی و حسابان بود.

تمرین 18

نشان دهید که دنباله زیر وا گرا است.

$$\{(1+i)^n\}$$

پاسخ

داریم.

$$z_n = (1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{4} + i\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4}$$

چون دنباله های حقیقی $\{i\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4}\}$ و $\{\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{4}\}$ هر دو وا گرا هستند

پس نتیجه می گیریم که $\{(1+i)^n\}$ وا گرا است.

تمرین 19

نشان دهید سری زیر همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + in(-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} + i\frac{(-1)^n}{n}\right]$$

پاسخ

بر اساس آنچه در حسابان دیده ایم.

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n^2}$$

و

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

همگرا هستند ، پس بر اساس تست مقایسه ، سری داده شده همگرا است.

تمرین 20

نشان دهید سری زیر وا گرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + i}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} + i\frac{1}{n}\right]$$

پاسخ

بر اساس حسابان

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

وا گرا است ، پس بر اساس تست مقایسه ، سری داده شده ، وا گرا است.

تمرین 21

نشان دهید سری زیر ، همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{5^n n^2}$$

پاسخ

قدر مطلق جملات را پیدا می کنیم. پس داریم.

$$|z_n| = \left|\frac{(3+4i)^n}{5^n n^2}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{3^2+4^2}\right)^n}{5^n\, n^2}\right| = \left|\frac{\left(\sqrt{25}\right)^n}{5^n\, n^2}\right|$$

$$= \left|\frac{5^n}{5^n\, n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$$

می دانیم که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

همگرا است. پس بر اساس تست مقایسه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{5^n n^2}$$

همگرا ، است.

بخش 1.2
سری های توانی Power Series
لازم است که به این بخش توجه دقیقی داشته باشید ، زیرا سری ها توانی نقش مهمی در آنالیز مختلط دارند. در حقیقت سری ها توانی ، مهمترین سری ها در آنالیز مختلط هستند.

یک سری توانی به صورت زیر است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \tag{1}$$

اینجا ، z یک متغیر مختلط است ، و $a_0, a_1, \cdots$ اعداد ثابت حقیقی و یا مختلط هستند که به آنها **ضریب های** سری می گویند. a_0 خواه حقیقی و یا مختلط ، **مرکز** سری نامیده می شود. این صورت کلی سری های توانی است که در حسابان دیده ایم.

اگر $z_0 = 0$ باشد ، یک حالت مخصوص سری توانی ، یعنی یک سری توانی z بدست می آوریم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots. \tag{2}$$

رفتار همگرا یی سری توانی Convergence Behavior of Power Series
سری های توانی جمله های متغیر دارند ، یعنی تابع های z ، اما اگر **z را ثابت نگاه داریم، انوقت تمام آنچه در بخش قبل در مورد جمله های ثابت گفتیم ، کار برد دارند.** معمولا ، یک سری با جمله های متغیر ، برای یک z همگرا است و برای یک z دیگر ، واگرا است. برای سری ها توانی ، مساله ، ساده است. سری (1) ممکن است در یک دیسک به مرکز z_0 همگرا باشد ، یا در تمام صفحه z یا فقط در z_0.

مثال 1
همگرا یی در یک دیسک ، سری هندسی Convergence in a disk , Geometric Series
سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$$

مطلقا همگرا است اگر $|z| < 1$ باشد ، و وا گرا است اگر $|z| \geq 1$ باشد. قضیه 6 بخش 1.1

مثال 2
همگرا یی برای هر z

Convergence for Every z

سری هندسی زیر

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

مطلقا برای هر z همگرا است. در حقیقت بر اساس تست نسبت ، برای هر z ثابت ، هنگامی که $n \to \infty$ داریم.

$$\left|\frac{z^{n+1}/(n+1)!}{z^n/n!}\right| = \frac{|z|}{n+1} \quad \to \quad 0$$

مثال 3
همگرا یی فقط در مرکز Convergence Only at the Center

سری توانی زیر فقط در $z = 0$ همگرا است اما برای هر $z \neq 0$ وا گرا است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + \cdots$$

زیرا بر اساس تست نسبت ، هنگامی که $n \to \infty$ و $z \neq 0$ داریم.

$$\left|\frac{(n+1)!z^{n+1}}{n!z^n}\right| = (n+1)|z| \quad \to \quad \infty$$

قضیه 1
همگرا یی یک سری توانی Convergence of a Power series

الف - هر سری به صورت شماره (1) در مرکز z_0 همگرا است.

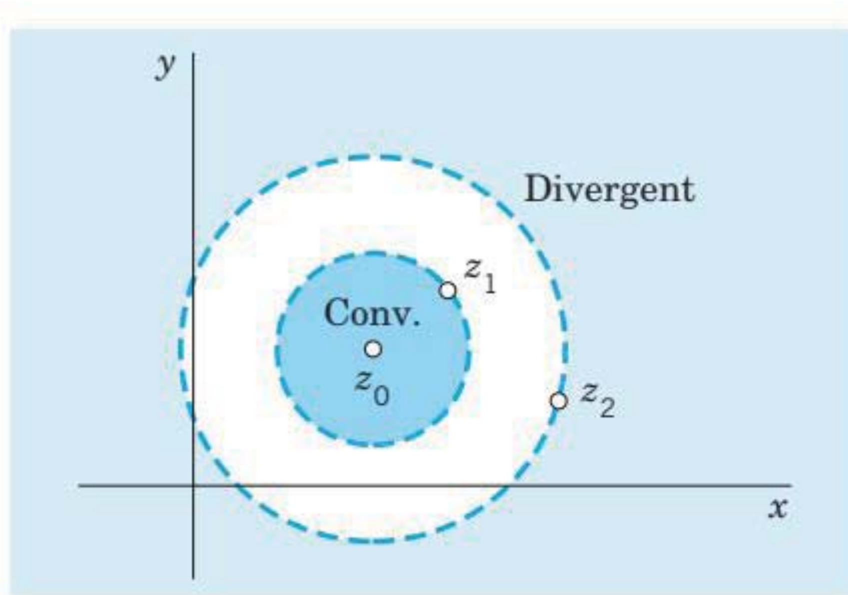
ب - اگر شماره (1) در نقطه $z = z_1 \neq z_0$ همگرا باشد ، پس مطلقا همگرا است برای هر z نزدیک تر به z_0 تا z_1 , یعنی

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|.$$

تصویر شماره 1

ج - اگر شماره (1) در $z = z_2$ وا گرا باشد ، پس آن برای هر z خارج از z_2 وا گرا است.
تصویر شماره 1

تصویر شماره 1



در تصویر بالا $Divergent$ یعنی وا گرا $Conv.$ یعنی همگرا.

اثبات

الف - برای $z = z_0$ سری تبدیل به یک جمله a_0 می شود.

