



RIAZISARA

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

<https://t.me/riazisara>



ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



همه‌هنگی کلاس خصوصی آنلاین ریاضی ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲

فصل پنجم

Chapter Five

انتگرال گیری مختلط

Complex Integration

بخش اول

Section One

انتگرال گیری خط روی صفحه مختلط

Line Integration in the Complex Plane

مقدمه

در فصل چهارم تجزیه و تحلیل مختلط را مورد بحث قرار دادیم. در مورد صفحه مختلط، حد ها، و مشتق گیری و موضوع تحلیلی بودن تابع های مختلط صحبت کردیم. در این فصل انتگرال گیری مختلط را مورد مطالعه قرار می دهیم.

بخش 5.1 انتگرال گیری خط روی صفحه مختلط

همان طور که در حسابان دیدیم، در آنالیز مختلط انتگرال معین و انتگرال نامعین با هم تفاوت دارند. در آنالیز مختلط، یک انتگرال نامعین **An Indefinite Integral** یک تابع است که مشتق آن مساوی یک تابع تحلیلی مشخصی است در یک ناحیه. با معکوس کردن فرمول های انتگرال گیری شناخته شده، می توانیم انواع مختلف انتگرال های نامعین پیدا کنیم.

انتگرال های معین مختلط Complex Definite Integrals را انتگرال های خطی روی صفحه مختلط می نامند. انتگرال خطی به صورت زیر نوشته می شود.

$$\int_C f(z) dz.$$

اینجا، انتگرال $f(z)$ روی یک منحنی داده شده C یا قسمتی از آن یعنی کمان یا قوس محاسبه می شود. اما معمولاً برای راحتی کار، بجای کمان، **منحنی Curve** بکار می بریم. این منحنی C در صفحه مختلط، را مسیر انتگرال گیری **Path of Integration** می نامند. می توانیم C را بوسیله یک فرمول پارامتری نشان دهیم.

(1)

$$z(t) = x(t) + iy(t)$$

اینجا

$$(a \leq t \leq b).$$

است.

جهت افزایش t را جهت یا مسیر مثبت C می نامند. و می گوئیم C بوسیله (1) جهت گیری شده است (1) **Oriented by**

مثلا ، $z(t) = t + 3it, (0 \leq t \leq 2)$ یک قسمت یا پاره ای از خط $y = 3x$ به ما می دهد.
تابع $z(t) = 4 \cos t + 4i \sin t, (-\pi \leq t \leq \pi)$ نمایش دایره $|z| = 4$ است.

فرض می کنیم C یک منحنی هموار **Smooth Curve** باشد ، یعنی C یک مشتق پیوسته و غیر صفر در هر نقطه داشته باشد.

$$\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt} = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$$

از نظر هندسی ، یعنی C در همه جا یک خط مماس داشته باشد ، همان طور که از تعریف زیر مستفاد می شود

$$\dot{z}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t}$$

تصویر شماره 1

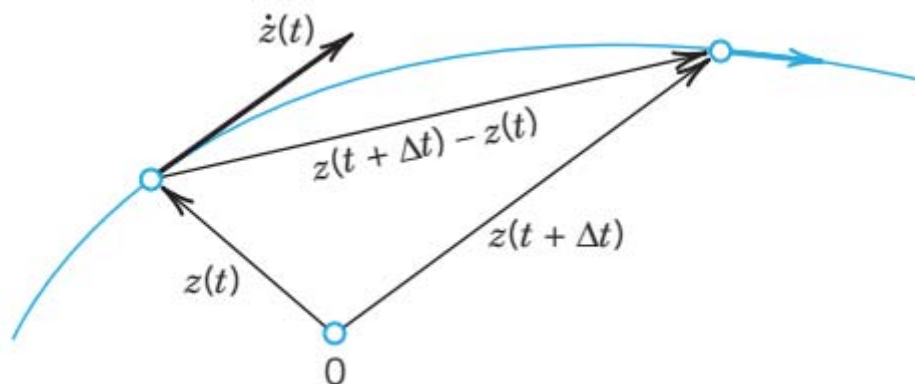
تصویر شماره 1

بردار مماس $\dot{z}(t)$ منحنی C در

صفحه مختلط توسط $z(t)$

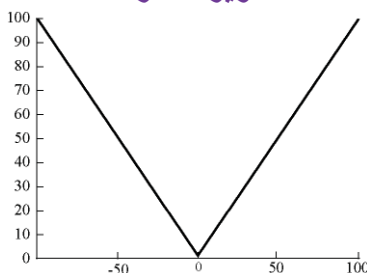
نوک پیکان روی منحنی ، مسیر مثبت را نشان می دهد.

یا به عبارتی ، جهت افزایش t



در فرمول بالا روی z نقطه گذاشته ایم ، زیر ' نمایش مشتق نسبت به z است.
یاد آوری : در حسابان هم گفتیم یک منحنی ، هموار است اگر هیچ نقطه تیز وجود نداشته باشد. مانند تصویر شماره 2 که منحنی ، هموار نیست.

تصویر شماره 2



تعریف انتگرال گیری خط روی صفحه مختلط

مانند ، روش حسابان است. فرض می کنیم C یک منحنی هموار روی صفحه مختلط باشد که توسط فرمول (1) داده شده است ، و فرض می کنیم $f(z)$ یک تابع پیوسته باشد در هر نقطه C باشد. حالا بازه $a \leq t \leq b$ در شماره (1) را به نقاط

$$t_0 (= a), \quad t_1, \quad \dots, \quad t_{n-1}, \quad t_n (= b)$$

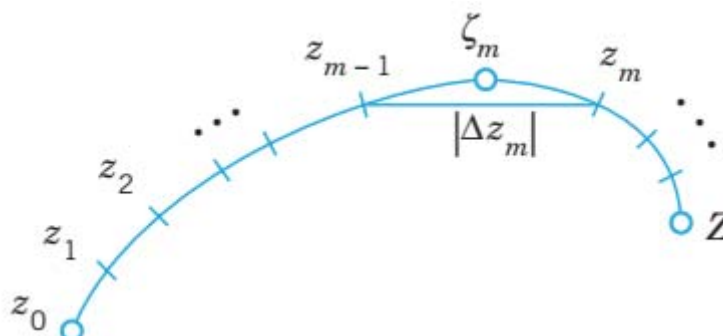
تقسیم می کنیم. برای این تقسیم بندی ، یک تقسیم بندی متناظر C وجود دارد.

$$z_0, \quad z_1, \quad \dots, \quad z_{n-1}, \quad z_n (= Z)$$

تصویر شماره 3

تصویر شماره 3

انتگرال خط روی صفحه مختلط



در تصویر بالا ، $z_j = z(t_j)$ ،

روی هر یک از قسمت های تقسیم شده C ، یک نقطه دلخواه بنام ζ_1 بین z_0 و z_1 انتخاب می کنیم. یک نقطه ζ_2 بین z_1 و z_2 انتخاب می کنیم ، الی آخر. سپس جمع زیر را تشکیل می دهیم.

$$(2) \quad S_n = \sum_{m=1}^n f(\zeta_m) \Delta z_m$$

اینجا

$$\Delta z_m = z_m - z_{m-1}.$$

است. این کار را برای هر یک از $n = 2, 3, \dots$ ها ، کاملاً مستقل از یک دیگر ، اما بطوری که بزرگ ترین

$$|\Delta t_m| = |t_m - t_{m-1}|$$

به صفر نزدیک شود ، هنگامی که $n \rightarrow \infty$ این دلالت می کند بزرگ ترین $|\Delta z_m|$ هم به صفر نزدیک می شود. در حقیقت نمی تواند از طول منحنی C تجاوز کند. حد دنباله اعداد $S_2, S_3, \dots$ که به یون طریق بدست می آید ، **انتگرال خط** $f(z)$ در مسیر C نامیده می شود. این انتگرال خط به صورت های زیر نشان داده می شود.

(3)

$$\int_C f(z) dz,$$

اگر C یک مسیر بسته **Closed Path** باشد، مانند یک دایره یا مانند عدد 8، نماد زیر بکار برده می شود.

(3)

$$\oint_C f(z) dz$$

فرض عمومی General Assumption

تمام مسیر های انتگرال گیری برای انتگرال های خط، پیوسته تکه ای فرض می شوند.

خواص اساسی Basic Properties

الف - خطی بودن Linearity

انتگرال گیری، یک عمل خطی است، یعنی می توانیم جمع ها را، جمله به جمله انتگرال گیری کنیم و می توانیم ضریب های ثابت را از نماد انتگرال، بیرون بیاوریم. به صورت زیر.

$$(4) \quad \int_C [k_1 f_1(z) + k_2 f_2(z)] dz = k_1 \int_C f_1(z) dz + k_2 \int_C f_2(z) dz.$$

ب حرکت معکوس Sense Reversal

می توان از z_0 تا Z و یا از Z تا z_0 انتگرال گیری کرد. البته با اضافه کردن نماد منفی.

$$(5) \quad \int_{z_0}^Z f(z) dz = - \int_Z^{z_0} f(z) dz.$$

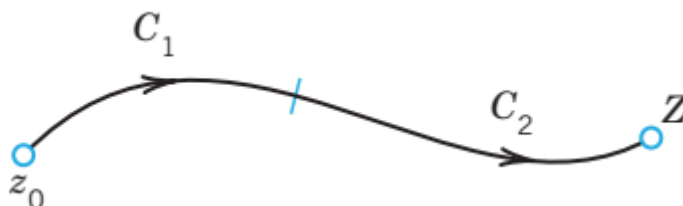
ج - تقسیم بندی مسیر Partitioning of Path

تصویر شماره 4

$$(6) \quad \int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz.$$

تصویر شماره 4

تقسیم بندی مسیر



وجود انتگرال خط روی صفحه مختلط **Existence of the Complex Line Integral**
 فرض ما که $f(z)$ پیوسته است و C پیوسته تکه ای است، دلالت بر وجود انتگرال خط شماره (3) می کند. زیرا همان طور که در فصل قبل گفتیم، اجازه دهید بنویسیم

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

همچنین دو رابطه زیر را قرار می دهیم.

$$\zeta_m = \xi_m + i\eta_m$$

و

$$\Delta z_m = \Delta x_m + i\Delta y_m.$$

پس شماره (2) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$(7) \quad S_n = \sum (u + iv)(\Delta x_m + i\Delta y_m)$$

اینجا

$$u = u(\zeta_m, \eta_m), v = v(\zeta_m, \eta_m)$$

است. و m ها را از 1 تا n جمع می کنیم. عمل ضرب انجام می دهیم و S_n را به چهار جمع قسمت می کنیم.

$$S_n = \sum u \Delta x_m - \sum v \Delta y_m + i \left[\sum u \Delta y_m + \sum v \Delta x_m \right].$$

این ها جمع های حقیقی هستند. چون f پیوسته است، پس u و v پیوسته هستند. پس اگر بگذاریم n به بی نهایت نزدیک شود، پس بزرگ ترین Δx_m و Δy_m به صفر نزدیک می شوند. و هر کدام از جمع های سمت راست، یک انتگرال خطی حقیقی می شود.

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_C f(z) dz$$

$$= \int_C u \, dx - \int_C v \, dy + i \left[\int_C u \, dy + \int_C v \, dx \right]$$

این نشان می دهد که بر اساس فرض های مان در مورد f و C ، انتگرال خطی شماره (3) وجود دارد. و مقدار آن به انتخاب بخش ها و نقاط میانی ζ_m بستگی ندارد.

اولین روش محاسبه First Evaluation Method

انتگرال گیری نامعین و جانشینی حد ها Indefinite Integration and substitution of Limits
این روش مانند محاسبه انتگرال های معین در حسابان است. یعنی فرمول زیر.

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

اینجا $F'(x) = f(x)$ است.

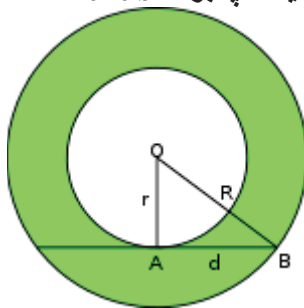
این روش از روش بعدی، آسان تر است، ولی مناسب است فقط برای تابع های تحلیلی. حالا باید به مفاهیم زیر توجه کنید.

یک دامنه D را **کاملاً پیوسته Simply Connected** می نامند اگر هر منحنی کاملاً بسته، فقط نقاط D را شامل شود.

مثلاً، یک دیسک مدور، کاملاً پیوسته است. اما یک **چنبرک Annulus**، کاملاً پیوسته نیست. در تصویر شماره 4 قسمت سبز رنگ، چنبرک می نامند.

تصویر شماره 4

یک چنبرک Annulus



قضیه 1

انتگرال گیری نامعین از تابع های تحلیلی

فرض می کنیم $f(z)$ یک تابع تحلیلی در دامنه کاملاً پیوسته D باشد. پس یک انتگرال نامعین برای $f(z)$ در دامنه D وجود دارد، یعنی یک تابع تحلیلی $F(z)$ وجود دارد، بطوری که در دامنه D داشته باشیم $F'(z) = f(z)$ ، و برای تمام مسیر ها در D که دو نقطه مجاور z_0 و z_1 داشته باشیم.

$$(9) \quad \int_{z_0}^{z_1} f(z) \, dz = F(z_1) - F(z_0) \quad [F'(z) = f(z)].$$

ممکن است این قضیه را در بخش بعد ، ثابت کنیم. فعلا لزومی نمی بینیم. توجه داشته باشید **کاملا پیوسته** در قضیه بالا ، کاملاً ضروری است. اگر $f(z)$ کامل باشد ، برای D می توانیم صفحه مختلط را در نظر بگیریم.

مثال 1

$$\int_0^{1+i} z^2 dz = \frac{1}{3} z^3 \Big|_0^{1+i} = \frac{1}{3} (1+i)^3 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

ملاحظه می کنید دقیقاً مانند آنچه در حسابان در مورد تابع های حقیقی عمل می کردیم.

مثال 2

$$\int_{-\pi i}^{\pi i} \cos z dz = \sin z \Big|_{-\pi i}^{\pi i} = 2 \sin \pi i = 2i \sinh \pi = 23.097i$$

مثال 3

$$\int_{8+\pi i}^{8-3\pi i} e^{z/2} dz = 2e^{z/2} \Big|_{8+\pi i}^{8-3\pi i} = 2(e^{4-3\pi i/2} - e^{4+\pi i/2}) = 0$$

زیرا ، e^z متناوب است با دوره تناوب $2\pi i$

مثال 4

$$\int_{-i}^i \frac{dz}{z} = \operatorname{Ln} i - \operatorname{Ln} (-i) = \frac{i\pi}{2} - \left(-\frac{i\pi}{2}\right) = i\pi.$$

اینجا ، D صفحه مختلط است بدون 0 و محور حقیقی منفی. زیرا ، در این قسمت $\operatorname{Ln} z$ تحلیلی نیست. اما D کاملاً پیوسته است.

دومین روش محاسبه Second Evaluation Method

استفاده از یک تجسم یک مسیر Use of a Representation of a Path

این روش منحصر به تابع های تحلیلی نیست ، بلکه قابل استفاده برای هر تابع مختلط پیوسته است.

قضیه 2

انتگرال گیری از طریق استفاده از مسیر Integration by the Use of the Path

فرض می کنیم C یک مسیر هموار تکه ای باشد که بوسیله $z = z(t)$ مجسم شده باشد ، اینجا $a \leq t \leq b$ است. فرض می کنیم $f(z)$ یک تابع پیوسته در C باشد. پس

$$(10) \quad \int_C f(z) dz = \int_a^b f[z(t)] \dot{z}(t) dt \quad \left(\dot{z} = \frac{dz}{dt} \right).$$

اثبات

سمت چپ شماره (10) توسط شماره (8) بر حسب انتگرال های خطی حقیقی داده شده است. و نشان می دهیم که سمت راست (10) هم مساوی (8) است. داریم $z = x + iy$, پس

$$\dot{z} = \dot{x} + i\dot{y}.$$

فقط می نویسیم u برای $u[x(t), y(t)]$ و v برای $v[x(t), y(t)]$ • همچنین داریم

$$dx = \dot{x} dt$$

و

$$dy = \dot{y} dt.$$

در نتیجه در (10)

$$\begin{aligned} \int_a^b f[z(t)] \dot{z}(t) dt &= \int_a^b (u + iv)(\dot{x} + i\dot{y}) dt \\ &= \int_C [u dx - v dy + i(u dy + v dx)] \\ &= \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (u dy + v dx). \end{aligned}$$

مراحل بکار بردن قضیه 2

الف - مسیر را به صورت $z(t)$ ($a \leq t \leq b$) نشان دهید.

