



RIAZISARA

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

<https://t.me/riazisara>



ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



همه‌هنگی کلاس خصوصی آنلاین ریاضی ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲

فصل چهارم

Chapter Four

تجزیه و تحلیل اعداد مختلط

Complex Analysis

بخش اول

Section One

اعداد مختلط و نمایش هندسی آنها

Complex Numbers and Their Geometric Representation

بخش 4.1 اعداد مختلط و نمایش هندسی آنها

مسئله، شما با اعداد مختلط آشنا هستید. هدف از این بخش تا حدودی، یاد آوری است.

معادله های بدون جواب های حقیقی **Real** مانند $x^2 = -1$ یا $x^2 - 10x + 40 = 0$ بخاطر دارید، که در نتیجه به اعداد مختلط آشنا شدید. عدد $z = x + iy$ یک عدد مختلط است، x و y اعداد حقیقی هستند و i عدد خیالی یا تصویری است. دو گانه $(0,1)$ واحد مجازی **Imaginary Unit** نامیده می شود و به صورت زیر تعریف می شود.

(1)

$$i = (0, 1).$$

جمع، ضرب، نماد $z = x + iy$ **جمع** دو عدد مختلط $z_1 = (x_1, y_1)$ و $z_2 = (x_2, y_2)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$(2) \quad z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

ضرب به صورت زیر تعریف می شود.

$$(3) \quad z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

این دو تعریف، دلالت می کنند که

و

$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1 x_2, 0)$$

برای اعداد حقیقی x_1, x_2

در عمل، اعداد مختلط $z = (x, y)$ به صورت زیر نوشته می شوند.

(4)

$$z = x + iy$$

یا $z = (x + yi)$

مهندسين برق معمولاً بجای i می نویسند j زیرا i را برای جریان لازم دارند. اگر $x = 0$ باشد، پس $z = iy$ مجازی خالص **Pure Imaginary** نامیده می شود. همچنین از شماره های (1) و (2) نتیجه می گیریم که

(5)

$$i^2 = -1$$

زیرا، بر اساس تعریف ضرب داریم.

$$i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

برای جمع، نماد استاندارد شماره (4) به ما می دهد

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

برای ضرب، نماد استاندارد به ما می دهد.

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned}$$

مثال 1

اگر $z_1 = 8 + 3i$ و $z_2 = 9 - 2i$ باشد، پس

$$z_1 = 8 + 3i, \quad z_2 = 9 - 2i \quad \text{مجازی،} \quad z_1 = 3, \quad z_2 = 9 \quad \text{حقیقی}$$

است، و

$$z_1 + z_2 = (8 + 3i) + (9 - 2i) = 17 + i,$$

$$z_1z_2 = (8 + 3i)(9 - 2i) = 72 + 6 + i(-16 + 27) = 78 + 11i.$$

تفریق و تقسیم

تفریق و تقسیم به ترتیب عکس عملیات جمع و ضرب است، لذا بر اساس (2) داریم.

(6)

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

تقسیم به صورت زیر تعریف می شود.

$$(7^*) \quad z = \frac{z_1}{z_2} = x + iy, \quad x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

قاعده عملی به صورت زیر تعریف می شود.

$$(7) \quad z = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

مثال 2

برای $z_1 = 8 + 3i$ و $z_2 = 9 - 2i$ داریم.

$$z_1 - z_2 = (8 + 3i) - (9 - 2i) = -1 + 5i$$

و

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{8 + 3i}{9 - 2i} = \frac{(8 + 3i)(9 + 2i)}{(9 - 2i)(9 + 2i)} = \frac{66 + 43i}{81 + 4} = \frac{66}{85} + \frac{43}{85}i.$$

اعداد مختلط همان خواص جا بجا پذیری، شرکت پذیری و پخش پذیری اعداد حقیقی را هستند.

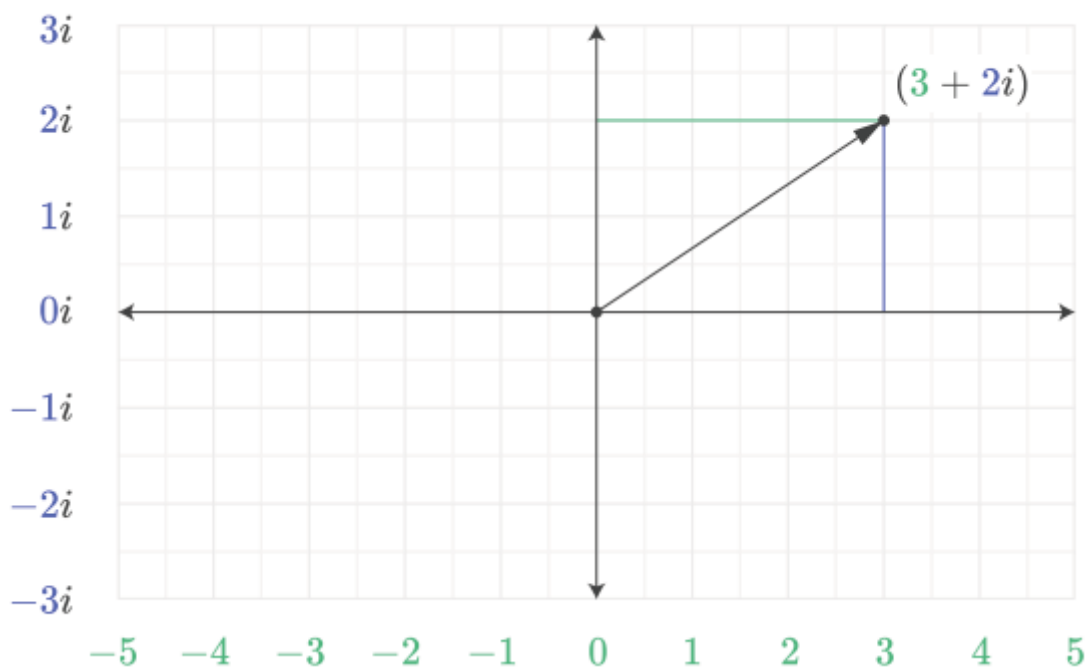
صفحه مختصات مختلط Complex Plane

صفحه مختصات مختلط، مانند صفحه مختصات دکارتی است، با این تفاوت که محور افقی، محور حقیقی است و محور عمودی، محور مجازی است. به این صفحه می گویند صفحه مختصات مختلط

Complex Plane

تصویر شماره 1

Complex Plane



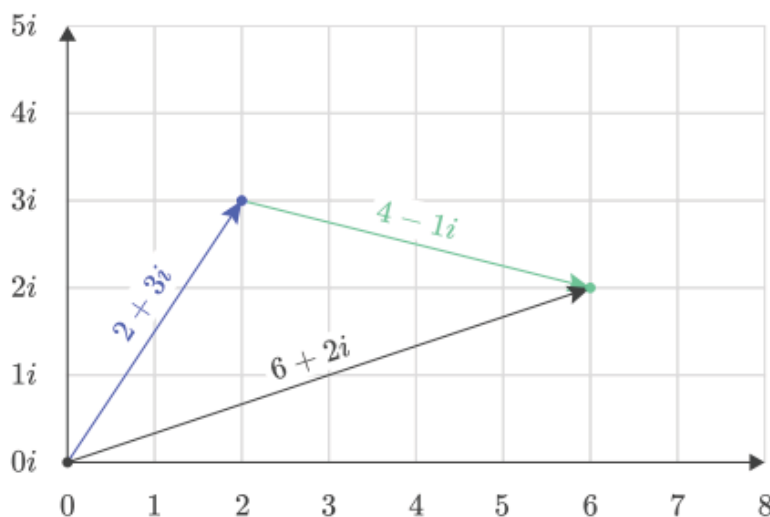
حالا که با صفحه مختصات مختلط آشنا شدید ، بد نیست که اعمال چهار گانه را هم روی صفحه مختلط ببینید.

مثال 3 جمع دو عدد مختلط روی صفحه مختلط

$$(2 + 3i) + (4 - 1i) = 6 + 2i$$

جمع مختلط تصویر شماره 2

Complex Addition



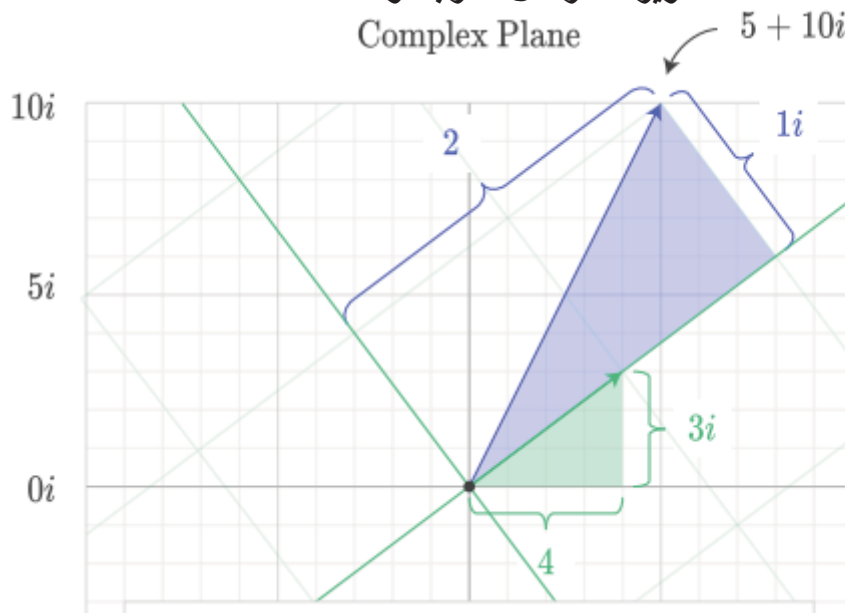
مثال 4

$$(4 + 3i)(2 + 1i) = 5 + 10i$$

روش کار به این صورت است که اول $(4 + 3i)$ را رسم می کنیم ، قسمت سبز رنگ. سپس انتهای بردار را تا 2 روی محور افقی ادامه می دهیم و سپس به اندازه 1 به طرف چپ گردش می دهیم ، قسمت آبی رنگ. خط آبی ، حاصلضرب دو عدد مختلط است.

تصویر شماره 3 ضرب دو عدد مختلط

Complex Plane



برای این که عمل ضرب دو عدد مختلط را به آسانی انجام دهیم از فرمولی بنام **FOIL** استفاده می کنیم.

حرف **F** حرف اول **Firsts** است یعنی اول ها

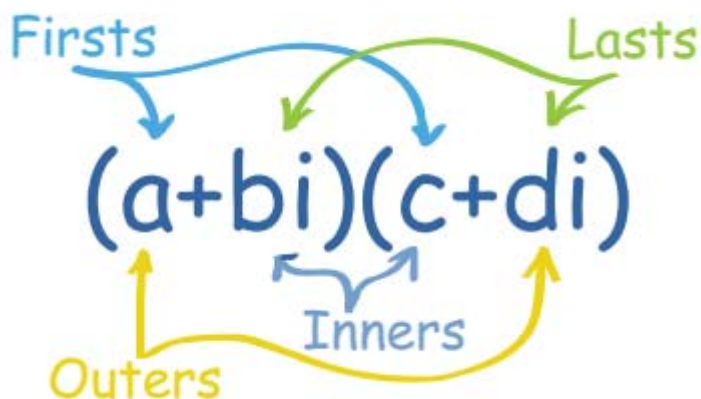
حرف **O** حرف اول **Outers** است یعنی خارجی ها

حرف **I** حرف اول **Inners** است یعنی داخلی ها

حرف **L** حرف اول **Lasts** است یعنی آخرین ها

به فارسی

اول ، خارج ، داخل ، آخر



- Firsts: $a \times c$
- Outers: $a \times di$
- Inners: $bi \times c$
- Lasts: $bi \times di$

مثال 5

$$(3 + 2i)(1 + 7i) = 3 \times 1 + 3 \times 7i + 2i \times 1 + 2i \times 7i$$

$$= 3 + 21i + 2i + 14i^2$$

چون $i^2 = -1$ است ، پس

$$= 3 + 21i + 2i - 14$$

$$= -11 + 23i$$

مثال 6

$$(1 + i)^2$$

$$(1 + i)(1 + i) = 1 \times 1 + 1 \times i + 1 \times i + i^2$$

چون $i^2 = -1$ است ، پس

$$= 1 + 2i - 1$$

$$= 0 + 2i$$

اگر FOIL را ساده کنیم به صورت زیر تبدیل می شود.

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

ملاحظه می کنید چون چهار حرف لازم داشتیم، بجای x_1, y_1, x_2, y_2 از a, b, c, d استفاده کردیم.

مثال 7

$$\begin{aligned} i^2 &= (0 + i)^2 \\ &= (0 + i)(0 + i) \\ &= (0 \times 0 - 1 \times 1) + (0 \times 1 + 1 \times 0)i \\ &= -1 + 0i \\ &= -1 \end{aligned}$$

در ریاضیات مزدوج **Conjugate** داریم، و آن عبارت است از تغییر علامت بین دو جمله، مثلاً مزدوج $a + bi$ می شود $a - bi$ و یا مزدوج $x - yi$ می شود $x + yi$ برای نشان دادن مزدوج، از یک خط یا ستاره استفاده می کنیم. مثلاً

$$\overline{5 - 3i} = 5 + 3i$$

تقسیم

برای تقسیم دو عدد مختلط، از مزدوج استفاده می کنیم.

مثال 8

$$\frac{2 + 3i}{4 - 5i}$$

صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{2 + 3i}{4 - 5i} \times \frac{4 + 5i}{4 + 5i} &= \frac{8 + 10i + 12i + 15i^2}{16 + 20i - 20i - 25i^2} \\ &= \frac{8 + 10i + 12i - 15}{16 + 20i - 20i + 25} \end{aligned}$$

اگر در مثال بالا توجه کنید ، موضوع جالبی را متوجه می شوید. در بالا ، مخرج را در مزدوج آن ضرب کردیم ، به صورت زیر

$$(4 - 5i)(4 + 5i) = 16 + 20i - 20i - 25i^2$$

ملاحظه می کنید که جمله های دوم و سوم حذف می شوند ، پس داریم.

$$(4 - 5i)(4 + 5i) = 16 - 25i^2$$

$$i^2 = -1$$

پس داریم.

$$(4 - 5i)(4 + 5i) = 16 + 25$$

ملاحظه می کنید

$$(4 - 5i)(4 + 5i) = 4^2 + 5^2$$

پس نتیجه می گیریم.

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

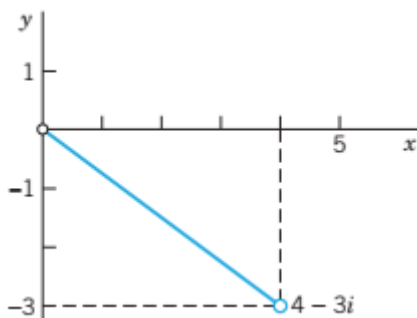
مثال 9

$$\begin{aligned} \frac{2 + 3i}{4 - 5i} \times \frac{4 + 5i}{4 + 5i} &= \frac{8 + 10i + 12i + 15i^2}{16 + 25} \\ &= \frac{-7 + 22i}{41} \\ &= \frac{-7}{41} + \frac{22}{41}i \end{aligned}$$

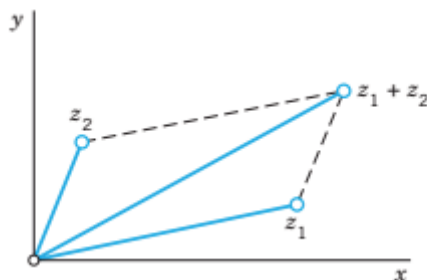
بر می گردیم به بحث صفحه مختلط

همان طور که نقطه P با مختصات x, y روی صفحه مختصات دکارتی نشان می‌دادیم، یک عدد مختلط $z = (x, y) = x + iy$ را روی صفحه مختلط نشان می‌دهیم. صفحه xy که روی آن اعداد مختلط را مشخص می‌کنیم، **صفحه مختلط Complex Plane** می‌نامند.

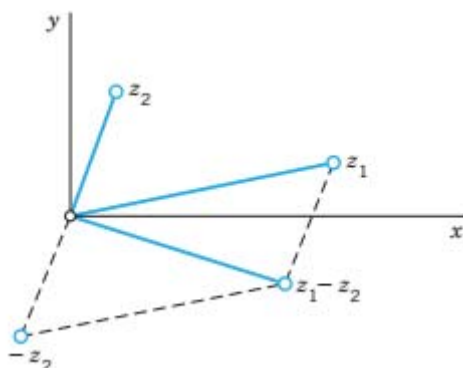
تصویر شماره ۴ عدد $4 - 3i$ در صفحه مختلط



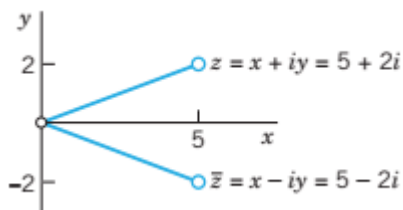
تصویر شماره ۵ جمع اعداد مختلط



تصویر شماره ۶ تفریق اعداد مختلط



تصویر شماره ۷ مزدوج اعداد مختلط



مزدوج عدد مختلط مهم است، زیرا به ما امکان می دهد از مختلط به حقیقی تبدیل کنیم. در حقیقت با ضرب یک عدد مختلط در مزدوج آن، یک عدد حقیقی بدست می آوریم، یعنی

$$z \times \bar{z} = x^2 + y^2$$

در مثال 8 نشان دادیم

$$(4 - 5i)(4 + 5i) = 4^2 + 5^2$$

یا بطور کلی

$$(x - yi)(x + yi) = x^2 + y^2$$

با جمع و تفریق

$$z + \bar{z} = 2x$$

$$z - \bar{z} = 2yi$$

پس برای قسمت حقیقی x و قسمت مجازی y از $z = x + iy$ دو فرمول مهم زیر بدست می آوریم.

$$z = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{مجازی} \quad z = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \quad (8)$$

کار کردن با مزدوج ها، آسان است. زیرا داریم.

$$(9) \quad \begin{aligned} \overline{(z_1 + z_2)} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, & \overline{(z_1 - z_2)} &= \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \\ \overline{(z_1 z_2)} &= \bar{z}_1 \bar{z}_2, & \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}. \end{aligned}$$

مثال 10

شماره های (8) و (9) را توضیح دهید.

