



RIAZISARA

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

<https://t.me/riazisara>



ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



همه‌هنگی کلاس خصوصی آنلاین ریاضی ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲

فصل سوم

Chapter Three

معادلات دیفرانسیل پاره ای

Partial Differential Equations

بخش اول

مفهوم اصلی معادلات دیفرانسیل پاره ای

Basic Concepts of PDEs

اگر حل معادلات دیفرانسیل معمولی را فراموش کرده اید ، ابتدا به آن مبحث در کتب مختلف از جمله کتاب جلد اول معادلات دیفرانسیل به همین قلم مراجعه کنید ، در غیر این صورت چیزی از معادلات دیفرانسیل پاره ای نخواهید فهمید.

یک معادله دیفرانسیل پاره ای PDE یک معادله است که شامل یک یا چند مشتق پاره ای یک تابع نا شناخته است، که آنرا u می نامیم که وابسته به یک یا چند متغیر است. که معمولاً زمان t است و یک یا چند متغیر دیگر. بزرگ ترین مرتبه را مرتبه معادله دیفرانسیل می نامیم. عیناً مانند معادلات دیفرانسیل معمولی ، معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم ، کار برد های مهمی دارند.

مانند معادلات دیفرانسیل معمولی ، می گوئیم یک معادله دیفرانسیل پاره ای، خطی است ، اگر از مرتبه اول تابع نا شناخته u و مشتق های پاره ای آن باشد. در غیر این صورت به آن غیر خطی می نامیم. پس ، تمام معادلات در مثال 1 که در زیر ملاحظه خواهید کرد ، خطی هستند. یک معادله دیفرانسیل پاره ای خطی را هموژن یا متجانس می نامیم اگر هر یک از جمله های آن یا شامل u باشد ، یا یکی از مشتق های پاره ای آن باشد. در غیر این صورت به آن نا متجانس می نامند. پس (4) در مثال 1 نا متجانس است. زیرا f صفر نیست. بقیه معادله ها متجانس هستند.

مثال 1 معادله های دیفرانسیل پاره ای مرتبه دوم مهم.

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{معادله موج یک بعدی}$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{معادله حرارت یک بعدی}$$

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{معادله دو بعدی لاپلاس}$$

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \quad \text{معادله دو بعدی پواسان}$$

$$(5) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{معادله دو بعدی موج}$$

$$(6) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \text{معادله سه بعدی لاپلاس}$$

اینجا، c یک عدد ثابت مثبت است، t زمان است، x, y, z مختصات دکارتی هستند، و بعد، تعداد این مختصات یا محورها است

یاد آوری: خاصیت جمع بندی یا بر هم نهی Superposition
اگر ورودی A پاسخ x را ایجاد کند و ورودی B پاسخ y را ایجاد کند، پس ورودی $(A + B)$ پاسخ $(x + y)$ را ایجاد می کند.

قضیه 1

Fundamental Theorem on Superposition بر هم نهی

اگر u_1 و u_2 جواب های یک معادله دیفرانسیل پاره ای خطی متجانس در یک زمینه R باشد، پس

$$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

هم یک جواب معادله دیفرانسیل پاره ای است در R با هر عدد ثابت c_1 و c_2

مثال 2 حل $u_{xx} - u = 0$ مانند معادله دیفرانسیل معمولی ODE

مطلوب است جواب های u معادله دیفرانسیل پاره ای $u_{xx} - u = 0$ وابسته به x و y .
پاسخ

چون هیچ مشتق y وجود ندارد، می توانیم این معادله دیفرانسیل پاره ای را مثل $u'' - u = 0$ حل کنیم. در مبحث معادلات دیفرانسیل معمولی Ordinary Differential Equations پاسخ را به صورت زیر ممکن بود بدست آوریم.

$$u = Ae^x + Be^{-x}$$

در معادله بالا A و B اعداد ثابت هستند. اما اینجا که در مورد معادلات دیفرانسیل پاره ای بحث می کنیم، A و B می توانند تابع های y باشند، پس جواب به صورت زیر خواهد بود.

$$u(x, y) = A(y)e^x + B(y)e^{-x}$$

مثال 3 حل $u_{xy} = -u_x$ مانند یک معادله دیفرانسیل معمولی ODE

توجه: برای کوتاه کردن جملات ممکن است بیشتر اوقات از کلمات اختصاری زیر بکار ببریم.

معادله دیفرانسیل معمولی: ODE

معادله دیفرانسیل پاره ای: PDE

مطلوب است جواب های $u = u(x, y)$ این معادله دیفرانسیل پاره ای.

پاسخ

با قرار دادن $u_x = p$ داریم.

$$p_y = -p$$

$$\frac{p_y}{p} = -1$$

$$\ln|p| = -y + \tilde{c}(x)$$

$$p = c(x) e^{-y}$$

و با انتگرال گرفتن بر حسب x داریم.

$$u(x, y) = f(x) e^{-y} + g(y) \quad f(x) = \int c(x) dx$$

اینجا $f(x)$ و $g(y)$ تابع های اختیاری هستند.