ب - مشتق زیر را محاسبه کنید.

$$\dot{z}(t) = dz/dt$$

ج- در $f(z)$ برای هر z بنویسید $z(t)$ ، به همین سیاق $x(t)$ برای x و $y(t)$ برای y

د - انتگرال

$$f[z(t)] \dot{z}(t)$$

روی t از a تا b محاسبه کنید.

مثال 5

انتگرال $\frac{1}{z}$ اطراف دایره واحد.

نشان می دهیم که با انتگرال گرفتن از $\frac{1}{z}$ خلاف جهت عقربه ساعت پیرامون دایره واحد خواهیم داشت.

(11)

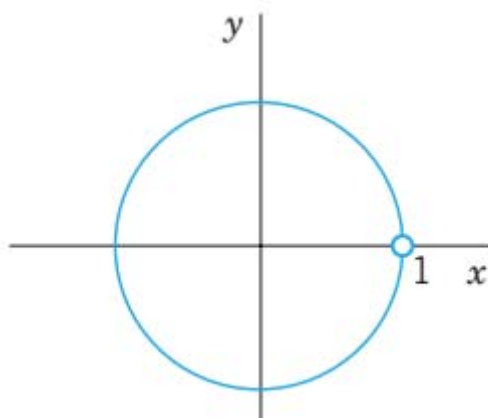
$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

اینجا C دایره واحد است. این نتیجه خیلی مهم است که در آینده به آن احتیاج خواهیم داشت.

پاسخ

الف - می توانیم دایره واحد زیر را

تصویر شماره 5
دایره واحد



با فرمول زیر نشان دهیم.

$$z(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$$

$$(0 \leq t \leq 2\pi),$$

پس خلاف عقربه ساعت، مربوط است به افزایش t از 0 تا 2π .
ب - با انتگرال گرفتن از طریق قانون زنجیره ای داریم.

$$\dot{z}(t) = ie^{it}$$

ج - با جانشین کردن داریم.

$$f(z(t)) = 1/z(t) = e^{-it}.$$

د - بر اساس (10) نتیجه می گیریم

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

مثال 6

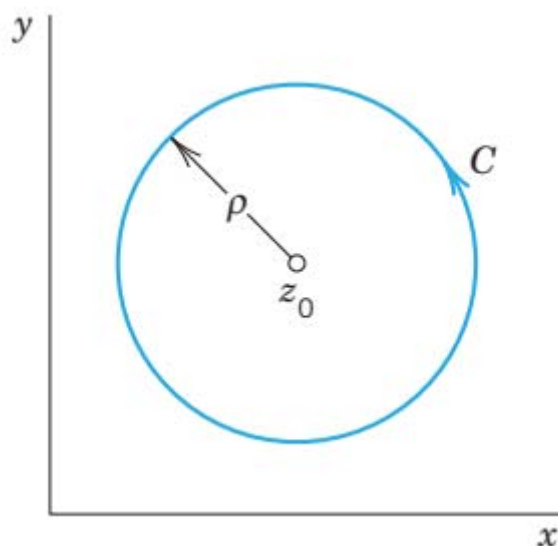
انتگرال $\frac{1}{z^m}$ اینجا m یک عدد صحیح است.

فرض می‌کنیم $f(z) = (z - z_0)^m$ باشد. اینجا m یک عدد صحیح است و z_0 یک عدد ثابت. خلاف جهت عقربه ساعت پیرامون دایره C با شعاع ρ و مرکز z_0 انتگرال بگیرید. تصویر شماره

6

تصویر شماره 6

مسیر مثال 6



پاسخ

می‌توانیم C را به صورت زیر نمایش دهیم.

$$z(t) = z_0 + \rho(\cos t + i \sin t) = z_0 + \rho e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

پس داریم.

$$(z - z_0)^m = \rho^m e^{imt}, \quad dz = i \rho e^{it} dt$$

انتگرال زیر را بدست می‌آوریم.

$$\oint_C (z - z_0)^m dz = \int_0^{2\pi} \rho^m e^{imt} i \rho e^{it} dt = i \rho^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)t} dt.$$

بر اساس فرمول اویلر بخش 4.6 فرمول 5 سمت راست مطابق زیر است.

$$i\rho^{m+1} \left[\int_0^{2\pi} \cos(m+1)t \, dt + i \int_0^{2\pi} \sin(m+1)t \, dt \right].$$

اگر $m = -1$ باشد، داریم.

$$\rho^{m+1} = 1, \cos 0 = 1, \sin 0 = 0.$$

پس $2\pi i$ بدست می آوریم. برای عدد صحیح $m \neq -1$ هر یک از انتگرال ها صفر زیرا روی بازه به طول 2π انتگرال می گیریم، که مساوی یک دوره تناوب سینوس و کسینوس است. لذا نتیجه می شود.

$$(12) \quad \oint_C (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & (m = -1) \\ 0 & (m \neq -1) \end{cases}$$

وابستگی به مسیر Dependence on Path

حالا به یک حقیقت مهم می رسیم. اگر یک تابع مثلا $f(z)$ را از نقطه z_0 تا نقطه z_1 در راستای مسیر های مختلف انتگرال بگیریم، پس بطور کلی انتگرال ها مقادیر مختلف خواهند داشت. به عبارت دیگر یک انتگرال خطی مختلط نه فقط به نقاط انتها یی مسیر بستگی دارد بلکه بطور کلی به خود مسیر هم بستگی دارد.

مثال 7

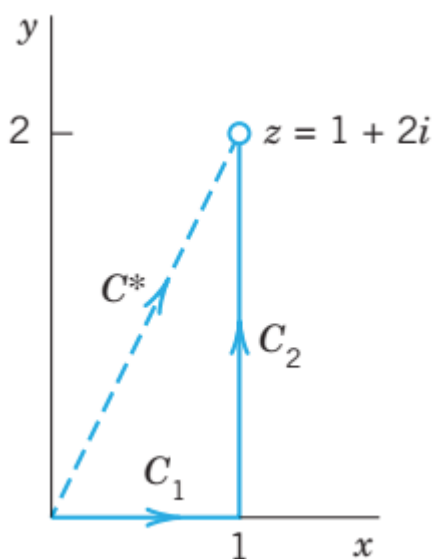
انتگرال تابع غیر تحلیلی. وابستگی به مسیر

انتگرال $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ از 0 تا $1 + 2i$ در راستای مسیر های زیر، محاسبه کنید.

الف - در راستای C^* تصویر شماره 7

ب - در راستای C شامل C_1 و C_2 .

تصویر شماره 7



پاسخ

الف - مسیر C^* را می توان به صورت زیر نمایش داد.

$$z(t) = t + 2it \quad (0 \leq t \leq 1)$$

پس

$$\dot{z}(t) = 1 + 2i$$

و روی C^*

$$f[z(t)] = x(t) = t$$

حالا ، انتگرال می گیریم.

$$\int_{C^*} \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t(1 + 2i) \, dt = \frac{1}{2}(1 + 2i) = \frac{1}{2} + i.$$

ب - حالا داریم.

$$C_1: z(t) = t, \quad \dot{z}(t) = 1, \quad f(z(t)) = x(t) = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$C_2: z(t) = 1 + it, \quad \dot{z}(t) = i, \quad f(z(t)) = x(t) = 1 \quad (0 \leq t \leq 2).$$

با استفاده از (6) محاسبه می کنیم.

$$\int_C \operatorname{Re} z \, dz = \int_{C_1} \operatorname{Re} z \, dz + \int_{C_2} \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 t \, dt + \int_0^2 1 \cdot i \, dt = \frac{1}{2} + 2i.$$

ملاحظه می کنید که نتیجه با قسمت الف متفاوت است.

حد های انتگرال ها. نامساوی ام ال **Bounds of Integrals. ML-Inequality** مکررا لازم می شود قدر مطلق انتگرال ها خطی را تخمین بزنیم. فرمول اساسی آن مطابق زیر است.

(13)

$$\left| \int_C f(z) \, dz \right| \leq ML$$

اینجا L طول C است و M یک عدد ثابت بطوری که $|f(z)| \leq M$ است همه جا در C • اثبات

قدر مطلق شماره (2) را گرفته و نامساوی مثلث تعمیم یافته شماره (6*) بخش 4.2 را بکار می بریم ، پس داریم.

$$|S_n| = \left| \sum_{m=1}^n f(\zeta_m) \Delta z_m \right| \leq \sum_{m=1}^n |f(\zeta_m)| |\Delta z_m| \leq M \sum_{m=1}^n |\Delta z_m|.$$

حالا، $|\Delta z_m|$ طول کمان تصویر شماره 3 است که نقاط انتهایی آن z_m و z_{m-1} هستند. پس جمع سمت راست، نمایش طول L^* خطوط شکسته قوس‌هایی است که نقاط انتهایی آنها $z_0, z_1, \dots, z_n (= Z)$ هستند. اگر n به بی‌نهایت نزدیک شود، بطوری که بزرگ‌ترین $|\Delta t_m|$ و $|\Delta z_m|$ به صفر نزدیک می‌شود. پس L^* به L نزدیک می‌شود، یعنی به L طول کمان C نزدیک می‌شود، بر اساس تعریف طول منحنی. به این طریق نا مساوی (13) به دست می‌آید.

از شماره (13) نمی‌توانیم بگوییم قدر مطلق انتگرال چقدر به حد ML نزدیک است. اما این مساله‌ای ایجاد نمی‌کند. فعلاً مورد استفاده عملی (13) را با یک مثال ساده نشان می‌دهیم.

مثال 8

تخمین یک انتگرال Estimation of an Integral

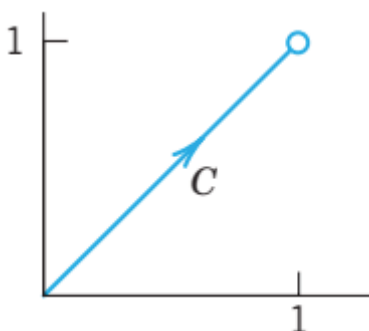
مطلوب است حد بالای انتگرال زیر.

$$\int_C z^2 dz,$$

اینجا، C یک پاره خط مستقیم است از 0 تا $1+i$ تصویر شماره 8

تصویر شماره 8

مسیر مثال 8



پاسخ

بر اساس (13) داریم $L = \sqrt{2}$ و $|f(z)| = |z^2| \leq 2$

$$\left| \int_C z^2 dz \right| \leq 2\sqrt{2} = 2.8284.$$

قدر مطلق انتگرال

$$\left| -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i \right| = \frac{2}{3} \sqrt{2} = 0.9428$$

به مثال 1 توجه کنید.

تمرینات بخش 5.1

تمرین 1

مطلوب است $\int_{\gamma} \bar{z} dz$ در امتداد خط مستقیم از 0 تا $1+i$

پاسخ

پارامتر زیر را بکار می‌بریم.

$$\gamma(t) = t(1+i)$$

با $0 \leq t \leq 1$ پس $\gamma' = 1+i$ لذا انتگرال خط مطابق زیر است.

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^1 t(1-i)(1+i) dt = 1.$$

توجه γ همان مسیر C است. برای C می‌توان هر نمادی که ممکن است بکار برد.

تمرین 2

مطلوب است $\int \bar{z} dz$ در امتداد دایره واحد.

پاسخ

پارامتر زیر را بکار می‌بریم.

$$C: \gamma(t) = e^{it}$$

با

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

پس

$$\gamma'(t) = ie^{it}$$

این‌ها را در انتگرال می‌گذاریم.

$$\int_C \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} \overline{e^{it}} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i.$$

تمرین 3

مطلوب است

$$\int_C 2ds$$

اینجا C نیمه بالایی دایره واحد است.

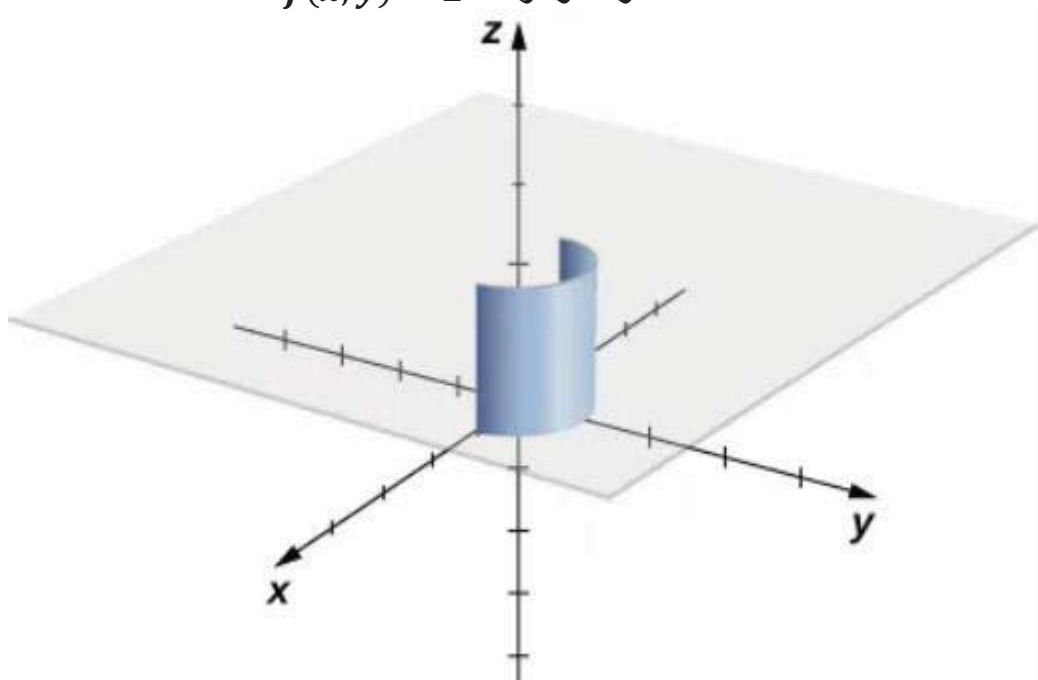
پاسخ

انتگرال $f(x,y) = 2$ است. تصویر شماره 9

تصویر شماره 9

ورقه که به صورت نیمه بالایی دایره واحد در یک صفحه

ساخته شده و نمودار $f(x, y) = 2$



با استفاده از تعریف انتگرال خط، فرض می‌کنیم $r(t)$ یک شکل پارامتری شده C باشد. پس $f(r(t_i)) = 2$ است برای هر عدد t_i در دامنه r ، پس

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\mathbf{r}(t_i^*)) \Delta s_i \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2 \Delta s_i \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta s_i \\ &= 2 (\text{length of } C) \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

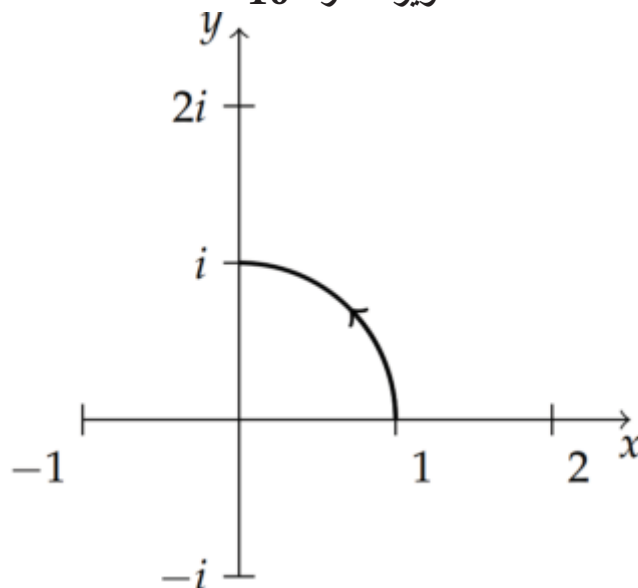
تمرین 4

مطلوب است

$$\int_C z^2 dz,$$

اینجا، C کمان یک دایره واحد در ربع اول مطابق تصویر شماره 10

تصویر شماره 10



پاسخ

دو راه برای پارامتری کردن وجود دارد. یکی، می دانید که پارامتری شده دایره واحد بطور استاندارد مطابق زیر است.