پاسخ

فرض می کنیم $z_1 = 4 + 3i$ و $z_2 = 2 + 3i$ پس بر اساس (8) داریم.

$$z_1 = \frac{1}{2i}(4 + 3i) - (4 - 3i) = \frac{3i + 3i}{2i} = 3$$

و بر اساس (9) داریم.

$$\overline{(z_1 z_2)} = \overline{(4 + 3i)(2 + 5i)} = \overline{(-7 + 26i)} = -7 - 26i,$$

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (4 - 3i)(2 - 5i) = -7 - 26i.$$

تمرینات بخش 4.1

تمرین (1)

عبارت زیر را ساده کنید.

$$(2-4i)(3+i)-(2-3i)^2.$$

پاسخ

$$\begin{aligned}(2-4i)(3+i)-(2-3i)^2 &= [(2 \cdot 3 + 4 \cdot 1) - (-4 \cdot 3 + 2 \cdot 1)i] - (2-3i)^2 \\&= (10 + 12i) - (2-3i)^2 \\&= (10 + 12i) - [2^2 - 2 \cdot 3i + (3i)^2] \\&= (10 + 12i) - (4 - 6i - 9)\end{aligned}$$

ساده می کنیم.

$$\begin{aligned}(10 + 12i) - (4 - 6i - 9) &= 10 + 12i - 4 + 6i + 9 \\&= (10 - 4 + 9) + (12 + 6)i \\&= 15 + 18i\end{aligned}$$

تمرین (2)

ساده کنید.

$$\frac{(2-i)^3}{(1+i)^2}.$$

پاسخ

ابتدا صورت را ساده می کنیم.

$$\begin{aligned}(2-i)^3 &= (2-i)(2-i)^2 \\&= (2-i)[2^2 - 2(2)(i) + (i)^2], & (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\&= (2-i)[4-4i-1], & i^2 &= -1 \\&= (2-i)(3-4i) \\&= (2 \cdot 3 - 4 \cdot 1) + [-1(3) + 2(-4)]i \\&= 2-11i\end{aligned}$$

حالا، مخرج را ساده می کنیم.

$$\begin{aligned}(1+i)^2 &= (1)^2 + 2(1)(i) + (i)^2, & (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\&= 1 + 2i - 1, & i^2 &= -1 \\&= 2i\end{aligned}$$

حالا، صورت و مخرج به صورت زیر می باشد

$$\frac{(2-i)^3}{(1+i)^2} = \frac{2-11i}{2i}$$

برای حذف i در مخرج، صورت و مخرج را در i ضرب می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{2-11i}{2i} \cdot \frac{i}{i} &= \frac{2i - (11i)(i)}{(2i)(i)} \\ &= \frac{2i - 11i^2}{2i^2} \\ &= \frac{2i + 11}{-2} \\ &= \frac{2i}{-2} - \frac{11}{2} \\ &= -i - \frac{11}{2} \\ &= -\frac{11}{2} - i\end{aligned}$$

پس در نهایت داریم.

$$\frac{(2-i)^3}{(1+i)^2} = -\frac{11}{2} - i.$$

تمرین 3

جدول زیر را کامل کنید.

i^1		i^5	
i^2		i^6	
i^3		i^7	
i^4		i^8	

پاسخ

i^1	$i^1 = i$	i^5	$1 \cdot i = i$
i^2	$i \cdot i = -1$	i^6	$i \cdot i = -1$
i^3	$-1 \cdot i = -i$	i^7	$-1 \cdot i = -i$
i^4	$-i \cdot i = -i^2 = 1$	i^8	$-i \cdot i = -i^2 = 1$

تمرین 4

عبارت های زیر را ساده کنید و مقادیر مجهول ها را محاسبه کنید.

a. $3-2i = x-(3+i)$

b. $4-6i-x+3yi = 8-3i$

c. $\frac{1}{y} = \frac{1}{2+5i} + \frac{1}{5-2i}$

پاسخ

(a) به طرفین $(3+i)$ اضافه می کنیم.

$$3-2i = x - (3+i)$$

$$3-2i+(3+i) = x - (3+i)+(3+i)$$

$$6-i = x$$

$$x = 6-i$$

(b) x و y را به یک طرف منتقل می کنیم.

$$4-6i-x+3yi = 8-3i$$

$$-x+3yi = 4-6i+8-3i$$

$$-x+3yi = (4+8) + (-6-3)i$$

$$-x+3yi = 12 + (-9)i$$

بر اساس خاصیت تساوی ، برای این که دو عدد مختلط مساوی باشند ، باید قسمت های حقیقی با هم مساوی باشند. قسمت های مجازی با هم مساوی باشند.

پس $-x$ را مساوی قسمت حقیقی و $3y$ را مساوی قسمت مجازی قرار می دهیم.

$-x = 12$ $x = -12$	$3y = -9$ $y = \frac{-9}{3}$ $= -3$
---------------------	-------------------------------------

یعنی x باید -12 و y باید -3 باشد.

(c) ابتدا طرف راست عبارت را ساده می کنیم ،

$$\frac{1}{2+5i} + \frac{1}{5-2i}$$

عبارت بالا را به نحوی باز نویسی می کنیم که مخارج مشترک هر کدام از کسرها $(2+5i)(2-5i)$ باشد.

باشد. می دانیم

$$5-2i = -(2+5i)$$

پس

$$\frac{1}{2+5i} + \frac{1}{5-2i} = \frac{1}{2+5i} - \frac{1}{2-5i}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2+5i} + \frac{1}{2-5i} &= \frac{1(2-5i)}{(2+5i)(2-5i)} + \frac{1(2+5i)}{(2+5i)(2-5i)} \\ &= \frac{2-5i}{(2+5i)(2-5i)} + \frac{2+5i}{(2+5i)(2-5i)} \\ &= \frac{2-5i+2+5i}{(2+5i)(2-5i)} \\ &= \frac{4}{(2+5i)(2-5i)} \end{aligned}$$

چون داریم

$$(a-bi)(a+bi) = a^2 + b^2.$$

پس

$$\begin{aligned} \frac{4}{(2+5i)(2-5i)} &= \frac{4}{(2)^2 - (5i)^2} \\ &= \frac{4}{4-25i^2} \\ &= \frac{4}{4-25(-1)} \\ &= \frac{4}{4+25} \\ &= \frac{4}{29} \end{aligned}$$

حالا بجای سمت راست، $\frac{4}{29}$ قرار می دهیم و برای y حل می کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} &= \frac{4}{29} \\ y &= \frac{29}{4} \end{aligned}$$

تمرین 5

نمودار اعداد مختلط زیر را رسم کنید و قدر مطلق هر کدام را بنویسید ، یعنی مقدار $|z|$

a. $z = -2 + 3i$

b. $z = 6 - 12i$

c. $z = 6i$

d. $z = 12$

پاسخ

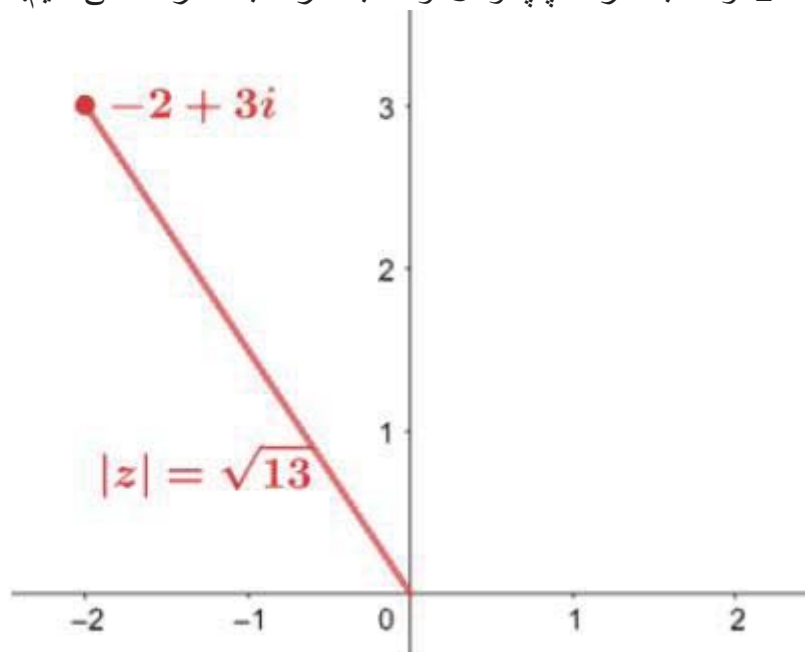
(a) با $-2 + 3i$ شروع می کنیم.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

پس

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{(-2)^2 + (3)^2} \\ &= \sqrt{4 + 9} \\ &= \sqrt{13} \end{aligned}$$

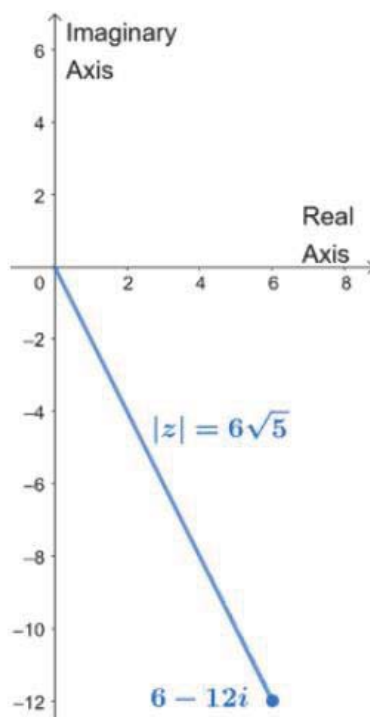
برای رسم نمودار ، 2 واحد به طرف چپ و 3 واحد به طرف بالا حرکت می کنیم.



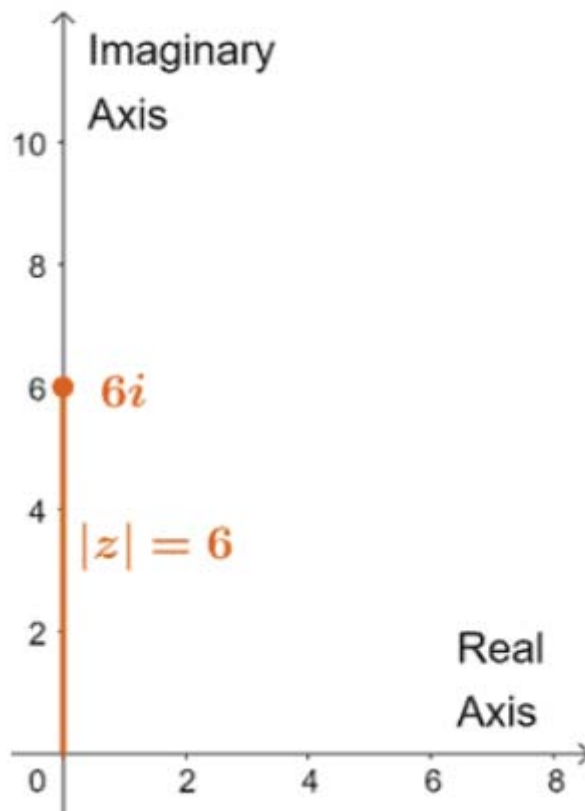
(b) به همین طریق برای $6 - 12i$ داریم.

$$\begin{aligned}
 |z| &= \sqrt{(6)^2 + (12)^2} \\
 &= \sqrt{36 + 144} \\
 &= \sqrt{180} \\
 &= \sqrt{36 \cdot 5} \\
 &= 6\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

این هم نمودار



(c) عدد مختلط $6i$ فقط شامل قسمت مجازی است، پس جای آن روی محور مجازی، 6 واحد روی قسمت مثبت این محور است.



چون $6i = 0 + 6i$ است ، پس داریم.

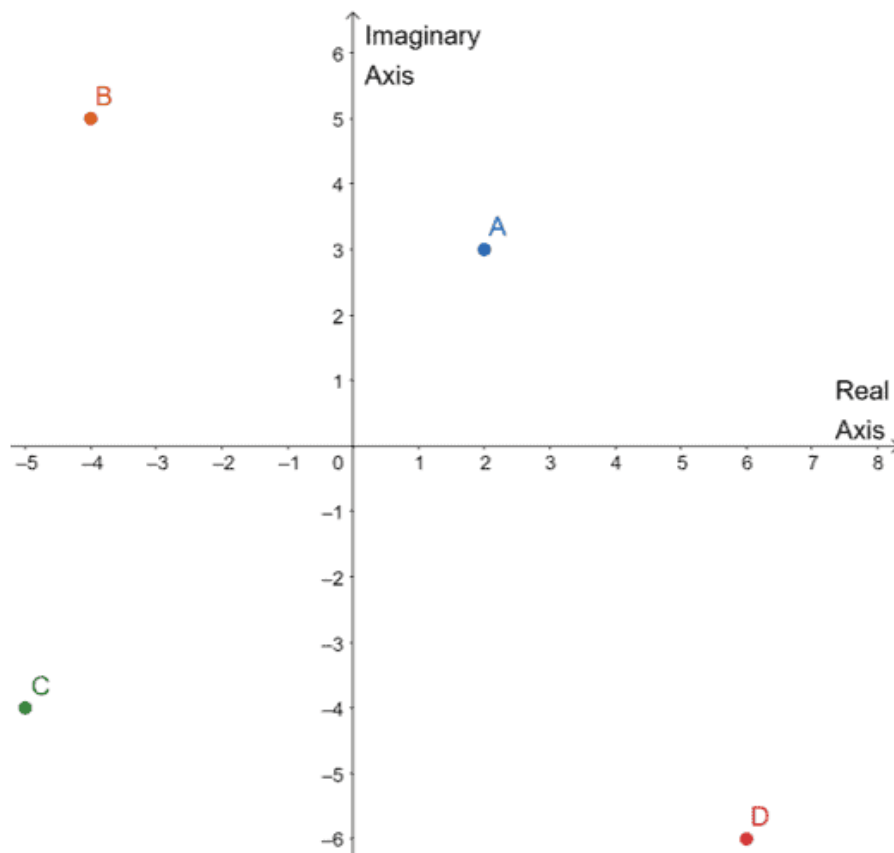
$$\begin{aligned}
 |z| &= \sqrt{(6)^2 + (0)^2} \\
 &= \sqrt{36 + 0} \\
 &= \sqrt{36} \\
 &= 6
 \end{aligned}$$

(d) اینجا فقط عدد 12 داریم ، این یعنی $12 = 12 + 0i$ پس این نقطه 12 واحد روی قسمت مثبت محور حقیقی قرار دارد.

$$\begin{aligned}
 |z| &= \sqrt{(0)^2 + (12)^2} \\
 &= \sqrt{0 + 144} \\
 &= \sqrt{144} \\
 &= 12
 \end{aligned}$$

تمرین 6

در تصویر زیر A, B, C, D چهار عدد مختلط، روی صفحه مختلط رسم شده است.



مطلوب است.

a. $A + B$

b. $C - D$

c. $A \cdot C$

d. $\frac{B}{C}$

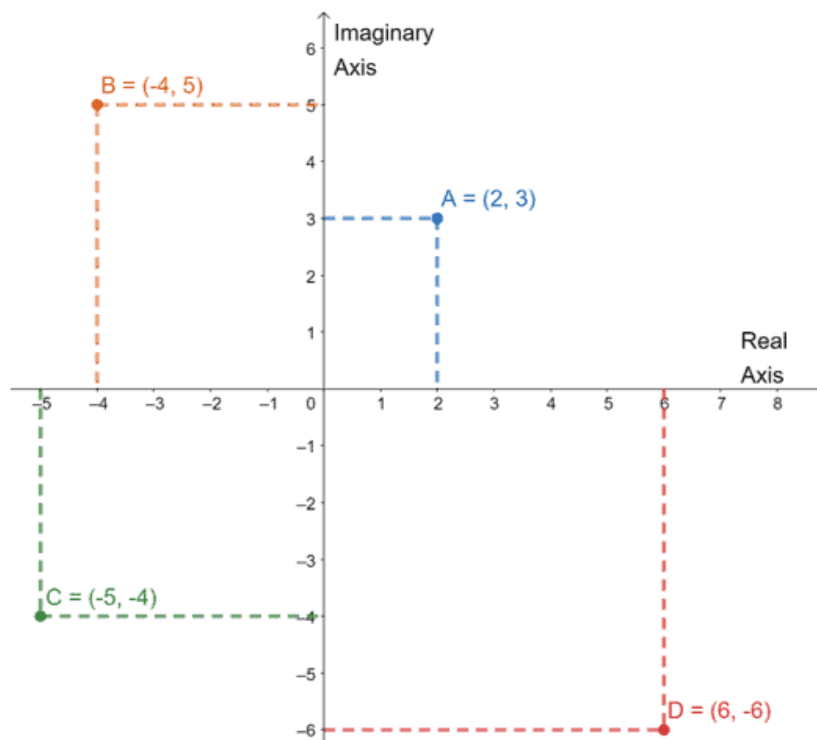
پاسخ

$$A = (2, 3) = 2 + 3i.$$

$$B = (-4, 5) = -4 + 5i$$

$$C = (-5, -4) = -5 - 4i$$

$$D = (6, -6) = 6 - 6i$$



حالا عملیات خواسته شده را انجام می دهیم.

$$(2 + 3i) + (-4 + 5i) = (2 + -4) + (3 + 5)i \\ = -2 + 8i$$

$$(-5 - 4i) - (6 - 6i) = (-5 - 6) + (-4 - -6)i \\ = -11 + 2i$$

$$(2 + 3i) \cdot (-5 - 4i) = (2 \cdot -5 - 3 \cdot -4) + (3 \cdot -5 + 2 \cdot -4)i \\ = (-10 + 12) + (-15 + -8)i \\ = 2 - 23i$$

$$\frac{-4 + 5i}{-5 - 4i} = \frac{-4 + 5i}{-5 - 4i} \cdot \frac{-4 + 5i}{-5 + 4i} = \frac{(-4 + 5i)(-5 + 4i)}{(-5 - 4i)(-5 + 4i)}$$

حالا ، برای انجام عملیات ضرب از روش FOIL استفاده می کنیم.

$$= \frac{[-4(-5) - 5(4)] + [5(-5) + 4(-4)]i}{(-5)^2 + (4)^2} = \frac{(20 - 20) + (-25 - 16)i}{25 + 14} = \frac{-41i}{41} \\ = -i$$

بخش 4.2 شکل قطبی اعداد مختلط Polar Form of Complex Numbers توان ها و ریشه ها Powers and Roots

بخاطر دارید که مختصات قطبی r, θ را به صورت زیر تعریف می کردیم.

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1)$$

پس $z = x + iy$ شکل قطبی زیر دارد.

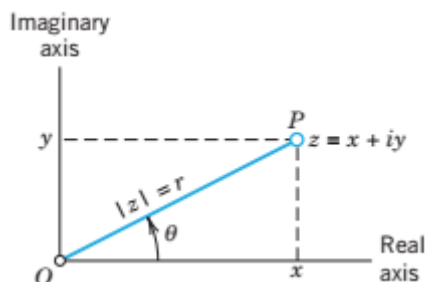
$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (2)$$

اینجا r قدر مطلق Absolute Value یا Modulus می نامند و با نماد $|z|$ نشان داده می شود، پس

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \bar{z}} \quad (3)$$

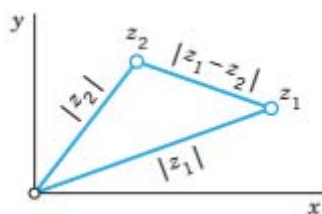
از نظر هندسی، $|z|$ عبارت است از فاصله z از مبدا، تصویر شماره 1

تصویر شماره 1 شکل قطبی یک عدد مختلط



به همین ترتیب، $|z_1 - z_2|$ عبارت است از فاصله بین z_1 و z_2 ، تصویر شماره 2

تصویر شماره 2 فاصله بین دو نقطه در صفحه مختلط



نماد θ را شناسه Argument z می نامند و با $\arg z$ نشان می دهند. پس $\theta = \arg z$ است. تصویر شماره 1

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad z \neq 0 \quad (4)$$

از نظر هندسی، θ عبارت است از زاویه جهت دار، از قسمت مثبت محور x تا OP اینجا، مانند حسابان زاویه ها بر حسب رادیان است و در خلاف جهت عقربه ساعت، مثبت است. تصویر شماره 1

برای $z = 0$ این زاویه θ تعریف نشده است. زیرا اگر $z = 0$ باشد، آن وقت داریم.