بخش 3.2 - یاد آوری - حل معادلات دیفرانسیل پاره ای

این بخش فقط جهت یاد آوری است. برای کسب مهارت در حل معادلات دیفرانسیل پاره ای، باید به کتب معادلات دیفرانسیل مراجعه کنید.

حل معادله ترابری

هدف: پیدا کردن هرتابع $u(x, t)$ که معادله زیر را حل کند.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

اینجا v یک عدد ثابت است.

طرح: انجام یک تغییر خطی متغیر ها تا یک مشتق پاره ای حذف شود.

$$\alpha = ax + bt,$$

$$\beta = cx + dt,$$

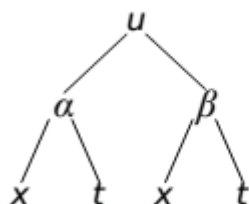
اینجا x, t متغیر های مستقل اولیه است.

و α, β متغیر های مستقل جدید.

و a, b, c, d اعداد ثابت مناسب که باید انتخاب شوند. بطوری که رابطه زیر بر قرار باشد.

$$ad - bc \neq 0$$

از قانون زنجیره ای چند متغیری استفاده می کنیم تا مشتق های α و β تبدیل شوند.



$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x} = a \frac{\partial u}{\partial \alpha} + c \frac{\partial u}{\partial \beta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial t} = b \frac{\partial u}{\partial \alpha} + d \frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

لذا

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} &= \left(b \frac{\partial u}{\partial \alpha} + d \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) + v \left(a \frac{\partial u}{\partial \alpha} + c \frac{\partial u}{\partial \beta} \right) \\ &= (b + av) \frac{\partial u}{\partial \alpha} + (d + cv) \frac{\partial u}{\partial \beta}. \end{aligned}$$

با انتخاب $a = 0, b = 1, c = 1, d = -v$ معادله اصلی می شود،

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0.$$

این می گوید

$$u = f(\beta) = f(cx + dt) = f(x - vt)$$

برای هر تابع مشتق پذیر f

قضیه Theorem

جواب کلی معادله

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

به صورت زیر است.

$$u(x, t) = f(x - vt),$$

اینجا f یک تابع مشتق پذیر یک متغیری است.**مثال 1**

معادله ترابری

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

با شرط اولیه

$$u(x, 0) = xe^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

پاسخ

می دانیم که جواب کلی به صورت زیر است.

$$u(x, t) = f(x - 3t).$$

برای پیدا کردن f شرط اولیه را بکار می بریم.

$$f(x) = f(x - 3 \cdot 0) = u(x, 0) = xe^{-x^2}.$$

پس

$$u(x, t) = (x - 3t)e^{-(x-3t)^2}.$$

مثال 2

معادله زیر را حل کنید.

$$5 \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = x$$

با شرط اولیه

$$u(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad -\infty < x < \infty.$$

پاسخ

مانند بالا تغییر خطی متغیر ها را انجام می دهیم.

$$\alpha = ax + bt,$$

$$\beta = cx + dt,$$

پس داریم.

$$\begin{aligned} 5\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} &= 5\left(b\frac{\partial u}{\partial \alpha} + d\frac{\partial u}{\partial \beta}\right) + \left(a\frac{\partial u}{\partial \alpha} + c\frac{\partial u}{\partial \beta}\right) \\ &= (a + 5b)\frac{\partial u}{\partial \alpha} + (c + 5d)\frac{\partial u}{\partial \beta}. \end{aligned}$$

اعداد ثابت را مطابق زیر انتخاب می کنیم.

$$a = 1, b = 0, c = 5, d = -1$$

پس $a = x$ است و لذا معادله دیفرانسیل پاره ای به صورت زیر است.

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \alpha.$$

با انتگرال گرفتن داریم.

$$u = \frac{\alpha^2}{2} + f(\beta) = \frac{x^2}{2} + f(5x - t).$$

شرط اولیه به ما می گوید.

$$\frac{x^2}{2} + f(5x) = u(x, 0) = \sin 2\pi x.$$

اگر بجای x بگذاریم $\frac{x}{5}$ داریم.

$$f(x) = \sin \frac{2\pi x}{5} - \frac{x^2}{50}.$$

لذا

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{x^2}{2} + \sin \frac{2\pi(5x - t)}{5} - \frac{(5x - t)^2}{50} \\ &= \frac{xt}{5} - \frac{t^2}{50} + \sin \frac{2\pi(5x - t)}{5}. \end{aligned}$$

توجه: بطور کلی یک تغییر خطی متغیر ها را می توان بکار برد تا یک معادله دیفرانسیل پاره ای به صورت

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} = C(x, y, u)$$

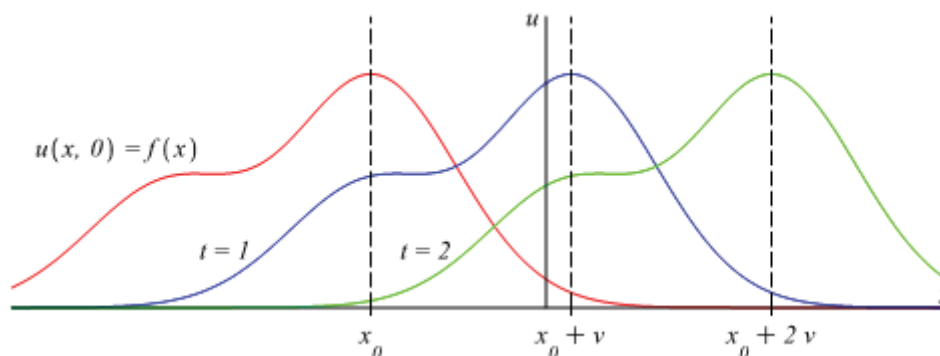
را به صورت یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل کنیم، یعنی معادله دیفرانسیل پاره ای فقط شامل یک مشتق پاره ای باشد.