$$(x(\theta), y(\theta)) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

برای یک ربع دایره در ربع اول

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

فرض می کنیم

$$z = \cos \theta + i \sin \theta.$$

باشد، پس

$$dz = (-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta$$

و مسیر انتگرال می شود

$$\int_C z^2 dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta + i \sin \theta)^2 (-\sin \theta + i \cos \theta) d\theta.$$

می توانیم بسط دهیم و انتگرال بگیریم، با چند انتگرال گیری مثلثاتی.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^3 \theta - 3 \cos^2 \theta \sin \theta + i (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta)] d\theta.$$

مثلا می توانید رابطه زیر را بکار ببرید.

$$\sin^3 \theta = \sin \theta (1 - \cos^2 \theta)$$

برای نوشتن قسمت حقیقی انتگراند ، به صورت زیر

$$\sin \theta - 4 \cos^2 \theta \sin \theta.$$

در نتیجه ، ضد مشتق به صورت زیر است.

$$-\cos \theta + \frac{4}{3} \cos^3 \theta.$$

انتگراند مجازی هم به همین طریق می توان بدست آورد. ابتدا در C داریم.

$$z = e^{i\theta}$$

پس

$$dz = ie^{i\theta} d\theta.$$

است. در نهایت انتگرال گیری به صورت زیر می شود.

$$\begin{aligned} \int_C z^2 dz &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{i\theta})^2 ie^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3i\theta} d\theta \\ &= \frac{ie^{3i\theta}}{3i} \Big|_0^{\pi/2} \\ &= -\frac{1+i}{3} \end{aligned}$$

تمرین 5

مطلوب است

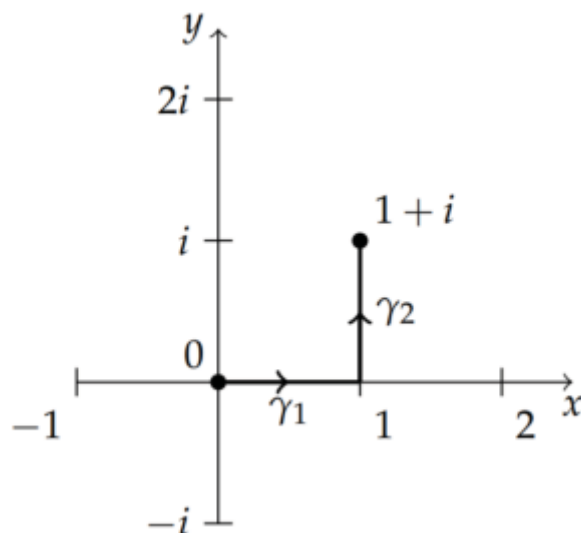
$$\int_{\Gamma} z dz,$$

برای مسیر

$$\Gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

مطابق تصویر شماره 11

تصویر شماره 11



پاسخ

در این مساله مسیر ما تکه ای هموار است می توانیم انتگرال ها را در دو مسیر محاسبه کنیم و نتیجه ها را با هم جمع کنیم. فرض می کنیم دو پاره خط ها γ_1 و γ_2 باشند. همان طور که در تصویر می بینید. هر کدام از مسیر ها را جداگانه پارامتری می کنیم.

روی γ_1 داریم $y = 0$, پس $z = x$ است برای $x \in [0,1]$. طبیعی است که x را پارامتر بگیریم، پس فرض می کنیم $dz = dx$ باشد. پس داریم.

$$\int_{\gamma_1} z dz = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

برای مسیر γ_2 داریم $z = 1 + iy$ برای $y \in [0,1]$ و $dz = idy$ است. این پارامتر شده را در انتگرال می گذاریم، پس انتگرال می شود.

$$\int_{\gamma_2} z dz = \int_0^1 (1 + iy) idy = i - \frac{1}{2}.$$

دو انتگرال را جمع می کنیم.

$$\int_{\Gamma} z dz = \frac{1}{2} + \left(i - \frac{1}{2}\right) = i.$$

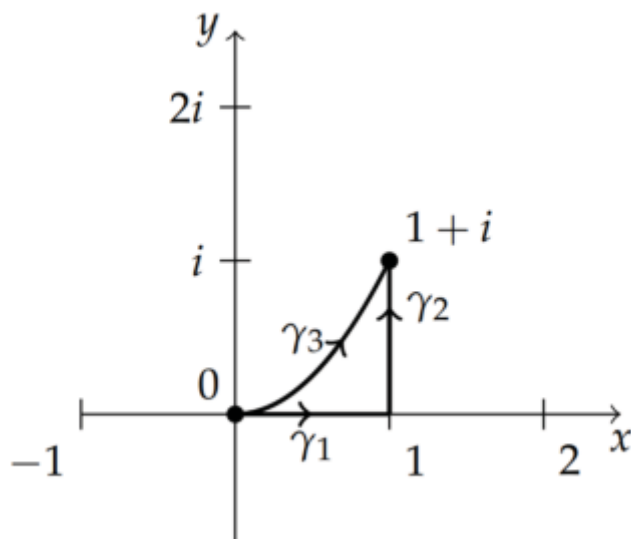
تمرین 6

مطلوب است

$$\int_{\gamma_3} z dz,$$

اینجا، γ_3 مطابق تصویر شماره 12 است.

تصویر شماره 12



پاسخ

در این مساله یک مسیر از $z = 0$ تا $z = 1 + i$ در امتداد مسیری متفاوت نسبت به مثال قبل داریم. فرض می‌کنیم

$$\begin{aligned}\gamma_3 &= \{(x, y) \mid y = x^2, x \in [0, 1]\} \\ &= \{z \mid z = x + ix^2, x \in [0, 1]\}\end{aligned}$$

پس داریم.

$$dz = (1 + 2ix)dx.$$

انتگرال می‌شود.

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_3} z dz &= \int_0^1 (x + ix^2)(1 + 2ix)dx \\ &= \int_0^1 (x + 3ix^2 - 2x^3) dx = \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + ix^3 - \frac{1}{2}x^4 \right]_0^1 = i\end{aligned}$$

در این تمرین همان جوابی را پیدا کردیم که در تمرین قبل پیدا کردیم. اما نباید این را به عنوان یک قاعده کلی به تلقی کنیم. در حقیقت، این صحیح نیست که بگوییم انتگرال گیری روی مسیر های متفاوت، همیشه به یک نتیجه می‌رسیم. اما، اگر چنین باشد، باید بگوییم این نتیجه مستقل بودن مسیر است. بطور کلی انتگرال $\int f(z)dz$ مسیر مستقل است اگر داشته باشیم

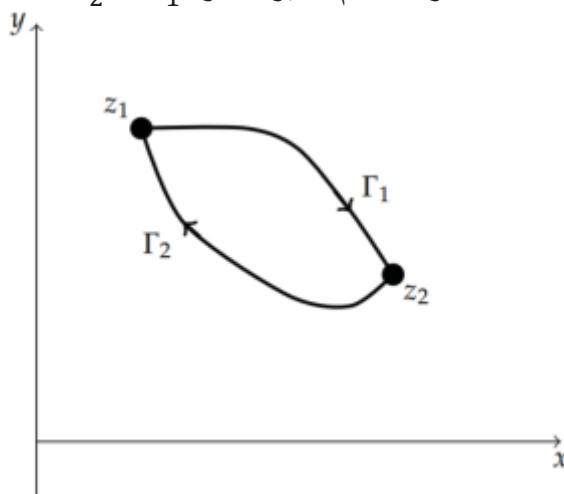
$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz$$

برای تمام مسیر های z_1 تا z_2 همان طور که در تصویر شماره 13 ملاحظه می‌کنید.

تصویر شماره 13

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz$$

برای تمام مسیر ها از z_1 تا z_2



ملاحظه می کنید که یک لوپ بسته داریم.

تمرین 7

مطلوب است

$$\int_C \bar{z} dz$$

اینجا C عبارت است از

$$x = 3t, y = t^2,$$

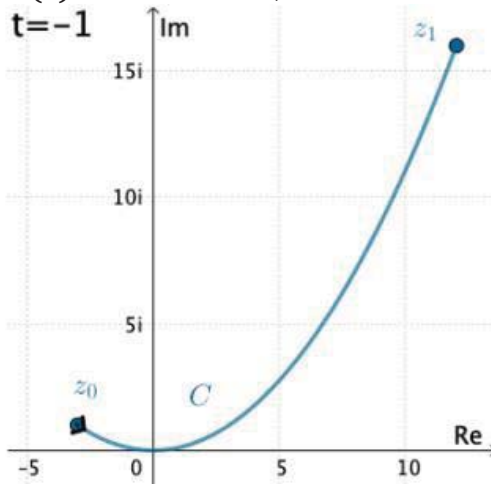
و

$$-1 \leq t \leq 4.$$

تصویر شماره 14

تصویر شماره 14

$$C: z(t) = 3t + it^2, \quad -1 \leq t \leq 4$$



پاسخ
داریم

$$C: z(t) = 3t + it^2$$

پس

$$\overline{f(z(t))} = \overline{3t + it^2} = 3t - it^2.$$

همچنین

$$z'(t) = 3 + 2it$$

پس انتگرال می شود.

$$\begin{aligned} \int_C \bar{z} dz &= \int_{-1}^4 (3t - it^2) (3 + 2it) dt \\ &= \int_{-1}^4 (2t^3 + 9t + 3t^2i) dt \\ &= \int_{-1}^4 (2t^3 + 9t) dt + i \int_{-1}^4 3t^2 dt \\ &= \left(\frac{1}{2}t^4 + \frac{9}{2}t^2 \right) \Big|_{-1}^4 + i t^3 \Big|_{-1}^4 \\ &= 195 + 65i. \end{aligned}$$

تمرین 8

فرض کنید C یک نیم دایره به مرکز مبدا مختصات و شعاع 3 با چرخش موافق عقربه ساعت باشد. این منحنی را پارامتری کنید و آنرا رسم کنید.

پاسخ

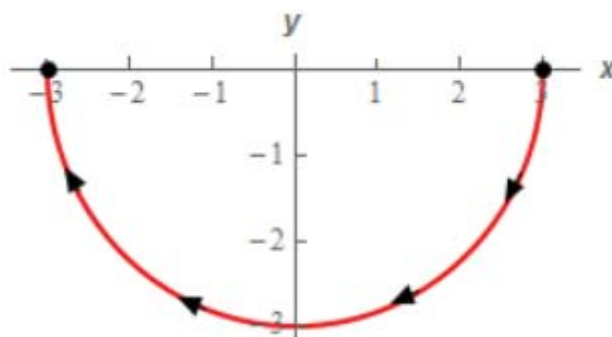
این فرمول پارامتری منحنی

$$\vec{r}(t) = \langle 3 \cos(t), -3 \sin(t) \rangle \quad 0 \leq t \leq \pi$$

می توانیم این پارامتر را به صورت زیر بشکنیم.

$$\begin{aligned} x &= 3 \cos(t) \\ y &= -3 \sin(t) \end{aligned} \quad 0 \leq t \leq \pi$$

هر دو صورت های پارامتری کار می کنند. این هم نمودار



تمرین 9

اگر C یک پاره خط از $(1,1,0)$ تا $(2,3,-2)$ باشد، فرمول پارامتری آنرا بنویسید و سپس نمودار آنرا رسم کنید.

پاسخ

شکل پارامتری C به درت زیر است.

$$\vec{r}(t) = (1-t)\langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle 2, 3, -2 \rangle = \langle 1+t, 1+2t, -2t \rangle \quad 0 \leq t \leq 1$$

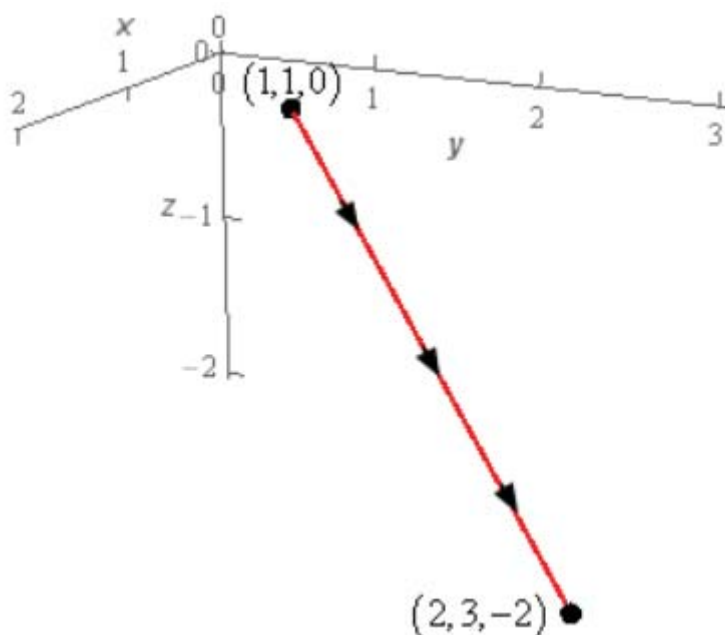
یا

$$x = 1 + t$$

$$y = 1 + 2t \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$z = -2t$$

این هم نمودار.



تمرین 10

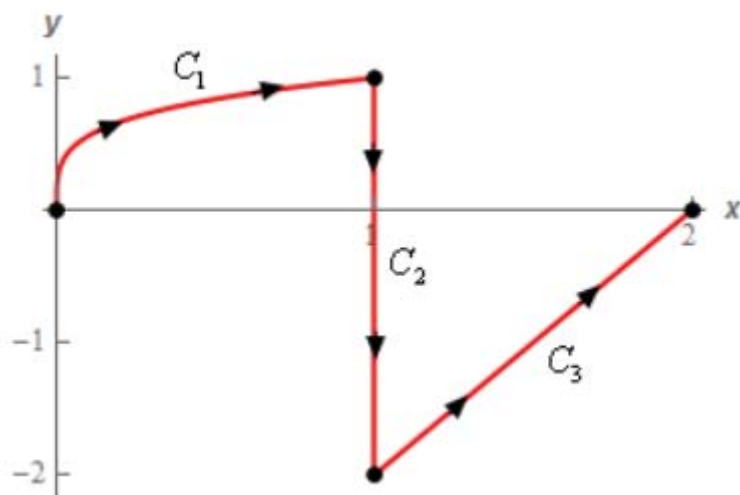
اگر C قسمتی از $x = y^4$ از $y = 0$ تا $y = 1$ سپس یک پاره خط از $(1, 1)$ تا $(1, -2)$ سپس یک پاره خط از $(1, -2)$ تا $(2, 0)$ باشد، آنرا به صورت پارامتری بنویسید و سپس نمودار را رسم کنید.

پاسخ

$$C_1 : \vec{r}(t) = \langle t^4, t \rangle \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2 : \vec{r}(t) = (1-t)\langle 1, 1 \rangle + t\langle 1, -2 \rangle = \langle 1, 1-3t \rangle \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$C_3 : \vec{r}(t) = (1-t)\langle 1, -2 \rangle + t\langle 2, 0 \rangle = \langle 1+t, 2t-2 \rangle \quad 0 \leq t \leq 1$$



تمرین 11

اگر C شامل قسمت بالایی دایره با مرکز در مبدا مختصات و شعاع 3 از

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}} \right)$$

تا

$$\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}} \right)$$

در جهت خلاف عقربه ساعت، سپس توسط یک پاره خط از

$$\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}} \right)$$

تا

$$\left(4, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

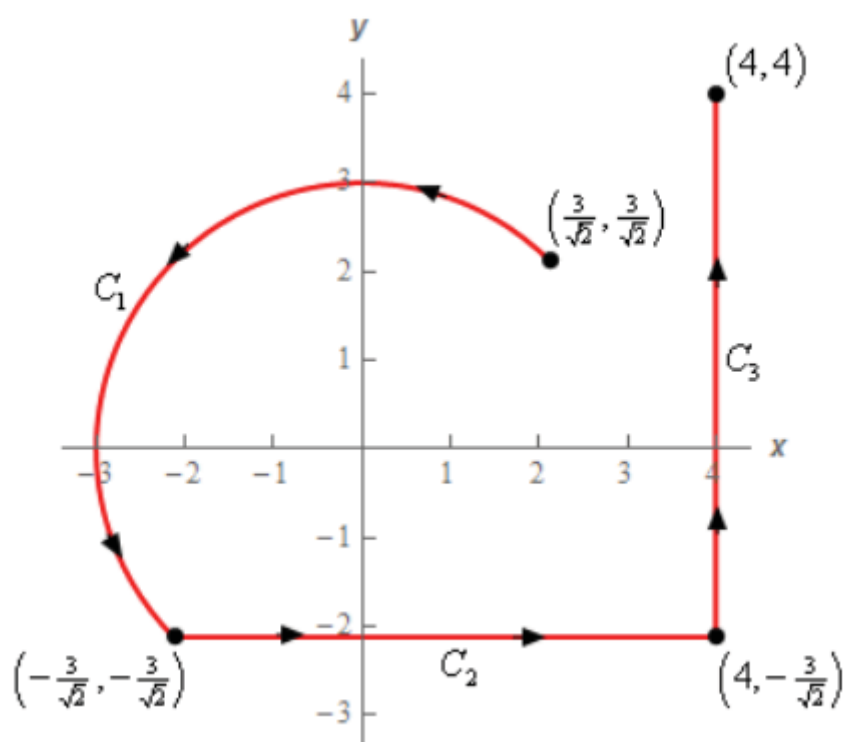
و به دنبال آن یک پاته خط از

$$\left(4, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

تا $(4, 4)$

باشد، نمودار را رسم کنید.