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{0}{0}$$

برای $z \neq 0$ زاویه θ فقط تا ضریب های صحیح 2π مشخص می شوند. زیرا سینوس و کسینوس متناوب هسند با دوره تناوب 2π . اما اغلب می خواهیم یک مقدار منحصر به فرد $\arg z$ برای یک $z \neq 0$ مشخص کنیم.

به همین جهت مقدار اساسی **Principal Value** تعریف می کنیم و با نماد $\text{Arg } z$ نشان می دهیم. (توجه کنید با حرف بزرگ) مقدار اساسی به صورت زیر تعریف می شود.

$$-\pi < \text{Arg } z \leq \pi \quad (5)$$

توجه کنید $\text{Arg } z$ با $\arg z$ فرق دارد.

پس داریم $\text{Arg } z = 0$ برای عدد حقیقی مثبت $z = x$ که عملی است و $\text{Arg } z = \pi$ است برای عدد حقیقی منفی z ، مثلاً برای $z = -4$ مقدار اساسی (5) در رابطه با ریشه ها، لگاریتم اعداد مختلط و بعضی انتگرال ها مهم است. واضح است که برای $z \neq 0$ ، بقیه مقادیر $\arg z$ به صورت زیر است.

$$\arg(z) = \text{Arg } z \pm 2n\pi, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

مثال 1 شکل قطبی اعداد مختلط، مقدار اساسی $\text{Arg } z$ عدد $z = 1 + i$ (تصویر شماره 3) دارای شکل قطبی

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{1}{4}\pi + i \sin \frac{1}{4}\pi \right)$$

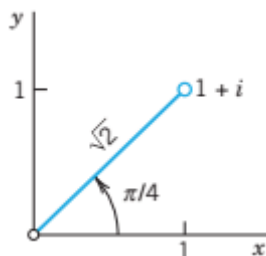
است. پس داریم

$$|z| = \sqrt{2}, \quad \arg z = \frac{1}{4}\pi \pm 2n\pi, \quad n = 0, 1, \dots \quad \text{و} \quad \text{Arg } z = \frac{1}{4}\pi$$

به همین طریق

$$z = 3 + 3\sqrt{3}i = 6 \left(\cos \frac{1}{3}\pi + i \sin \frac{1}{3}\pi \right), |z| = 6, \text{ و } \operatorname{Arg} z = \frac{1}{3}\pi$$

تصویر شماره 3



احتیاط هنگام استفاده از شماره (4) باید توجه کنیم که z در کدام ناحیه چهار گانه قرار دارد. چون $\tan \theta$ دارای دوره تناوب π دارد، پس شناسه های z و $-z$ همان تانژانت را دارند. مثلاً برای

$$\theta_1 = \arg(1+i) \quad \text{و} \quad \theta_2 = \arg(-1-i)$$

داریم.

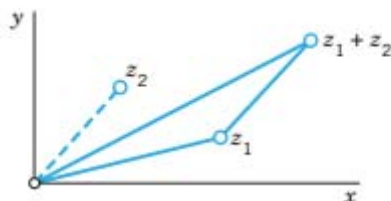
$$\tan \theta_1 = \tan \theta_2 = 1$$

نامساوی مثلث Triangle Inequality

در مورد اعداد حقیقی اگر بگوییم $x_1 < x_2$ صحیح است، اما در مورد اعداد مختلط ممکن است صحیح نباشد، زیرا هیچ راه طبیعی برای مرتب کردن اعداد مختلط وجود ندارد. اما قدر مطلق که حقیقی است، مثلاً $|z_1| < |z_2|$ اهمیت زیادی دارد. این نامساوی یعنی z_1 نسبت به z_2 به مبدا نزدیک تر است. موضوع مهم در تجزیه و تحلیل اعداد مختلط، نامساوی مثلث است.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (6)$$

تصویر شماره 4

نامساوی مثلث
تصویر شماره 4

نامساوی (6) را در آینده زیاد بکار خواهیم برد. در تصویر شماره 4 ملاحظه می کنید که نقاط 0 , z_1 و $z_1 + z_2$ راس های یک مثلث هستند با اضلاع $|z_1|$, $|z_2|$ و $|z_1 + z_2|$ و می دانیم که یک ضلع نمی تواند از مجموع دو ضلع دیگر، بزرگ تر باشد. اثبات این را در مثال 3 خواهیم دید.

بر اساس استدلال استقرایی نامساوی مثلث تعمیم یافته به صورت زیر است.

(6*)

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|;$$

این یعنی قدر مطلق یک مجموع نمی تواند از مجموع قدر مطلق های جملات بیشتر باشد.

مثال 2

اگر

$$z_1 = 1 + i \quad \text{و} \quad z_2 = -2 + 3i$$

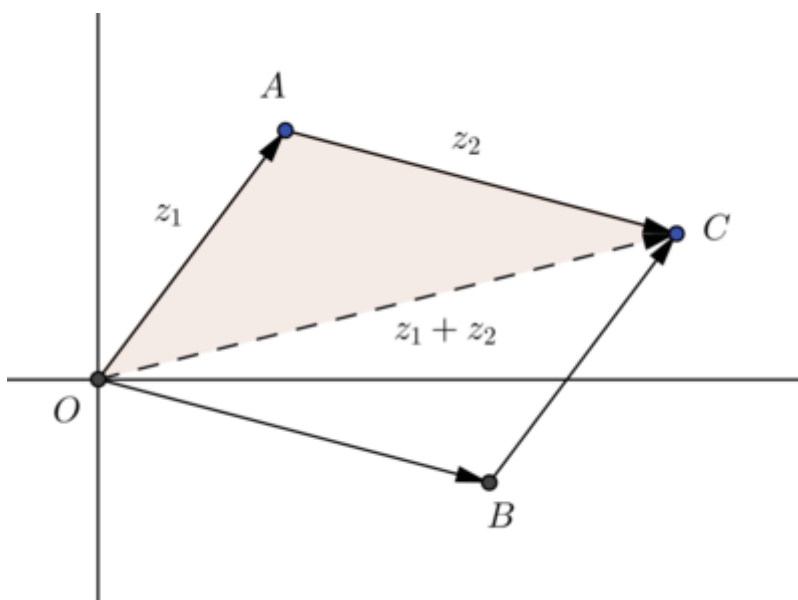
باشد، پس

$$|z_1 + z_2| = |-1 + 4i| = \sqrt{17} = 4.123 < \sqrt{2} + \sqrt{13} = 5.020$$

مثال 3

فرض می کنیم z_1 و z_2 به ترتیب نمایش نقاط A و B در صفحه مختلط باشند. بر اساس تفسیر هندسی جمع اعداد مختلط می توانیم یک متوازی الاضلاع $OACB$ بسازیم. OA و OB به ترتیب نمایش z_1 و z_2 هستند. و OC نمایش $z_1 + z_2$ است. تصویر شماره 5 چون $OACB$ یک متوازی الاضلاع است، پس داریم $OB = AC$ طول های OA, AC, OC عبارتند از $OA = |z_1|$ و $AC = |z_2|$ و $OC = |z_1 + z_2|$ اما OA, OB, OC تشکیل یک مثلث می دهند. می دانیم مجموع دو ضلع از ضلع سوم بزرگ تر است. پس قضیه از طریق نمودار هم ثابت شد.

تصویر شماره 5



ضرب و جمع در شکل قطبی Multiplication and Division in Polar Form
فرض می کنیم

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \quad \text{و} \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

باشد.

بر اساس آنچه در بخش 4.1 دیدیم، داریم.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)]$$

بر اساس قانون جمع سینوس و کسینوس داریم.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad (7)$$

با قدر مطلق گرفتن از طرفین شماره (7) ملاحظه می کنیم که قدر مطلق یک حاصلضرب مساوی حاصلضرب قدر مطلق ها ی عوامل ضرب است.

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| \quad (8)$$

با شناسه گرفتن شماره (7) می بینیم که شناسه یک حاصلضرب مساوی مجموع شناسه های عوامل ضرب است.

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \quad (9)$$

تقسیم
داریم

$$z_1 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right) z_2$$

پس

$$|z_1| = \left| \left(\frac{z_1}{z_2}\right) z_2 \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| |z_2|$$

طرفین را بر $|z_2|$ تقسیم می کنیم. پس داریم.

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0 \quad (10)$$

به همین طریق

$$\arg(z_1) = \arg \left[\left(\frac{z_1}{z_2}\right) z_2 \right] = \arg \left(\frac{z_1}{z_2}\right) + \arg(z_2)$$

و با کم کردن $\arg(z_2)$ داریم.

$$\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \quad (11)$$

با تلفیق (10) و (11) همراه با (7) داریم.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad (12)$$

مثال 4

توضیح فرمول های (11) - (8)

فرض می کنیم $z_1 = -2 + 2i$ و $z_2 = 3i$ باشد. پس

$$z_1 z_2 = -6 - 6i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)i$$

است ، پس

$$|z_1 z_2| = 6\sqrt{2} = 3\sqrt{8} = |z_1||z_2| , \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

و برای شناسه داریم.

$$\arg(z_1) = \frac{3\pi}{4} , \quad \text{Arg}(z_2) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \frac{3\pi}{4} = \text{Arg}z_1 + \text{Arg}z_2 - 2\pi, \quad \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{4} = \text{Arg}z_1 - \text{Arg}z_2$$

مثال 5 توان های عدد صحیح z ، فرمول دو موآور De Moivre's Formulaاز شماره (8) و (9) با $z_1 = z_2 = z$ با $n = 0, 1, 2, \dots$ داریم.

$$z^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) \quad (13)$$

به همین طریق (12) با $z_1 = 1$ و $z_2 = z^n$ شماره (13) بدست می آوریم برای $n = -1, -2, \dots$
 برای $|z| = r = 1$ فرمول (13) می شود فرمول دو موآور De Moivre's Formula

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (13^*)$$

می توانیم این را بکار ببریم برای بیان کردن $\sin n\theta$ و $\cos n\theta$ بر حسب توان های $\sin \theta$ و $\cos \theta$. مثلاً برای $n = 2$ در سمت چپ داریم.

$$\cos^2 \theta + 2i \cos \theta \sin \theta - \sin^2 \theta$$

شماره (13*) با $n = 2$ می توان نوشت

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta , \quad \sin 2\theta = 2 \cos \theta \sin \theta$$

محاسبه توان صحیح z از طریق نمایی

با $z = r e^{i\theta}$ شروع می کنیم. اگر n یک عدد صحیح باشد، پس

$$z^n = (r e^{i\theta})^n = r^n e^{i n \theta} \quad (14)$$

مثال 6

مطلوب است $(3 + 3i)^5$.

پاسخ

شکل نمایی $3 + 3i$ به صورت زیر است.

$$r = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2} \quad \tan \theta = \frac{3}{3} \Rightarrow \text{Arg } z = \frac{\pi}{4}$$

$$3 + 3i = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

حالا، شماره (14) را بکار می بریم.

$$\begin{aligned} (3 + 3i)^5 &= (3\sqrt{2})^5 e^{i\frac{5\pi}{4}} \\ &= 972\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right) \\ &= 972\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= -972 - 972i \end{aligned}$$

پس

$$(3 + 3i)^5 = -972 - 972 i$$

اگر $r = 1$ باشد، پس داریم.

$$z^n = (e^{i\theta})^n = e^{i n \theta}$$

ریشه ها Roots

اگر $z = w^n$ ($n = 1, 2, \dots$) باشد، پس برای هر مقدار w یک مقدار مربوط به z وجود دارد. و بر عکس برای یک $z \neq 0$ دقیقاً n مقادیر متمایز برای w وجود دارد. هر کدام از این مقادیر را ریشه n ام z می نامند. و می نویسیم.

$$w = \sqrt[n]{z}$$

پس، این نماد را چند مقدار **Multivalued** یا n مقدار می نامند. پس n مقدار $\sqrt[n]{z}$ را می توان به صورت زیر بدست آورد. z و w را به شکل قطبی می نویسیم.

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{و} \quad w = R(\cos \phi + i \sin \phi)$$

پس معادله $w^n = z$ بر اساس فرمول De Moivre با $\emptyset$ بجای θ می شود.

$$w^n = R^n(\cos n\emptyset + i \sin n\emptyset) = z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

قدر مطلق طرفین باید مساوی باشند ، پس $R^n = r$ بطوری که $R = \sqrt[n]{r}$ اینجا $\sqrt[n]{r}$ عدد حقیقی مثبت است. و لذا منحصر به فرد.

با مساوی قرار دادن شناسه های $n\emptyset$ و θ و بخاطر بیاوریم θ فقط با ضرب های عدد صحیح 2π مشخص می شود ، داریم.

$$n\emptyset = \theta + 2k\pi \quad \text{پس} \quad \emptyset = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

اینجا k یک عدد صحیح است. برای $k = 0, 1, \dots, n-1$ مقادیر متمایز w بدست می آوریم. مثلاً برای $k = n$ داریم

$$\frac{2k\pi}{n} = 2\pi$$

در نتیجه $\sqrt[n]{z}$ برای $z \neq 0$ دارای n مقادیر متمایز است.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad (15)$$

اینجا $k = 0, 1, \dots, n-1$ است. این n ها روی یک دایره به شعاع $\sqrt[n]{r}$ و مرکز ، مبدا مختصات و متشکل از راس های یک چند ضلعی با اضلاع n قرار دارند. مقدار $\sqrt[n]{z}$ با گرفتن مقدار اصلی $\arg(z)$ و $k = 0$ در شماره (15) مقدار اصلی $w = \sqrt[n]{z}$ نامیده می شود.

اگر در شماره (15) داشته باشیم $z = 1$ پس $|z| = r = 1$ و $\arg z = 0$ است و لذا (15) می دهد

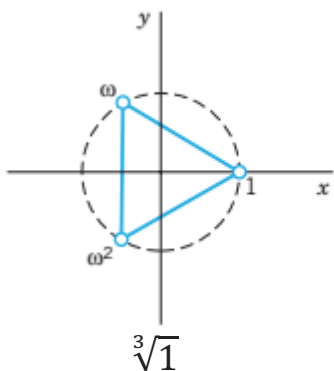
$$\sqrt[n]{1} = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (16)$$

این n مقدار ها را ریشه های n ام واحد نامیده می شوند. آنها روی دایره باشعاع 1 و مرکز 0 قرار دارند و دایره واحد نامیده می شوند. تصاویر شماره های 6, 7, 8 به ترتیب

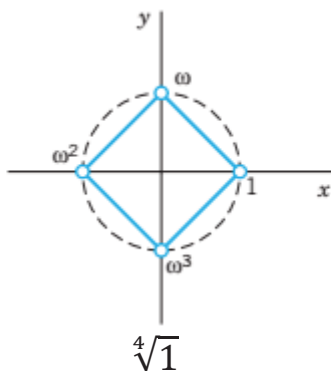
$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1} &= 1, -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}i \\ \sqrt[4]{1} &= \pm 1, \pm i \\ \sqrt[5]{1} & \end{aligned}$$

نشان می دهند.

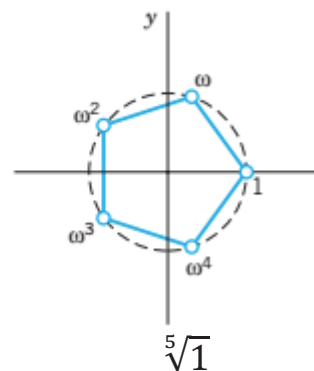
تصویر شماره 6



تصویر شماره 7



تصویر شماره 8



چگونه توان ها و ریشه های اعداد مختلط را با استفاده از قضیه دو مو آور پیدا کنیم.
توان زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} & [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^2 \\ &= [r(\cos \theta + i \sin \theta)] \cdot [r(\cos \theta + i \sin \theta)] \\ &= r \cdot r [\cos (\theta + \theta) + i \sin (\theta + \theta)] \\ &= r^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \end{aligned}$$

به همین طریق

$$\begin{aligned} & [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^3 \\ &= r^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) \\ & [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^4 \\ &= r^4 (\cos 4\theta + i \sin 4\theta) \end{aligned}$$

این نتایج ما را به قضیه دو مو آور می رساند.

قضیه دو مو آور

برای هر عدد مختلط در شکل قطبی

$$r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

و هر عدد حقیقی n می توانیم بگوییم

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n \\ = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

تمرینات بخش 4.2

تمرین 1. شکل قطبی اعداد مختلط زیر را بنویسید،

(a) $z = -1 + i\sqrt{3}$

(b) $z = -9$

(c) $z = 12i$

پاسخ

(a) $z = -1 + i\sqrt{3}$

ابتدا r را پیدا می کنیم.

$$r = |z| = \sqrt{1+3} = 2$$

حالا، شناسه z را پیدا می کنیم. آسان ترین راه این است مقدار اصلی را پیدا کنیم. مقدار اصلی شناسه مقدار θ در بازه $-\pi < \theta \leq \pi$ است، رابطه زیر برقرار می شود.

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{-1} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(-\sqrt{3})$$

و لذا، θ در ربع دوم صفحه مختصات است.

توجه داشته باشید، اگر برای پیدا کردن معکوس تانژانت از ماشین حساب استفاده می کنید، مطمئن شوید که ماشین حساب شما مقدار صحیح θ را به شما می دهد. مثلاً اگر ماشین حساب مقدار θ_1 را به شما می دهد، پس مقدار دوم هم باید $\theta_2 = \theta_1 + \pi$ باشد. چون دوره تناوب تانژانت π است.