تفسیر جواب های معادله ترابری

اگر جواب $u(x, t) = f(x - vt)$ را در محور xu ترسیم کنیم داریم.

شرط اولیه $f(x) = u(x, 0)$

موج متحرک با سرعت v شکل $f(x)$ را در u



روش ویژه - حالت مخصوص The Method of Characteristics – Special Case

قضیه Theorem

جواب کلی

$$\frac{\partial u}{\partial x} + p(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

مطابق زیر است

$$u(x, y) = f(\varphi(x, y)),$$

اینجا

است $\frac{\partial y}{\partial x} = p(x, y)$ جواب کلی $\varphi(x, y) = C$

و f یک تابع مشتق پذیر یک متغیری است.

مثال 3

معادله زیر را با روش ویژه حل کنید.

$$2y \frac{\partial u}{\partial x} + (3x^2 - 1) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

پاسخ

ابتدا، معادله دیفرانسیل پاره ای را بر $2y$ تقسیم می کنیم. پس داریم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{\frac{3x^2 - 1}{2y}}_{p(x,y)} \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

پس لازم است مافله زیر را حل کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 1}{2y}.$$

این معادله تفکیک پذیر است.

$$2y \, dy = 3x^2 - 1 \, dx.$$

پس

$$\int 2y \, dy = \int 3x^2 - 1 \, dx$$

$$y^2 = x^3 - x + C.$$

می توانیم این را به صورت $y^2 - x^3 + x = C$ بنویسیم. پس

$$u(x, y) = f(y^2 - x^3 + x).$$

توجه - این روش را می توان به معادلات دیفرانسیل به صورت زیر تعمیم داد.

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} = C(x, y, u).$$

مثال 4

معادله دیفرانسیل پاره ای زیر را حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x \quad \text{یا} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = x$$

پاسخ

در معادله دیفرانسیل پاره ای بالا ، چون یک مشتق بر حسب x وجود دارد ، می توانیم آنرا به عنوان یک معادله دیفرانسیل معمولی فرض کنیم و متغیر دوم را یک عدد ثابت تصور کنیم ، پس داریم.

$$u(x, t) = \frac{x^2}{2} + C(t)$$

اینجا $C(t)$ هر تابع مشتق پذیر می تواند باشد. حالا ، می توانیم چک کنیم که

$$u(x, t) = \frac{x^2}{2} + C(t)$$

در حقیقت جواب معادله دیفرانسیل پاره ای داده شده است. برای این کار ابتدا $u(x, t)$ را بر حسب x مشتق می گیریم ، پس داریم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + 0$$

و این را در معادله دیفرانسیل پاره ای داده می گذاریم ، پس داریم.

$$\text{سمت راست} = \frac{\partial u}{\partial x} = x + 0 = \text{سمت چپ}$$

پس نشان دادیم که

$$u(x, t) = \frac{x^2}{2} + C(t)$$

یک جواب معادله دیفرانسیل پاره ای داده شده است، برای یک تابع مشتق پذیر $C(t)$.

مثال 5

چک کنید که $u(x, t) = f(x - at)$ یک جواب معادله پاره ای زیر است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

اینجا a یک عدد ثابت است و $f(s)$ یک یک تابع مشتق پذیر است.

پاسخ

ابتدا از $u(x, t)$ بر حسب x و با استفاده از قاعده زنجیره ای مشتق می گیریم. پس داریم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - at)$$

توجه دارید که $f(s)$ یک تابع یک متغیره است ، پس می توانیم نماد f' را بکار ببریم. به همین طریق از $u(x, t)$ بر حسب t و با استفاده از قاعده زنجیره ای مشتق می گیریم. پس داریم.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'(x - at)(-a)$$

حالا ، این دو مشتق های پاره ای را در معادله دیفرانسیل پاره ای اصلی ، می گذاریم. پس داریم.

$$\text{سمت راست} = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - at) + f'(x - at)(-a) = 0 = \text{سمت چپ}$$

پس نشان دادیم که $u(x, t) = f(x - at)$ یک جواب معادله دیفرانسیل پاره ای داده شده است.

نکته 1

معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

دارای جواب کلی

$$y = Ae^{kx}$$

است. اینجا k یک عدد ثابت است که می تواند مثبت و یا منفی باشد. A یک عدد ثابت اختیاری است.