پاسخ



پارامتر شده

$$C_1 : \vec{r}(t) = \langle 3 \cos(t), 3 \sin(t) \rangle \quad \frac{1}{4}\pi \leq t \leq \frac{5}{4}\pi$$

$$C_2 : \vec{r}(t) = \left\langle t, -\frac{3}{\sqrt{2}} \right\rangle \quad -\frac{3}{\sqrt{2}} \leq t \leq 4$$

$$C_3 : \vec{r}(t) = \langle 4, t \rangle \quad -\frac{3}{\sqrt{2}} \leq t \leq 4$$

بخش 5.2

قضیه انتگرال کاشی Cauchy's Integral Theorem

این بخش نکته مهم فصل است. در بخش قبل دیدیم که انتگرال خط یک تابع $f(z)$ معمولاً، نه فقط وابسته به نقاط انتهایی دارد، بلکه به انتخاب خود مسیر هم بستگی دارد. این وابستگی، اغلب باعث پیچیده شدن مسأله می شود. پس پیدا کردن یک شرایطی که این وابستگی اتفاق نیفتد مهم است. به عبارت دیگر، اگر $f(z)$ در دامنه D تحلیلی باشد و D پیوسته ساده باشد، پس انتگرال وابسته به انتخاب یک مسیر بین نقاط داده شده نیست. این نتیجه یعنی قضیه دوم بخش قبل، از قضیه انتگرال کاشی بدست می آید. پس قضیه انتگرال کاشی مهم ترین قضیه در این فصل است.

اجازه دهید بحث را با یک مسیر پیوسته ساده شروع کنیم.

الف - یک مسیر بسته ساده A Simple Closed Path یک مسیر بسته است که خودش را قطع یا لمس نمی کند، تصویر شماره 1

تصویر شماره 1

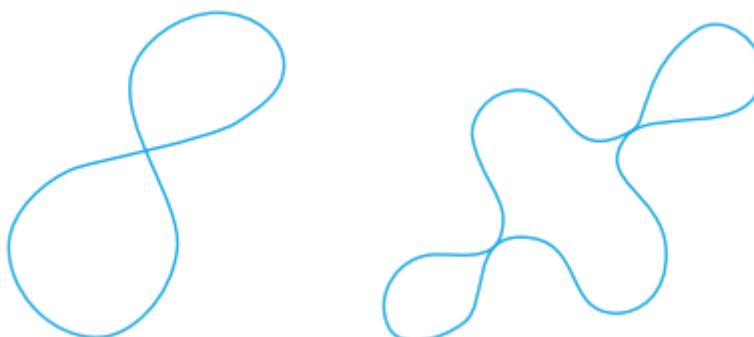
مسیر بسته ساده



یک دایره، مسیر بسته ساده است اما یک منحنی به شکل 8 یک مسیر بسته ساده نیست، تصویر شماره 2

تصویر شماره 2

مسیر بسته ساده نیست

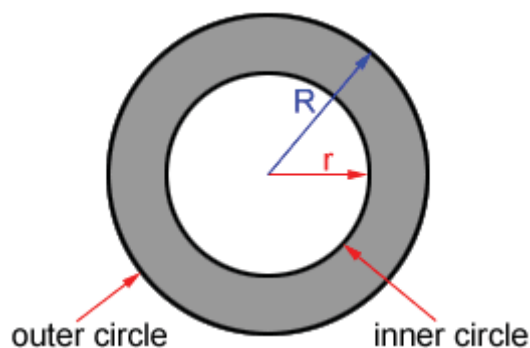


ب - یک دامنه بسته ساده A Simply Connected Domain

یک دامنه D در صفحه مختلط، بسته ساده است اگر هر مسیر بسته ساده در D فقط نقاط D را احاطه کند. مانند داخل یا اندرون دایره، اندرون بیضی یا اندرون هر منحنی بسته ساده. یک دامنه که بسته ساده نباشد، بسته چند تا یی **Multiply Connected** می نامند. مانند چنبرک تصویر شماره 3

تصویر شماره 3

چنبرک



قسمت سیاه رنگ، یک چنبره است جالب است بدانید مساحت این چنبره به صورت زیر است.

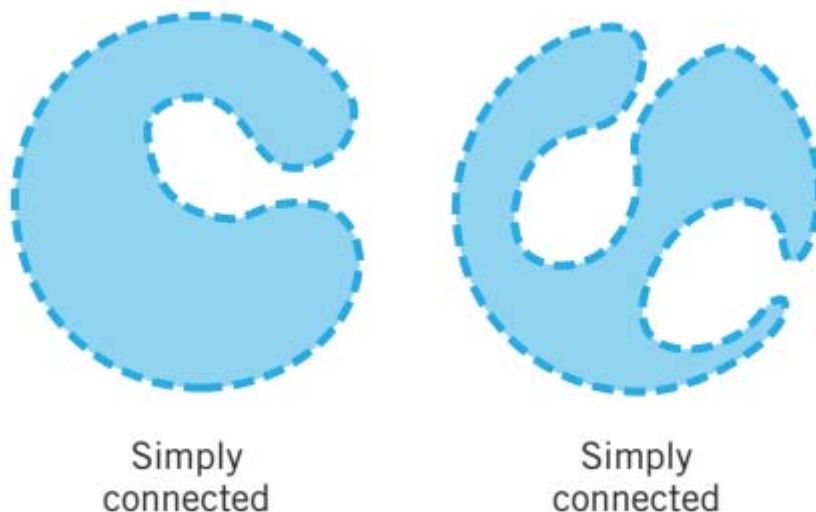
$$A = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$$

در فرمول بالا D محیط دایره بزرگ است و d محیط دایره کوچک.

تصویر شماره 5 تصاویر دامنه بسته ساده را نشان می دهد.

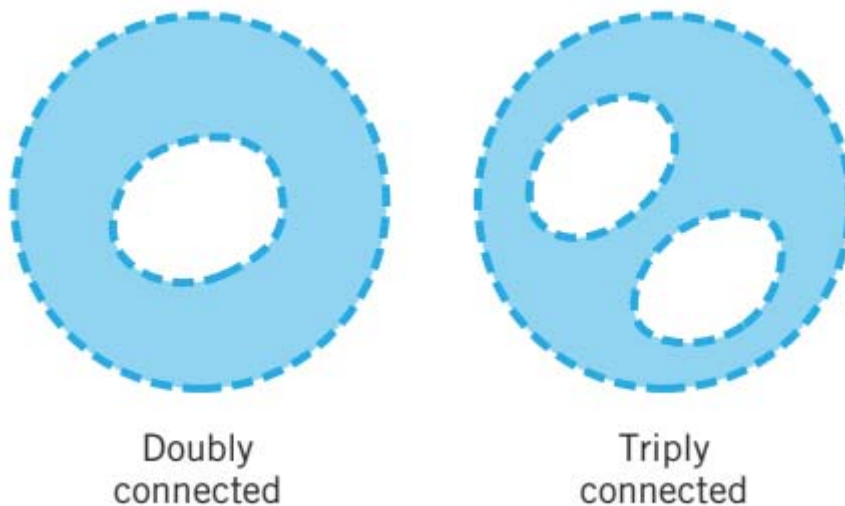
تصویر شماره 5

تصاویر دامنه بسته ساده



تصویر شماره 6 تصاویر دامنه های بسته چند تا یی

تصویر شماره 6
دامنه های بسته چند تایی



قضیه 1

قضیه انتگرال کاشی Cauchy's Integral Theorem

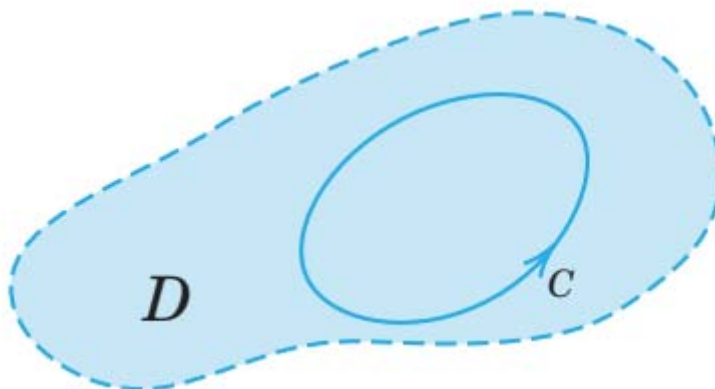
اگر $f(z)$ در یک دامنه بسته ساده D ، تحلیلی باشد، پس برای هر مسیر بسته ساده C در D داریم.

(1)

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

تصویر شماره 7

تصویر شماره 7
قضیه انتگرال کاشی



اجازه دهید چند مثال مورد بررسی قرار دهیم تا بفهمیم در مورد چه چیزی صحبت می کنیم. یک مسیر بسته ساده را گاهی، **منحنی تراز Contour** می نامند و انتگرال روی چنین مسیری را **انتگرال تراز Contour Integral** می نامند. پس شماره (1) و مثال های ما شامل انتگرال های تراز هستند.

مثال 1

تابع های کامل Entire Functions

تابع های کامل ، تابع های هائی هستند که برای تمام z ها ، تحلیلی هستند.

$$\oint_C e^z dz = 0, \quad \oint_C \cos z dz = 0, \quad \oint_C z^n dz = 0 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

برای هر مسیر بسته. چون این تابع ها کامل هستند. به عبارت دیگر ، این تابع ها برای تمام z ها ، تحلیلی هستند.

مثال 2

نقاط بیرون منحنی تراز جایی که $f(x)$ تحلیلی نیست.

Points outside the Contour Where the Function Is not Analytic

$$\oint_C \sec z dz = 0, \quad \oint_C \frac{dz}{z^2 + 4} = 0$$

اینجا ، C یک دایره واحد است. می دانیم که

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}$$

در

$$z = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \dots$$

تحلیلی نیست ، اما تمام این نقاط بیرون C قرار دارند ، هیچ کدام از این نقاط روی C یا داخل C قرار ندارند. به همین طریق برای انتگرال دوم ، که انتگرال آن در $z = \pm 2i$ تحلیلی نیست.

مثال 3

تابع غیر تحلیلی Nonanalytic Function

$$\oint_C \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = 2\pi i$$

اینجا $C: z(t) = e^{it}$ دایره واحد است. این خلاف قضیه کاشی نیست ، زیرا $f(z) = \bar{z}$ تحلیلی نیست.

مثال 4

فقط تحلیلی بودن کافی است

Analyticity Sufficient, Not Necessary

$$\oint_C \frac{dz}{z^2} = 0$$

اینجا C دایره واحد است. این نتیجه، از قضیه کاشی تبعیت نمی کند، زیرا $f(z) = \frac{1}{z^2}$ در $z = 0$ تحلیلی نیست. پس فقط شرط تحلیلی بودن f در D کافی است که شماره (1) برقرار باشد. به تمرین شماره 1 توجه کنید، تا منظور تحلیلی بودن کافیت را درک کنید. به عبارت دیگر هر کجا f تحلیلی باشد، آن وقت قضیه کاشی برقرار است، لازم نیست f در تمام مسیر تحلیلی باشد.

مثال 5

بسته بودن ساده لازم است Simple Connectedness Essential

$$\oint_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

برای انتگرال گیری خلاف جهت عقربه ساعت پیرامون دایره واحد. C در چنبره $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$ قرار دارد جایی که $\frac{1}{z}$ تحلیلی است، اما دامنه، بسته ساده نیست، بطوری که قضیه کاشی نمی توان بکار برد.

لذا شرط دامنه D بسته ساده باشد، لازم است.

به عبارت دیگر، بر اساس قضیه کاشی، اگر $f(z)$ روی یک مسیر بسته ساده C تحلیلی باشد و همه جا داخل C بدون استثنا، پس (1) برقرار است. نقطه ای که اینجا مشکل ایجاد می کند $z = 0$ است، زیرا اینجا $\frac{1}{z}$ تحلیلی نیست.

قضیه 2

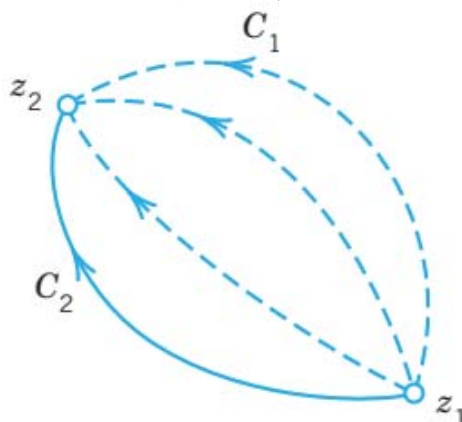
ناوابستگی به مسیر Independence of Path

اگر $f(z)$ در دامنه پیوسته ساده D تحلیلی باشد، پس انتگرال $f(z)$ ناوابسته به مسیر D است.

اصل به هم ریختگی مسیر Principle of Deformation of Path

تا زمانی که به هم ریختگی مسیر، همیشه شامل نقاطی باشد که در آنها $f(z)$ تحلیلی است، مقدار انتگرال تغییر نمی کند. تصویر شماره 8

تصویر شماره ۸
مسیر به هم ریخته پیوسته



مثال ۶

انتگرال توان های عدد صحیح

بر اساس مثال ۶ بخش ۵.۱ و اصل به هم ریختگی مسیر داریم.

$$(3) \quad \oint (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 2\pi i & (m = -1) \\ 0 & (m \neq -1) \end{cases}$$

شماره (۳) برای خلاف جهت عقربه ساعت پیرامون هر مسیر بسته ساده شامل z_0 در درون آن، برقرار است.

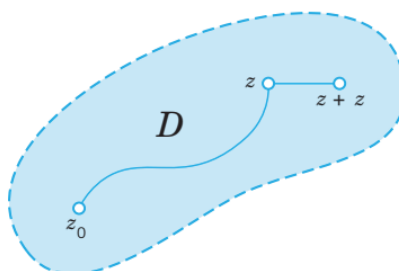
قضیه ۳

وجود انتگرال نامعین

اگر $f(z)$ در یک دامنه بسته ساده D تحلیلی باشد، پس یک انتگرال نامعین $F(z)$ از $f(z)$ در دامنه D وجود دارد، پس $F'(z) = f(z)$ که در D تحلیلی است، و برای تمام مسیرها در D که هر دو نقطه z_0 و z_1 به هم متصل می کنند، انتگرال $f(z)$ از z_0 تا z_1 را می توان محاسبه کرد بر اساس فرمول (۹) بخش ۵.۱

تصویر شماره ۹
مسیر انتگرال گیری

$$F(z) = \int f(z) dz.$$



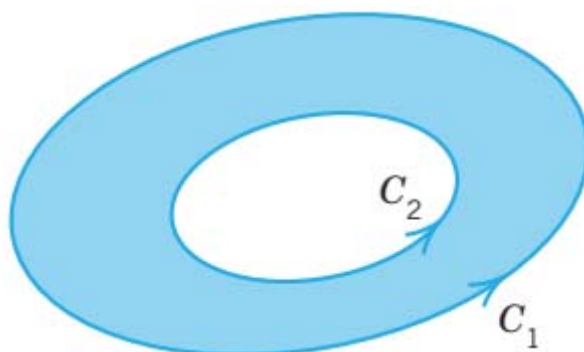
قضیه 4

انتگرال کاشی برای چند دامنه پیوسته

Cauchy's Integral Theorem for Multiple Connected Domains

قضیه کاشی برای چند دامنه بسته هم معتبر است. ابتدا برای دو دامنه پیوسته D با مسیر خارجی C_1 و مسیر داخلی C_2 تصویر شماره 10

تصویر شماره 10



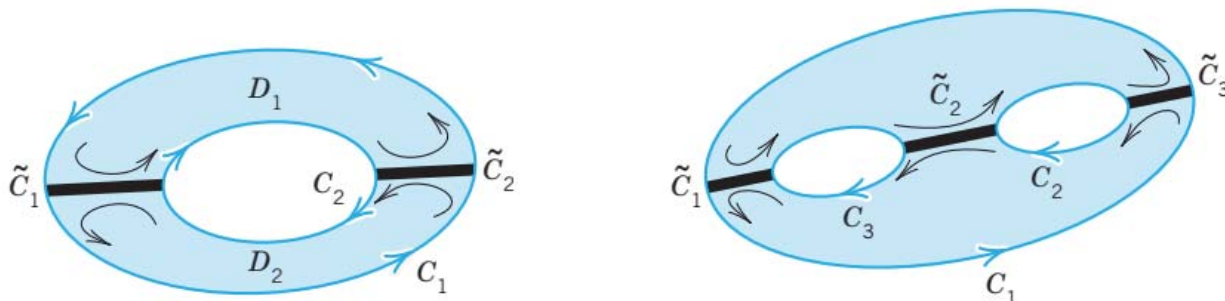
اگر یک تابع $f(z)$ در هر دامنه D^* که مشتمل بر D و مسیرهای مرزی آن، تحلیلی باشد، پس داریم. تصویر شماره 10

$$(6) \quad \oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_2} f(z) dz$$

هر دو انتگرال یا خلاف جهت عقربه ساعت یا هر دو موافق جهت عقربه ساعت.