ب - همگرا یی در $z = z_1$ بر اساس قضیه 3 بخش 1.1 هنگامی که $n \to \infty$ داریم

$$a_n(z_1 - z_0)^n \longrightarrow 0$$

این دلالت بر مطلقا کران دار بودن می کند یعنی برای هر

$$n = 0, 1, \cdots .$$

داریم

$$|a_n(z_1 - z_0)^n| < M$$

با ضرب و تقسیم $a_n(z - z_0)^b$ بر $(z_1 - z_0)^n$ داریم.

$$|a_n(z - z_0)^n| = \left|a_n(z_1 - z_0)^n\left(\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right)^n\right| \leqq M\left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n.$$

یا

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(z - z_0)^n| \leqq M \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{z - z_0}{z_1 - z_0}\right|^n. \qquad (3)$$

حالا ، فرض ما ، یعنی

$$|z - z_0| < |z_1 - z_0|$$

دلالت می کند که

$$|(z - z_0)/(z_1 - z_0)| < 1.$$

پس سری سمت راست (3) یک سری هندسی همگرا است ، قضیه 6 بخش 1.1 را ببینید.
همگرا یی مطلق (1) که در قسمت الف گفته شد ، برا اساس تست مقایسه بدست می آید.

ج - اگر این غلط باشد ، پس باید همگرا یی در یک a_3 داشته باشیم. این دلالت بر همگرا یی در z_2 می کند و این خلاف فرض ما که گفتیم در z_2 وا گرا داریم.

شعاع همگرایی یک سری توانی Radius of Convergence of a Power Series

کوچک ترین دایره با مرکز z_0 که شامل تمام نقاطی باشد که سری توانی (1) را در بر می گیرد ، در نظر بگیرید فرض کنید R شعاع آن باشد. این دائره

$$|z - z_0| = R$$

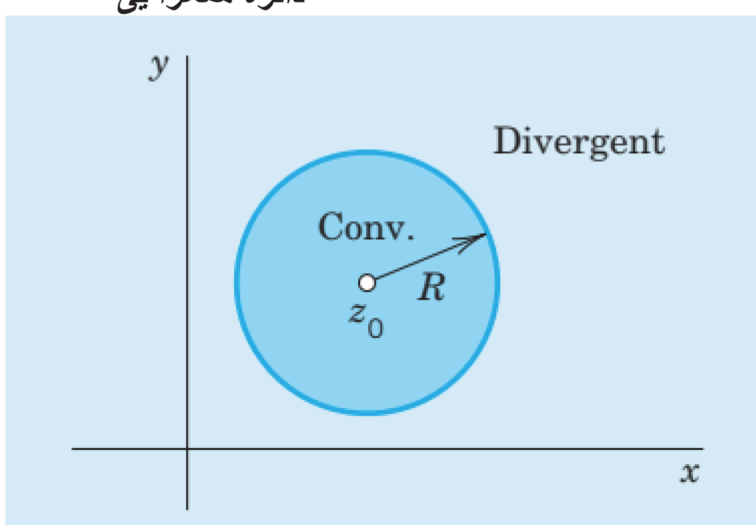
را **دائره همگرا یی Circle of Convergence** و شعاع آنرا **شعاع همگرا یی** (1) می نامند.
تصویر شماره 2

قضیه 1 دلالت بر همگرا یی همه جا داخل آن دائره می کند. یعنی برای تمام z ها ی

$$|z - z_0| < R \tag{4}$$

یعنی دیسک باز با مرکز z_0 و شعاع R

تصویر شماره 2
دائره همگرا یی



همچنین ، چون R تا حد ممکن ، کوچک است ، سری (1) برای تمام z ها که داشته باشیم

$$|z - z_0| > R. \tag{5}$$

وا گرا است.
هیچ قاعده کلی نمی توانیم برای همگرا یی سری توانی (1) **روی دائره همگرا یی بیان کنیم**. سری (1) ممکن است در بعضی نقاط ، یا تمام نقاط و ها هیچ نقطه ای همگرا باشد.

مثال 4
رفتار روی دائره همگرا یی Behavior on the Circle of Convergence
روی دایره همگرا یی $R = 1$ سری های زیر را در نظر بگیرید.
الف - سری $\sum \frac{z^n}{n^2}$ همگرا است زیر $\sum \frac{1}{n^2}$ همگرا است.
ب - سر ی $\sum \frac{z^n}{n}$ در -1 همگرا است بر اساس تست لیبنیز ، اما در 1 وا گرا است.
ج - سری $\sum z^n$ همه جا ، وا گرا است.

نماد های $R = \infty$ و $R = 0$
نماد $R = \infty$ اگر شماره (1) همگرا باشد برای تمام z ها مانند مثال 2
نماد $R = 0$ اگر (1) همگرا باشد فقط در مرکز $z = z_0$ مانند مثال 3
این ها که در بالا گفته شد ، فقط نماد هستند ، نه چیز دیگری.

سری های توان حقیقی Real Power Series
در سری های توانی ، اگر توان ها ، ضریب ها و مرکز اعداد حقیقی باشند ، فرمول (4) در **بازه حقیقی** $|x - x_0| < R$ به طول $2R$ روی محور اعداد حقیقی ، مصداق پیدا می کند.

تعین شعاع همگرا یی توسط ضریب ها
Determination of the Radius of Convergence from the Coefficients

قضیه 4
شعاع همگرا یی R
فرض می کنیم دنباله $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, n = 1,2,\cdots$ همگرا باشد با حد L^* ، اگر $L^* = 0$ باشد ، پس $R = \infty$ است ، یعنی سری (1) همگرا است برای تمام z ها. اگر $L^* \neq 0$ باشد و لذا $L^* > 0$
پس

$$R = \frac{1}{L^*} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad \textbf{(6)}$$

به فرمول (6) می گویند ، **فرمول کاشی هد مارد**

اگر $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \infty$ پس $R = 0$ است ، یعنی همگرا یی فقط در مرکز z_0

مثال 5

شعاع همگرا یی

بر اساس فرمول (6) شعاع همگرا یی سری زیر

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} (z - 3i)^n$$

به صورت زیر بدست می آید.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n!)}{(n!)^2} \Big/ \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(2n!)}{(2n+2)!} \cdot \frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2} \right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4}.$$

این سری در دیسک باز $|z - 3i| < \frac{1}{4}$ به شعاع $\frac{1}{4}$ و مرکز $3i$ همگرا است.

تمرینات بخش 1.2

اینجا ، هم تمرینات سری های توانی اعداد حقیقی و هم اعداد مختلط ملاحظه می کنید.

تمرین 1

آیا سری زیر همگرا است یا وا گرا؟

$$1 + z + z^2 + z^3 + \ldots.$$

پاسخ

حد نسبت قدر مطلق جمله های متوالی به صورت زیر است.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|z^{n+1}|}{|z^n|} = |z|$$

پس تست نسبت نشان می دهد که این سری هندسی هنگامی که $|z| < 1$ باشد ، همگرا است. این سری به

$$\frac{1}{1-z}$$

دیسک همگرا یی دقیقا در $z = 1$ ختم می شود.

تمرین 2

آیا سری زیر همگرا است یا وا گرا؟

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

پاسخ

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{|z^{n+1}|/(n+1)!}{|z^n|/n!} = \lim \frac{|z|}{n+1} = 0.$$

چون $L < 1$ است ، پس این سری ، همگرا است.

تمرین 3

برای هر یک از سری های زیر ، بازه و شعاع همگرا یی را پیدا کنید.

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$

c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}$

پاسخ

$(a$

برای چک کردن ، همگرا یی ، از تست نسبت استفاده می کنیم.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{x^n}{n!}} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot n!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|$$
$$= |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$$
$$= 0 < 1$$

پس ، این سری برای تمام اعداد حقیقی x همگرا است. بازه همگرا یی $(-\infty,\infty)$ است. شعاع همگرا یی $R=\infty$ است.