مثال 6

مطلوب است y به عنوان یک تابع x اگر

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

باشد و شرط اولیه $y(0) = 3$

پاسخ

بر اساس نکته 1 با $k = -2$ جواب کلی مطابق زیر است.

$$y = Ae^{-2x}$$

حالا با قرار دادن $x = 0$ و $y = 3$ در $y = Ae^{-2x}$ داریم. $3 = Ae^0$ یعنی $A = 3$
پس جواب کلی مساله با شرط اولیه، مطابق زیر است.

$$y = 3e^{-2x}$$

نکته 2

یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم به صورت زیر

$$a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (1)$$

اینجا a, b, c اعداد ثابت هستند، با قرار دادن جواب آزمایشی $y = e^{mx}$ در معادله (1) داریم.

$$am^2 + bm + c = 0 \quad (2)$$

است. شماره (2) معادله کمکی است.

جواب کلی (1) بستگی به جوابهای معادله درجه دوم (2) دارد.

(a) اگر (2) دارای دو جواب حقیقی متمایز $m = m_1$ و $m = m_2$ باشد، پس

$$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$$

است.

(b) اگر (2) دارای دو جواب مکرر $m = m_1$ باشد، پس

$$y = (A + Bx)e^{m_1x}$$

است.

(c) اگر (2) دارای ریشه های مختلط باشد، یعنی $m = \alpha \pm j\beta$ پس

$$y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

است.

بنا نبود در مورد معادلات دیفرانسیل معمولی صحبت کنیم. اما پیش آمد و برای یاد اوری شما این کار انجام شد.

حالا بر می گردیم به معادلات دیفرانسیل پاره ای

مثال 7

نشان دهید که $u = \sin x \cosh y$ معادله دیفرانسیل پاره ای زیر را برقرار می کند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

این معادله ، معادله لاپلاس دو بعدی **Laplace's Equation in Two Dimensions** نامیده می شود و کار برد های زیادی دارد. مثلاً برق ساکن **Electrostatics**

جریان مایع **Fluid Flow**

هدایت گرما **Heat Conduction**

پاسخ

$$u = \sin x \cosh y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \sinh y$$

دوباره مشتق می گیریم ، پس داریم.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x \cosh y \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin x \cosh y$$

پس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin x \cosh y + \sin x \cosh y = 0$$

لذا تابع داده شده در حقیقت یک جواب معادله دیفرانسیل پاره ای است.

بخش 3.3 – معادله حرارت The Heat Equation

در دو بخش های قبل در مورد معادلات دیفرانسیل پاره ای، بطور کلی صحبت کردیم. در این بخش، در مورد یکی از مهم ترین کار برد های PDEs یعنی معادله حرارت می پردازیم. همانطور که قبلا هم گفتیم برای اختصار دو نماد زیر را بکار می بریم.

معادلات دیفرانسیل پاره ای: PDEs

معادلات دیفرانسیل معمولی: ODEs

معادله حرارت توزیع حرارت در یک شئی کنترل می کند. برای شروع کار، به حرارت در یک میله یک بعدی بطول L می پردازیم. مفهوم یک بعدی را با 1-D نشان می دهیم. یعنی، فرض می کنیم میله از $x = 0$ شروع می شود و به $x = L$ ختم می شود. همچنین، فرض می کنیم در هر جای x ، حرارت، در هر نقطه برش عرضی، ثابت است. به عبارت دیگر، حرارت فقط در x تغییر می کند و لذا می توانیم میله را یک بعدی در نظر بگیریم. پس با این فرض، شکل میله مهم نیست. یعنی می تواند میله مدور یا مستطیلی و هر شکل دیگری باشد.

ملاحظه می کنید که فرض یک بعدی در حقیقت فرض بدی نیست. اگر فرض کنیم که سطح جانبی میله، کاملاً عایق باشد، یعنی هیچ حرارتی نتواند از طریق سطح جانبی جریان پیدا کند، پس تنها راهی که حرارت می تواند وارد یا خارج شود، در دو انتها است. این یعنی حرارت می تواند از راست به چپ و یا از چپ به راست جریان یابد. و لذا توزیع حرارت یک بعدی.

البته، عایق بودن کامل سطح جانبی غیر ممکن است. اما، می توان آنقدر سطح جانبی را عایق کرد که فقط مقدار خیلی کمی حرارت از سطح جانبی به خارج، جریان پیدا کند. پس حد اقل، فعلاً فرض می کنیم سطح جانبی، کاملاً عایق باشد.

حالا، اجازه دهید چند تعریف را ارائه دهیم.

$u(x, t)$ درجه حرارت در هر نقطه x در هر زمان t

$c(x)$ حرارت مخصوص

$\rho(x)$ تراکم جرم

$\varphi(x, t)$ جریان یا شار حرارت

$Q(x, t)$ انرژی حرارتی تولید شده در واحد حجم در واحد زمان

اما، باید چند توضیح در مورد این مقادیر ارائه دهیم.

حرارت مخصوص $c(x) > 0$ یک ماده عبارت است از مقدار انرژی حرارتی که می گیرد تا یک واحد جرم جسم یک واحد درجه افزایش دهد. حد اقل ابتدا فرض می کنیم حرارت مخصوص در سرتا سر میله، ممکن است یکسان نباشد. همچنین، توجه داشته باشید در عمل، حرارت مخصوص بستگی به درجه حرارت دارد. اما، این موضوع معمولاً برای اختلاف درجه حرارت زیاد، ممکن است مساله ساز باشد. پس فعلاً، فرض می کنیم اختلاف درجه حرارت آنقدر زیاد نیست که روی جواب اثر بگذارد.