این قضیه برای بیش از دو دامنه هم معتبر است.

تصویر شماره 11



مثال 7

مطلوب است محاسبه انتگرال زیر.

$$\int_C \frac{z^2}{z-5} dz$$

اینجا C دایره ای است بطوری که $|z| = 2$ باشد.

پاسخ
اگر

$$\int_C \frac{z^2}{z-5} dz$$

را با

$$\int_C f(z) dz$$

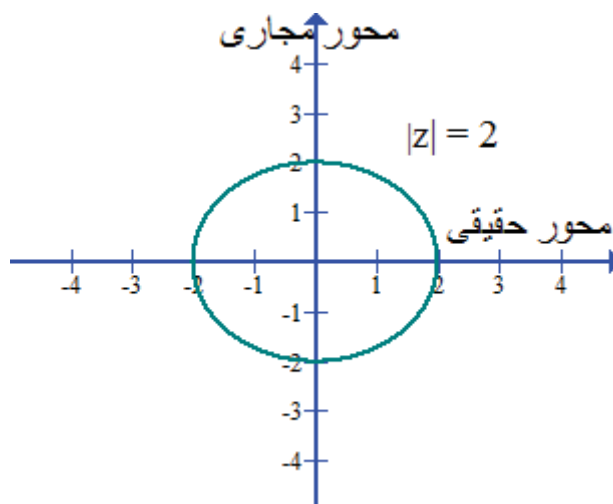
مقایسه کنیم ، پس داریم.

$$f(z) = \frac{z^2}{z-5}$$

این تابع در $z = 5$ تحلیلی نیست. اما ، این نقطه بیرون دایره تعریف شده توسط $|z| = 2$ است. لذا $f(z)$ در تمام نقاط داخل و روی مسیر بسته C ، یک تابع تحلیلی است. پس بر اساس قضیه کاشی داریم.

$$\int_C \frac{z^2}{z-5} dz = 0$$

توضیح بیشتر : دایره $|z| = 2$ یعنی یک دایره با مرکز مبدا مختصات و شعاع 2 لذا این تابع فقط در این مسیر تحلیلی نیست و خارج از این مسیر ، تحلیلی است.



بخش 5.3

فرمول انتگرال کاشی Cauchy's Integral Formula

قضیه انتگرال کاشی منتهی به فرمول انتگرال کاشی می شود. این فرمول برای محاسبه انتگرال ها مفید است. نقش مهم دیگری هم دارد ، مانند اثبات این حقیقت که تابع های تحلیلی ، دارای مشتق های تمام مرتبه هستند. همچنین نشان می دهد که تابع های تحلیلی دارای یک شکل سری تیلور هستند.

قضیه 1

فرمول انتگرال کاشی Cauchy's Integral Formula

فرض می کنیم $f(z)$ در یک دامنه بسته ساده D تحلیلی باشد ، پس برای هر نقطه z_0 در D و هر مسیر بسته ساده C در D که z_0 را در بر می گیرد ، داریم.

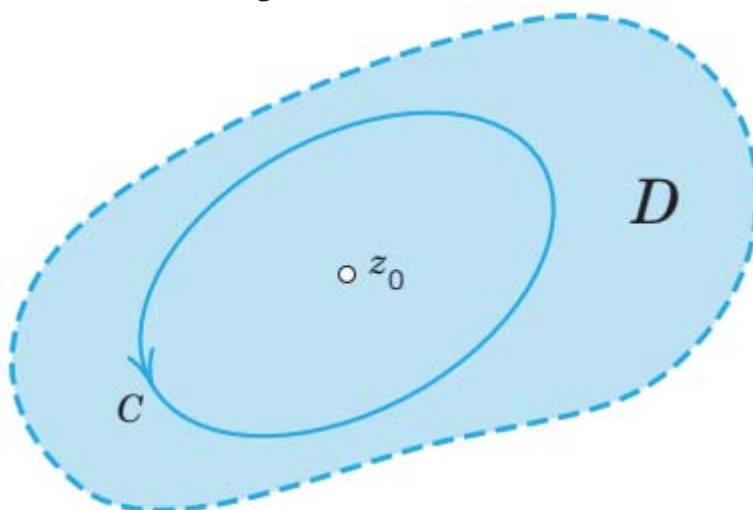
$$(1) \quad \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

تصویر شماره 1

فرمول بالا فرمول انتگرال کاشی است. انتگرال خلاف جهت عقربه ساعت گرفته می شود. همچنین برای $f(z_0)$ از طریق انتگرال تراز داریم.

$$(1^*) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

تصویر شماره 1
فرمول انتگرال کاشی



مثال 1

فرمول انتگرال کاشی

$$\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz = 2\pi i e^z \Big|_{z=2} = 2\pi i e^2 = 46.4268i$$

برای هر منحنی تراز که $z_0 = 2$ جواب بالا صحیح است، زیرا e^z تحلیلی است.

مثال 2

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{z^3 - 6}{2z - i} dz &= \oint_C \frac{\frac{1}{2}z^3 - 3}{z - \frac{1}{2}i} dz \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{2}z^3 - 3 \right] \Big|_{z=i/2} \\ &= \frac{\pi}{8} - 6\pi i \end{aligned}$$

توجه دارید که $z_0 = \frac{1}{2}i$ داخل C است.

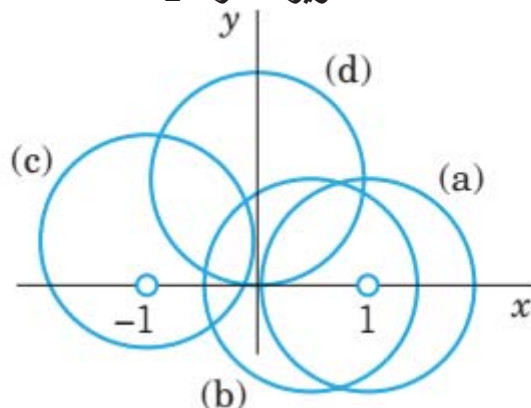
مثال 3

انتگرال گیری اطراف منحنی های تراز مختلف
انتگرال بگیرید.

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = \frac{z^2 + 1}{(z+1)(z-1)}$$

خلاف جهت عقربه ساعت پیرامون هر یک از چهار دایره های تصویر 2

تصویر شماره 2



پاسخ

تابع $g(z)$ در ± 1 تحلیلی نیست. در این نقاط باید مواظب باشیم. هر یک از دایره ها را جدا گانه بررسی می کنیم.

الف - دایره $|z - 1| = 1$ یعنی دایره به مرکز $x = 1$ و شعاع 1 . این دایره نقطه $z_0 = 1$ را در بر می گیرد. در این نقطه $g(z)$ تحلیلی نیست. پس در فرمول (1) باید بنویسیم

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = \frac{z^2 + 1}{z + 1} \frac{1}{z - 1};$$

پس

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z + 1}$$

و بر اساس شماره (1) داریم.

$$\oint_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \left[\frac{z^2 + 1}{z + 1} \right]_{z=1} = 2\pi i.$$

ب - بر اساس اصل مسیر به هم ریخته ، همان جواب الف را بدست می آوریم. زیرا دایره b هم نقطه 1 را در بر می گیرد.

ج - تابع $g(z)$ تغییری نمی کند، اما $f(z)$ تغییر می کند ، زیرا باید $z_0 = -1$ قرار دهیم. این به ما فاکتور زیر را در (1) می دهد.

$$z - z_0 = z + 1$$

پس باید نوشت.

$$g(z) = \frac{z^2 + 1}{z - 1} \frac{1}{z + 1};$$

لذا داریم.

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - 1}.$$

این را با عبارت قبل مقایسه می کنیم، پس

$$\oint_C \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = 2\pi i f(-1) = 2\pi i \left[\frac{z^2 + 1}{z - 1} \right]_{z=-1} = -2\pi i.$$

د - صفر بدست می آوریم. می دانید چرا؟ به تصویر نگاه کنید. دایره d هیچ کدام از نقاط ± 1 را در بر نمی گیرد. پس تابع اینجا تحلیلی است و طبق قضیه کاشی ، حاصل انتگرال صفر است.

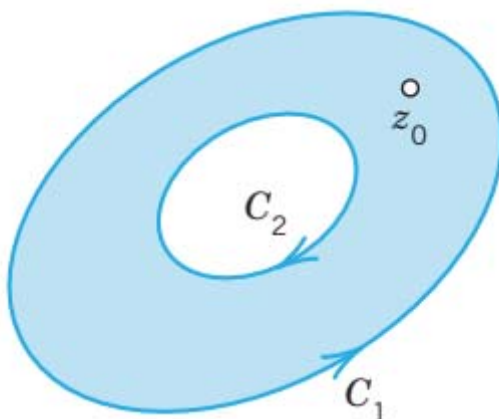
دامنه های محدود بین چند مسیر Multiply Connected Domains

اگر $f(z)$ روی C_1 و C_2 و دامنه حلقوی که توسط C_1 و C_2 محدود شده، تحلیلی باشد و z_0 یک نقطه در آن دامنه باشد، پس

$$(3) \quad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

تصویر شماره 3

تصویر شماره 3
برای فرمول شماره 3



تمرینات بخش 5.2 و 5.3

تمرین 1

مطلوب است محاسبه انتگرال زیر.

$$\int_C \frac{z^2}{z-5} dz$$

اینجا C دایره ای است بطوری که $|z| = 2$ باشد.

پاسخ
اگر

$$\int_C \frac{z^2}{z-5} dz$$

را با

$$\int_C f(z) dz$$

مقایسه کنیم، پس داریم.

$$f(z) = \frac{z^2}{z-5}$$

این تابع در $z = 5$ تحلیلی نیست. اما، این نقطه بیرون دایره تعریف شده توسط $|z| = 2$ است. لذا $f(z)$ در تمام نقاط داخل و روی مسیر بسته C ، یک تابع تحلیلی است. پس بر اساس قضیه کاشی داریم.

$$\int_C \frac{z^2}{z-5} dz = 0$$

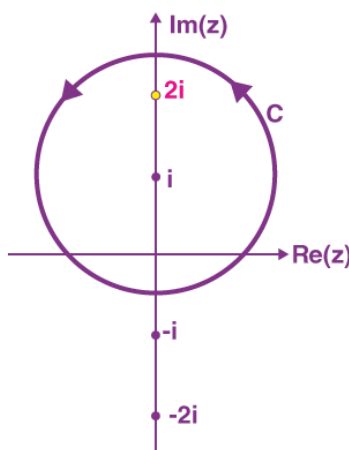
توضیح بیشتر: دایره $|z| = 2$ یعنی یک دایره با مرکز مبدا مختصات و شعاع 2. لذا این تابع فقط در این مسیر تحلیلی نیست و خارج از این مسیر، تحلیلی است.

تمرین 2

انتگرال زیر را روی منحنی تراز که در تصویر شماره 4 نشان داده شده است، محاسبه کنید.

$$\int_C \frac{1}{(z^2 + 4)^2} dz$$

تصویر شماره 4



BYJU'S
The Learning App

پاسخ

می توان نوشت

$$\frac{1}{(z^2 + 4)^2} = \frac{1}{(z^2 + 2^2)^2}$$

چون $i^2 = -1$ است پس می توان نوشت $2^2 = -(2i)^2$ پس داریم.

$$\frac{1}{(z^2 + 4)^2} = \frac{1}{[z^2 - (2i)^2]^2} = \frac{1}{(z - 2i)^2 (z + 2i)^2}$$

حالا، فرض می کنیم

$$f(z) = \frac{1}{(z + 2i)^2}$$

باشد، پس می توان گفت $f(z)$ داخل C یک تابع تحلیلی است. لذا، بر اساس فرمول انتگرال کاشی، می توان نوشت

$$\int_C \frac{1}{(z^2 + 4)^2} dz = \int_C \frac{f(z)}{(z - 2i)^2} = 2\pi i f'(2i)$$

با استفاده از

$$f'(z) = -\frac{2}{(z + 2i)^3}$$

داریم.

$$\begin{aligned} 2\pi i f'(2i) &= 2\pi i \left(\frac{-2}{(2i + 2i)^3} \right) = 2\pi i \left(-\frac{2}{(2i + 2i)^3} \right) = \frac{-4\pi i}{(4i)^3} \\ &= \frac{-4\pi i}{-64i} = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

تمرین 3

انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_C |z|^2 dz$$

اگر منحنی تراز C به صورت های زیر باشد.

الف- پاره خط با نقطه ابتدایی -1 و نقطه پایانی i باشد.

ب- کمان دایره واحد $Im z \geq 0$ با نقطه شروع -1 و نقطه پایانی i .

آیا دو جواب با هم تطبیق می کنند؟

پاسخ
الف

$$\int_C |z|^2 dz$$

پاره خط را به صورت زیر پارامتری می کنیم.

$$z = -1 + (1 + i)t, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

پس

$$|z|^2 = (-1 + t)^2 + t^2$$

و

$$dz = (1 + i) dt.$$

مقدار انتگرال می شود.

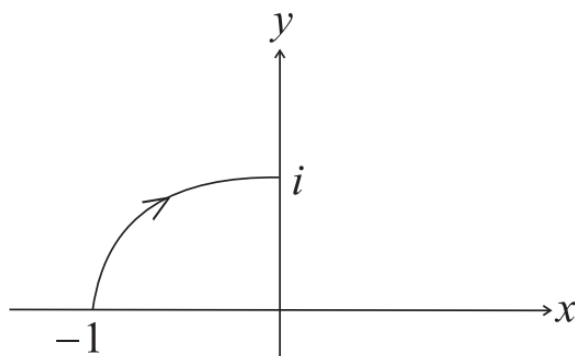
$$\int_C |z|^2 dz = \int_0^1 (2t^2 - 2t + 1)(1 + i) dt = \frac{2}{3}(1 + i).$$

ب

در طول دایره واحد $|z| = 1$ و $z = e^{i\theta}$, $dz = ie^{i\theta} d\theta$ و نقطه ابتدایی و نقطه پایانی مسیر به ترتیب $\theta = \pi$ و $\theta = \frac{\pi}{2}$ است. محاسبه انتگرال به صورت زیر است.

$$\int_C |z|^2 dz = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} ie^{i\theta} d\theta = e^{i\theta} \Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + i.$$

نتایج الف و ب مساوی نیستند. پس مقدار این انتگرال تراز به مسیر انتگرال گیری وابسته نیست. تصویر مسیر



تمرین 4

انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_C \frac{1}{z^2} dz.$$

اگر منحنی تراز C به صورت های زیر باشد.

الف- پاره خط با نقطه ابتدایی -1 و نقطه پایانی i باشد.

ب- کمان دایره واحد $Im z \geq 0$ با نقطه شروع -1 و نقطه پایانی i .