برای این مساله دو مقدار بدست می آوریم.

$$\theta_1 = -\frac{\pi}{3} \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

اولی، در ربع چهارم است و دومی در ربع دوم است. پس این آخری مطلوب ما است. لذا، مقدار اصلی شناسه به صورت زیر است.

$$\text{Arg } z = \frac{2\pi}{3}$$

و لذا، تمام مقادیر ممکن شناسه، به صورت زیر است.

$$\arg z = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

حالا ، بر می گردیم به آنچه مساله از ما خواسته است. شکل قطبی $z = -1 + i\sqrt{3}$ به صورت زیر است.

$$z = 2 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

برای تکمیل کار ، باید بگوییم که در حقیقت اشکال قطبی بسیاری برای این عدد مختلط داریم. برای این کار ، z را برای مقادیر مختلف n پیدا می کنیم. برای مثال دو نمونه در زیر می آوریم.

$$z = 2 \left(\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) \right) \quad n = 1$$

$$z = 2 \left(\cos\left(-\frac{16\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{16\pi}{3}\right) \right) \quad n = -3$$

(b) $z = -9$

می دانیم که مقدار اصلی یک عدد حقیقی منفی π است. پس ، لازم نیست آنرا پیدا کنیم. در زیر تمام مقادیر ممکن شناسه هر عدد منفی را می آوریم.

$$\arg z = \pi + 2\pi n = \pi(1 + 2n) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

حالا ،

$$r = |z| = \sqrt{81 + 0} = 9$$

است. شکل قطبی ، با استفاده از مقدار اصلی ، به صورت زیر است.

$$z = 9(\cos(\pi) + i \sin(\pi))$$

توجه داشته باشید ، اگر یک عدد حقیقی مثبت داشتیم ، مقدار اصلی به صورت زیر بود.

$$\text{Arg } z = 0$$

(c) $z = 12i$

اینجا ، قسمت مجازی ، مثبت است ، پس این عدد مختلط روی قسمت مثبت محور y قرار دارد. لذا مقدار اصلی و شناسه کلی این عدد مختلط به صورت زیر است.

$$\text{Arg } z = \frac{\pi}{2} \quad \arg z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n = \pi \left(\frac{1}{2} + 2n \right) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

همچنین $r = 12$ است ، بنا بر این ، شکل قطبی آن به صورت زیر است.

$$z = 12 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

تمرین 2

عبارت زیر را ساده کنید و جواب را به شکل قطبی بنویسید.

$$\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i \right)^2$$

پاسخ

عدد مختلط داده شده در مختصات مستطیلی یا کارتزین است. اجازه دهید آنرا به صورت قطبی تغییر دهیم تا قضیه دو مو آور را بکار ببریم. ابتدا r ، قدر مطلق عدد مختلط را پیدا می کنیم.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{75}{4} + \frac{25}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{100}{4}} \\ &= \sqrt{25} \end{aligned}$$

پس $r = 5$ است. حالا، شناسه عدد مختلط را بدست می آوریم.

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{5}{2} \cdot -\frac{2}{5\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

حالا، معکوس تابع تانژانت را بکار می بریم تا زاویه مرجع پیدا کنیم.

$$\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{\pi}{6}$$

اگر به درجه تبدیل کنیم، داریم.

$$\tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = 30^\circ$$

پس زاویه مرجع ما در ربع دوم است، زیرا قسمت حقیقی عدد مختلط، منفی و قسمت مجازی مثبت است. به عبارت دیگر x منفی و y مثبت است، پس زاویه در ربع دوم است. برای پیدا کردن یک زاویه در ربع دوم با زاویه مرجع داده شده، داریم.

$$\begin{aligned}\theta &= \pi - \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{5\pi}{6}\end{aligned}$$

حالا، عدد مختلط داده شده را به شکل قطبی تبدیل می کنیم.

$$\begin{aligned}\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i\right)^2 \\ = \left[5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]^2\end{aligned}$$

با استفاده از قضیه دو مو آور داریم.

$$\begin{aligned}&[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n \\ &= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \\ &\left[5\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]^2 \\ &= 5^2\left(\cos 2 \cdot \frac{5\pi}{6} + i\sin 2 \cdot \frac{5\pi}{6}\right) \\ &= 25\left(\cos\frac{10\pi}{6} + i\sin\frac{10\pi}{6}\right) \\ &= 25\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

تمرین 3

عبارت زیر را ساده کنید و جواب را به صورت مختصات مستطیلی بنویسید.

$$\left[2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \right]^5$$

پاسخ

چون عدد مختلط به صورت قطبی است، مستقیماً می‌توانیم قضیه دو مو آور را بکار ببریم.

$$[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n$$

$$= r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$\left[2 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \right]^5$$

$$= 2^5 \left(\cos 5 \cdot \frac{7\pi}{4} + i \sin 5 \cdot \frac{7\pi}{4} \right)$$

$$= 32 \left(\cos \frac{35\pi}{4} + i \sin \frac{35\pi}{4} \right)$$

زاویه هم مرز را پیدا می‌کنیم، گر چه لازم نیست اما محاسبه‌ها را آسان تر می‌کند.

$$\frac{35\pi}{4} - 8\pi$$

$$\frac{35\pi}{4} - \frac{32\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$32 \left(\cos \frac{35\pi}{4} + i \sin \frac{35\pi}{4} \right)$$

$$= 32 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

حالا به صورت مستطیلی می‌نویسیم.

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$32 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$= 32 \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 32 + i \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 32$$

$$= -16\sqrt{2} + 16i\sqrt{2}$$

ضرب اعداد مختلط در شکل قطبی
اگر

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

و

$$z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

اعداد مختلط غیر صفر باشند ، پس

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)).$$

تمرین 4
اگر

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$$

$$z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

باشد ، مطلوب است $z_1 z_2$
پاسخ

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)).$$

از شکل قطبی اعداد مختلط داده شده ، داریم.

$$r_1 = 2, \theta_1 = \frac{\pi}{6}, r_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \theta_2 = \frac{\pi}{3}$$

این مقادیر را در فرمول $z_1 z_2$ قرار می دهیم. پس داریم.

$$z_1 z_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) \right)$$

مخرج را گویا می کنیم و کسر ها را جمع می کنیم ، پس داریم.

$$z_1 z_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

تمرین 5

اگر

$$Z_1 = 7(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), Z_2 = 16(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

و

$$\theta_1 + \theta_2 = \pi,$$

باشد ، مطلوب است $z_1 z_2$

پاسخ

می دانیم که

$$|Z_1 Z_2| = |Z_1| |Z_2|,$$

$$\arg(Z_1 Z_2) = \arg Z_1 + \arg Z_2.$$

همچنین اگر $z \neq 0$ باشد ، پس داریم.

$$z = |z| (\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)).$$

از شکل قطبی داده شده می بینیم که $|z_1| = 7$ و $z_2 = 16$ است ، پس داریم.

$$|Z_1 Z_2| = |Z_1| |Z_2| = 7 \times 16 = 112.$$

همچنین ، ملاحظه می کنیم که $\arg z_1 = \theta_1$ و $\arg z_2 = \theta_2$ است. و چون $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ است ، پس داریم $\arg z_1 z_2 = \pi$ است. پس نتیجه می گیریم

$$Z_1 Z_2 = 112(\cos \pi + i \sin \pi).$$

میدانیم که $\cos \pi = -1$ و $\sin \pi = 0$ است ، این مقادیر را در معادله بالا قرار می دهیم ، پس داریم.

$$Z_1 Z_2 = 112(-1 + i0) = -112.$$

تقسیم اعداد مختلط در شکل قطبی

اگر دو عدد مختلط غیر صفر در شکل قطبی داشته باشیم ، یعنی

$$z_1 = r_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

و

$$z_2 = r_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

پس

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

است.

تمرین 6

اگر داشته باشیم

$$z_1 = 20 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$$

و

$$z_2 = 4 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right),$$

مطلوب است

$$\frac{z_1}{z_2}$$

در شکل قطبی

پاسخ

از اعداد مختلط داده شده نتیجه می گیریم $r_1 = 20$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $r_2 = 4$, $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$ است. پس

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{20}{4} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \right).$$

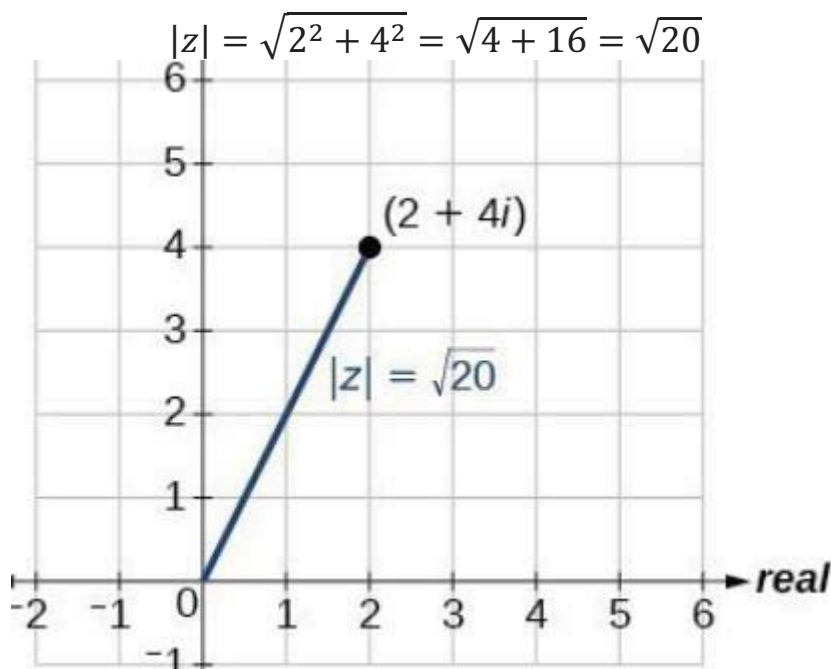
ساده می کنیم.

$$\frac{z_1}{z_2} = 5 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

تمرین 7

نمودار $z = 2 + 4i$ را روی صفحه مختصات مختلط رسم کنید.

پاسخ



تمرین 9

نشان دهید که 8 حقیقتاً سه ریشه مختلط $-1 - \sqrt{3}i$ و $-1 + \sqrt{3}i$ دارد.

پاسخ

چون 8 هنوز شکل مستطیلی دارد یعنی $8 = 8 + 0i$ است، باید ابتدا شکل قطبی آنرا پیدا کنیم. مطابق زیر.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$
$r = \sqrt{8^2 + 0^2}$ $= \sqrt{64}$ $= 8$	$\theta = \tan^{-1} \frac{0}{8}$ $= \tan^{-1} 0$ $= 0$

این یعنی با $n = 3, k = 0, \theta = 0$ برای فرمول زیر شروع می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi k}{n} \right).$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{8} &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{0 + 2\pi \cdot 0}{3} + i \sin \frac{0 + 2\pi \cdot 0}{3} \right) \\ &= 2(\cos 0 + i \sin 0) \end{aligned}$$

ریشه هنوز به شکل قطبی است، پس اگر بخواهیم ریشه را در مختصات مستطیلی پیدا کنیم، باید نتیجه را به مستطیلی تبدیل کنیم.

$$\begin{aligned} 2(\cos 0 + i \sin 0) &= 2(1 + 0i) \\ &= 2 \end{aligned}$$

این یعنی اولین ریشه 8 عدد 2 است. همین روش را برای پیدا کردن دو ریشه دیگر بکار ببریم. اما $k = 1$ و $k = 2$ استفاده می‌کنیم.

$\sqrt[n]{z}$ when $k = 1, 2$	$a + bi$
$k = 1$ $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{0 + 2\pi \cdot 1}{3} + i \sin \frac{0 + 2\pi \cdot 1}{3} \right)$ $= 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$	$2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$ $= -1 + \sqrt{3}i$

$k = 2$ $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{0 + 2\pi \cdot 2}{3} + i \sin \frac{0 + 2\pi \cdot 2}{3} \right)$ $= 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$	$2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$ $= -1 - \sqrt{3}i$
--	---

پس نشان دادیم 8 دو ریشه مختلط $-1 - \sqrt{3}i$ ، $-1 + \sqrt{3}i$ ، 2 در مختصات مستطیلی دارد.

تمرین 10

نمودار چهارمین ریشه های $-8 + 8\sqrt{3}i$ را روی صفحه مختصات مختلط رسم کنید. ریشه ها را در شکل مستطیلی هم بنویسید.

پاسخ

ابتدا قدر مطلق و شناسه عدد مختلط $-8 + 8\sqrt{3}i$ را پیدا کنیم.

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$	$\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$
$r = \sqrt{(-8)^2 + (8\sqrt{3})^2}$ $= \sqrt{36}$ $= 256$	$\theta = \tan^{-1} \frac{8\sqrt{3}}{-8}$ $= \tan^{-1} -\sqrt{3}$ $= 120^\circ$

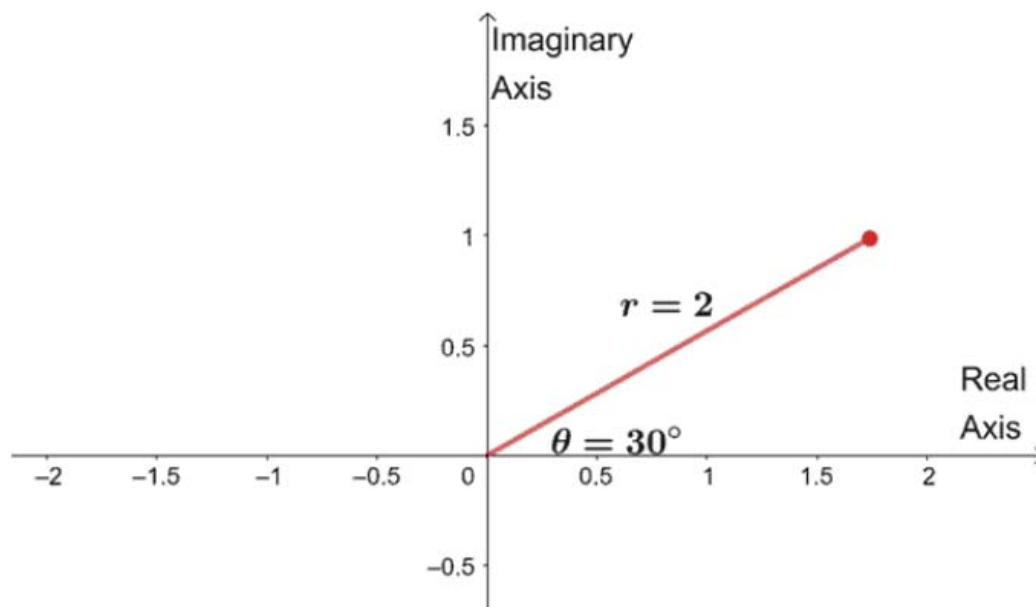
پس $-8 + 8\sqrt{3}i = 16(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ است. چون در جستجوی ریشه های سوم هستیم، انتظار داریم ریشه ها $90^\circ = \frac{360^\circ}{4}$ از هم فاصله داشته باشند. می توانیم فرمول زیر را بکار ببریم.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 360^\circ k}{n} + i \sin \frac{\theta + 360^\circ k}{n} \right)$$

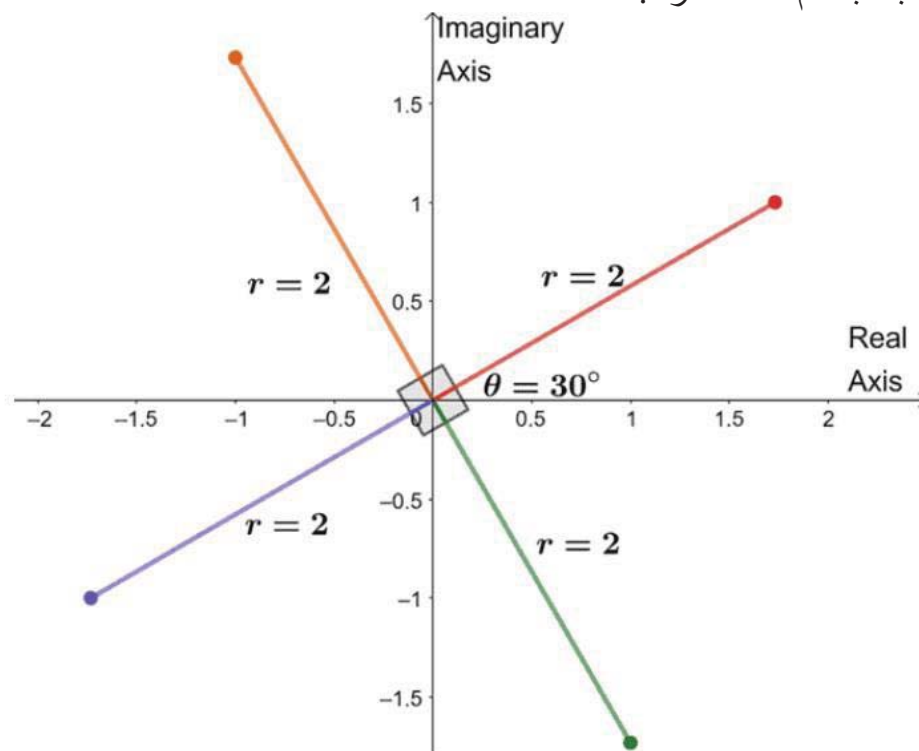
اینجا $n = 4$ ، $r = 6$ ، $\theta = 120^\circ$ ، $k = 0$ است.

$$\sqrt[4]{16(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)} = \sqrt[4]{16} \left(\cos \frac{120^\circ + 360^\circ \cdot 0}{4} + i \sin \frac{120^\circ + 360^\circ \cdot 0}{4} \right)$$

$$= 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$$



برای پیدا کردن سه ریشه های دیگر ، سه ریشه ها را با همان قدر 2 مطلق رسم می کنیم. شناسه ها 90° نسبت به هم فاصله دارند.



این هم چهار ریشه های $-8 + 8\sqrt{3}i$

- $2(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$
- $2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$
- $2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$
- $2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$

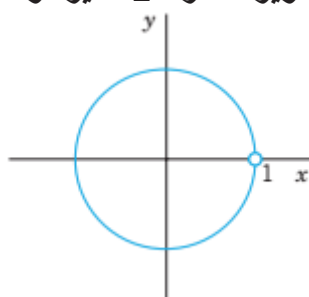
بخش 4.3 مشتق و تابع تحلیلی Derivative and Analytic Function

همان طور که در حسابان و تجزیه و تحلیل اعداد حقیقی در مورد دامنه، همسایگی، تابع، حد، پیوستگی مشتق و غیر بحث می کردیم، در مورد تجزیه و تحلیل اعداد مختلط هم همان مباحث را داریم، اما کمی مشکل و متفاوت. مطالبی که در این بخش مورد بحث قرار می گیرد، در بخش ها بعدی، زیاد به آنها احتیاج پیدا می کنیم.

دایره ها، دیسک ها، نیم صفحه ها Circles and Disks, Half-Planes

در بخش 4.2 در مورد دایره واحد $|z| = 1$ بحث کردیم. تصویر شماره 1 یک دایره کلی به شعاع ρ و مرکز a نشان می دهد. معادله آن $|z - a| = \rho$ است.