تراکم جرم $\rho(x)$ عبارت است از جرم در یک واحد حجم ماده. مانند، حرارت مخصوص، فرض می‌کنیم تراکم جرم در سر تا سر میله یکسان نباشد.

جریان یا شار حرارت $\varphi(x, t)$ عبارت است از مقدار انرژی حرارتی که به طرف راست جریان دارد در واحد سطح جانبی در واحد زمان. جریان حرارت به طرف راست یعنی $\varphi(x, t) > 0$ و جریان حرارت به طرف چپ یعنی $\varphi(x, t) < 0$

آخرین مقدار $Q(x, t)$ است. این فرمول نمایش هر منبع یا نشت خارجی است. اگر $Q(x, t) > 0$ باشد یعنی انرژی حرارتی به سیستم اضافه می‌شود. اگر $Q(x, t) < 0$ باشد، یعنی انرژی حرارتی از سیستم خارج می‌شود.

با این مقادیر، معادله حرارت به صورت زیر است.

$$c(x) \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} + Q(x, t) \quad (1)$$

گرچه فرمول بالا، یک فرمول کامل است، اما در حقیقت، نمی‌توانیم آنرا حل کنیم. در این فرمول دو تابع مجهول وجود دارد. یعنی u و φ که باید از شر آنها خلاص شویم. با قانون فوریه به آسانی می‌توانیم جریان حرارت یعنی $\varphi(x, t)$ را حذف کنیم.

قانون فوریه Fourier's Law می‌گوید.

$$\varphi(x, t) = -K_0(x) \frac{\partial u}{\partial x}$$

اینجا $K_0(x) > 0$ رسانائی حرارتی **Thermal Conductivity** جسم است. و توانائی یک جسم را برای هدایت حرارت اندازه‌گیری می‌کند. هرچه جسم بهتر حرارت را هدایت کند، $K_0(x)$ بزرگ‌تر است. رسانائی حرارتی نسبت به محل میله متغیر است. همچنین، مانند حرارت مخصوص، رسانائی حرارتی می‌تواند نسبت به حرارت، متغیر باشد. اما، فرض می‌کنیم تغییرات حرارت آنقدر نیست که مشکلی ایجاد کند. پس فرض می‌کنیم رسانائی حرارتی با درجه حرارت تغییر نمی‌کند.

قانون فوریه در مورد مدل سازی خوب عمل می‌کند. ابتدا، می‌دانیم که اگر درجه حرارت در ناحیه ثابت باشد، یعنی $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ، پس هیچ جریان حرارتی وجود ندارد.

خوب، می‌دانیم که اگر در یک ناحیه اختلاف درجه حرارت وجود داشته باشد، پس حرارت از مکان گرم به مکان سرد جریان می‌یابد. مثلاً، اگر در سمت راست گرم‌تر باشد، حرارت باید به سمت چپ حرکت کند. هنگامی که در سمت راست گرم‌تر است، پس میدانیم که $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ است. این یعنی هرچه به سمت راست حرکت کنیم، درجه حرارت افزایش می‌یابد. پس داریم $\varphi < 0$ و لذا حرارت باید به

طرف چپ حرکت کند. به همین طریق اگر $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$ باشد، یعنی سمت چپ گرم تر است، پس داریم $\varphi > 0$ و لذا حرارت به سمت راست حرکت می کند.

و در نهایت، هر چه اختلاف درجه حرارت در یک ناحیه بیشتر باشد، یعنی $\frac{\partial u}{\partial x}$ بزرگ باشد، پس جریان حرارت بیشتر است.

پس، اگر قانون فوریه را در (1) بگذاریم، معادله حرارت به صورت زیر خواهد بود.

$$c(x) \rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K_0(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + Q(x, t) \quad (2)$$

ملاحظه می کنید که علامت منفی در (1) هم حذف شد.

حل شماره (2) هم بخاطر یکسان نبودن خواص حرارتی و تراکم جرم، مشکل است. پس، فرض می کنیم این خواص، همگی، ثابت هستند. یعنی

$$c(x) = c \quad \rho(x) = \rho \quad K_0(x) = K_0$$

اینجا c, ρ, K_0 همگی مقادیر ثابت هستند. در این حالت، می گوئیم ماده درون میله یکنواخت است. تحت این فرضیات، معادله حرارت به صورت زیر در می آید.

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = K_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q(x, t) \quad (3)$$

برای آخرین ساده کردن ها، طرفین را بر $c\rho$ تقسیم می کنیم و انتشار حرارت **Thermal Diffusivity** را مطابق زیر تعریف می کنیم.

$$k = \frac{K_0}{c\rho}$$

پس، معادله حرارت به صورت زیر است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{Q(x, t)}{c\rho} \quad (4)$$

شماره (4) معادله حرارت است که حل می کنیم. در حقیقت ما شماره (4) را بدون منابع حرارتی خارجی حل می کنیم. یعنی $Q(x, t) = 0$ اما شماره (4) را هنگامی که در مورد جدا سازی متغیر ها بحث می کنیم، در نظر خواهیم داشت. فقط هنگامی جمله منابع حذف می کنیم که می خواهیم شروع به حل معادله حرارت کنیم

حالا که معادله حرارتی یک بعدی را بدست آوردیم، حالا باید به شرایط اولیه و شرایط مرزی بپردازیم برای این که بتوانیم مسائل را حل کنیم. اگر به حل معادلات دیفرانسیل معمولی مراجعه کنید، ملاحظه می کنید که همیشه تعداد شرایط لازم با بالا ترین مرتبه مشتق در معادله مساوی بودند.