(b

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}|(n+1)x|$$
$$= |x|\lim_{n\to\infty}(n+1)$$
$$= \infty.$$

پس این سری برای تمام $x \neq 0$ ها ، وا گرا است. چون مرکز این سری $x=0$ می باشد ، پس این سری باید در $x=0$ همگرا باشد. پس بازه همگرا یی در $x=0$ است و شعاع همگرایی $R=0$ است.

(c

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{(x-2)^{n+1}}{(n+2)3^{n+1}}}{\dfrac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+2)3^{n+1}}\cdot\frac{(n+1)3^n}{(x-2)^n}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-2)(n+1)}{3(n+2)}\right|$$
$$= \frac{|x-2|}{3}.$$

کسر $\rho < 1$ است اگر $|x-2| < 3$ باشد.
چون $|x-2| < 3$ ، دلالت می کند که $-3 < x-2 < 3$ پس این سری مطلقا همگرا است اگر $-1 < x < 5$ باشد. کسر $\rho > 1$ اگر $|x-2| > 3$ باشد. لذا این سری وا گرا است اگر $x < -1$ یا $x > 5$ باشد. تست نسبت ، بدون نتیجه قطعی است اگر $\rho = 1$ باشد. کسر

$\rho = 1$ اگر و فقط اگر $x = -1$ و یا $x = 5$ باشد. در این صورت لازم است این مقادیر x را جداگانه ، امتحان کنیم. اگر $x = -1$ باشد ، پس سری به صورت زیر می شود.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$

چون این سری ، **سری هارمونیک متناوب** است ، پس همگرا است. لذا ، سری در $x = -1$ همگرا است. برای $x = 5$ سری به صورت زیر در می آید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots.$$

این **سری هارمونیک** است ، که واگرا است. لذا این سری توانی در $x = 5$ واگرا است. نتیجه می گیریم بازه همگرایی $[-1,5)$ است , و شعاع همگرایی $R = 3$ است.

تمرین 4

نمودار

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

و نمودار های مربوط به جمع های پاره ای

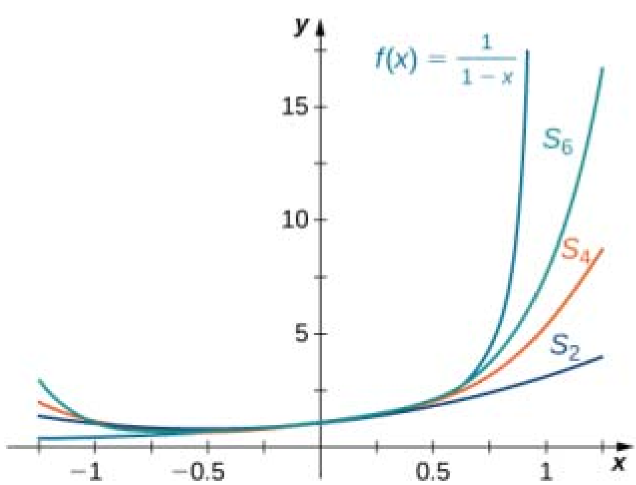
$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n$$

برای $N = 2, 4, 6$ در بازه $(-1,1)$ رسم کنید.

در مورد مقدار تقریب S_N هنگامی که N افزایش می یابد ، توضیح دهید.

پاسخ

از نمودار زیر ، ملاحظه می شود ، هنگامی که N افزایش می یابد ، S_N تقریب بهتری نشان می دهد



تمرین 5
مطلوب است شعاع و بازه همگرایی سری زیر.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{4^n} (x+3)^n$$

پاسخ
تست نسبت را بکار می بریم.

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(n+1)(x+3)^{n+1}}{4^{n+1}} \frac{4^n}{(-1)^n (n)(x+3)^n} \right|$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-(n+1)(x+3)}{4n} \right|$$

چون x در پیدا کردن حد ، نقشی ندارد ، پس آنرا فاکتور می گیریم ، برای این که x مثبت باشد ، آنرا در نماد قدر مطلق قرار می دهیم.

$$L = |x+3| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{4n}$$
$$= \frac{1}{4}|x+3|$$

پس تست نسبت می گوید اگر $L < 1$ باشد ، سری همگرا است و اگر $L > 1$ باشد ، سری وا گرا است. اگر $L = 1$ باشد ، نمی دانیم چه اتفاقی رخ می دهد.
پس داریم.
سری همگرا است اگر

$$\frac{1}{4}|x+3| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x+3| < 4$$

و سری وا گرا است اگر

$$\frac{1}{4}|x+3| > 1 \quad \Rightarrow \quad |x+3| > 4$$

شعاع همگرا یی $R = 4$ است. برای بدست آوردن بازه همگرا یی داریم.

$$-4 < x+3 < 4$$
$$-7 < x < 1$$

پس بیشترین بازه همگرایی $-7 < x < 1$ است. باید چک کنیم آیا سری توانی داده شده ، در دو انتهای بازه ، همگرا است یا نه. برای این کار ، هر کدام را در سری می گذاریم.
اگر $x = -7$ باشد ، سری به صورت زیر می شود.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4^n}(-4)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4^n}(-1)^n 4^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(-1)^n n \qquad (-1)^n(-1)^n=(-1)^{2n}=1$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}n$$

این سری بر اساس تست وا گرا یی ، وا گرا است زیرا

$$\lim_{n\to\infty} n=\infty\neq 0.$$

اگر $x = 1$ باشد ، سری به صورت زیر است

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{4^n}(4)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$$

باز هم سری وا گرا است زیرا حد زیر ، وجود ندارد.

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n n$$

لذا ، بازه همگرا یی به صورت زیر است.

$$-7<x<1$$

تمرین 6

کدام یک از دنباله های زیر کران دار هستند؟

$$a)\quad \{\imath^n\}; \qquad b)\quad \left\{\left(\frac{1}{1+\imath}\right)^n\right\};$$

$$c)\quad \left\{\left(\frac{1+\imath}{1-\imath}\right)^n\right\}; \quad d)\quad \left\{\frac{n}{2n+1}+\imath\frac{n-1}{n}\right\};$$

$$e)\quad \{n^2(\imath^n-1)\}.$$

پاسخ

$(a$

این دنباله کران داراست ، زیرا

$$|\imath^n|=|\imath|^n=1.$$

$(b$

این دنباله کران دار است ، زیرا برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم.

$$\left|(\frac{1}{1+i})^n\right| = (\frac{1}{|1+i|})^n = \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \leq \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$(c$
این دنباله کران دار است ، زیرابرای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم.

$$\left|\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n\right| = 1$$

$(d$
این دنباله کران دار است , زیرابرای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم.

$$\left|\frac{n}{2n+1} + i\frac{n-1}{n}\right| = \sqrt{(\frac{n}{2n+1})^2 + (\frac{n-1}{n})^2} \leq \frac{5}{4}$$

$(c$
این دنباله بی کران است زیرا برای

$$n \neq 4k, \quad k = 1, 2, ...,$$

داریم.

$$|n^2(i^n - 1)| = \sqrt{n^4 + n^4} = \sqrt{2}n^2.$$

تمرین 7
اگر دنباله $\{a_n\}$ کران دار باشد ، ثابت کنید دنباله های زیر هم کران دار هستند.

$$a) \quad \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right\}; \qquad b) \quad \left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right\}, \ p_i > 0; \qquad c) \quad \left\{\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\right\}.$$

پاسخ
می گوییم ، یک $M > 0$ وجود دارد بطوری که $|a_i| \leq M$ است برای هر $i \in \mathbb{N}$
$(a$
داریم.