تصویر شماره 1 دایره واحد



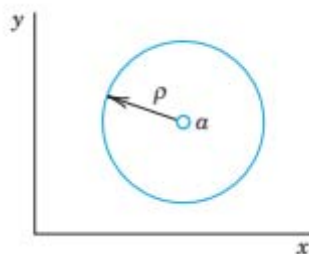
زیرا، این دایره، مکان هندسی مجموعه نقاط z است که فاصله آنها یعنی $|z - a|$ از مرکز a

مساوی ρ است. در نتیجه داخل آن یعنی دیسک مدور باز **Open Circular Disk**

با نا معادله $|z - a| < \rho$ نشان داده می شود. محوطه داخلی به اضافه خود دایره یعنی دیسک مدور

پسته **Closed Circular Disk** با نا معادله $|z - a| \leq \rho$ نشان داده می شود. و قسمت خارجی

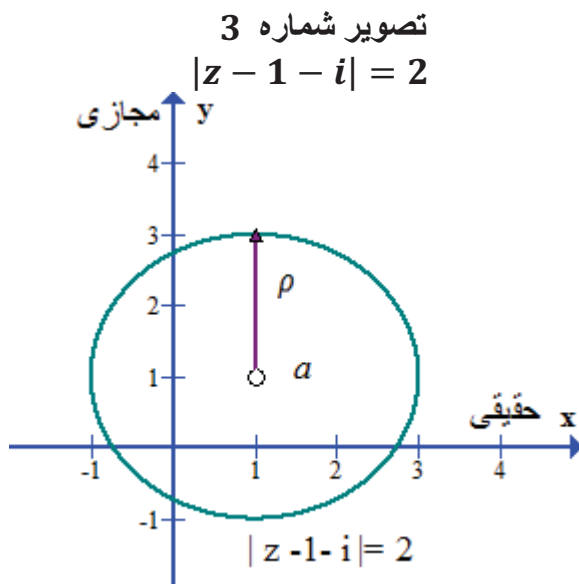
آن با $|z - a| > \rho$ نشان داده می شود. تصویر شماره 2 نمودار $|z - a| = \rho$ است.

تصویر شماره 2 دایره $|z - a| = \rho$ 

حالا برای این که با رسم یک دایره روی صفحه مختصات مختلط آشنا شوید، فرض می کنیم $\rho = 2$ و $a = 1 + i$ باشد. پس فرمول ما $|z - 1 - i| = 2$ است. این فرمول در صفحه مختصات مستطیلی به صورت زیر است.

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

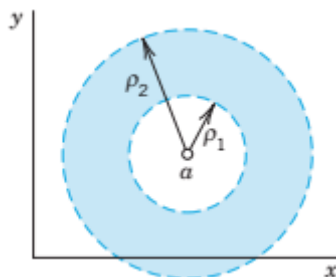
پس دایره ما در صفحه مختصات مختلط در تصویر شماره 3 ملاحظه می کنید.



یک دیسک باز $|z - a| < \rho$ را همسایگی a و یا ρ همسایگی a می نامند. و a بینهایت همسایگی دارد. برای هر مقدار $\rho > 0$ یک همسایگی برای a وجود دارد. و a یک نقطه از هر کدام از این همسایگی ها است.

تصویر شماره 4 یک حلقه باز **Open Annulus** است. با نام معادله $\rho_1 < |z - a| < \rho_2$ نشان می دهند که در آینده به آن نیاز خواهیم داشت. حلقه باز مکان هندسی مجموعه تمام z ها است که فاصله $|z - a|$ از a بیشتر از ρ_1 اما کمتر از ρ_2 است. به همین طریق، **حلقه بسته Closed Annulus** $\rho_1 \leq |z - a| \leq \rho_2$ شامل دو دایره هم می شود.

تصویر شماره 4 یک حلقه روی صفحه مختلط



نیم صفحه ها **Half-Planes**

نیم صفحه بالایی Upper Half-Plane عبارت است از مجموعه تمام نقاط $z = x + iy$ بطوری که $y > 0$ باشد.

نیم صفحه پایینی Lower Half-Plane عبارت است از مجموعه تمام نقاط $z = x + iy$ بطوری که $y < 0$ باشد.

اگر $x > 0$ باشد، **نیم صفحه راست Right Half-Plane**

اگر $x < 0$ باشد، **نیم صفحه چپ Left Half-Plane**

مفاهیم مجموعه ها در صفحه مختلط Concepts of Sets in the Complex Plane

یک مجموعه نقطه **A Point Set** یعنی هر نوع کلکسیون نقاط، خواه محدود یا نامتناهی. مانند جواب های یک معادله درجه دوم، نقاط یک خط، نقاط داخل یک دایره.

یک مجموعه S را پیوسته یا یکپارچه **Connected** می نامیم اگر هر دو نقطه آن را بتوان با یک رشته محدود پاره خط های مستقیم به هم متصل کنیم در صورتی که نقاط آن پاره خط متعلق به S باشد. یک مجموعه باز یا پیوسته را یک دامنه **Domain** می نامیم. پس یک دیسک باز و یک حلقه باز، دامنه هستند. یک مربع که یکی از قطر هایش برداشته شده باشد، دامنه نیست، زیرا این مجموعه پیوسته نیست.

مکمل Complement یک مجموعه S در صفحه مختلط عبارت است از مجموعه کلیه نقاط صفحه مختلط که متعلق به S نباشد. یک مجموعه را بسته **Closed** می نامند اگر مکمل آن باز باشد. مثلاً، نقاط روی و داخل دایره واحد تشکیل یک مجموعه بسته می دهند. زیرا مکمل آن $|z| > 1$ باز است.

یک نقطه مرزی **A Boundary Point** یک مجموعه S نقطه ای است که هر همسایه آن شامل هم نقاطی است که به S تعلق دارد و هم نقاطی است که به S تعلق ندارد. مثلاً نقاط مرزی یک حلقه نقاط دو دایره محدود کننده، هستند. واضح است که اگر یک مجموعه S باز باشد، پس هیچ نقطه مرزی به S تعلق ندارد. اگر S بسته باشد، هر نقطه مرزی، به S تعلق دارد. مجموعه کلیه نقاط مرزی S را مرز S می نامند.

یک منطقه یا ناحیه **A Region** یک مجموعه است که شامل یک دامنه و احتمالاً، چند نقاط مرزی آن می باشد.

تابع مختلط Complex Function

بحث در مورد تابع مختلط تقریباً مانند تعریف ما در حسابان است. اما باید خوب توجه شود، زیرا خواهیم دید که اختلاف هایی هم وجود دارد.

در حسابان داشتیم که یک تابع حقیقی f تعریف شده روی مجموعه اعداد حقیقی، عبارت است از یک قاعده که برای هر x در S ، یک عدد حقیقی $f(x)$ تخصیص می دهد که آنرا مقدار x می نامند. در مورد اعداد مختلط، S یک مجموعه از اعداد مختلط است. و یک تابع f تعریف شده در S عبارت است از یک قاعده که برای هر z در S یک عدد مختلط w تخصیص می دهد که آنرا مقدار z می نامیم. و می نویسیم

$$w = f(z)$$

اینجا z در S تغییر می کند و به آن متغیر مختلط **Complex Variable** می نامند. مجموعه S را دامنه f می نامند.

مثلاً، $w = f(z) = z^2 + 3z$ یک تابع مختلط است تعریف شده برای تمام z ها، در دامنه اش S شامل تمام صفحه مختلط است.

مجموعه تمام مقادیر یک تابع f را برد **Range** آن f می نامند.

اینجا، w مختلط است و می نویسیم $w = u + iv$ اینجا u و v به ترتیب قسمت حقیقی و قسمت مجازی هستند. w وابسته به $z = x + iy$ است. پس u می شود یک تابع حقیقی x و y همچنین v پس می نویسیم.

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

این نشان می دهد که یک تابع مختلط $f(z)$ معادل یک جفت تابع حقیقی $u(x, y)$ و $v(x, y)$ است. و هر کدام وابسته به دو متغیر حقیقی x و y .

مثال 1 تابع یک متغیر مختلط

فرض کنید $w = f(z) = z^2 + 3z$ باشد. مطلوب است u و v و سپس مقدار f را در $z = 1 + 3i$ محاسبه کنید.

پاسخ

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ f(z) &= (x + iy)^2 + 3(x + iy) = x^2 + i2xy - y^2 + 3x + i3y \\ &= x^2 - y^2 + 3x + i(2xy + 3y) = u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned}$$

پس

$$\begin{aligned} u &= \text{قسمت حقیقی}(f(z)) = x^2 - y^2 + 3x \\ v &= \text{قسمت مجازی}(f(z)) = 2xy + 3y \end{aligned}$$

همچنین

$$f(1 + 3i) = (1 + 3i)^2 + 3(1 + 3i) = 1 - 9 + 6i + 3 + 9i = -5 + 15i$$

و این نشان می دهد که $u(1, 3) = -5$ و $v(1, 3) = 15$ است.

مثال 2 تابع یک متغیر مختلط

فرض کنید $w = f(z) = 2iz + 6\bar{z}$ باشد. مطلوب است u و v و مقدار f در $z = \frac{1}{2} + 4i$.

پاسخ

$$f(z) = 2i(x + iy) + 6(x - iy) = 2ix - 2y + 6x - 6iy$$

پس

$$u(x, y) = \text{قسمت حقیقی}(f(z)) = 6x - 2y$$

و

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \text{قسمت مجازی}(f(z)) = 2x - 6y \\ f\left(\frac{1}{2} + 4i\right) &= 3 - 8 + i(1 - 24) = -5 - 23i \end{aligned}$$

ملاحظات در مورد نماد ها و اصطلاح ها

الف - وقتی که می گوییم $f(z)$ یعنی مقدار f در z ، اما اشتباهی گوییم تابع $f(z)$ در صورتی که باید بگوییم تابع f .

ب - فرض ما این است که تمام تابع ها رابطه های یک مقاداره هستند. طبق معمول، برای هر z در S فقط یک مقدار $w = f(z)$ وجود دارد. اما ممکن است چندین z همان مقدار $w = f(z)$ به ما بدهد، پس کلمه تابع چند متغیری بکار نمی بریم.

حد ، پیوستگی Limit , Continuity

می‌گوییم یک تابع $f(z)$ دارای حد l است هنگامی که z به z_0 نزدیک می‌شود و می‌نویسیم

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \quad (1)$$

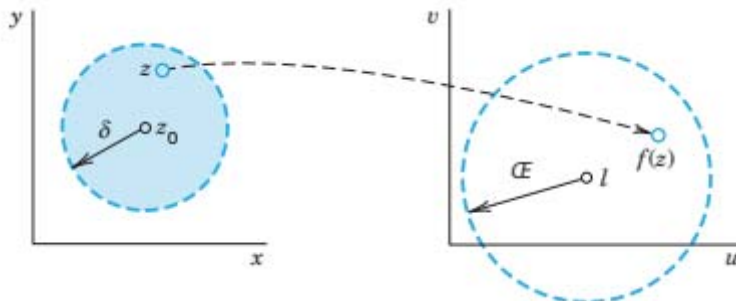
اگر f در همسایگی z_0 تعریف شده باشد و اگر مقادیر f نزدیک l باشد برای تمام z های بهتر بگویم نزدیک z_0 به عبارت دیگر اگر برای هر عدد حقیقی مثبت ε بتوانیم یک عدد حقیقی مثبت δ پیدا کنیم بطوری که برای تمام $z \neq z_0$ ها در دیسک $|z - z_0| < \delta$ داشته باشیم.

$$|f(z) - l| < \varepsilon \quad (2)$$

تصویر شماره 5

تصویر شماره 5

حد



تعریف شبیه همان تعریف حد در حسابان است، اما یک تفاوت بزرگ وجود دارد. در مورد اعداد حقیقی، x می‌تواند به x_0 نزدیک شود فقط در امتداد محور اعداد حقیقی، اینجا، بر اساس تعریف، z می‌تواند از هر جهت روی صفحه مختلط به z_0 نزدیک شود.

اگر حد وجود داشته باشد، منحصر به فرد است.

می‌گوییم یک تابع $f(z)$ در $z = z_0$ پیوسته است اگر $f(z_0)$ تعریف شده باشد و داشته باشیم.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (3)$$

می‌گوییم $f(z)$ در یک دامنه پیوسته است اگر آن تابع در هر نقطه این دامنه، پیوسته باشد.

مشتق Derivative

مشتق یک تابع مختلط در یک نقطه z_0 که نوشته می‌شود $f'(z_0)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (4)$$

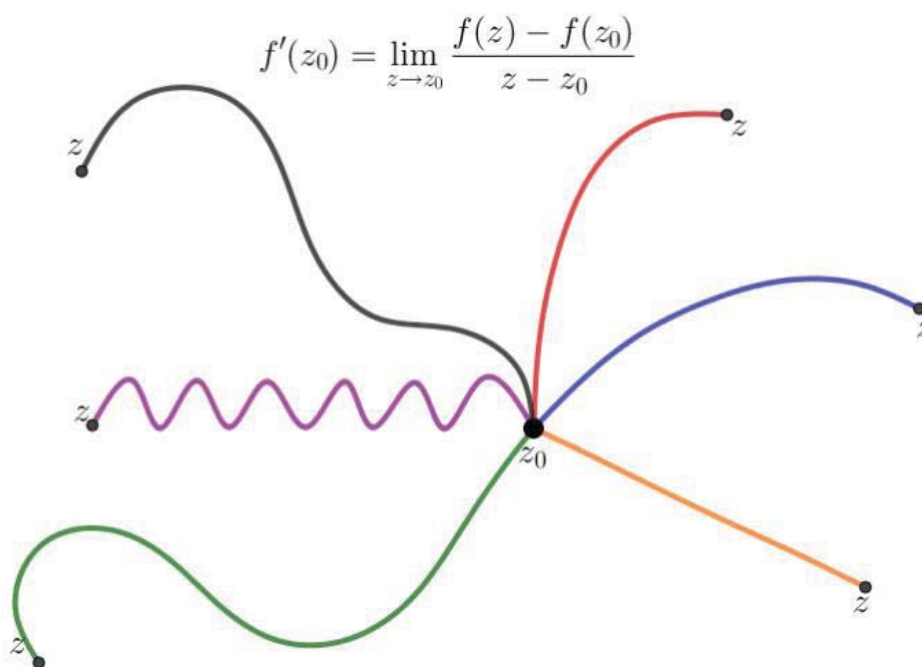
در صورتی که حد بالا وجود داشته باشد. پس می‌گوییم f در z_0 مشتق پذیر **Differentiable** است. اگر بنویسیم $\Delta z = z - z_0$ پس داریم $z = z_0 + \Delta z$ و شماره (4) به صورت زیر در می‌آید.

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (4')$$

حالا به یک نکته مهم می‌رسیم. بخاطر داشته باشید که، بر اساس تعریف حد، $f(z)$ در همسایگی z_0 و براساس (4') در همسایگی z می‌تواند از هر جهتی در صفحه مختلط به z_0 نزدیک شود. تصویر شماره 6

تصویر شماره 6

بی نهایت راه برای رسیدن به z_0 وجود دارد.



مشتق مختلط یعنی چه؟ What Is Meant by Complex Derivative?

یک مشتق مختلط، مشتقی است که نرخ تغییر یک تابع مختلط را به ما می‌گوید. مشتق یک تابع $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ در $z = z_0$ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

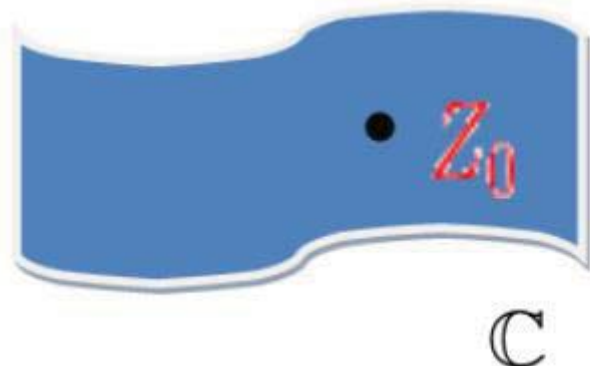
$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

یا می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\left(\frac{dw}{dz} \right)_{z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

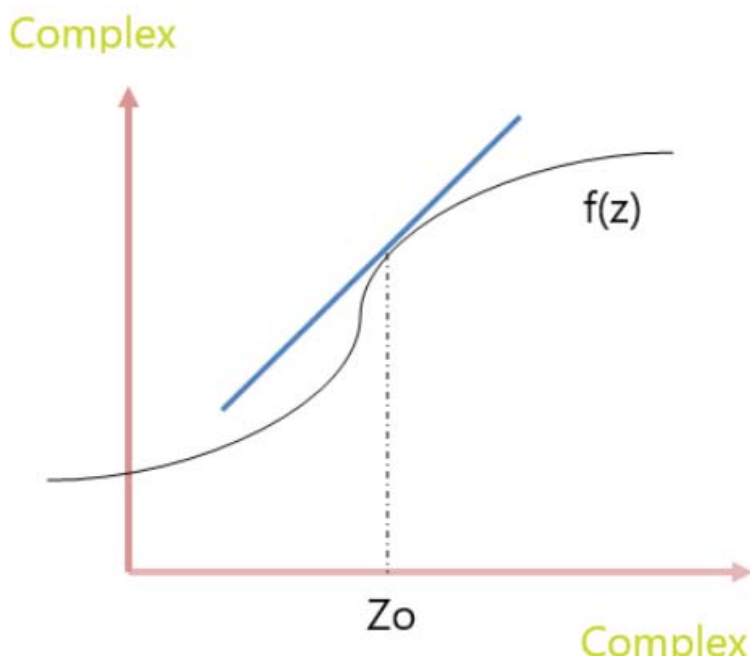
توجه داشته باشید که z_0 در تابع مختلط $\mathbb{C}$ قرار دارد، مانند تصویر شماره 7

تصویر شماره 7



تقریباً غیر ممکن است که نمودار یک مشتق مختلط را نشان داد. اما یک نمودار اجمالی شیب برای یک تابع مختلط در تصویر شماره 8 ملاحظه می کنید.

تصویر شماره 8



فرمول های مشتق مختلط Complex Derivative Formulas
برای یک عدد ثابت k داریم.

$$1. \frac{d}{dz} k = 0$$

$$2. \frac{d}{dz} z^n = n \cdot z^{n-1}$$

$$3. \frac{d}{dz} k \cdot f(z) = k \frac{df}{dz}$$

مانند مشتق پاره ای داریم.

$$4. \frac{d}{dz} f \cdot h = f \frac{dh}{dz} + h \frac{df}{dz}$$

$$5. \frac{d}{dz} (f + h) = \frac{df}{dz} + \frac{dh}{dz}$$

$$6. \frac{d}{dz} (f - h) = \frac{df}{dz} - \frac{dh}{dz}$$

مشتق مختلط و معادلات کاشی – ریمان

Complex Derivative and Cauchy-Riemann Equations

یک تابع مختلط فقط هنگامی در نقطه z_0 مشتق پذیر است، اگر آن تابع از مسیر های مختلف به همان نقطه برسد.

تصویر شماره ۶ • فرض می کنیم برای تابع

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

z بتواند در امتداد محور حقیقی و محور مجازی به صفر نزدیک شود، و اگر نقطه انتهایی یکی نباشد، پس می گوییم تابع مختلط پیوسته نیست. برای این که یک تابع مختلط، پیوسته باشد، باید دو معادله های کاشی ریمان را برقرار کند.