در مورد معادلات دیفرانسیل پاره ای هم این قانون بر قرار است با این تفاوت که باید به متغیری که نسبت به آن مشتق می گیریم ، توجه کنیم. پس ، برای معادله حرارت ، که مشتق مرتبه اول داریم ، به یک شرط اولیه احتیاج داریم و برای یک مشتق پاره ای درجه دوم ، احتیاج به دو شرایط مرزی داریم.

شرط اولیه که اینجا بکار می بریم مطابق زیر است.

$$u(x, 0) = f(x)$$

در مورد این شرط اولیه چیز زیادی نیست که بخواهیم بگوییم ، جز این که توجه داشته باشیم توزیع حرارت اولیه در میله چیست.

شرایط مرزی در مورد درجه حرارت و یا جریان حرارت در مرز های میله ، چیزی به ما می گوید. چهار شرط مرزی ، وجود دارد.

نوع اول شرایط مرزی ، شرایط مرزی حرارت محدود **Prescribed Temperature** یا شرایط دیریکله **Dirichlet Conditions** نامیده می شود. شرایط مرزی حرارت محدود عبارتند از :

$$u(0, t) = g_1(t) \quad u(L, t) = g_2(t)$$

نوع دوم شرایط مرزی ، جریان حرارت محدود **Prescribed Heat Flux** یا شرایط نیومان **Neumann Conditions** است. با استفاده از قانون فوریه ، این شرایط را می توان به صورت زیر نوشت.

$$-K_0(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \varphi_1(t) \quad -K_0(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \varphi_2(t)$$

اگر هر کدام از مرز ها ، بطور کامل عایق **Perfectly Insulated** شده باشند ، یعنی هیچ حرارتی از آنها خارج نشود ، پس این شرایط را می توان به صورت زیر ، ساده کرد.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

از این به بعد ، بجای کاملاً عایق ، فقط عایق بکار می بریم.

نوع سوم شرایط مرزی ، قانون خنک سازی نیو تن **Newton's Law of Cooling** بکار می برد و گاهی به آن شرایط رابینز **Robins Conditions** می گویند. این شرایط هنگامی بکار می روند که میله در یک مایع سیال است. و توجه داشته باشید که هوا را هم می توانیم یک مایع سیال در نظر بگیریم.

در زیر ، معادله های این نوع شرط مرزی را ملاحظه می کنید.

$$-K_0(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = -H[u(0, t) - g_1(t)] \quad -K_0(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = H[u(L, t) - g_2(t)]$$

اینجا ، H یک مقدار مثبت است. g_1 و g_2 حرارت مایع اطراف را می دهد.

ملاحظه می کنید که این دو شرایط، کمی با هم متفاوت هستند. این بستگی به این دارد که در کدام مرز هستیم. در $x = 0$ علامت منفی در سمت راست داریم. اما، در $x = L$ در سمت راست، علامت منفی نداریم. برای این که ببینیم چرا، فرض می کنیم $x = 0$ باشد، پس داریم $u(0, t) > g_1$ است. به عبارت دیگر، میله از مایع سیال اطراف گرم تر است، پس در $x = 0$ جریان حرارت باید به طرف چپ، یا منفی باشد، زیرا جریان حرارت از میله که گرم تر است به طرف مایع اطراف که سرد تر است، می باشد. اگر جریان حرارت منفی است پس باید علامت منفی در طرف راست داشته باشیم.

اگر میله از مایع اطراف سرد تر از مایع اطراف باشد در $x = 0$ یعنی $u(0, t) < g_1$ باشد، همان استدلال بالا را می توان بکار برد که چرا علامت منفی سمت راست است.

حالا، اگر به انتهای دیگر یعنی $x = L$ نگاه کنیم و باز فرض کنیم میله از مایع اطراف گرم تر است، یا به عبارتی $u(L, t) > g_2$ باشد. در این حالت، جریان حرارت باید به طرف راست، یا مثبت باشد، و لذا نمی توان علامت منفی داشته باشیم. باز همان استدلال بالا را می توان بکار بود.

آخرین نوع شرایط مرزی، شرایط مرزی متناوب **Periodic** است. شرایط مرزی متناوب به صورت زیر هستند.

$$u(-L, t) = u(L, t) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t)$$

توجه کنید که اینجا مرز سمت چپ بجای $x = 0$ داریم $x = -L$.

حالا، به معادله حرارت در دو بعدی و سه بعدی می پردازیم. اما قبل از هر چیز، احتیاج به علامت و نشانه ها داریم. عامل دلتا **Del Operator** مطابق زیر تعریف می کنیم.