پاسخ

الف - پاره خط از -1 تا i

$$\int_C \frac{1}{z^2} dz = \int_0^1 \frac{1+i}{[-1+(1+i)t]^2} dt = -\frac{1}{-1+(1+i)t} \Big|_0^1 = -1 - \frac{1}{i} = -1 + i.$$

ب نیمه منحنی از -1 تا i

$$\int_C \frac{1}{z^2} dz = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{2i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = -e^{-i\theta} \Big|_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -1 + i.$$

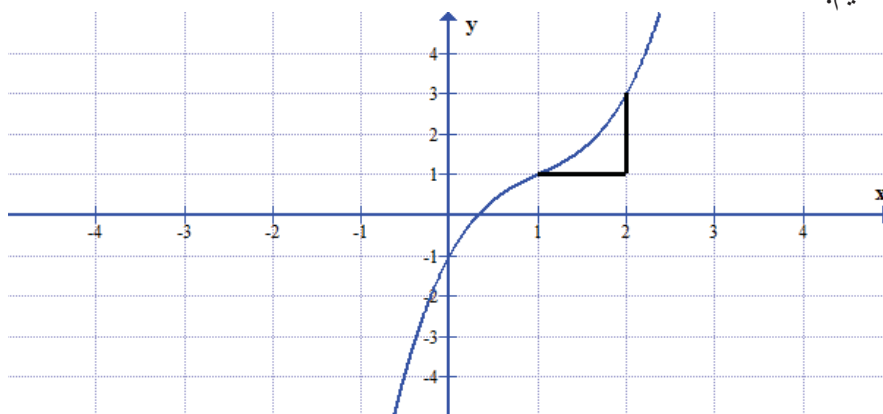
تمرین 5

اگر C منحنی $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ بین نقاط $(1,1)$ و $(2,3)$ باشد، مطلوب است مقدار انتگرال زیر.

$$\int_C (12z^2 - 4iz) dz.$$

پاسخ

انتگرال بین نقاط $(1,1)$ و $(2,3)$ وابسته به مسیر نیست، مستقل است. پس هر مسیری را می توان انتخاب کرد. پس اجزای مسیرهای خط مشتمیم از $(1,1)$ تا $(2,1)$ و از $(2,1)$ تا $(2,3)$ انتخاب کنیم.



حالت اول در طول مسیر از $(1,1)$ تا $(2,1)$ داریم $y = 1, dy = 0$ پس
 $z = x + iy = x + i, dz = dx.$
 لذا انتگرال به صورت زیر است.

$$\int_1^2 \{12(x+i)^2 - 4i(x+i)\} dx = \{4(x+i)^3 - 2i(x+i)^2\} \Big|_1^2 = 20 + 30i.$$

حالت دوم در طول مسیر از $(2,1)$ تا $(2,3)$ داریم $x = 2, dx = 0$ بطوری که
 $z = x + iy = 2 + iy, dz = i dy.$

پس انتگرال می شود.

$$\int_1^3 \{12(2+iy)^2 - 4i(2+iy)\} i dy = \{4(2+iy)^3 - 2i(2+iy)^2\} \Big|_1^3 = -176 + 8i.$$

حالا دو نتیجه را با هم جمع می کنیم. پس داریم.

$$(20 + 30i) + (-176 + 8i) = -156 + 38i.$$

تمرین 6

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ze^z}{z-i} dz$$

در صورتی که $C = |z| = 2$ دایره ای به شعاع 2 و مرکزیت 0 خلاف جهت عقربه ساعت باشد.

پاسخ

ملاحظه می کنید که $f(z) = ze^z$ کامل است، یعنی برای تمام z ها، تحلیلی است.

$$f'(z) = ze^z + e^z$$

پیوسته است و i داخل C است. پس بر اساس فرمول انتگرال کاشی داریم.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{ze^z}{z-i} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z-i} dz = f(i) = ie^i.$$

تمرین 7

مطلوب است

$$\int_C \frac{ze^z}{z+i} dz$$

در صورتی که مسیر C مانند مسیر تمرین قبلی باشد.

پاسخ

ملاحظه می شود که $f(z) = ze^z$ کامل است و $f'(z) = ze^z + e^z$ پیوسته است و $-i$ داخل C است. پس.

$$\int_C \frac{ze^z}{z+i} dz = \int_C \frac{f(z)}{z+i} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \cdot -ie^{-i} = 2\pi e^{-i}.$$

تمرین 8

مطلوب است

$$\int_C \frac{ze^z}{z^2+1} dz$$

مسیر C هم مانند تمرین قبل است.

پاسخ

کسر های پاره ای داریم.

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{z^2 - i^2} = \frac{1}{(z + i)(z - i)} = \frac{i/2}{z + i} - \frac{i/2}{z - i}$$

پس

$$\int_C \frac{ze^z}{z^2 + 1} dz = \frac{i}{2} \int_C \frac{ze^z}{z + i} dz - \frac{i}{2} \int_C \frac{ze^z}{z - i} dz.$$

فرض می کنیم $f(z) = ze^z$ باشد. $f(z)$ کامل است و $f'(z) = ze^z + e^z$ پیوسته است. چون هم i و هم $-i$ داخل C هستند، پس بر اساس فرمول انتگرال کاشی داریم.

$$\int_C \frac{ze^z}{z + i} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i \cdot -ie^{-i} = 2\pi e^{-i}$$

و

$$\int_C \frac{ze^z}{z - i} dz = 2\pi i f(i) = 2\pi i \cdot ie^i = -2\pi e^i$$

بطوری که

$$\int_C \frac{ze^z}{z^2 + 1} dz = \frac{i}{2} \cdot 2\pi e^{-i} - \frac{i}{2} \cdot -2\pi e^i = \pi i e^{-i} + \pi i e^i = 2\pi i \left[\frac{e^i + e^{-i}}{2} \right] = 2\pi i \cos 1.$$

تمرین 9

انتگرال زیر را محاسبه کنید. مسیر C مانند تمرین قبل است.

$$\int_C \frac{e^{5z}}{(z - i)^3} dz$$

پاسخ

فرض می کنیم $f(z) = e^{5z}$ باشد، پس $f(z)$ کامل است. فرض می کنیم $a = i$ باشد که داخل C است. پس

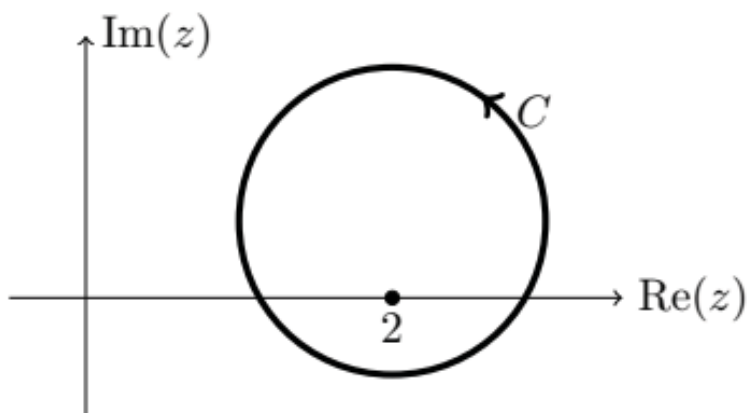
$$\int_C \frac{e^{5z}}{(z - i)^3} dz = \frac{2\pi i f''(i)}{2!} = 25\pi i e^{5i}$$

زیرا $f''(z) = 25e^{5z}$ است.

تمرین 10

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{z-2} dz$$

مسیر C هم مطابق تصویر زیر است.

پاسخ

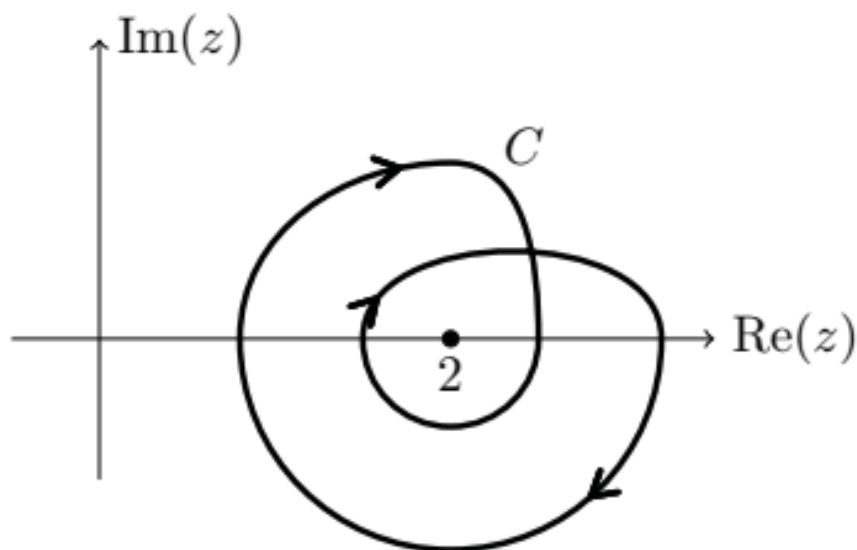
فرض می کنیم $f(z) = e^{z^2}$ باشد، پس f کامل است. چون C یک منحنی بسته ساده است و $z = 2$ داخل C است، فرمول انتگرال کاشی می گوید پاسخ انتگرال می شود.

$$2\pi i f(2) = 2\pi i e^4$$

تمرین 11

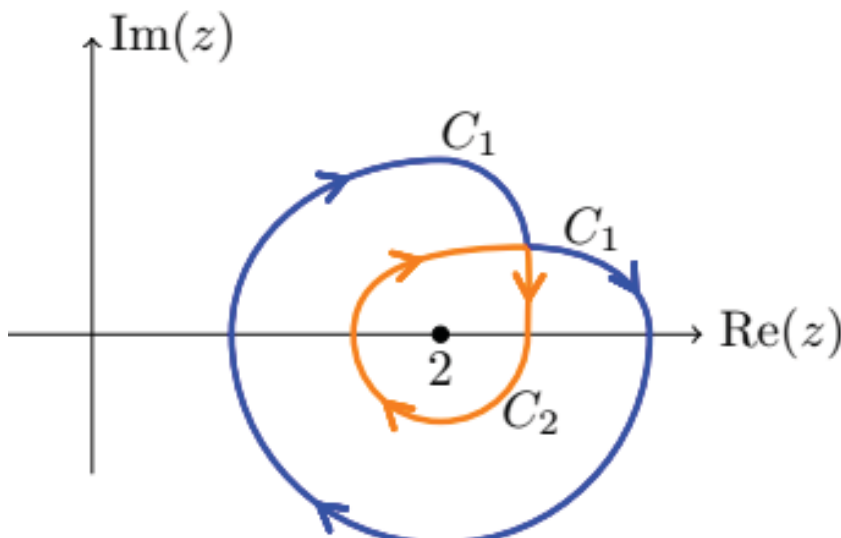
انتگرال زیر را محاسبه کنید

$$\int_C \frac{e^{z^2}}{z-2} dz,$$

اگر C مطابق تصویر زیر باشد.

پاسخ

فرض می کنیم $f(z) = e^{z^2}$ باشد. اینجا منحنی C دو مرتبه گرد 2 خلاف جهت عقربه ساعت می چرخد. پس C را به دو قسمت $C_1 + C_2$ تقسیم می کنیم، مطابق تصویر زیر.



هر دو مسیر ها، منحنی های بسته ساده هستند، پس فرمول انتگرال کاشی را برای هر کدام جدا گانه بکار می بریم. علامت منفی بخاطر این است که منحنی موافق جهت عقربه ساعت اطراف $z = 2$ می چرخد.

$$\int_C \frac{f(z)}{z-2} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-2} dz + \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-2} dz = -2\pi i f(2) - 2\pi i f(2) = -4\pi i f(2).$$

تمرین 12

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$I = \int_C \frac{e^{2z}}{z^4} dz$$

اینجا

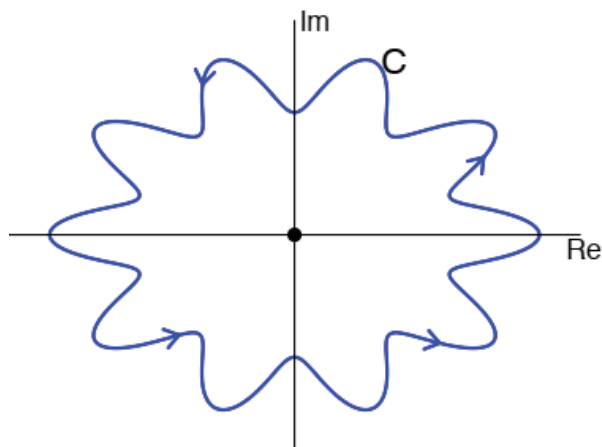
$$C : |z| = 1.$$

است.

پاسخ

فرمول انتگرال کاشی برای مشتق ها، بکار می بریم.

$$I = \int_C \frac{f(z)}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} f'''(0) = \frac{8}{3}\pi i.$$

تمرین 13اگر C منحنی تراز زیر باشد

مطلوب است

$$I = \int_C \frac{e^{2z}}{z^4} dz$$

پاسخ

جواب مانند تمرین شماره 12 است یعنی

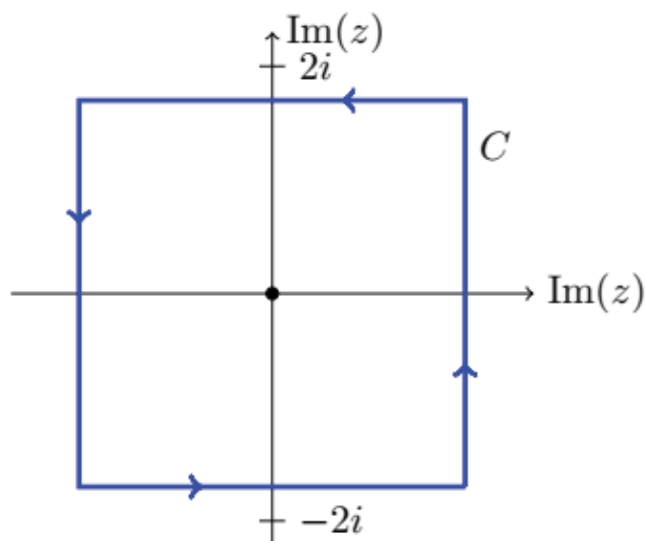
$$I = \frac{8}{3}\pi i.$$

تمرین 14

مطلوب است

$$\int_C \frac{\cos(z)}{z(z^2 + 8)} dz$$

روی منحنی تراز زیر



پاسخ
فرض می‌کنیم

$$f(z) = \cos(z)/(z^2 + 8).$$

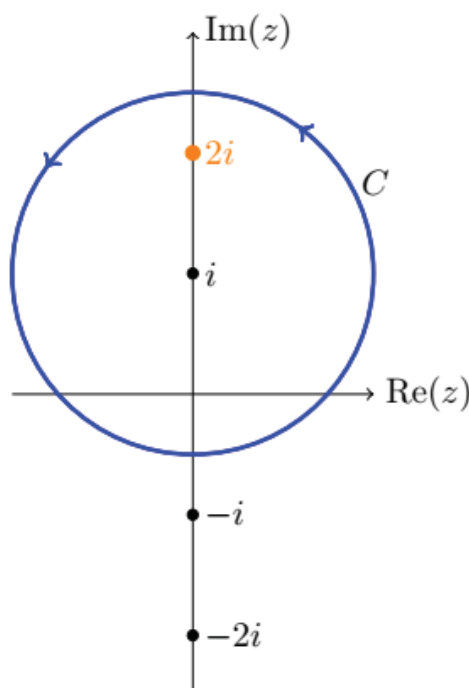
باشد، $f(z)$ روی C و داخل آن، تحلیلی است. یعنی ریشه‌های $z^2 + 8$ بیرون منحنی هستند. فرمول انتگرال کاشی را بکار می‌بریم با $z_0 = 0$ پس داریم.

$$\int_C \frac{\cos(z)/(z^2 + 8)}{z} dz = \int_C \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \frac{1}{8} = \frac{\pi i}{4}.$$

تمرین 15
انتگرال

$$\int_C \frac{1}{(z^2 + 4)^2} dz$$

روی منحنی تراز زیر



محاسبه کنید.