اجازه دهید اول ببینیم چه اتفاقی می افتد هنگامی که در امتداد محور حقیقی به z_0 نزدیک می شویم. می دانیم که یک تابع مختلط به صورت زیر است.

$$f(z) = u + iv$$

هنگامی که از طرف افقی $z \rightarrow z_0$ ، پس می توانیم z را به صورت زیر بنویسیم.

$$z = z_0 + m = (x_0 + m) + iy_0, m \in \mathbb{R}$$

پس می توانیم بنویسیم.

$$f'(z_0) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + m) - f(z_0)}{m}$$

$$f'(z_0) = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + m + iy_0) - f(x_0 - iy_0)}{m}$$

$$f'(z_0) = \lim_{m \rightarrow 0} \left[\frac{u(x_0 + m), y_0) - u(x_0, y_0)}{m} \right] + i \lim_{m \rightarrow 0} \left[\frac{v(x_0 + m), y_0) - v(x_0, y_0)}{m} \right]$$

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$$

اینجا، مشتق‌های پاره‌ای u و v را بر حسب x انجام داده‌ایم.

هنگامی که از مسیر محور مجازی $z \rightarrow z_0$ ، پس می‌توانیم معادله را به صورت زیر بنویسیم.

$$z = z_0 + m = x_0 + i(y_0 + n), n \in \mathbb{R}$$

$$f'(z_0) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + n) - f(z_0)}{n}$$

$$f'(z_0) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + n + i y_0) - f(x_0 + i y_0)}{n}$$

$$f'(z_0) = \lim_{n \rightarrow 0} \left[\frac{v(x_0, y_0 + n) - v(x_0, y_0)}{n} \right] - i \lim_{n \rightarrow 0} \left[\frac{u(x_0, y_0 + n) - u(x_0, y_0)}{n} \right]$$

$$f'(z_0) = u_y(x_0, y_0) - i u_x(x_0, y_0)$$

اینجا، مشتق پاره‌ای را بر حسب y محاسبه کرده‌ایم. برای این که تابع مختلط پیوسته باشد، قسمت‌های حقیقی و مجازی باید مساوی باشند. پس می‌توانیم شرط مشتق‌پذیری یک تابع مختلط را به صورت زیر بنویسیم.

$$u_x = v_y \quad \text{و} \quad u_y = -v_x$$

یا

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

هنگامی که شرایط برقرار باشد، با استفاده از فرمول زیر، مشتق تابع مختلط را محاسبه می‌کنیم.

$$f'(z) = u_x + i v_x$$

یا

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

مثال 3

نشان دهید آیا تابع‌های مختلط زیر مشتق‌پذیر هستند یا نه.

الف - $f(z) = \bar{z}$

ب - $f(z) = z^2$

پاسخ

الف - می دانیم که

$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$u = x \text{ و } v = -y$$

$$u_x = \frac{\delta}{\delta x} x = 1$$

$$u_y = \frac{\delta}{\delta y} x = 0$$

$$v_x = \frac{\delta}{\delta x} -y = 0$$

$$v_y = \frac{\delta}{\delta y} -y = -1$$

پس $u_y = -v_x$ است ، اما $u_x \neq v_y$ لذا امکان ندارد مشتق این تابع مختلط را محاسبه کنیم.

ب - می دانیم که

$$z = x + iy$$

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + i^2 y^2 + i2xy = x^2 - y^2 + i2xy$$

$$u = x^2 - y^2 \text{ و } v = 2xy$$

$$u_x = \frac{\delta}{\delta x} (x^2 - y^2) = 2x - 0 = 2x$$

$$u_y = \frac{\delta}{\delta y} (x^2 - y^2) = 0 - 2y = -2y$$

$$v_x = \frac{\delta}{\delta x} 2xy = 2y$$

$$v_y = \frac{\delta}{\delta y} 2xy = 2x$$

اینجا ، $u_y = -v_x$ و $u_x = v_y$ است ، پس این تابع مختلط ، مشتق پذیر است. و داریم.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^2 + 2z \Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) = 2z$$

قاعده های مشتق گیری مانند آنچه در حسابان دیدیم است.

$$(cf)' = cf', \quad (f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg', \\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

مثال 4

تابع $\bar{z}$ مشتق پذیر نیست. روش دیگر اثبات

ممکن است باعث تعجب شما باشد که بسیاری از تابع های مختلط در هیچ نقطه ای، مشتق پذیر نیستند. مثلا $f(z) = \bar{z} = x - iy$ یکی از این تابع ها است که مشتق پذیر نیست. زیرا اگر داشته باشیم.

$$\Delta z = \Delta x + i \Delta y$$

پس

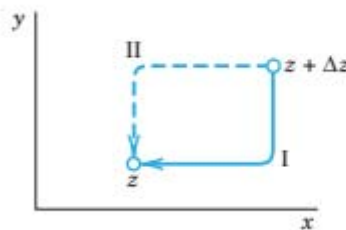
$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{(z + \Delta z)} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} \quad (5)$$

اگر $\Delta y = 0$ باشد، پس شماره (5) مساوی 1 است. اگر $\Delta x = 0$ باشد، پس شماره (5) مساوی -1 است. لذا شماره (5) به +1 نزدیک می شود در امتداد راه I اما به -1 نزدیک می شود در امتداد II
لذا، بر اساس تعریف، حد شماره (5) در حالی که $\Delta z \rightarrow 0$ در هیچ نقطه z وجود ندارد.

تصویر 9

تصویر 9

مسیر شماره (5)



تابع های تحلیلی Analytic Functions

تعریف

یک تابع $f(z)$ را می گویند در یک دامنه D تحلیلی است اگر $f(z)$ در تمام نقاط D تعریف شده و مشتق پذیر باشد. گفته می شود تابع $f(z)$ در یک نقطه $z = z_0$ در D تحلیلی است اگر $f(z)$ در همسایگی z_0 تحلیلی باشد.

مثال 5

چند جمله ای ها ، تابع های گویا **Polynomials , Rational Functions** توان های صحیح غیر صفر $z, z^2, \dots, z^n$ در تمام صفحه مختلط ، تحلیلی هستند ، همچنین چند جمله ای ها ، یعنی تابع های به شکل زیر.

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n$$

اینجا ، $c_0, \dots, c_n$ اعداد ثابت مختلط هستند.

خارج قسمت دو چند جمله ای $g(z)$ و $h(z)$

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

نامیده می شود تابع گویا

این f هم تحلیلی است بجز در نقاطی که $h(z) = 0$ است.

رابطه تابع های مختلط با تابع های هارمونیک Relation with Harmonic Functions

تابع های تحلیلی ، رابطه نزدیک با تابع های هارمونیک دارند . می گوئیم یک تابع حقیقی $h(x, y)$ روی صفحه مختصات ، هارمونیک است اگر از معادله لاپلاس متابعیت کند.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 .$$

در حقیقت نشان می دهیم که قسمت های حقیقی و مجازی یک تابعی تحلیلی ، هارمونیک هستند. فرض می کنیم $f = u + iv$ در یک مجموعه صفحه مختلط باز ، تحلیلی باشد پس داریم.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y}$$

با استفاده از کاشی ریمن

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

به همین طریق می توان نشان داد که v هم هارمونیک است. این نتیجه ، مهم است زیرا نشان می دهد که می توان جواب های یک معادله دیفرانسیل پاره ای مرتبه دوم را با حل یک سیستم معادله دیفرانسیل پاره ای مرتبه اول ، بدست آورد.

اگر یک تابع هارمونیک u داشته باشیم ، می گوئیم تابع هارمونیک دیگر v ، مزدوج هارمونیک **Harmonic Conjugate** آن است ، اگر تابع مختلط $f = u + iv$ تحلیلی باشد.

مثلا، تابع $u(x, y) = xy - x + y$ را در نظر بگیرید. واضح است که این تابع، هارمونیک است. زیرا

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y - 1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x + 1$$

لذا

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

منظور ما از مزدوج هارمونیک، یعنی هر تابع $v(x, y)$ با $u(x, y)$ معادله های کاشی ریمن را برقرار می کنند.

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -x - 1 \quad \text{و} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = y - 1$$

تمرینات بخش 4.3

تمرین 1

مشتق $f(z) = z^3$ را محاسبه کنید.

پاسخ

$$\begin{aligned} \frac{dz^3}{dz} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^3 - z^3}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^3 + 3z^2\Delta z + 3z\Delta z^2 + \Delta z^3 - z^3}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{3z^2\Delta z + 3z\Delta z^2 + \Delta z^3}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta z (3z^2 + 3z\Delta z + \Delta z^2)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} 3z^2 + 3z\Delta z + \Delta z^2 \\ &= 3z^2 \end{aligned}$$

تمرین 2

مطلوب است مشتق

$$f(x) = (iz + 4)^3 (z^2 + 1)^2.$$

پاسخ

مطابق حسابان عمل می کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (iz + 4)^3 (z^2 + 1)^2 &= 3(iz + 4)^2 i (z^2 + 1)^2 + (iz + 4)^3 2(z^2 + 1) 2z \\ &= 3i(iz + 4)^2 (z^2 + 1)^2 + 4z(iz + 4)^3 (z^2 + 1) \\ &= (iz + 4)^2 (z^2 + 1) (3iz^2 + 3i + 4iz^2 + 16z) \\ &= (iz + 4)^2 (z^2 + 1) (7iz^2 + 16z + 3i) \end{aligned}$$

تمرین 3

مطلوب است مشتق تابع های مختلط زیر. این تابع ها پیوسته هستند.

- 1) $f(z) = z^3 - 2z + 6$
- 2) $f(z) = (1 + 4z)^3$
- 3) e^z

پاسخ

- 1) $f'(z) = 3z^2 - 2$
- 2) $f'(z) = 12(1 + 4z)^2$
- 3)

میدانیم که $z = x + iy$ است. پس می توانیم تابع داده شده را به صورت زیر بنویسیم.

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{x+iy} = e^x * e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \\ f(z) &= e^x * \cos y + i e^x * \sin y \end{aligned}$$

اگر تابع شرایط کاشی ریمان را بر قرار کند ، پس می توانیم ، مشتق را پیدا کنیم.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^x * \cos y \\ v(x, y) &= e^x * \sin y \\ u_x &= e^x * \cos y \\ v_x &= e^x * \sin y \end{aligned}$$

پس

$$u_y = -v_x \quad \text{اما} \quad u_x = v_y$$

لذا این یک تابع پیوسته و مشتق پذیر است.

$$f'(z) = u_x + i v_x$$

$$f'(z) = e^x * \cos y + i e^x * \sin y = e^z$$

پس مشتق این تابع e^z است.

تمرین 4

آیا $f(z) = z^3$ تحلیلی است؟

پاسخ

$$f(z) = (x + i y)^3 = x^3 + i 3x^2y - 3y^2x - i y^3$$

$$u = x^3 - 3xy^2, \quad v = 3x^2y - y^3$$

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, \quad v_y = 3x^2 - 3y^2$$

$$u_y = -6xy, \quad v_x = 6xy$$

پس شرایط کاشی ریمان برقرار است، لذا این تابع، تحلیلی است.

بخش 4.5

تابع نمایی Exponential Function

در این بخش در مورد تابع نمایی مختلط بحث می‌کنیم یعنی

$\exp z$ گاهی نوشته میشود e^z

تعریف e^z بر حسب تابع های حقیقی $\sin y$, $\cos y$, e^x به صورت زیر است.

(1)

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

این تعریف از بسط تابع نمایی حقیقی e^x حسابان گرفته شده است ، زیرا

(A)

برای عدد حقیقی $z = x$ هنگامی که $y = 0$ است داریم $\sin y = 0$, $\cos y = 1$ پس $e^z = e^x$

(B)

قبلا ثابت کردیم e^z برای تمام z ها ، تحلیلی است.

(C)

مشتق e^z می‌شود e^z یعنی

(2)

$$(e^z)' = e^z.$$

بر اساس شماره (4) بخش 4.4 شماره (2) بالا به صورت زیر در می‌آید.

$$(e^z)' = (e^x \cos y)_x + i(e^x \sin y)_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z.$$

ویژگی های دیگر Further Properties

یک تابع $f(z)$ که برای تمام z ها ، تحلیلی باشد ، تابع تمام عیار یا تابع کامل Entire Function می‌نامند. پس e^z کامل است. دقیقا ، مانند حسابان رابطه تابعی Functional Relation زیر

(3)

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$$

برای هر $z_1 = x_1 + i y_1$ و $z_2 = x_2 + i y_2$ برقرار است. در حقیقت ، بر اساس شماره (1) داریم.

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2).$$

چون برای تابع های حقیقی داریم

$$e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$$

با استفاده از فرمول های جمع برای تابع های سینوس و کسینوس داریم.

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)] = e^{z_1+z_2}$$

جالب است که بگوییم بر اساس (3) داریم

$$z_1 = x, z_2 = iy$$

پس

$$(4) \quad e^z = e^x e^{iy}.$$

علاوه بر این، برای $z = iy$ بر اساس (1) فرمول اویلر Euler Formula بدست می آوریم.

$$(5) \quad e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

پس شکل قطبی Polar Form یک عدد مختلط

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

را می توان به صورت زیر نوشت.

$$(6) \quad z = re^{i\theta}.$$

از شماره (5) فرمول زیر را بدست می آوریم.

$$(7) \quad e^{2\pi i} = 1$$

همچنین فرمول های مهم زیر را

$$(8) \quad e^{\pi i/2} = i, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{-\pi i/2} = -i, \quad e^{-\pi i} = -1.$$

نتیجه دیگر فرمول شماره (5) شماره زیر است.

$$(9) \quad |e^{iy}| = |\cos y + i \sin y| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1.$$

همچنین داریم.

$$(10) \quad |e^z| = e^x.$$

پس

$$\arg e^z = y \pm 2n\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

چون

$$|e^z| = e^x$$

است، پس این نشان می‌دهد که شماره (1) در حقیقت، شکل قطبی e^z است. از

$$|e^z| = e^x \neq 0$$

در شماره (10) نتیجه می‌گیریم برای تمام z ها، داریم.

(11)

$$e^x \neq 0$$

پس اینجا، تابعی داریم که هرگز از میان نمی‌رود.

خصلت تناوبی e^x با دور تناوب $2\pi i$

برای تمام z ها

(12)

$$e^{z+2\pi i} = e^z$$

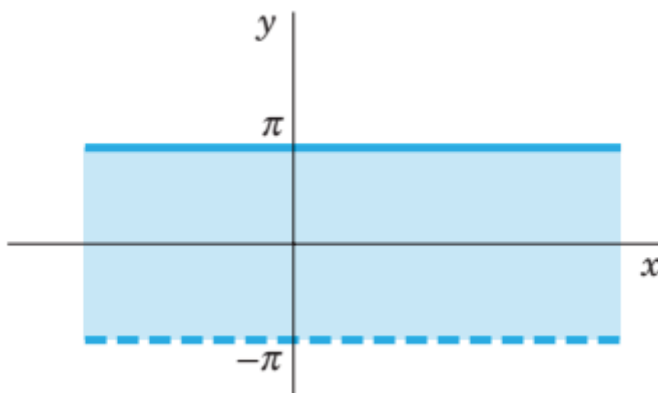
یک خصلت اساسی است که از (1) و تناوبی بودن $\sin y$ و $\cos y$ نتیجه می‌شود. لذا تمام مقادیری که $w = e^z$ می‌تواند داشته باشد در نوار افقی با عرض 2π در تصویر شماره 1 نشان داده شده است.

(13)

$$-\pi < y \leq \pi$$

تصویر شماره 1

ناحیه اصلی تابع نمایی e^z در صفحه z



این نوار نامتناهی را ناحیه اصلی e^z می نامند.

مثال 1

$e^{3+\pi i}$ را به صورت $a + bi$ بنویسید.

پاسخ

$$e^{3+\pi i} = e^3(\cos \pi + i \sin \pi) = e^3(-1) + e^3(0)i = -e^3 + 0i$$

مثال 2

تمام مقادیر $z \in \mathbb{C}$ را برای $\overline{e^{iz}} = e^{i\bar{z}}$ پیدا کنید.

پاسخ

فرض می کنیم $z = x + yi$ باشد، پس $iz = -y + xi$ است. پس

$$\overline{e^{iz}} = \overline{e^{-y+xi}} = \overline{e^{-y}(\cos x + i \sin x)} = \overline{e^{-y} \cos x + ie^{-y} \sin x} = e^{-y} \cos x + i(-e^{-y} \sin x) \quad (*)$$

همچنین داریم.

$$e^{i\bar{z}} = e^{i(x-yi)} = e^{y+xi} = e^y(\cos x + i \sin y) = e^y \cos x + ie^y \sin x \quad (**)$$

این دو را مساوی قرار می دهیم و سپس دو معادله زیر را با هم حل می کنیم.

$$(1) e^{-y} \cos x = e^y \cos x$$

$$(2) -e^{-y} \sin x = e^y \sin x$$

ابتدا فرض می کنیم $\cos x = 0$ باشد، پس برای یک $k \in \mathbb{Z}$ داریم

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

اگر

$$x = \dots, -\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$$

باشد، برای یک $m \in \mathbb{Z}$ پس $\sin x = 1$ است و $-e^{-y} = e^y$ است که برای آن هیچ جوابی وجود ندارد. اگر

$$x = \dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$$

باشد، پس $\sin x = -1$ است و لذا $-e^{-y} = e^y$ است که برای آن جوابی وجود ندارد. پس ممکن است فرض کنیم $\cos x \neq 0$ باشد. با تقسیم طرفین (1) بر $\cos x$ داریم $e^{-y} = e^y$ که دلالت می کند $y = 0$ است. با جانشین کردن این در معادله (2) داریم $-\sin x = \sin x$

پس $2 \sin x = 0$ است و $\sin x = 0$ ، و این هنگامی اتفاق می افتد که $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ باشد ، لذا داریم.