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \frac{1}{n}\, nM = M.$$

$(b$
برای $p_i > 0$ داریم.

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}\right| \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i |a_i|}{\sum_{i=1}^{n} p_i} \leq \frac{M\sum_{i=1}^{n} p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = M \quad \text{for } p_i > 0.$$

$(c$

$$\left|\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}\right| = \sqrt[n]{\left|\prod_{i=1}^{n} a_i\right|} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} |a_i|} \leq \sqrt[n]{M^n} = M.$$

تمرین 8

ثابت کنید اگر دنباله $\{w_n\}$ به w همگرا باشد ، پس $\{|w_n|\}$ به $|w|$ همگرا است ، اما عکس آن صادق نیست.

پاسخ

ابتدا ثابت می کنیم برای

$$u, v \in \mathbb{C}.$$

داریم.

$$|u-v| \geq ||u|-|v||$$

چون

$$u = (u-v)+v$$

است ، پس داریم.

$$|u| \leq |u-v|+|v|.$$

لذا

$$|u|-|v| \leq |u-v|.$$

ابتدا از

$$v = (v-u)+u,$$

شروع می کنیم ، پس داریم.

$$|v|-|u| \leq |u-v|,$$

$$-|u-v| \leq |u|-|v| \leq |u-v|.$$

چون $\{w_n\}$ به w همگرا است ، پس داریم برای هر $0 < \varepsilon$ یک $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد ، بطوری که $|w_n - w| < \varepsilon$ است برای هر $n \geq n_0$ ، حالا ، $v = w_n$ در

$$|u-v| \geq ||u|-|v||$$

می گذاریم , پس برای هر $n \geq n_0$ داریم.

$$\varepsilon > |w_n - w| \geq ||w_n| - |w||,$$

این یعنی هنگامی که $n \to \infty$ داریم.

$$|w_n| \to |w|$$

برای یک $a \in \mathbb{R}$ داریم.

$$a_n = (-1)^n, \qquad |a_n| \to 1 \not\Rightarrow a_n \to a$$

این یعنی عکس قضیه ، صادق نیست.

تمرین 9

مطلوب است همگرا یی و وا گرایی سری زیر.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

پاسخ

این سری دارای شعاع همگرا یی زیر است

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1} = 1.$$

پس ، برای $|x| < 1$ این سری به $\frac{1}{1-x}$ همگرا است و برای $|x| > 1$ وا گرا است. در $x = 1$

سری ، به صورت زیر است

$$1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

و در $x = -1$ سری به صورت زیر است

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots,$$

لذا ، این سری در هر دو انتها ی $x = \pm 1$ وا گرا است. لذا بازه همگرا یی $(-1,1)$ است.

تمرین 10

آیا سری های زیر همگرا هستند؟

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n2^n}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}(1+i)^n$;

پاسخ

سری

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n2^n};$$

مطلقا همگرا است ، زیرا

$$\sqrt[n]{\left|\frac{i^n}{n2^n}\right|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}\,2} \to \frac{1}{2} < 1.$$

سری

$$\text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}(1+i)^n;$$

مطلقا همگرا است ، زیرا

$$\sqrt[n]{\left|\frac{n}{3^n}(1+i)^n\right|} = \frac{\sqrt[n]{n}}{3}\sqrt{2} \to \frac{\sqrt{2}}{3} < 1.$$

تمرین 11

دامنه همگرا یی سری زیر را پیدا کنید. یعنی تمام $z \in \mathbb{C}$ ها پیدا کنید که در آن سری داده شده ، همگرا است.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n;$$

پاسخ

$(a$

واضح است که این سری برای $z = 1$ وا گرا است. برای $z \in \mathbb{C}$ و $\{1\}$ داریم.

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n\right|} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} \cdot \left|\frac{z+1}{z-1}\right| \to \left|\frac{z+1}{z-1}\right|,$$

لذا سری داده شده مطلقا همگرا است برای هر $z \in C$ بطوری که داشته باشیم

$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right| < 1$$

وا گرا است ، برای هر $z \in C$ بطوری که داشته باشیم

$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right| > 1.$$

اگر

$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1$$

باشد ، پس داریم.

$$\left|\frac{1}{n^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n\right| = \frac{1}{n^2},$$

و لذا سری

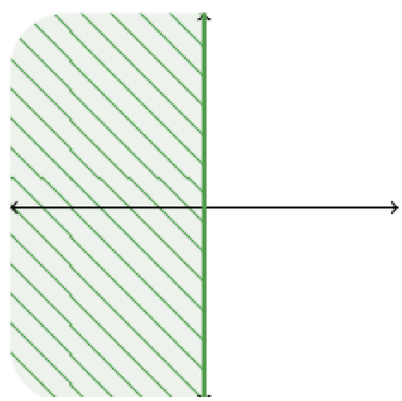
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$$

مطلقا همگرا است.

پس ، خلاصه بگوییم سری داده شده مطلقا همگرا است برای هر

$$z \in \left\{z \in \mathbb{C}:\ \left|\frac{z+1}{z-1}\right| \le 1\right\} = \{z \in \mathbb{C}:\ \operatorname{Re} z \le 0\}.$$

مکررا هم گفته ایم که Re دو حرف اول $Real$ است ، یعنی حقیقی. این نمودار



تمرین 12

مطلوب است شعاع همگرا یی سری های زیر.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{2011}};$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n (z-1)^n;$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (z-1)^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}};$

پاسخ

$(a$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^{2011}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{2011}} \to 1,$$

لذا

$$\underline{R = 1}.$$

$(b$

$$\sqrt[n]{n^n} = n \to \infty,$$

لذا

$$\underline{R = \frac{1}{\infty} = 0.}$$

$(c$

$$\sqrt[n]{\frac{3^n}{\sqrt{(3n-2)2^n}}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt[n]{3n-2}}} \to \frac{3}{\sqrt{2}}$$

برای $n \geq 3$ داریم.

$$1 \leq \sqrt[n]{3n-2} \leq \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n} \to 1)$$

پس

$$\underline{R = \frac{\sqrt{2}}{3}}.$$

تمرین 13

مطلوب است جمع سری توانی در دیسک همگرایی

a) $\sum_{n=1}^{\infty} nz^n;$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n};$

پاسخ

(a

$$\sqrt[n]{n} \to 1,$$

پس شعاع همگرایی سری داده شده 1 است. برای هر $z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$ داریم.

$$\underline{\sum_{n=1}^{\infty} nz^n} = z \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = z \left(\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{z^n}{n}\right)' =$$

$$= z\left(\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right)' = z\left(\frac{z}{1-z}\right)' =$$

$$= z\,\frac{1-z+z}{(1-z)^2} = \underline{\frac{z}{(1-z)^2}}.$$

(b

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1,$$

پس شعاع همگرا یی 1 است.
فرض می کنیم تابع زیر را داشته باشیم.