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

سمت چپ برای دو بعدی و سمت راست برای سه بعدی. عامل دلتا را یک تابع تصور کنید که شناسه آن بجای اعداد، تابع ها هستند. مثلاً برای سه بعدی داریم.

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

ملاحظه می کنید که شناسه یک تابع، مثلاً f داریم $f(x)$ ، اینجا x یک عدد است. اما، در معادله بالا داریم ∇f ملاحظه می کنید که شناسه ∇ یک تابع است به نام f

عامل دلتا، به ما کمک می کند که فوری، واگرایی یک تابع را بنویسیم. پس مثلاً در سه بعدی، واگرایی $f(x, y, z)$ را می توان به صورت ضرب نقطه ای عامل دلتا نوشت.

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$$

همچنین صورت زیر را خواهیم دید.

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

فرمول بالا را می توان به صورت زیر تعریف کرد یا نوشت.

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

فرمول بالا را معمولاً لاپلاسی **Laplacian** می نامند. در دو بعدی، جمله سوم را نداریم.

برای درجات بالا ی فرمول (1) داریم.

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \varphi + Q \quad (5)$$

درجه بالاتر قانون فوریه هم مطابق زیر است.

$$\varphi = -K_0 \nabla u$$

اگر فرمول بالا را در (5) بگذاریم، خواهیم داشت.

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (K_0 \nabla u) + Q$$

حالا اگر فرض کنیم حرارت مخصوص، تراکم جرم، و رسانائی حرارتی ثابت باشند، داریم.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u + \frac{Q}{c\rho} \quad (6)$$

طرفین را بر $c\rho$ تقسیم می کنیم تا انتشار حرارتی k جلو لاپلاسی داشته باشیم.

شرایط اولیه برای دو بعدی، مطابق زیر است.

$$u(x, y, t) = f(x, y)$$

و برای سه بعدی، داریم.

$$u(x, y, z, t) = f(x, y, z)$$

شرط مرزی حرارت اولیه برای دو بعدی

$$u(x, y, t) = T(x, y, t)$$

و برای سه بعدی

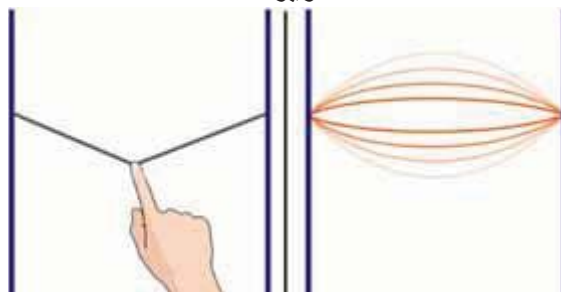
بخش 3.4 – مدل سازی ، ریسمان مرتعش ، معادله موج

Modeling : Vibrating String , Wave Equation

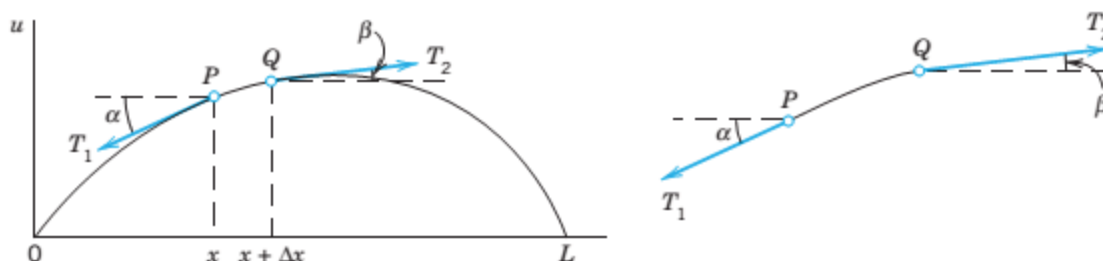
در این بخش ، یک رشته یا زه مرتعش را مدل سازی می کنیم. این مدل سازی ما را به دومین معادله دیفرانسیل پاره ای می رساند که سعی می کنیم در بخش های بعدی انها راحل کنیم. از شما می خواهیم به مراحل این مدل سازی توجه کنید. زیرا این به شما کمک می کند تا مدل های دیگری بسازید.

می خواهیم یک معادله دیفرانسیل پاره ای از ارتعاش های عرضی یک زه قابل ارتجاع ، مانند زه یک ویولون ، بسازیم. ریسمان را در امتداد محور x قرار می دهیم ، آنرا به طول L کش می دهیم ، و آنرا در انتهای $x = 0$ و $x = L$ محکم می کنیم. سپس ریسمان را در لحظه $t = 0$ کژ می کنیم و آنرا رها می کنیم تا مرتعش شود. تصویر 1.

تصویر 1



مساله ما ، این است که ارتعاش های ریسمان را محاسبه کنیم. یعنی می خواهیم انحراف $u(x, t)$ در هر نقطه x در هر زمان $t > 0$ را پیدا کنیم. تصویر 2

تصویر 2 انحراف ریسمان در زمان t 

$u(x, t)$ جواب یک معادله دیفرانسیل پاره ای است که مدل سیستم فیزیکی ما است که باید استخراج کنیم. به عبارت دیگر می خواهیم یک معادله دیفرانسیل پاره ای از تصویر بالا بسازیم بطوری که $u(x, t)$ جواب آن باشد. این معادله دیفرانسیل پاره ای نباید خیلی پیچیده باشد ، بطوری که بتوانیم آنرا حل کنیم.