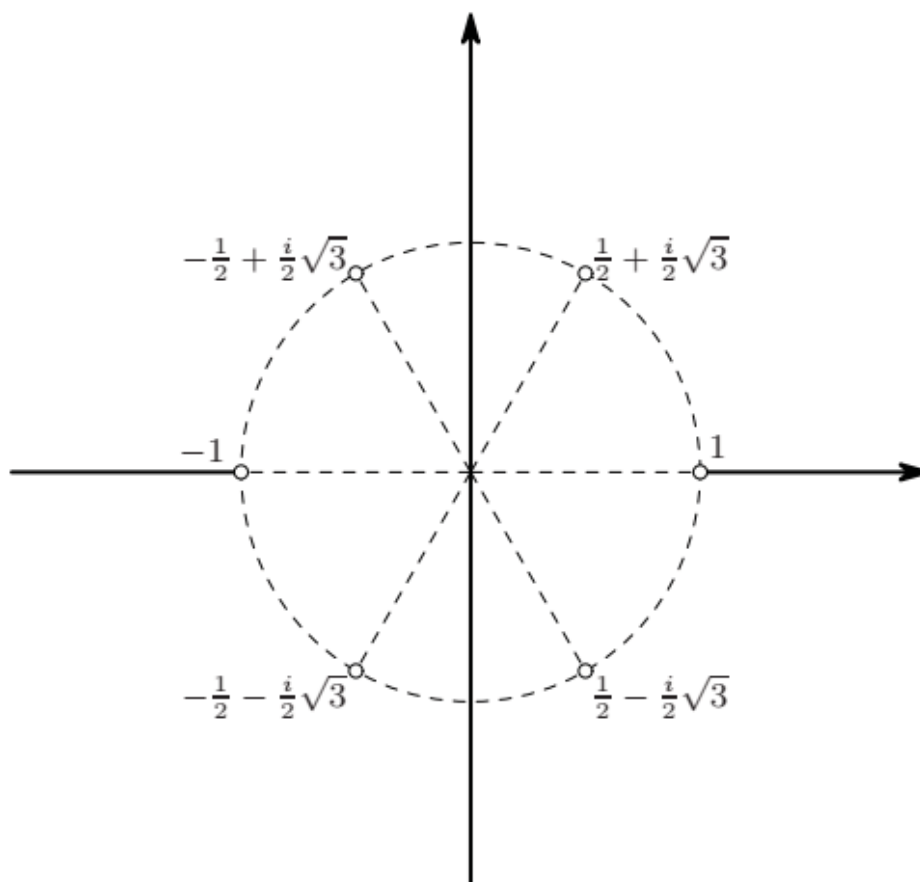
$$z = k\pi + 0i, k \in \mathbb{Z}$$

مثال 3

مطلوب است تمام شش ریشه های $w = 1$

تصویر شماره 2

شش ریشه های 1 و آنها در یک شش ضلعی منتظم مرتب شده اند



پاسخ

باید $z^6 = 1$ را حل کنیم. ابتدا یک را به صورت قطبی می نویسیم.

$$1 = 1 \cdot e^{0i} = 1 \cdot e^{2k\pi i}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

سپس ، ششمین ریشه را می گیریم.

$$z_k = 1^{1/6} e^{2k\pi i/6} = e^{k\pi i/3}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

شش ریشه ها به صورت زیر هستند.

$$\begin{array}{lll} z_0 = 1 & z_1 = e^{\pi i/3} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} & z_2 = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3} \\ z_3 = -1 & z_4 = e^{\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} & z_5 = e^{\pi i/3} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\sqrt{3} \end{array}$$

نمودار شش ریشه ، را در تصویر شماره 2 , ملاحظه می کنید.

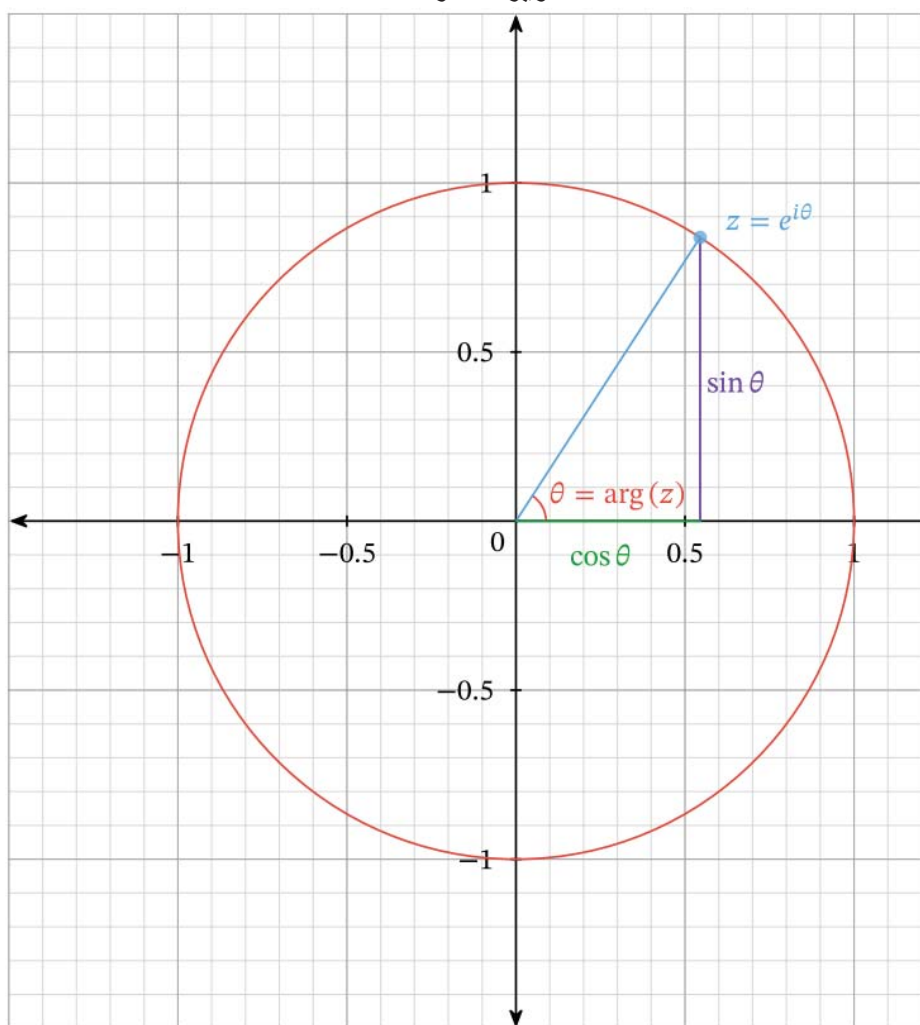
نگاهی مجدد به فرمول اویلر

برای هر عدد حقیقی θ , معادله

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

بنام فرمول اویلر یا اتحاد اویلر ، معروف است. این فرمول ، تابع نمایی e^x و تابع های مثلثاتی و عدد واحد مجازی i را به هم متصل می کند. این فرمول را می توانیم در تصویر شماره 3 مجسم کنیم.

تصویر شماره 3



حالت مخصوص فرمول اویلر هنگامی است که $\theta = \pi$ باشد، پس داریم.

$$e^{i\pi} = -1.$$

اگر به طرفین 1 اضافه کنیم، داریم.

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

این معادله یک فرمول زیبایی ریاضی است، زیرا سه عملیات ریاضی در خود جا داده است، یعنی جمع، ضرب و توان.

سری زیر به سری مک لارین **Maclaurin** موسوم است.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + \dots$$

چون سمت چپ فرمول اویلر $e^{i\theta}$ دارد، می توانیم $x = i\theta$ قرار دهیم، پس داریم.

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta + \frac{i^2\theta^2}{2} + \frac{i^3\theta^3}{3} + \frac{i^4\theta^4}{4} + \frac{i^5\theta^5}{5} + \frac{i^6\theta^6}{6} + \frac{i^7\theta^7}{7} + \dots$$

می دانیم که

$$i^{4n} = 1,$$

$$i^{4n+1} = i,$$

$$i^{4n+2} = -1,$$

$$i^{4n+3} = -i.$$

پس داریم.

حالا قسمت های حقیقی و مجازی را تفکیک می کنیم، پس داریم.

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4} - \frac{\theta^6}{6} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7} + \dots\right).$$

به خاطر آورید که سری مک لارین سینوس و کسینوس به صورت زیر است

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots,$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots.$$

پس می توان نوشت

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

به این طریق فرمول اویلر را ثابت کردیم.

مثال 4

با استفاده از فرمول اویلر، $\sin \theta$ و $\cos \theta$ را بر حسب $e^{i\theta}$ و $e^{-i\theta}$ بنویسید.

پاسخ

$$e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)}$$

$$= \cos(-\theta) + i \sin(-\theta).$$

با توجه به فرد و زوج بودن سینوس و کسینوس داریم.

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta.$$

پس

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta, \quad e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

$$e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta. \quad e^{-i\theta} = \cos \theta - i \sin \theta.$$

چگونه یک عدد مختلط را به صورت نمایی تبدیل کنیم.

How to Convert a Complex Number into an Exponential Form

1 از $z = a + ib$ یا $z = x + iy$ مقدار r را پیدا کنید. یعنی

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{یا} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

2 حالا شناسه اصلی عدد مختلط را پیدا کنید. یعنی

$$\tan \theta = \frac{b}{a} \quad \text{یا} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

3 پس داریم.

$$z = re^{i\theta}$$

مثال 5

عدد مختلط $z = 1 + i$ را به صورت نمایی بنویسید.

پاسخ

ابتدا باید مقدار این عدد مختلط را بدست آوریم.

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

حالا ، باید شناسه اصلی را محاسبه کنیم.

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

پس

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

در نهایت مقادیر بدست آمده را جانشین می کنیم.

$$z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

بخش 4.6

تابع های مثلثاتی و هیپر بالیک Trigonometric and Hyperbolic Functions

همان طور که در بخش 4.5 تابع حقیقی e^x را به تابع مختلط e^z تبدیل کردیم، حالا می خواهیم تابع های مثلثاتی حقیقی را به تابع های مثلثاتی مختلط تبدیل کنیم. برای این کارا، از فرمول اویلر که در بخش قبل دیدیم، استفاده می کنیم. یعنی

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

با جمع و تفریق، کسینوس و سینوس حقیقی بدست می آوریم.

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}).$$

این پیشنهادی است برای تعریف های مقادیر مختلط $z = x + iy$

$$(1) \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

علاوه بر این، مانند حسابان، تعریف های زیر را داریم.

$$(2) \quad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

و

$$(3) \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

چون e^z کامل است، $\cos z$ و $\sin z$ هم تابع های کامل هستند. اما $\tan z$ و $\sec z$ کامل نیستند. آنها تحلیلی هستند، بجز نقاطی که در آنها $\cos z = 0$ است. و $\cot z$ و $\csc z$ تحلیلی هستند بجز نقاطی که در آنها $\sin z = 0$ است. علاوه بر این برای مشتق ها، همان طور که قبلا گفتیم

$$(e^z)' = e^z$$

و مانند حسابان مشتق های شماره های (1)، (2)، (3) می شوند.

$$(4) \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad (\tan z)' = \sec^2 z,$$

شماره (1) نشان می دهد که فرمول اویلر برای مختلط هم، معتبر است، پس برای تمام z ها داریم.

(5)

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

قسمت های حقیقی و مجازی $\cos z$ و $\sin z$ هنگام محاسبه مقادیر آنها، لازم هستند، همچنین برای نشان دادن خواص تابع ها کمک می کنند.

مثال 1

قسمت های حقیقی و مجازی، قدر مطلق، خصالت تناوبی

Real and Imaginary Parts, Absolute Value, Periodicity

نشان دهید

(6)

$$(a) \quad \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$(b) \quad \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

و

(7)

$$(a) \quad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

$$(b) \quad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

و چند کار برد های این فرمول ها را ذکر کنید.

پاسخ

بر اساس شماره (1) داریم.

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}) \\ &= \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \sin x) + \frac{1}{2}e^y(\cos x - i \sin x) \\ &= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \cos x - \frac{1}{2}i(e^y - e^{-y}) \sin x. \end{aligned}$$

این شماره (6a) را به ما می دهد، زیرا همانطور که در حسابان دیدیم.

(8)

$$\cosh y = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}), \quad \sinh y = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y});$$

شماره (6b) هم به همین طریق بدست می آید. از (6a) و

$$\cosh^2 y = 1 + \sinh^2 y$$

فرمول زیر را بدست می آوریم.

$$|\cos z|^2 = (\cos^2 x)(1 + \sinh^2 y) + \sin^2 x \sinh^2 y.$$

چون

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

است ، شماره های (7a) و (7b) به همین طریق بدست می آیند.

مثلا

$$\cos(2 + 3i) = \cos 2 \cosh 3 - i \sin 2 \sinh 3 = -4.190 - 9.109i.$$

از (6) ملاحظه می شود که $\sin z$ و $\cos z$ متناوب هستند با دوره تناوب 2π دقیقاً مانند تابع حقیقی. متناوب بودن $\tan z$ و $\cot z$ با دوره تناوب π متعاقب آن می آید.

فرمول (7) به یک اختلاف اساسی بین کسینوس و سینوس مختلط و حقیقی اشاره می کند. در حالی که $|\sin x| \leq 1$ و $|\cos x| \leq 1$ است ، اما تابع های کسینوس و سینوس مختلط دیگر محدود نیستند بلکه به بی نهایت مطلق می روند ، هنگامی که $y \rightarrow \infty$ چون $\sinh y \rightarrow \infty$ در (7)

مثال 2

ریشه های معادلات ، صفر های $\sin z$ و $\cos z$

حل کنید

الف $\cos z = 5$

ب $\cos z = 0$

ج $\sin z = 0$

پاسخ

الف -

بر اساس شماره (1)

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

می توان نوشت

$$\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = 5$$

طرفین را در 2 ضرب می کنیم.

$$e^{iz} + e^{-iz} = 10$$

طرفین را در e^{iz} ضرب می کنیم و همه را به سمت راست منتقل می کنیم.

$$(e^{iz} + e^{-iz}) * e^{iz} = 10e^{iz}$$

$$e^{2iz} - 10e^{iz} + 1 = 0$$

این معادله درجه دوم را مطابق آنچه در جبر برای اعداد حقیقی دیدیم ، حل می کنیم.

$$e^{iz} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4}}{2} = 5 \pm \frac{\sqrt{96}}{2} = 5 \pm \frac{\sqrt{24 \cdot 4}}{2} \\ = 5 \pm \sqrt{24} = 5 \pm 4.899$$

پس

$$e^{iz} = e^{-y+ix} = 9.899 \quad \text{یا} \quad 0.101$$

توجه کنید نوشتیم $e^{iz} = e^{-y+ix}$ زیرا

$$z = x + iy$$

پس

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y+ix}$$

پس

$$e^{-y} = 9.899 \quad \text{یا} \quad 0.101, \quad e^{ix} = 1$$

با استفاده از قانون لگاریتم ها داریم.

$$y = \pm 2.292$$

$$e^{ix} = 1$$

$$x = 2n\pi$$

در نهایت

$$z = \pm 2n\pi \pm 2.292i, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(b)

$$\cos x = 0, \sinh y = 0$$

بر اساس (7a)

$$y = 0$$

پس

$$z = \pm \frac{1}{2}(2n+1)\pi \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(c)

$$\sin x = 0, \sinh y = 0$$

بر اساس (7b)

$$z = \pm n\pi \quad (n = \pm 0, 1, 2, \dots)$$

لذا، تنها صفرهای $\cos z$ و $\sin z$ همان صفرتابع های کسینوس و سینوس حقیقی هستند.

فرمول کلی برای این که تابع های مثلثاتی حقیقی برای مقادیر مختلط برقرار باشد .
این از تعریف ها بدست می آید. مخصوصا، قانون های جمع را ذکر می کنیم.

$$\begin{aligned} \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2 \\ \sin(z_1 \pm z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 \pm \sin z_2 \cos z_1 \end{aligned} \quad (9)$$

و فرمول زیر

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1. \quad (10)$$

تابع های هیپربالیک Hyperbolic Functions
کسینوس و سینوس هیپربالیک مختلط با فرمول های زیر تعریف می شوند.

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \quad \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}). \quad (11)$$

این تابع ها کامل هستند ، با مشتق ها

$$(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z, \quad (12)$$

مانند حسابان ، باقی تابع های هیپربالیک به صورت های زیر تعریف می شوند.

$$\begin{aligned} \tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z}, & \coth z &= \frac{\cosh z}{\sinh z}, \\ \operatorname{sech} z &= \frac{1}{\cosh z}, & \operatorname{csch} z &= \frac{1}{\sinh z}. \end{aligned} \quad (13)$$

تابع های مثلثاتی مختلط و تابع های هیپربالیک با هم مربوط هستند.

Complex Trigonometric and Hyperbolic Functions Are Related

در فرمول (11) بجای z می نویسیم iz و سپس (1) را بکار می بریم.

$$\cosh iz = \cos z, \quad \sinh iz = i \sin z. \quad (14)$$

به همین طریق اگر در (1) بجای z بگذاریم iz و سپس شماره (11) را بکار ببریم ، خواهیم داشت

$$\cos iz = \cosh z, \quad \sin iz = i \sinh z. \quad (15)$$

آنالیز اعداد مختلط در مهندسی و فیزیک ، خیلی مهم است.

چند فرمول دیگر هم بخاطر داشته باشد.

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

$$\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y.$$

$$\cosh (z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$$

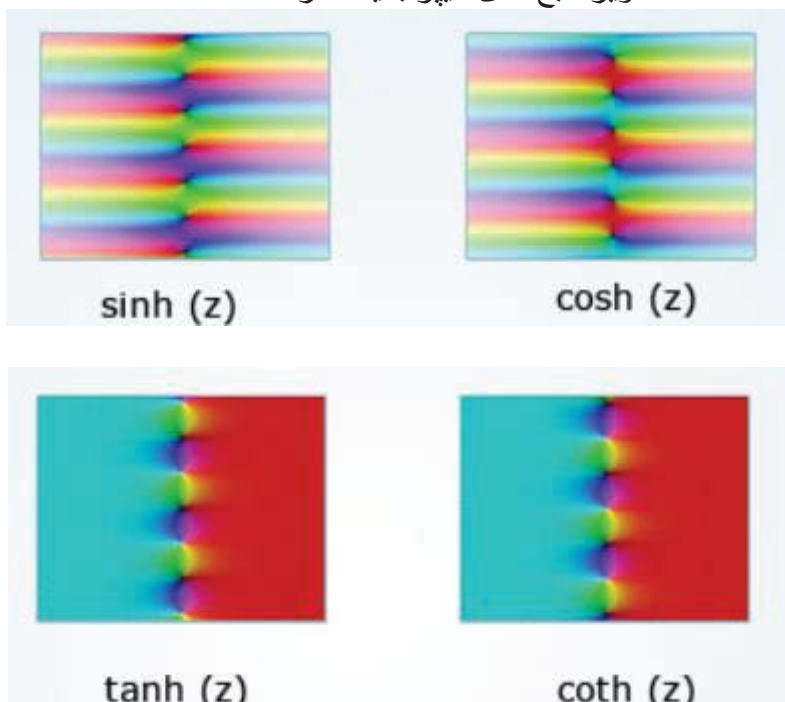
$$\sinh (z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2.$$

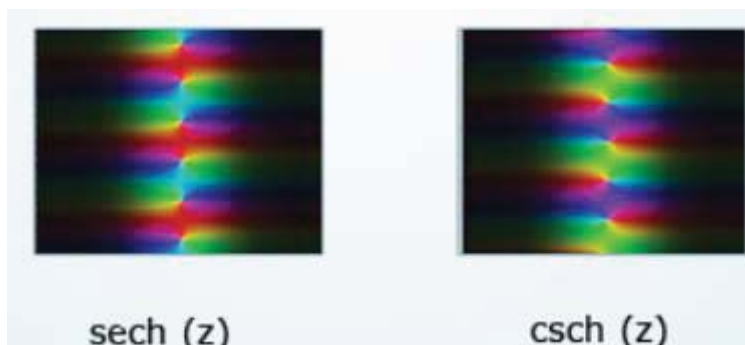
$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad \cosh^2 z + \sinh^2 z = \cosh 2z$$

قانون آسبورن Osborne's Rule

اتحاد های تابع های هیپر بالیک ، از اتحاد های تابع های مثلثاتی بدست می آیند. به این طریق که بجای $\sin \theta$ می گذاریم $\sinh \theta$ و بجای $\cos \theta$ می گذاریم $\cosh \theta$ بجز این که هر جا $\sin^2 \theta$ داشتیم ، می گذاریم $-\sinh^2 \theta$ ،

تصویر تابع های هیپر بالیک در صفحه مختلط





تمرینات بخش 4.6

تمرین 1

نشان دهید $\cos z$ یک تابع تحلیلی است.