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

پس برای هر

$$z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$$

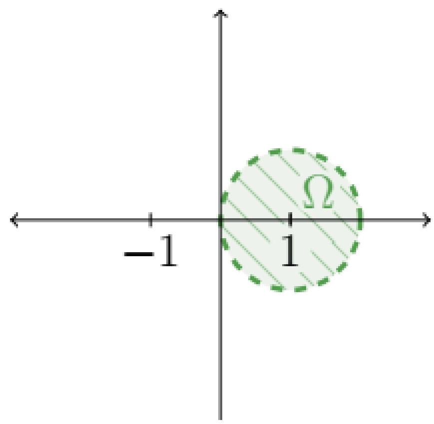
داریم.

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z}.$$

از این ، زیرا

$$|z| < 1 \ \Rightarrow\ 1 - z \in \Omega := \{w \in \mathbb{C}\colon\ |w-1| < 1\},$$

$$\ln' w = \frac{1}{w} \text{ v } \Omega,$$



یک $c \in \mathbb{C}$ وجود دارد بطوری که برای هر

$$z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$$

داریم.

$$f(z) = -\ln(1 - z) + c.$$

علاوه بر این

$$f(0) = -\ln 1 + c = 0,$$

لذا $c = 0$ است.
خلاصه برای هر

$$z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$$

داریم.

$$\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}} = f(z) = \underline{-\ln(1 - z)}.$$

تمرین 14
مطلوب است جمع سری ها زیر

$$\text{a)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}; \qquad \text{b)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}.$$

پاسخ
تابع زیر را در نظرمی گیریم.

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n2^n}.$$

چون

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n2^n}} \to \frac{1}{2},$$

پس سری توانی در تعریف تابع f دارای شعاع همگرایی 2 است. پس برای هر

$$z \in \mathbb{C},\ 0 < |z| < 2,$$

داریم.

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{z}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{1}{z}\frac{\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}} = \frac{1}{2-z}.$$

لذا یک $c \in \mathbb{C}$ وجود دارد بطوری که

$$f(z) = -\ln(2-z)+c.$$

و چون

$$f(0) = 0 = -\ln 2+c,$$

پس برای هر

$$z \in \mathbb{C},\ |z| < 2$$

داریم.

$$f(z) = -\ln(2-z)+\ln 2.$$

پس در نهایت برای سری
$(a$
داریم.

$$\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}} = f(1) = \underline{\ln 2},$$

و برای سری
$(b$
داریم.

$$\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n}} = f(-1) = \underline{-\ln 3 + \ln 2 = \ln \frac{2}{3}}.$$

بخش 1.3
سری های توانی و تابع ها Power Series and Functions

هدف ما در این بخش این است که نشان دهیم ، سری های توانی ،نمایش تابع های تحلیلی هستند.
برای سادگی فرمول در این بخش ، $z_0 = 0$ فرض می کنیم و می نویسیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{1}$$

نماد واصطلاح Terminology and Notation
اگر هر سری توانی به صورت شماره (1) دارای شعاع همگرایی غیر صفر R باشد، جمع آن یک تابع z است ، یعنی $f(z)$. پس می نویسیم.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \tag{2}$$

اینجا $|z| < R$ است.
می گوییم $f(z)$ نمایش سری توانی است. مثلا سری هندسی نمایش تابع

$$f(z) = \frac{1}{1 - z}$$

است داخل زاویه واحد $|z| = 1$

منحصر به فرد بودن یک نمایش سری توانی
Uniqueness of a Power Series Representation
این هدف دوم ما است. این یعنی یک تابع $f(z)$ نمی تواند نمایش دو سری توانی متفاوت با یک مرکز باشد.

قضیه 1
پیوستگی جمع یک سری توانی Continuity of the Sun of a Power Series
اگر یک تابع $f(z)$ بتواند نمایش یک سری توانی شماره (2) باشد ، با شعاع همگرا یی $R > 0$ پس $f(z)$ در $z = 0$ پیوسته است.

قضیه 2
منحصر به فرد بودن یک نمایش سری توانی
Uniqueness of a Power Series Representation
فرض می کنیم سری های

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \quad \text{و} \quad b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

هر دو ، همگرا باشند برای $|z| < R$, $R > 0$ و فرض می کنیم هر دو دارای یک جمع برای این z ها باشند. پس این سری ها ، یکی هستند ، یعنی

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots.$$

لذا اگر یک تابع $f(z)$ بتواند ، نمایش یک سری توانی با مرکز z_0 باشد ، این نمیش ، منحصر به فرد است.

عملیات روی سری های توانی Operations on Power Series

جمع یا تفریق جمله به جمله دو سری توانی با شعاع های همگرایی R_1 و R_2 ایجاد یک سری توانی با شعاع حد اقل مساوی کوچک ترین R_1 و R_2 می کند.

اثبات جمع های پاره ای S_n و S_n^* را جمله به جمله جمع یا تفریق کنید و حد زیر را بکار برید.

$$\lim (s_n \pm s_n^*) = \lim s_n \pm \lim s_n^*.$$

ضرب جمله به جمله دو سری توانی **Term Wise Multiplication**

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \cdots$$

و

$$g(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m = b_0 + b_1 z + \cdots$$

یعنی ضرب هر جمله سری اول در ضرب هر جمله سری دوم و تلفیق توانهای مشابه z ، این یک سری توانی به ما می دهد موسوم به **حاصلضرب کاشی** دو سری که به صورت زیر است.

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) z^n.$$

مشتق گیری و انتگرال گیری جمله به جمله

Term Wise Differentiation and Integration

سری ها توانی هم ممکن است.

سری زیر را

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots . \qquad (3)$$

سری **مشتق شده** **Derived Series** سری توانی (1) که جمله به جمله مشتق شده است ، می نامیم.

قضیه 3
مشتق گیری جمله به جمله یک سری توانی
Term Wise Differentiation of a Power Series
سری مشتق شده یک سری توانی ، دارای همان شعاع های همگرایی است که سری ها اصلی .

مثال 1
کار برد قضیه 3
مطلوب است شعاع همگرایی سری زیر ، با استفاده از قضیه 3

$$\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} z^n = z^2 + 3z^3 + 6z^4 + 10z^5 + \cdots .$$

این سری هندسی را دو مرتبه ، جمله به جمله مشتق بگیرید و نتیجه را در $\frac{z^2}{2}$ ضرب کنید. این سری های داده شده را به ما می دهد، لذا $R = 1$ است.

قضیه 4
انتگرال گیری جمله به جمله سری های توانی
Term Wise Integration of Power Series
سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} = a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \frac{a_2}{3} z^3 + \cdots$$

که از طریق انتگرال گیری جمله به جمله سری

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

بدست آمده ، دارای همان شعاع همگرایی است که سری های اصلی دارند.

سری ها توانی نمایش تابع های تحلیلی **Power Series Represent Analytic Functions**
قضیه 5
تابع های تحلیلی .مشتق های آنها **Analytic Functions. Their Derivatives**

یک سری توانی با شعاع همگرایی غیر صفر، نمایش یک تابع تحلیلی است در هر نقطه داخلی دائره همگرایی آن. مشتق های این تابع از طریق مشتق گیری جمله به جمله سری های اصلی بدست می آید.
پس تمام این سری ها دارای همان شعاع همگرایی هستند که سری ها اصلی. **پس بر این اساس ،هر یک از این ها، نمایش یک تابع تحلیلی است.**

مثال 2
مطلوب است تابعی که نمایش سری بی کران زیر باشد. دامنه آنرا پیدا کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\left[\frac{1}{3}(x-1)\right]^n$$

پاسخ
این ، یک سری هندسی است با $a = 2$ و $r = \frac{1}{3}(x-1)$
این سری همگرا است اگر

$$|r| = \left|\frac{1}{3}(x-1)\right| < 1$$

باشد ، یعنی بازه همگرایی $(-2,4)$ است. در $(-2,4)$ سری ، دارای جمع زیر است.