پاسخ
از مخرج، فاکتور می‌گیریم.

$$\frac{1}{(z^2 + 4)^2} = \frac{1}{(z - 2i)^2(z + 2i)^2}.$$

حالا ، فرض می کنیم

$$f(z) = \frac{1}{(z + 2i)^2}.$$

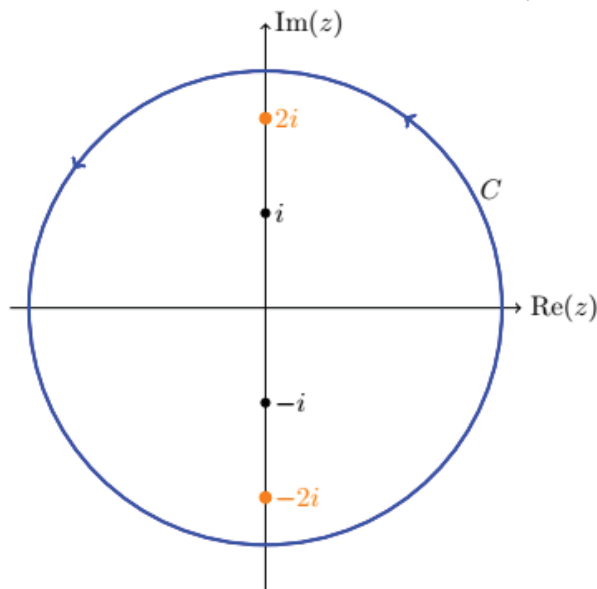
واضح است که $f(z)$ داخل C تحلیلی است. پس فرمول کاشی برای مشتق ها ، بکار می بریم.

$$\int_C \frac{1}{(z^2 + 4)^2} dz = \int_C \frac{f(z)}{(z - 2i)^2} = 2\pi i f'(2i) = 2\pi i \left[\frac{-2}{(z + 2i)^3} \right]_{z=2i} = \frac{4\pi i}{64i} = \frac{\pi}{16}$$

تمرین 16
انتگرال زیر را

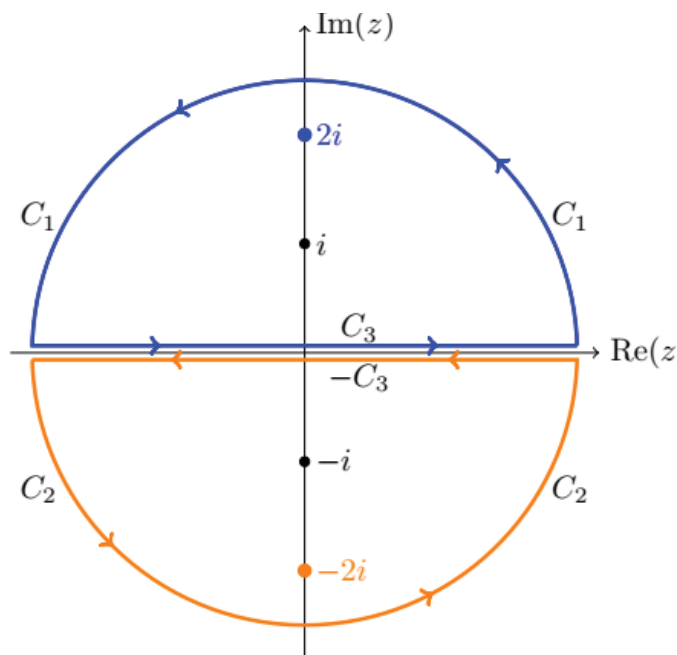
$$\int_C \frac{z}{z^2 + 4} dz$$

روی منحنی تراز زیر محاسبه کنید.



پاسخ

این انتگرال دو تکینگی Singularity در ± 2 دارد. یعنی در این دو نقطه ، تابع تعریف شده نیست. منحنی C هر دو نقطه را در بر می گیرد. راه حل تمرین قبل کار نمی کند. زیرا نمی توانیم یک $f(z)$ مناسب پیدا کنیم بطوری که در تمام محوطه داخلی C تحلیلی باشد. راه حل این است که منحنی را به دو قطعه تقسیم کنیم. ملاحظه می کنید که C_3 به طرف جلو و به طرف عقب پس و پیش می رود.



داریم.

$$\frac{z}{z^2 + 4} = \frac{z}{(z - 2i)(z + 2i)}.$$

حالا ، فرض می کنیم

$$f_1(z) = \frac{z}{z + 2i} \quad f_2(z) = \frac{z}{z - 2i}.$$

باشد پس

$$\frac{z}{z^2 + 4} = \frac{f_1(z)}{z - 2i} = \frac{f_2(z)}{z + 2i}.$$

انتگرال را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\int_C \frac{z}{z^2 + 4} dz = \int_{C_1 + C_3 - C_3 + C_2} \frac{z}{z^2 + 4} dz = \int_{C_1 + C_3} \frac{f_1(z)}{z - 2i} dz + \int_{C_2 - C_3} \frac{f_2(z)}{z + 2i} dz$$

چون f_1 داخل منحنی بسته ساده $C_1 + C_3$ تحلیلی است و f_2 داخل منحنی $C_2 - C_3$ تحلیلی است ، پس فرمول کاشی برای هر دو انتگرال کار برد دارد ، مجموع انتگرال ها به صورت زیر است.

$$2\pi i(f_1(2i) + f_2(-2i)) = 2\pi i(1/2 + 1/2) = 2\pi i.$$

تمرین 17

انتگرال های زیر را محاسبه کنید. اینجا γ یک منحنی هموار تکه ای ساده در $\mathbb{C}$ است در جهت خلاف عقربه ساعت

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z} dz \quad \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz$$

پاسخ

برای $z_0 = 0$ داریم.

$$\sin(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sin z}{z} dz \Leftrightarrow \int_{\gamma} \frac{\sin z}{z} dz = 0$$

$$\cos(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz \Leftrightarrow \int_{\gamma} \frac{\cos z}{z} dz = 2\pi i$$

تمرین 18

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} dz$$

اینجا γ یک دایره به شعاع 1 و مرکز آن در مبدا مختصات، خلاف جهت عقربه ساعت.

پاسخ

$$z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$$

برای $A, B \in \mathbb{C}$ داریم.

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{A}{z + i} + \frac{B}{z - i} \Leftrightarrow \frac{A(z - i)}{z^2 + 1} + \frac{B(z + i)}{z^2 + 1}$$

پس

$$1 = A(z - i) + B(z + i)$$

با قرار دادن $z = i$ داریم

$$1 = 2iB$$

پس

$$B = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$$

با قرار دادن $z = -i$ داریم.

$$1 = -2iA$$

پس

$$A = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}.$$

پس

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{i}{z+i} - \frac{i}{z-i} \right)$$

و سپس

$$\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} = \frac{i}{2} \left(\frac{z^2 - 1}{z+i} - \frac{z^2 - 1}{z-i} \right)$$

و

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} dz = \frac{i}{2} \left(\int_{\gamma} \frac{z^2 - 1}{z+i} dz - \int_{\gamma} \frac{z^2 - 1}{z-i} dz \right)$$

حالا، ملاحظه می کنید که $f(z) = z^2 - 1$ یک تابع تحلیلی است برای تمام $\mathbb{C}$ و شامل منحنی هموار تکه ای بسته ساده نسبت در $\mathbb{C}$ است. پس بر اساس فرمول انتگرال کاشی داریم.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} dz &= \frac{i}{2} (2\pi i f(-i) - 2\pi i f(i)) \\ &= -\pi ([(-i)^2 - 1] - [(i)^2 - 1]) \\ &= -\pi ((-1 - 1) - (-1 - 1)) \\ &= -\pi ((-2) - (-2)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

تمرین 19

انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_1^2 (t^2 + i)^2 dt$$

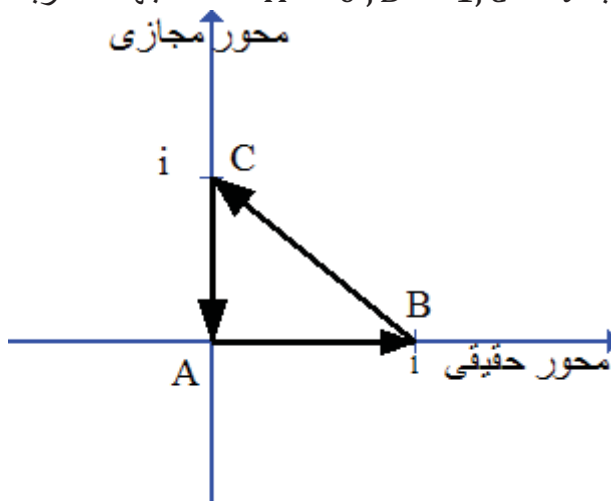
پاسخ

$$\begin{aligned} \int_1^2 (t^2 + i)^2 dt &= \int_1^2 (t^4 + 2it^2 + i^2) dt \\ &= \left. \frac{t^5}{5} + \frac{2it^3}{3} - t \right|_1^2 = \frac{26}{5} + \frac{14}{3}i \end{aligned}$$

تمرین 20

مطلوب است انتگرال تراز زیر

$$\int_L \bar{z} dz,$$

اینجا L مثلث ABC است با $A = 0, B = 1, C = i$ خلاف جهت عقربه ساعت.

پاسخ

$$\begin{aligned} \int_L \bar{z} dz &= \int_{AB} \bar{z} dz + \int_{BC} \bar{z} dz + \int_{CA} \bar{z} dz \\ &= \int_0^1 \bar{t} dt + \int_0^1 \overline{(1-t) + tid} ((1-t) + ti) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \overline{(1-t)} i d((1-t)i) \\
& = \int_0^1 t dt + (-1+i) \int_0^1 ((1-t) - ti) dt - \int_0^1 (1-t) dt = i
\end{aligned}$$

تمرین 21
اگر داشته باشیم

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z}$$

مطلوب است

$$\int_C f(z) dz$$

الف - اگر C نیم دایره زیر باشد

$$z = 2e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq \pi);$$

ب - اگر C نیم دایره زیر باشد.

$$z = 2e^{i\theta} \quad (\pi \leq \theta \leq 2\pi)$$

ج - اگر C دایره زیر باشد.

$$z = 2e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

پاسخ
الف

$$\int_C f(z) dz = \int_0^\pi \frac{4e^{2i\theta} - 1}{2e^{i\theta}} d(2e^{i\theta}) = (2e^{2i\theta} - i) \Big|_0^\pi = -\pi i$$

ب

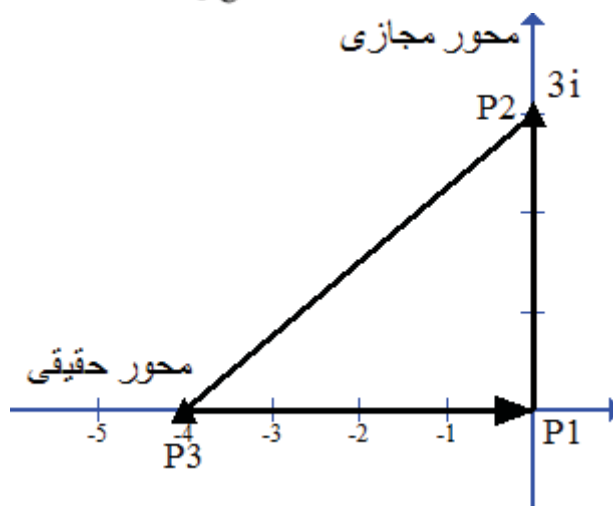
$$\int_C f(z) dz = \int_\pi^{2\pi} \frac{4e^{2i\theta} - 1}{2e^{i\theta}} d(2e^{i\theta}) = (2e^{2i\theta} - i) \Big|_\pi^{2\pi} = -\pi i$$

ج
الف و ب را جمع می کنیم. پس داریم $-2\pi i$

تمرین 22

فرض کنید C کران مثلث با رئوس $0, 3i, -4$ خلاف جهت عقربه ساعت باشد. مطلوب است.

$$\int_C (e^z - \bar{z}) dz.$$



پاسخ

بر اساس قضیه انتگرال کاشی، داریم

$$\int_C e^z dz = 0$$

زیرا C بسته است و e^z کامل است.

$$\begin{aligned} \int_C (e^z - \bar{z}) dz &= - \int_C \bar{z} dz = - \int_{P_1 P_2} \bar{z} dz - \int_{P_2 P_3} \bar{z} dz - \int_{P_3 P_1} \bar{z} dz \\ &= - \int_0^1 (-3it) d(3it) - \int_0^1 (-3i(1-t) - 4t) d(3i(1-t) - 4t) \\ &\quad - \int_0^1 (-4)(1-t) d((-4)(1-t)) \\ &= -\frac{9}{2} - \frac{7}{2} - 12i + 8 = -12i \end{aligned}$$

اینجا $P_1 = 0, P_2 = 3i, P_3 = -4$ است.

بخش 5.4

مشتق های تابع های تحلیلی Derivatives of Analytic Functions

با کمال تعجب باید گفت که تابع های تحلیلی مشتق های تمام مرتبه ها را دارا هستند. این کاملاً بر عکس حسابان اعداد حقیقی است. حتی اگر یک تابع حقیقی یک مرتبه مشتق پذیر باشد، نمی توانیم نتیجه بگیریم که مشتق مرتبه دوم یا بیشتر وجود دارد.

قضیه 1

مشتق های یک تابع تحلیلی

اگر $f(z)$ در یک دامنه D تحلیلی باشد، پس این تابع در D مشتق های تمام مرتبه ها را دارد. مقادیر این مشتق ها در نقطه z_0 در D از طریق فرمول های زیر بدست می آید.

$$(1') \quad f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

$$(1'') \quad f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz$$

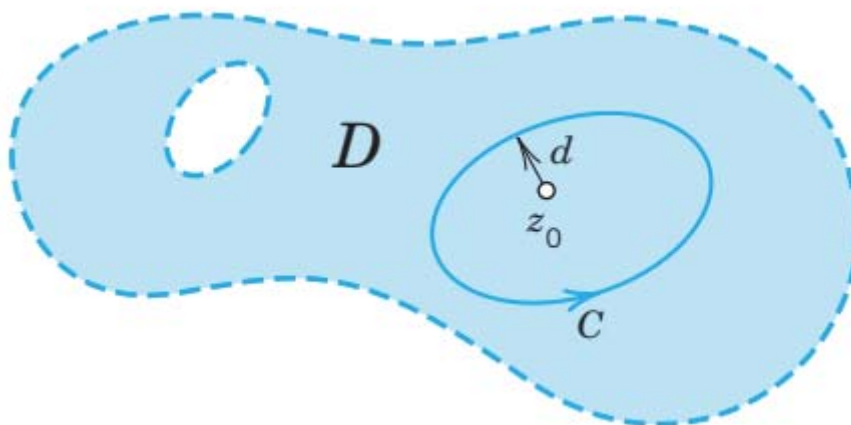
و بطور کلی

$$(1) \quad f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (n = 1, 2, \dots);$$

اینجا C هر مسیر بسته ساده که z_0 را در بر گیرد و تمام مرز های آن متعلق به D باشد، و خلاف جهت عقربه ساعت اطراف C انتگرال می گیریم. تصویر شماره 1.

تصویر شماره 1

قضیه 1



کاربرد های قضیه 1

مثال 1

محاسبه انتگرال های خط

بر اساس 1' برای هر منحنی تراز که نقطه πi را در بر گیرد (خلاف جهت عقربه ساعت)

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z - \pi i)^2} dz = 2\pi i (\cos z)' \Big|_{z=\pi i} = -2\pi i \sin \pi i = 2\pi \sinh \pi.$$

مثال 2

بر اساس (1'') برای منحنی تراز که نقطه $-i$ را در بر گیرد با انتگرال گیری خلاف جهت عقربه ساعت داریم.

$$\oint_C \frac{z^4 - 3z^2 + 6}{(z + i)^3} dz = \pi i (z^4 - 3z^2 + 6)'' \Big|_{z=-i} = \pi i [12z^2 - 6]_{z=-i} = -18\pi i.$$

مثال 3

بر اساس (1') برای هر منحنی تراز که 1 داخل و $\pm 2i$ خارج آن قرار داشته باشد، با انتگرال گیری خلاف جهت عقربه ساعت، داریم.