پاسخ

$$\begin{aligned}\cos(z) &= \cos(x + iy) = \cos(x) \cos(iy) - \sin(x) \sin(iy) \\ &= \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y)\end{aligned}$$

این را به صورت $u(x, y) + iv(x, y)$ می نویسیم. شرایط کاشی ریمان را می توان چک کرد.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin(x) \cosh(y) \quad \text{و} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin(x) \cosh(y) = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{ها } (x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cos(x) \sinh(y) \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\cos(x) \sinh(y) = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{ها } (x, y)$$

در نتیجه $w = \cos(z)$ در تمام سیستم، تحلیلی است. سیستم منظور صفحه مختصات مختلط.

تمرین 2

با استفاده از قانون آسبورن، اتحاد هیپربالیک، معادل

$$1 + \tan^2 \theta \equiv \sec^2 \theta.$$

پیدا کنید.

پاسخ

$$1 + \tan^2 \theta \equiv \sec^2 \theta$$

معادل

$$1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \equiv \frac{1}{\cos^2 \theta}.$$

است، پس اگر

$$\sin^2 \theta \rightarrow -\sinh^2 \theta$$

و

$$\cos^2 \theta \rightarrow \cosh^2 \theta$$

است، داریم

$$1 - \frac{\sinh^2 \theta}{\cosh^2 \theta} \equiv \frac{1}{\cosh^2 \theta}$$

یا

$$1 - \tanh^2 \theta \equiv \operatorname{sech}^2 \theta$$

بخش 4.7

لگاریتم . توان کلی . مقدار اصلی **Logarithm, General Power, Principal Value**

در این بخش در مورد لگاریتم مختلط بحث می کنیم که از لگاریتم حقیقی پیچیده تر است.

لگاریتم طبیعی **Natural Logarithm**

لگاریتم طبیعی $z = x + iy$ که با $\ln z$ نشان داده می شود ، معکوس تابع نمایی است . یعنی $w = \ln z$ برای $z \neq 0$ به صورت رابطه زیر تعریف می شود.

$$e^w = z$$

توجه داشته باشید که $z = 0$ غیر ممکن است زیرا $e^w \neq 0$ است ، برای تمام w ها . اگر $w = u + iv$ قرار دهیم و $z = re^{i\theta}$ پس داریم.

$$e^w = e^{u+iv} = re^{i\theta}.$$

بر اساس شماره بخش 4.5 می دانیم که e^{u+iv} دارای قدر مطلق e^u است و شناسه v . پس این ها باید مساوی قدر مطلق و شناسه سمت یست باشند ، یعنی

$$e^u = r, \quad v = \theta.$$

عبارت $e^u = r$ می دهد $u = \ln r$ اینجا $\ln r$ همان لگاریتم طبیعی حقیقی عدد مثبت $r = |z|$ است. پس $w = u + iv = \ln z$ به صورت زیر داده می شود.

(1)

$$\ln z = \ln r + i\theta$$

اینجا

$$(r = |z| > 0, \quad \theta = \arg z).$$

است.

حالا ، نکته مهم

چون شناسه z تنها بوسیله مضرب های صحیح 2π مشخص می شود ، لگاریتم طبیعی مختلط $\ln z$ ($z \neq 0$) چند متغیره نامتناهی است.

مقدار $\ln z$ متناظر مقدار اصلی $\text{Arg } z$ که با $\text{Ln } z$ نشان می دهیم ، مقدار اصلی $\ln z$ می نامند . پس

(2)

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$$

اینجا ($z \neq 0$) است.

منحصر به فرد بودن $\text{Arg } z$ برای $z \neq 0$ دلالت می‌کند که $\text{Ln } z$ یک مقدار است، یعنی یک تابع در مفهوم معمولی آن. چون مقادیر دیگر $\arg z$ با مضربی از 2π اختلاف دارند، بقیه مقادیر $\ln z$ به صورت زیر هستند.

(3)

$$\ln z = \text{Ln } z \pm 2n\pi i$$

اینجا $n = 1, 2, \dots$ است.

آنها همه، دارای قسمت های حقیقی، یکسان دارند، و قسمت های مجازی، با مضرب های عدد صحیح 2π متفاوت هستند.

اگر z یک عدد حقیقی مثبت باشد، پس $\text{Arg } z = 0$ است و $\text{Ln } z$ همانند لگاریتم طبیعی که در حسابان دیدیم، می‌شود. اگر z عدد حقیقی منفی باشد، بطوری که در حسابان لگاریتم طبیعی تعریف شده نیست، پس $\text{Arg } z = \pi$ است. و

$$\text{Ln } z = \ln |z| + \pi i$$

اینجا z عدد حقیقی منفی است.

بر اساس (1) و $e^{\ln r} = r$ برای یک عدد حقیقی مثبت r داریم.

(4a)

$$e^{\ln z} = z$$

همان طور که انتظار داریم، اما $\arg(e^z) = y \pm 2n\pi$ چند مقدار است، پس

(4b)

$$\ln(e^z) = z \pm 2n\pi i,$$

اینجا $n = 0, 1, 2, \dots$ است.

تعریف شاخه اصلی Principal Branch

$$\text{Ln}(z) = \ln(r) + i\theta \quad \text{for } \theta \in [0 \dots 2\pi)$$

$$\text{Ln}(z) = \ln(r) + i\theta \quad \text{for } \theta \in (-\pi \dots \pi]$$

مثال 1

لگاریتم طبیعی، مقدار اصلی

$$\ln 1 = 0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \dots$$

$$\text{Ln } 1 = 0$$

$$\ln 4 = 1.386294 \pm 2n\pi i$$

$$\text{Ln } 4 = 1.386294$$

$$\ln(-1) = \pm \pi i, \pm 3\pi i, \pm 5\pi i, \dots$$

$$\text{Ln}(-1) = \pi i$$

$$\ln(-4) = 1.386294 \pm (2n+1)\pi i$$

$$\text{Ln}(-4) = 1.386294 + \pi i$$

$$\ln i = \pi i/2, -3\pi i/2, 5\pi i/2, \dots$$

$$\text{Ln } i = \pi i/2$$

$$\ln 4i = 1.386294 + \pi i/2 \pm 2n\pi i$$

$$\text{Ln } 4i = 1.386294 + \pi i/2$$

$$\ln(-4i) = 1.386294 - \pi i/2 \pm 2n\pi i$$

$$\text{Ln}(-4i) = 1.386294 - \pi i/2$$

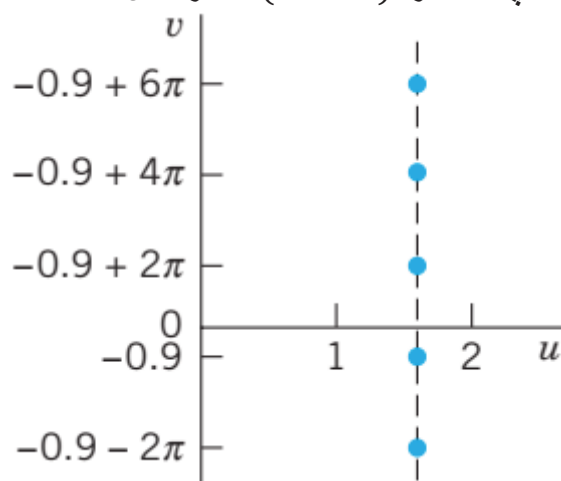
$$\ln(3-4i) = \ln 5 + i \arg(3-4i)$$

$$\text{Ln}(3-4i) = 1.609438 - 0.927295i$$

$$= 1.609438 - 0.927295i \pm 2n\pi i$$

تصویر 1

تصویر 1

چند مقدار $\ln(3-4i)$ در مثال 1

همان رابطه هائی که در حسابان دیدیم اینجا هم صادق است.

$$(5) \quad (a) \quad \ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2, \quad (b) \quad \ln(z_1/z_2) = \ln z_1 - \ln z_2$$

مثال 2

توضیح رابطه عملی در سیستم مختلط، ذکر شده در مثال 5 فرض کنید داشته باشیم

$$z_1 = z_2 = e^{\pi i} = -1.$$

اگر، مقادیر اصلی را بگیریم

$$\text{Ln } z_1 = \text{Ln } z_2 = \pi i,$$

پس (5a) برقرار است در صورتی که بنویسیم

$$\ln(z_1 z_2) = \ln 1 = 2\pi i$$

اما، برای مقدار اصلی

$$\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } 1 = 0.$$

صحیح نیست.

قضیه 1

تحلیلی بودن لگاریتم Analyticity of the Logarithm

برای هر $n = 0, 1, 2, \dots$ فرمول (3) یک تابع را تعریف می کنند که تحلیلی است، بجز در 0 و روی محور حقیقی منفی، و دارای مشتق

$$(6) \quad (\ln z)' = \frac{1}{z}$$

است، بجز در 0 و عدد حقیقی منفی.

اثبات

نشان می دهیم که معادلات کاشی ریمان برقرار هستند. براساس (3) - (1) داریم.

$$\ln z = \ln r + i(\theta + c) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + i \left(\arctan \frac{y}{x} + c \right)$$

اینجا عدد ثابت c یک مضرب 2π است. با مشتق گرفتن داریم.

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2} = v_y = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$u_y = \frac{y}{x^2 + y^2} = -v_x = -\frac{1}{1 + (y/x)^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right).$$

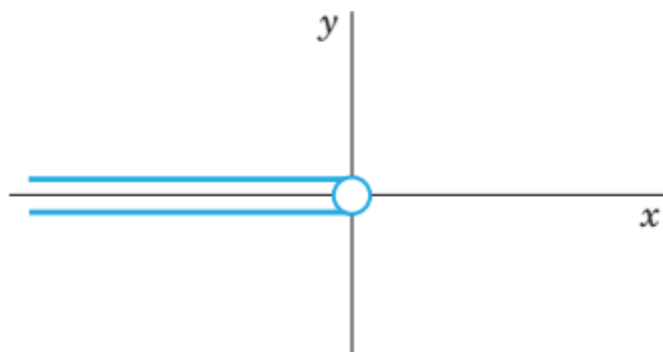
پس ، معادلات کاشی ریمان ، برقرار هستند. بر اساس (4) بخش 4.4 شماره (6) بالا را بدست می آوریم.

$$(\ln z)' = u_x + iv_x = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{1}{1 + (y/x)^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}.$$

هر کدام از تابع های متعدد د شماره (3) یک شاخه **Branch** لگاریتم می نامند. محور حقیقی منفی را **شاخه بریده Branch Cut** می نامند. و معمولاً مانند تصویر شماره 2 رسم می شود. شاخه $n = 0$ را **شاخه اصلی Principal Branch** $\ln z$ می نامند.

تصویر 2

شاخه بریده $\ln z$



توان های کلی General Powers

توان های کلی یک عدد مختلط $z = x + iy$ به صورت زیر تعریف می شوند.

(7)

$$z^c = e^{c \ln z}$$

اینجا c یک عدد مختلط است و $z \neq 0$

چون $\ln z$ چند متغیره است ، پس بطور کلی z^c چند مقداری است. مقدار مخصوص

$$z^c = e^{c \operatorname{Ln} z}$$

مقدار اصلی z^c می نامند.

اگر $c = n = 1, 2, \dots$ باشد ، پس z^n یک مقداری است و عیناً مانند توان n ام z است.

اگر $c = -1, -2, \dots$ باشد شرایط هم شبیه بالا است.

اگر $c = \frac{1}{n}, n = 2, 3, \dots$ باشد ، پس

$$z^c = \sqrt[n]{z} = e^{(1/n) \ln z} \quad (z \neq 0),$$

توان تا مضربی از $\frac{2\pi i}{n}$ مشخص می شود و n مقدار متمایز ریشه n ام بدست می آوریم .
اگر $c = \frac{p}{q}$ یعنی یک کسر شامل اعداد صحیح مثبت ، شرایط مانند بالا است و z^c فقط تعداد محدودی مقادیر دارد. اما اگر c یک عدد حقیقی گنگ و یا مختلط باشد ، پس z^c چند مقدار است.

مثال 3

$$i^i = e^{i \ln i} = \exp(i \ln i) = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}i \pm 2n\pi i\right)\right] = e^{-(\pi/2) \mp 2n\pi}.$$

تمام این مقادیر ، حقیقی هستند. و مقدار اصلی $e^{-\pi/2}$ است، با $n = 0$ ،
به همین طریق با محاسبه مستقیم و ضرب کردن توان ،

$$\begin{aligned}(1+i)^{2-i} &= \exp[(2-i) \ln(1+i)] = \exp[(2-i) \{\ln \sqrt{2} + \frac{1}{4}\pi i \pm 2n\pi i\}] \\ &= 2e^{\pi/4 \pm 2n\pi} [\sin(\frac{1}{2} \ln 2) + i \cos(\frac{1}{2} \ln 2)].\end{aligned}$$

فراموش نکنید که $\exp(2-i)$ همان $e^{(2-i)}$ است.

متداول است که برای عدد حقیقی مثبت $z = x$ عبارت z^c یعنی $e^{c \ln x}$ اینجا $\ln x$ همان لگاریتم طبیعی اعداد حقیقی است. همچنین اگر $z = e$ باشد ، پایه لگاریتم طبیعی $z^c = e^c$ به عنوان مقدار منحصر به فرد شماره (1) بخش 4.5 تلقی می شود.

براساس (7) ملاحظه می شود که برای هر عدد مختلط a داریم.

(8)

$$a^z = e^{z \ln a}.$$

حالا ، تابع های مختلط را معرفی کرده ایم برای کار های عملی ، بعضی از آنها که تحلیلی هستند عبارتند از،

$$(e^z, \cos z, \sin z, \cosh z, \sinh z)$$

تابع های زیر هم تحلیلی هستند بجز در بعضی نقاط.

$$(\tan z, \cot z, \tanh z, \coth z)$$

تمرینات بخش 4.7

تمرین 1

• مطلوب است $\log(1)$

پاسخ

می دانیم که $e^0 = 1$ پس $\log(1) = 0$ این یک جواب است.

همچنین می دانیم که $e^{2\pi i} = 1$ است ، پس $\log(1) = 2\pi i$ یک جواب ممکن دیگر. در حقیقت می توانیم هر مضربی از $2\pi i$ انتخاب کنیم. پس

$$\log(1) = 2n\pi i$$

است. n هر عدد صحیحی می تواند باشد.

تمرین 2

تمام مقادیر $\log(i)$ را محاسبه کنید. مشخص کنید کدام یک از شاخه اصلی است.

پاسخ

می دانیم که $|i| = 1$ و $\arg(i) = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ است، پس برای هر عدد صحیح n داریم.

$$\log(i) = \log(1) + i\frac{\pi}{2} + i2n\pi$$

$$= i\frac{\pi}{2} + i2n\pi,$$

شاخه اصلی $\arg(z)$ بین $-\pi$ و π است. پس

$$\text{Arg}(i) = \pi/2$$

است. لذا مقدار $\log(i)$ از شاخه اصلی

$$\frac{i\pi}{2}$$

است.

تمرین 3

تمام مقادیر $\log(-1 - \sqrt{3}i)$ را محاسبه کنید و مشخص کنید کدام یک از شاخه اصلی است.

پاسخ

فرض می کنیم $z = -1 - \sqrt{3}i$ باشد، پس $|z| = 2$ است و شاخه اصلی

$$\text{Arg}(z) = -2\pi/3.$$

است. پس تمام مقادیر $\log(z)$ به صورت زیر است.

$$\log(z) = \log(2) - i\frac{2\pi}{3} + i2n\pi.$$

مقدار شاخه اصلی

$$\log(z) = \log(2) - \frac{i2\pi}{3}$$

است.

تمرین 4

تمام مقادیر $\sqrt{2i}$ را محاسبه کنید. مقدار مربوط به شاخه اصلی $\log(z)$ را مشخص کنید.

پاسخ
داریم

$$\log(2i) = \log\left(2e^{\frac{i\pi}{2}}\right) = \log(2) + i\frac{\pi}{2} + i2n\pi.$$

پس

$$\begin{aligned}\sqrt{2i} &= (2i)^{1/2} \\ &= e^{\frac{\log(2i)}{2}} \\ &= e^{\frac{\log(2)}{2} + \frac{i\pi}{4} + in\pi} \\ &= \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4} + in\pi}.\end{aligned}$$

طبق معمول n یک عدد صحیح است. همان طور که قبلا دیدیم این، دو مقدار متمایز می دهد. شاخه اصلی

$$\text{Arg}(2i) = \pi/2$$

است. پس

$$\begin{aligned}\sqrt{2i} &= \sqrt{2}e^{(i\pi/4)} \\ &= \sqrt{2}\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \\ &= 1+i.\end{aligned}$$

مقدار متمایز دیگر هنگامی است که $n = 1$ است و آن $-(1+i)$ است.

تمرین 5

تمام ریشه های سوم i را محاسبه کنید.

پاسخ
داریم.

$$\log(i) = i\frac{\pi}{2} + i2n\pi,$$

پس

$$i^{1/3} = e^{\frac{\log(i)}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6} + i\frac{2n\pi}{3}}$$

این، سه مقدار متمایز به ما میدهد.

$$e^{i\pi/6}, e^{i5\pi/6}, e^{i9\pi/6}$$

تمرین 6مطلوب است $\ln(-1)$

پاسخ

برای تمام $k \in \mathbb{Z}$ داریم.

$$\ln(-1) = (2k + 1) \pi i$$

تمرین 7مطلوب است $\ln(-2)$

پاسخ

برای تمام $k \in \mathbb{Z}$ داریم.

$$\ln(-2) = \ln 2 + (2k + 1) \pi i$$

تمرین 8مطلوب است $\ln(i)$ برای تمام $k \in \mathbb{Z}$ داریم.

پاسخ

$$\ln(i) = (4k + 1) \frac{\pi i}{2}$$

تمرین 9مطلوب است $\ln(1 - i \tan \alpha)$ برای تمام $k \in \mathbb{Z}$ داریم.

$$\ln(1 - i \tan \alpha) = \ln \sec \alpha + i(-\alpha + 2k\pi)$$