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2\left[\frac{1}{3}(x-1)\right]^n = \frac{2}{1-\frac{1}{3}(x-1)} = \frac{6}{4-x}\,.$$

پس در دامنه $(-2,4)$ داریم.

$$f(x) = \frac{6}{4-x}$$

خارج از این دامنه ، این تابع ، نمایش سری داده شده ، نمی تواند باشد.

بخش 1.4

سری های تایلور و مک لورن Taylor and Maclaurin Series

اگر بخاطر داشته باشید در حسابان دیدیم که سری تایلور به صورت زیر است.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

و سری مک لورن به صورت زیر است.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

در سیستم اعداد مختلط ، **سری تایلور** به صورت زیر است.

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad (1)$$

در این فرمول

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

و یا ، بر اساس شماره (1) بخش 5.4 جلد اول ریاضیات مهندسی مینا به همین قلم ، داریم.

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}} dz^*. \quad (2)$$

در شماره (2) بالا ، انتگرال گیری خلاف جهت عقربه ساعت گرد یک مسیر بسته ساده C که شامل z_0 در داخل آن مسیر است انجام شده وبطوری که $f(z)$ در یک دامنه که شامل C و هر نقطه داخل C ، تحلیلی است.

یک **سری مک لورن** ، سری تایلور است با مرکز $z_0 = 0$.

مانده The Remainder سری تایلور (1) بعد از جمله $a_n(z-z_0)^n$ به صورت زیر است.

$$(3)\qquad R_n(z) = \frac{(z - z_0)^{n+1}}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{(z^* - z_0)^{n+1}(z^* - z)} dz^*$$

جمع پاره ای مربوطه (1) به صورت زیر است.

$$(4)\qquad f(z) = f(z_0) + \frac{z - z_0}{1!} f'(z_0) + \frac{(z - z_0)^2}{2!} f''(z_0) + \cdots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) + R_n(z).$$

به فرمول (4) می گویند **فرمول تایلور با مانده.**

ملاحظه می کنید که **سری های تایلور ، سری های توانی هستند.** بر اساس آنچه در بخش قبل گفتیم، سری های توانی ، نمایش تابع های تحلیلی هستند. لذا بر اساس قضیه زیر ، **هر تابع تحلیلی می تواند توسط سری های توانی نشان داده شوند، به عبارتی توسط سری تایلور.** به همین جهت ، سری تایلور در آنالیز مختلط ، خیلی مهم است.

قضیه 1
قضیه تایلور

فرض می‌کنیم $f(z)$ یک تابع تحلیلی در یک دامنه D باشد، و فرض می کنیم $z = z_0$ یک نقطه در D باشد. پس دقیقا یک سری تایلور (1) با مرکز z_0 وجود دارد که نمایشگر $f(z)$ است. این نمایشگر در بزرگ ترین دیسک باز با مرکز z_0 که در آن $f(z)$ تحلیلی است ، معتبر است. مانده های $R_n(z)$ شماره(1) می توانند به شکل (3) نشان داده شوند. ضریب ها، نامعادله زیر را بر قرار می کنند.

$$(5)\qquad |a_n| \leqq \frac{M}{r^n}$$

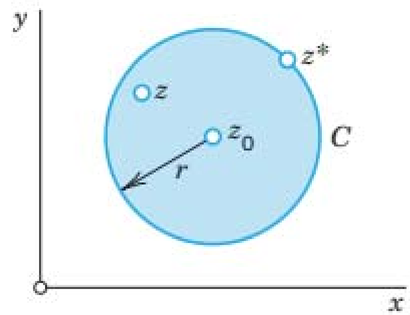
اینجا M ماکسیمم $|f(z)|$ روی دائره $|z - z_0| = r$ در D است که نقاط داخلی آن هم در D است.

انتگرال کاشی را بخاطر داشته باشد. در فرمول زیر ، z و z^* را بجای z_0 و z بکار می بریم.

$$(6)\qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z^*)}{z^* - z} dz^*.$$

تصویر شماره 1

تصویر شماره 1
فرمول کاشی



تکینگی ، شعاع همگرایی Singularity , Radius of Convergence

روی دائره همگرایی (1) حد اقل یک **نقطه تکین One Singular Point** $f(z)$ وجود دارد ، یعنی یک نقطه $z = c$ که در آن $f(z)$ تحلیلی نیست. می گوییم $f(z)$ در c **ویژه است** یا در c
یک ویژه گی دارد. لذا شعاع همگرایی R شماره (1) مساوی است با فاصله z_0 تا نقطه ویژه $f(z)$.

قضیه 2
یک سری توانی با یک شعاع همگرایی غیر صفر ، سری تایلور جمع آن سری است.

مثال 1
سری هندسی
فرض کنید $f(z) = \frac{1}{1-z}$ باشد. پس داریم.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \; , f^{(n)}(0) = n!$$

پس ، بسط مک لورن $\frac{1}{1-z}$ سری هندسی زیر است.

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad (|z| < 1). \tag{11}$$

تابع $f(z)$ در $z = 1$ ویژه است. این نقطه روی دائره همگرایی قرار دارد.

مثال 2

تابع نمایی Exponential Function

می دانیم که تابع نمایی e^z برای تمام z ها ، تحلیلی است. به جلد اول ریاضیات مهندسی به همین قلم مراجعه کنید.

و می دانید که $(e^z)' = e^z$ است. پس بر اساس (1) با $z_0 = 0$ سری مک لورن بدست می آوریم.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots. \qquad (12)$$

علاوه بر این ، با قرار دادن $z = iy$ در (12) و جدا کردن سری به قسمت های حقیقی و مجازی ، داریم. قضیه 2 بخش 1.1

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

چون سری سمت راست همان سری آشنای مک لورن تابع های حقیقی $\cos y$ و $\sin y$ است ، این نشان می دهد که **فرمول اویلر** را دوباره کشف کرده ایم.

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \qquad (13)$$

مثال 3

تابع های مثلثاتی و هیپر بالیک Trigonometric and Hyperbolic Functions

$$\begin{aligned} \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - + \cdots \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - + \cdots. \end{aligned} \qquad (14)$$

همچنین

$$\begin{aligned} \cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \\ \sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots. \end{aligned} \qquad (15)$$

مثال 4
لگاریتم Logarithm

$$\text{Ln}\,(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - + \cdots \qquad (|z| < 1). \tag{16}$$

$$-\text{Ln}\,(1-z) = \text{Ln}\,\frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots \qquad (|z| < 1). \tag{17}$$

$$\text{Ln}\,\frac{1+z}{1-z} = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right) \qquad (|z| < 1). \tag{18}$$

مثال 5
جانشین کردن Substitution

مطلوب است سری مک لورن برای $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$

پاسخ

در (11) بجای z می گذاریم $-z^2$ پس داریم.