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^z}{(z-1)^2(z^2+4)} dz &= 2\pi i \left(\frac{e^z}{z^2+4} \right)' \Big|_{z=1} \\ &= 2\pi i \frac{e^z(z^2+4) - e^z 2z}{(z^2+4)^2} \Big|_{z=1} = \frac{6e\pi}{25} i \approx 2.050i. \end{aligned}$$

نامساوی کاشی Cauchy's Inequality

از قضیه 1 یک نامساوی مهم بدست می آید که کار برد های زیادی دارد. برای بدست آوردن آن تنها لازم است در فرمول (1) برای C یک دایره به شعاع r و مرکز z_0 انتخاب کنیم و نامساوی ML در بخش 5.1 انتخاب کنیم با $|f(z)| \leq M$ روی C پس بر اساس (1) داریم.

$$|f^{(n)}(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} M \frac{1}{r^{n+1}} 2\pi r.$$

این به ما نامساوی کاشی را می دهد، یعنی

(2)

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}.$$

قضیه 2

Liouville's Theorem قضیه لیوویل

اگر یک تابع کامل، محدود به قدر مطلق باشد در تمام صفحه مختلط، پس این تابع باید یک عدد ثابت باشد.

قضیه 3

Morera's Theorem موریرا

اگر $f(z)$ در یک دامنه بسته ساده D پیوسته باشد و اگر برای هر مسیر بسته در D داشته باشیم

$$(3) \quad \oint_C f(z) dz = 0$$

پس $f(z)$ در D تحلیلی است.

تمرینات بخش 5.4

تمرین 1

نشان دهید آیا $f(z) = \bar{z}$ مشتق پذیر است.

پاسخ

باید ببینیم این تابع پیوسته است یا نه. به عبارت دیگر آیا معادلات کاشی ریمان را برقرار می کند؟ می دانیم که

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$u = x, \quad v = -y$$

$$u_x = \frac{\delta}{\delta x} x = 1$$

$$u_y = \frac{\delta}{\delta y} x = 0$$

$$v_x = \frac{\delta}{\delta x} (-y) = 0$$

$$v_y = \frac{\delta}{\delta y} (-y) = -1$$

پس $u_x = -v_y$ است، اما $u_x \neq v_y$ است. لذا این تابع مشتق پذیر نیست.

تمرین 2

نشان دهید آیا $f(z) = z^2$ مشتق پذیر است.

پاسخ

$$z = x + iy$$

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + i^2y^2 + i2xy = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

$$u_x = \frac{\delta}{\delta x}(x^2 - y^2) = 2x - 0 = 2x$$

$$u_y = \frac{\delta}{\delta y}(x^2 - y^2) = 0 - 2y = -2y$$

$$v_x = \frac{\delta}{\delta x}2xy = 2y$$

$$v_y = \frac{\delta}{\delta y}2xy = 2x$$

پس $u_x = v_y$ و $u_y = -v_x$ است. لذا این تابع پیوسته است و مشتق پذیر.

تمرین 3

مشتق تابع مختلط $f(z) = z^3 - 2z + 6$ را محاسبه کنید. این تابع پیوسته است.

پاسخ

$$f'(z) = 3z^2 - 2$$

تمرین 4

مشتق تابع مختلط $f(z) = (1 + 4z)^3$ را محاسبه کنید. این تابع پیوسته است.

پاسخ

$$f'(z) = 12(1 + 4z)^2$$

تمرین 5

نشان دهید $f(z) = e^z$ مشتق پذیر است و سپس مشتق آنرا محاسبه کنید.

پاسخ

می دانیم که $z = x + iy$ است. پس می توان تابع داده شده را به صورت زیر نوشت.

$$f(z) = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x [\cos y + i \sin y]$$

$$f(z) = e^x \cdot \cos y + i e^x \sin y$$

اگر تابع دو شرط کاشی ریمان را برقرار کند، پس می توانیم مشتق را پیدا کنیم.

$$u(x, y) = e^x \cdot \cos y$$

$$v(x, y) = e^x \cdot \sin y$$

$$u_x = e^x * \cos y$$

$$u_y = -e^x * \sin y$$

$$v_x = e^x * \sin y$$

$$v_y = e^x * \cos y$$

پس $u_y = -v_x$ اما $u_x = v_y$ است. پس این تابع پیوسته است و مشتق پذیر.

$$f'(z) = u_x + i v_x$$

$$f'(z) = e^x * \cos y + i e^x * \sin y = e^x$$

تمرین 6

آیا $u(x, y) = x^2 + y^2$ هارمونیک است؟

پاسخ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 + 2 \neq 0.$$

پس تابع داده شده هارمونیک نیست.

تمرین 7

آیا $u(x, y) = x^2 - y^2$ هارمونیک است؟

پاسخ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0.$$

تابع داده شده هارمونیک است.

تمرین 8

مطلوب است مشتق زیر

$$(-4z^3 + i)^9$$

پاسخ

$$\frac{d}{dz}(-4z^3 + i)^9 = -108z^2(-4z^3 + i)^8.$$

تمرین 9

مطلوب است مشتق زیر

$$\left(\frac{iz - 1}{z^2 + 1}\right)^4$$

پاسخ

$$\begin{aligned}\left(\frac{iz - 1}{z^2 + 1}\right)^4 &= \left(\frac{1}{iz + 1}\right)^4 \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{iz + 1}\right)^4 &= \frac{-4i}{(iz + 1)^5}.\end{aligned}$$

تمرین 10

فرض کنید $p(z)$ یک چند جمله ای بر حسب z باشد. و فرض کنید تابع $e^{p(z)}$ تحلیلی باشد. مشتق $e^{p(z)}$ را پیدا کنید.

پاسخ

چون e^z و $p(z)$ هر دو، همه جا مشتق پذیر هستند، پس ترکیب $e^{p(z)}$ هم مشتق پذیر است. و داریم.

$$\left(e^{p(z)}\right)' = p'(z) e^{p(z)}.$$

تمرین 11

مسیر γ را پیدا کنید بطوری که اطراف دایره واحد خلاف عقربه ساعت می چرخد. γ' را توصیف کنید.

پاسخ

مسیر به صورت زیر است.

$$\gamma(t) = r e^{it}, t \in [0, 2\pi]$$

برای پیدا کردن $\gamma'(t)$ داریم

$$r(\cos t + i \sin t)$$

حالا مشتق می گیریم.

$$\gamma'(t) = r(-\sin t + i \cos t) = ir e^{it}.$$

تمرین 12

مطلوب است انتگرال های زیر.

(a) $\int_1^2 (t^2 + i)^2 dt;$

(b) $\int_0^{\pi/4} e^{-2it} dt;$

پاسخ

(a)

$$\begin{aligned} \int_1^2 (t^2 + i)^2 dt &= \int_1^2 (t^4 + 2it^2 + i^2) dt \\ &= \left. \frac{t^5}{5} + \frac{2it^3}{3} - t \right|_1^2 = \frac{26}{5} + \frac{14}{3}i \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} e^{-2it} dt &= - \left. \frac{e^{-2it}}{2i} \right|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1+i}{2i} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \end{aligned}$$

تمرین 13

مطلوب است انتگرال زیر

$$\int_L \bar{z} dz,$$

اینجا L مرز مثلث ABC است، با $A = 0, B = 1, C = i$ خلاف جهت عقربه ساعت.

پاسخ

$$\begin{aligned} \int_L \bar{z} dz &= \int_{AB} \bar{z} dz + \int_{BC} \bar{z} dz + \int_{CA} \bar{z} dz \\ &= \int_0^1 \bar{t} dt + \int_0^1 \overline{(1-t) + tid} ((1-t) + ti) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 \overline{(1-t)} i d((1-t)i) \\
& = \int_0^1 t dt + (-1+i) \int_0^1 ((1-t)-ti) dt - \int_0^1 (1-t) dt = i
\end{aligned}$$

تمرین 14

بدون محاسبه انتگرال، نشان دهید

$$\left| \int_C \frac{dz}{\bar{z}^2 + \bar{z} + 1} \right| \leq \frac{9\pi}{16}$$

اینجا C کمان دایره $|z| = 3$ است از $z = 3$ تا $z = 3i$ در ربع اول**پاسخ**

$$|\bar{z}^2 + \bar{z} + 1| \geq |\bar{z}^2| - |\bar{z}| - 1 = |z|^2 - |z| - 1 = 5$$

برای $|z| = 3$

$$\left| \frac{1}{\bar{z}^2 + \bar{z} + 1} \right| \leq \frac{1}{5}.$$

پس

$$\left| \int_C \frac{dz}{\bar{z}^2 + \bar{z} + 1} \right| \leq \frac{6\pi}{4} \left(\frac{1}{5} \right) = \frac{3\pi}{10} < \frac{9\pi}{16}.$$

تمرین 15فرض کنید C متز مثلثی است با رؤس در نقاط 0 ، $3i$ ، -4 ، خلاف جهت عقربه ساعت. مطلوب است انتگرال زیر.

$$\int_C (e^z - \bar{z}) dz.$$

پاسخ

بر اساس قضیه انتگرال کاشی داریم

$$\int_C e^z dz = 0$$

زیرا C بسته است و e^z کامل است. پس.

$$\begin{aligned}
\int_C (e^z - \bar{z}) dz &= - \int_C \bar{z} dz = - \int_{p_1 p_2} \bar{z} dz - \int_{p_2 p_3} \bar{z} dz - \int_{p_3 p_1} \bar{z} dz \\
&= - \int_0^1 (-3it) d(3it) - \int_0^1 (-3i(1-t) - 4t) d(3i(1-t) - 4t)
\end{aligned}$$

$$-\int_0^1 (-4)(1-t)d((-4)(1-t)) \\ = -\frac{9}{2} - \frac{7}{2} - 12i + 8 = -12i$$

اینجا $P1 = 0, P2 = 3i, P3 = -4$

تمرین 16

انتگرال $g(z)$ را محاسبه کنید پیرامون دایره $|z - i| = 2$ خلاف جهت عقربه ساعت. اگر داشته باشیم.

$$(a) \quad g(z) = \frac{1}{z^2 + 4};$$

$$(b) \quad g(z) = \frac{1}{z(z^2 + 4)}.$$

پاسخ

(a)

چون

$$-2i \notin \{|z - i| \leq 2\}$$

و

$$2i \in \{|z - i| \leq 2\},$$

پس بر اساس فرمول انتگرال کاشی داریم.

$$\int_{|z-i|=2} g(z) dz = \int_{|z-i|=2} \frac{(z+2i)^{-1}}{z-2i} dz = 2\pi i (2i+2i)^{-1} = \frac{\pi}{2}$$

(b)

بر اساس فرمول انتگرال کاشی

$$\int_{|z-i|=2} g(z) dz = \int_{|z|=r} g(z) dz + \int_{|z-2i|=r} g(z) dz$$

برای $r < \frac{1}{2}$ چون داریم.

$$\int_{|z|=r} g(z) dz = 2\pi i \left. \frac{1}{z^2 + 4} \right|_{z=0} = \frac{\pi i}{2}$$

و

$$\int_{|z-2i|=r} g(z) dz = 2\pi i \left. \frac{1}{z(z+2i)} \right|_{z=2i} = -\frac{\pi i}{4}$$

لذا

$$\int_{|z-i|=2} g(z) dz = \frac{\pi i}{4}$$

تمرین 17

فرض کنید C مرز مربعی است که ابعاد آن روی خط های $x = \pm 2$ و $y = \pm 2$ خلاف جهت عقربه ساعت قرار دارند. مطلوب است انتگرال های زیر.

- (a) $\int_C \frac{z dz}{z+1};$
 (b) $\int_C \frac{\cosh z}{z^2 + z} dz;$
 (c) $\int_C \frac{\tan(z/2)}{z - \pi/2} dz.$

پاسخ

(a)

بر اساس فرمول انتگرال کاشی

$$\int_C \frac{z dz}{z+1} = 2\pi i(-1) = -2\pi i.$$

(b)

بر اساس قضیه انتگرال کاشی

$$\int_C \frac{\cosh z}{z^2 + z} dz = \int_{|z|=r} \frac{\cosh z}{z^2 + z} dz + \int_{|z+1|=r} \frac{\cosh z}{z^2 + z} dz$$

برای $r = \frac{1}{2}$ بر اساس فرمول انتگرال کاشی

$$\int_{|z|=r} \frac{\cosh z}{z^2 + z} dz = 2\pi i \frac{\cosh(z)}{z+1} \Big|_{z=0} = 2\pi i$$

و

$$\int_{|z+1|=r} \frac{\cosh z}{z^2 + z} dz = 2\pi i \frac{\cosh z}{z} \Big|_{z=-1} = -2\pi i \cosh(-1).$$

پس

$$\int_C \frac{\cosh z}{z^2 + z} dz = 2\pi i(1 - \cosh(-1)).$$

(c)

می دانیم $\tan\left(\frac{z}{2}\right)$ در بازه زیر، تحلیلی است.

$$\{z \neq (2n+1)\pi : n \in \mathbb{Z}\}$$

و لذا در C تحلیلی است. پس

$$\int_C \frac{\tan(z/2)}{z - \pi/2} dz = 2\pi i \tan(\pi/4) = 2\pi i$$

تمرین 18

فرض کنید داشته باشیم.

$$f(z) = y - 2xy + i(-x + x^2 - y^2) + z^2$$

اینجا $z = x + iy$ یک متغیر مختلط تعریف شده در صفحه مختلط است. برای چه مقادیری از z مشتق $f'(z)$ وجود دارد؟

پاسخ

طرح ما این است که قسمت های حقیقی و مجازی f را مشخص کنیم و سپس چک کنیم آیا معادلات کاشی ریمان برقرار است یا نه. داریم.

$$\begin{aligned} f(z) &= y - 2xy + i(-x + x^2 - y^2) + x^2 - y^2 + 2ixy \\ &= x^2 - 2xy + y - y^2 + i(-x + 2xy + x^2 - y^2), \end{aligned}$$

پس

$$u(x, y) = x^2 - 2xy + y - y^2, \quad v(x, y) = -x + 2xy + x^2 - y^2.$$

مشتق های پاره ای u و v به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= 2x - 2y, & v_x(x, y) &= -1 + 2y + 2x, \\ u_y(x, y) &= -2x + 1 - 2y, & v_y(x, y) &= 2x - 2y. \end{aligned}$$

ملاحظه می کنیم که

$$u_x = v_y, \quad v_x = -u_y,$$

یعنی معادلات کاشی ریمان برای تمام x ها و y ها برقرار است. پس $f'(z)$ برای تمام z ها وجود دارد. یعنی f یک تابع کامل است. مشتق هم به صورت زیر است.

$$f'(z) = u_x + iv_x = 2x - 2y + i(2x + 2y - 1) = 2z + 2iz - i.$$

تمرین 19

نشان دهید $f(z) = (\bar{z} + 1)^3 - 3\bar{z}$ هیچ جا، تحلیلی نیست.

پاسخ

توان سوم را بسط می دهیم.

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + 1 - yi)^3 - 3(x - yi) \\ &= (x + 1)^3 - 3(x + 1)y^2 - 3(x + 1)^2yi + y^3i - 3x + 3yi \\ &= \underbrace{(x + 1)^3 - 3(x + 1)y^2 - 3x}_{u(x,y)} + i \underbrace{(y^3 + 3y - 3(x + 1)^2y)}_{v(x,y)}. \end{aligned}$$

اجازه دهید مشتق های پاره ای u و v را محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned} u_x &= 3(x + 1)^2 - 3y^2 - 3, & v_x &= -6(x + 1)y, \\ u_y &= -6(x + 1)y, & v_y &= 3y^2 + 3 - 3(x + 1)^2. \end{aligned}$$

ملاحظه می شود که درست آنچه می خواهیم، بدست آوردیم. مثلاً $v_x = u_y$ بجای $v_x = -u_y$ بدست آوردیم. پس $v_x = -u_y$ برقرار است فقط اگر $v_x = u_y = 0$ باشد. این یعنی $6(x + 1)y = 0$ یعنی $x = -1$ یا $y = 0$ اما آن فقط $f(z)$ نمی تواند تحلیلی باشد، زیرا در همسایگی هر نقطه ای روی آن خطوط شامل یک نقطه است که روی آن خطوط نیست.

تمرین 20

مطلوب است

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_1^2 (t^2 + i)^2 dt; \\ \text{(b)} \quad & \int_0^{\pi/4} e^{-2it} dt; \end{aligned}$$

پاسخ

(a)

$$\begin{aligned} \int_1^2 (t^2 + i)^2 dt &= \int_1^2 (t^4 + 2it^2 + i^2) dt \\ &= \left. \frac{t^5}{5} + \frac{2it^3}{3} - t \right|_1^2 = \frac{26}{5} + \frac{14}{3}i \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} e^{-2it} dt &= -\frac{e^{-2it}}{2i} \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1+i}{2i} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\end{aligned}$$