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots \qquad (|z| < 1). \tag{19}$$

مثال 6

مطلوب است سری مک لورن برای $f(z) = \arctan z$

پاسخ

داریم

$$f'(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

با انتگرال گرفتن از (19) جمله به جمله و بکار بردن $f(0) = 0$ داریم.

$$\arctan z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \cdots \qquad (|z| < 1);$$

این سری ، نمایش مقدار اصلی $w = u + iv = \arctan z$ تعریف شده به صورت $|u| = \frac{\pi}{2}$

مثال 7

بسط با استفاده از سری های هندسی

رابطه $\frac{1}{c-z}$ را به صورت توان های $z-z_0$ بسط دهید. اینجا $c-z_0 \neq 0$ است.

پاسخ

$$\frac{1}{c-z} = \frac{1}{c-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{(c-z_0)\left(1-\frac{z-z_0}{c-z_0}\right)} = \frac{1}{c-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{c-z_0}\right)^n$$

$$= \frac{1}{c-z_0}\left(1+\frac{z-z_0}{c-z_0}+\left(\frac{z-z_0}{c-z_0}\right)^2+\cdots\right).$$

این سری برای

$$\left|\frac{z-z_0}{c-z_0}\right| < 1,$$

یعنی

$$|z-z_0| < |c-z_0|.$$

همگرا است.

مثال 8

سری های چند جمله ای ، کاهش دادن توسط کسر ها ی پاره ای

Binomial Series, Reduction by Partial Fractions

مطلوب است سری تایلور برای تابع زیر با مرکز $z_0 = 1$

$$f(z) = \frac{2z^2+9z+5}{z^3+z^2-8z-12}$$

ابتدا $f(z)$ به کسر های پاره ای بسط می دهیم و اولین کسر به سری ها چند جمله ای

$$\frac{1}{(1+z)^m} = (1+z)^{-m} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-m}{n}z^n$$

$$= 1 - mz + \frac{m(m+1)}{2!}z^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{3!}z^3 + \cdots \qquad (20)$$

با $m = 2$ و دومین کسر به صورت یک سری هندسی ، و سپس دو سری را جمله به جمله جمع می کنیم. پس داریم.

$$f(z)=\frac{1}{(z+2)^2}+\frac{2}{z-3}=\frac{1}{[3+(z-1)]^2}-\frac{2}{2-(z-1)}=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{[1+\frac{1}{3}(z-1)]^2}\right)-\frac{1}{1-\frac{1}{2}(z-1)}$$
$$=\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}\left(\frac{z-1}{3}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}}-\frac{1}{2^n}\right](z-1)^n$$
$$=-\frac{8}{9}-\frac{31}{54}(z-1)-\frac{23}{108}(z-1)^2-\frac{275}{1944}(z-1)^3-\cdots.$$

تمرینات بخش 1.4

برای یاد آوری چند تمرین در سیستم حقیقی می آوریم.

تمرین 1

مطلوب است سری تایلور برای $f(x)=e^x$ اطراف $x=0$ ۰

پاسخ

برای بدست آوردن یک فرمول برای $f^{(n)}(0)$ کافی است بخاطر آوریم که

$$f^{(n)}(x)=\mathbf{e}^x \qquad n=0,1,2,3,\ldots$$

همچنین

$$f^{(n)}(0)=\mathbf{e}^0=1 \qquad n=0,1,2,3,\ldots$$

پس ، سری تایلور برای $f(x)=e^x$ اطراف $x=0$ به صورت زیر است.

$$\mathbf{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

تمرین 2

مطلوب است سری تایلور برای $f(x)=e^{-x}$ اطراف $x=0$ ۰

پاسخ

دو راه وجود دارد.

راه اول

لازم است یک فرمول برای $f^{(n)}(0)$ پیدا کنیم. اما بر خلاف تمرین قبل ، باید کار بیشتری انجام دهیم.

اجازه دهید چند مشتق های اولیه اطراف $x=0$ بدست آوریم.

$$\begin{array}{ll} f^{(0)}(x)=\mathbf{e}^{-x} & f^{(0)}(0)=1 \\ f^{(1)}(x)=-\mathbf{e}^{-x} & f^{(1)}(0)=-1 \\ f^{(2)}(x)=\mathbf{e}^{-x} & f^{(2)}(0)=1 \\ f^{(3)}(x)=-\mathbf{e}^{-x} & f^{(3)}(0)=-1 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \mathbf{e}^{-x} \qquad f^{(n)}(0) = (-1)^n \quad n = 0, 1, 2, 3$$

اغلب نمی توانیم یک فرمول کلی برای $f^{(n)}(x)$ پیدا کنیم. پس نا راحت نشوید.
در این حالت برای بدست آوردن یک فرمول کلی ، فقط لازم است این ها را در فرمول سری تایلور قرار دهیم.

$$\mathbf{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

راه دوم.
تنها کاری که باید انجام دهیم ، این است که در سری تایلور بجای x بگذاریم $-x$

$$\mathbf{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

تمرین 3
مطلوب است سری تایلور برای $f(x) = x^4 e^{-3x^2}$ اطراف $x = 0$ ۰
پاسخ
در این تمرین ، از این مزیت استفاده می کنیم که سری تایلور e^x اطراف $x = 0$ را داریم. اگر بخواهیم مانند تمرین قبل عمل کنیم ، کار به درازا می کشد، پس از همان مزیت استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} x^4 \mathbf{e}^{-3x^2} &= x^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-3x^2\right)^n}{n!} \\ &= x^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^{2n}}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n x^{2n+4}}{n!} \end{aligned}$$

تا اینجا ، فقط به سری تایلور اطراف $x = 0$ نگاه کرده ایم. پس اجئزه دهید به سری تایلور که اطراف $x = 0$ نیست ، نگاه کنیم

تمرین 4
مطلوب است سری تایلور برای $f(x) = e^{-x}$ اطراف $x = -4$
پاسخ
پیدا کردن یک فرمول کلی برای $f(x) = -4$ تقریبا آسان است.

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \mathbf{e}^{-x} \qquad f^{(n)}(-4) = (-1)^n \mathbf{e}^4$$

پس سری تایلور به صورت زیر است.

$$\mathbf{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \mathbf{e}^4}{n!} (x+4)^n$$

تمرین 5

مطلوب است سری تایلور برای $f(x) = \cos(x)$ اطراف $x = 0$ ۰

پاسخ

ابتدا ، باید چند مشتق بگیریم ومقدار آنها را در $x = 0$ پیدا کنیم.

$$\begin{array}{ll}
f^{(0)}(x) = \cos x & f^{(0)}(0) = 1 \\
f^{(1)}(x) = -\sin x & f^{(1)}(0) = 0 \\
f^{(2)}(x) = -\cos x & f^{(2)}(0) = -1 \\
f^{(3)}(x) = \sin x & f^{(3)}(0) = 0 \\
f^{(4)}(x) = \cos x & f^{(4)}(0) = 1 \\
f^{(5)}(x) = -\sin x & f^{(5)}(0) = 0 \\
f^{(6)}(x) = -\cos x & f^{(6)}(0) = -1 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

در این تمرین ، بر خلاف قبلی ها ، یک فرمول آسان برای مشتق کلی یا محاسبه مشتق وجود ندارد. اما یک طرح روشن برای محاسبه ها وجود دارد. پس اجازه دهید مقادیر راجانشین کنیم و ببینیم ، چه بدست می آوریم.

$$\begin{aligned}
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
&= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \cdots \\
&= \underbrace{1}_{n=0} + \underbrace{0}_{n=1} - \underbrace{\frac{1}{2!}x^2}_{n=2} + \underbrace{0}_{n=3} + \underbrace{\frac{1}{4!}x^4}_{n=4} + \underbrace{0}_{n=5} - \underbrace{\frac{1}{6!}x^6}_{n=6} + \cdots
\end{aligned}$$

پس جمله های با توان های زوج x را انتخاب می کنیم. این کار کمکی ، برای بدست آوردن یک فرمول کلی , به ما نمی کند. اما ، اجئزه دهید ، صفر ها را حذف کنیم و ببینیم چه بدست می آوریم.

$$\cos x = \underbrace{1}_{n=0} - \underbrace{\frac{1}{2!}x^2}_{n=1} + \underbrace{\frac{1}{4!}x^4}_{n=2} - \underbrace{\frac{1}{6!}x^6}_{n=3} + \cdots$$

با این کار می توانیم یک فرمول کلی برای سری تایلور بدست آوریم ، پس داریم.

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

تمرین 6

مطلوب است سری تایلور برای $f(x)=\sin(x)$ اطراف $x=0$ ۰

پاسخ

همان روش تمرین قبل را بکار می بریم.

$$
\begin{array}{ll}
f^{(0)}(x)=\sin x & f^{(0)}(0)=0 \\
f^{(1)}(x)=\cos x & f^{(1)}(0)=1 \\
f^{(2)}(x)=-\sin x & f^{(2)}(0)=0 \\
f^{(3)}(x)=-\cos x & f^{(3)}(0)=-1 \\
f^{(4)}(x)=\sin x & f^{(4)}(0)=0 \\
f^{(5)}(x)=\cos x & f^{(5)}(0)=1 \\
f^{(6)}(x)=-\sin x & f^{(6)}(0)=0 \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

پس همان طرح را بدست آوریم. حالا جانشین می کنیم.

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
&= \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots
\end{aligned}
$$

اینجا ، جمله های x با توان فرد ، بدست آوردیم. مانند تمرین قبل جمله صفر را نا دیدیده می گیریم.

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

تمرین 7

مطلوب است سری تایلور برای $f(z)=e^z$ اطراف $z=0$ ۰

پاسخ

چون $f'(z)=e^z$ است ، پس برای $f^{(n)}(0)=e^0=1$ داریم. لذا

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

تمرین 8

تابع $f(z)=z^8\,e^{3z}$ در سری تایلور اطراف $z=0$ بسط دهید.

پاسخ

فرض می کنیم $w=3z$ باشد ، پس

$$e^{3z} = e^{w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^n$$

لذا

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{n+8}.$$

تمرین 9

مطلوب است سری تایلور $\sin(z)$ اطراف $z = 0$ ۰ معمولا سری تایلور اطراف صفر را سری مک لورن می نامند.

پاسخ

دو روش برای این کار داریم.

روش اول

$$f^{(n)}(0) = \frac{d^n \sin(z)}{d\, z^n} = \begin{cases} (-1)^m & \text{برای } n = 2m+1 = \text{فرد} \quad , \qquad m = 0,1,2,\cdots \\ 0 & \text{برای } n \quad \text{زوج} \end{cases}$$

روش دوم با استفاده

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

پس داریم.

$$\begin{aligned} \sin(z) &= \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iz)^n}{n!}\right] \\ &= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}[(1-(-1)^n)]\frac{i^n z^n}{n!} \end{aligned}$$

برای سری فرد مانند این ، احتیاج به همگرایی مطلق داریم.

نتیجه

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

که همگرا است برای $|z| < \infty$

تمرین 10

تابع گویای زیر را اطراف $z = 0$ بسط دهید.

$$f(z) = \frac{1+2z^2}{z^3+z^5}$$

پاسخ

ملاحظه می کنید که f در $z=0$ نقطه تکین دارد. پس نمی توانیم یک بسط سری تایلور همگرا داشته باسیم. کار دیگری انجام می دهیم یعنی تابع را به صورت زیر می شکنیم.

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\frac{2(1+z^2)-1}{1+z^2}=\frac{1}{z^3}[2-\frac{1}{1+z^2}].$$

با استفاده از سری هندسی ، داریم.

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{1-(-z^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n=1-z^2+z^4-z^6+\dots$$

ادغام می کنیم.

$$f(z)=\frac{1}{z^3}(2-1+z^2-z^4+\dots)=\left(\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}\right)-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n+1}$$

ملاحظه می کنید که قسمت اول سمت راست علامت مساوی ، قسمت تکین Singular Part است. یعنی آن ها با توان منفی z , نماد جمع را ، **قسمت کامل یا تحلیلی Regular or Analytic Part** می نامند. چون سری هندسی $\frac{1}{1+z^2}$ همگرا است برای $|z|<1$ پس تمام سری ، معتبر است در $0<z<1$

تمرین 11

مطلوب است سری تایلور برای تابع زیر اطراف $z=0$, سپس شعاع همگرایی را بدست آورید.

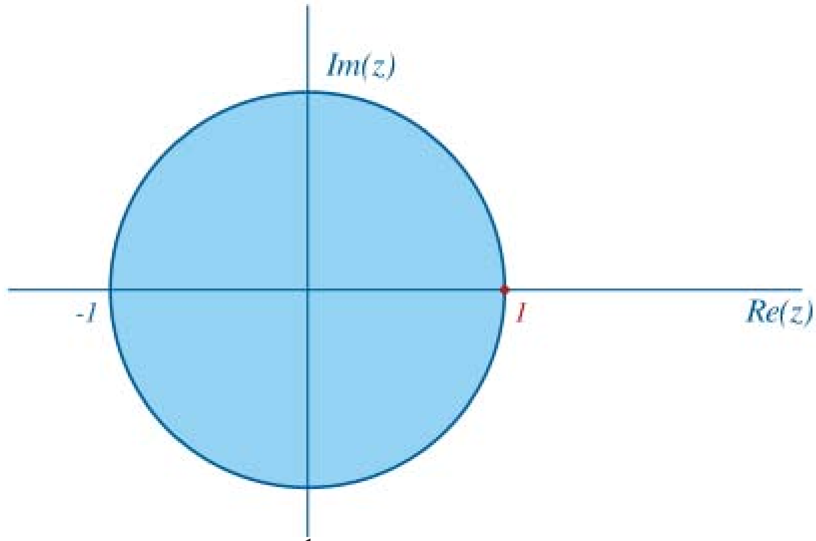
$$f(z)=\frac{e^z}{1-z}$$

پاسخ

با نوشتن سری تایلور برای هر کدام از فاکتور ها شروع می کنیم و سپس آنها را در هم ضرب می کنیم. فاکتور ها عبارتند از e^x و $1-z$ پس داریم.

$$\begin{aligned} f(z) &= \left(1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ \dots\right)(1+z+z^2+z^3+\ \dots) \\ &= 1+(1+1)z+\left(1+1+\frac{1}{2!}\right)z^2+\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)z^3+\ \dots \end{aligned}$$

بزرگ ترین دیسک اطراف $z=0$ که f تحلیلی باشد ، $|z|<1$ است. لذا بر اساس قضیه تایلور ، شعاع همگرایی $R=1$ است.



تابع $f(z)$ روی $|z| < 1$ تحلیلی است و در $z = 1$ تکینگی دارد. با نقطه قرمز نشان داده شده است.