فرضیات فیزیکی

- 1- جرم ریسمان در هر واحد طول ، ثابت است. یعنی ریسمان متجانس است. ریسمان کاملاً قابل ارتجاع است. و در مقابل خم شدن مقاومت نمی کند.
- 2- نیروی کششی که توسط آن ریسمان را قبل از بستن دو انتها ، کشیده ایم بقدری قوی است می توانیم نیروی جاذبه روی ریسمان را نادیده بگیریم.
- 3- ریسمان در صفحه عمودی ، حرکت های عرضی ناچیز دارد ، یعنی هر ذره ریسمان مطلقاً عمودی حرکت می کند ، بطوری که قدر مطلق میزان انحراف و شیب در هر نقطه همیشه کوچک می ماند.

تحت این فرضیات ، انتظار داریم جواب های $u(x, t)$ حالت فیزیکی را خوب توصیف کند.

اشتقاق معادله دیفرانسیل پاره ای موج

مدل ریسمان مرتعش شامل یک معادله دیفرانسیل پاره ای است و شرط های اضافی. برای بدست آوردن معادله دیفرانسیل پاره ای ، نیرو های وارد بر یک قسمت کوچک ریسمان را در نظر می گیریم. تصویر 2. این مدل سازی در جا های دیگر مکانیک قابل استفاده است.

چون ریسمان در مقابل خم شدن مقاومت نمی کند ، نیروی کشش ، مماس است بر انحنای ریسمان در هر نقطه. فرض می کنیم T_1 و T_2 نیروی کشش در نقاط انتهایی P و Q در آن قسمت باشند. چون نقاط ریسمان ، عمودی حرکت می کنند ، پس هیچ حرکتی در جهت افقی ، وجود ندارد. لذا مولفه های نیروی کشش باید ثابت باشند. با استفاده از علامت گذاری های تصویر 2 داریم.

$$(1) \quad T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta = T = \text{const.}$$

در جهت عمودی ، دو نیرو داریم بنام مولفه های عمودی $-T_1 \sin \alpha$ و $T_2 \sin \beta$ اینجا علامت منفی داریم ، زیرا مولفه P در جهت پایین است. بر اساس قانون دوم نیوتن **Newton's Second Law** نتیجه این دو نیرو مساوی است با جرم $\rho \Delta x$ آن قسمت ، ضرب در $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ، که در یک نقطه بین x و $x + \Delta x$ محاسبه شده است. اینجا ، ρ جرم ریسمان منحرف نشده است در واحد طول است و Δx طول آن قسمت ریسمان منحرف نشده است. می دانید که Δ برای نشان دادن یک مقدار کوچک بکار می برند. این علامت ربطی به ∇^2 لاپلاسی ، یا عمل گر لاپلاس ندارد.

$$T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

با استفاده از شماره (1) معادله بالا را بر

$$T_2 \cos \beta = T_1 \cos \alpha = T,$$

تقسیم می کنیم ، پس داریم.

$$(2) \quad \frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_1 \cos \alpha} = \tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho \Delta x}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

حالا ، $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ شیب های ریسمان در x و $x + \Delta x$ هستند.

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_x \quad \text{و} \quad \tan \beta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x+\Delta x}.$$

اینجا، مجبور هستیم، مشتق های پاره ای بکار ببریم، زیرا u وابسته به t هم است. شماره (2) را بر Δx تقسیم می کنیم، پس داریم.

$$\frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x+\Delta x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_x \right] = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

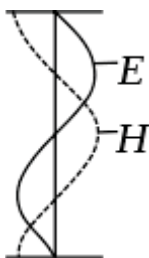
اگر Δx ، به طرف صفر میل کند، پس معادله دیفرانسیل پاره ای زیر را داریم.

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad c^2 = \frac{T}{\rho}.$$

شماره (3) معادله موج یک بعدی نامیده می شود. ملاحظه می کنید که این یک معادله متجانس مرتبه دوم است. عدد ثابت فیزیکی $\frac{T}{\rho}$ را c^2 می نامیم، تا نشان دهیم یک عدد ثابت مثبت است. اگر آنرا c بنامیم، مثبت یا منفی آن معلوم نمی شد.

بخش 3.4 – معادله موج The Wave Equation

در این بخش می خواهیم در مورد یک ریسمان عمودی بطول L که محکم بین دو نقطه $x = 0$ و $x = L$ کشیده شده است ، بحث کنیم.



چون ریسمان محکم کشیده شده است ، می توانیم فرض کنیم ضریب جا بجا شدن ریسمان در هر نقطه کوچک است. خوب ، این برای ما چه کاری انجام می دهد؟ اجازه دهید یک نقطه x روی ریسمان در حالت تعادل در نظر بگیریم ، یعنی مکان آن نقطه در $t = 0$ هنگامی که ریسمان مرتعش می شود ، این نقطه هم عمودی و هم افقی ، جا بجا می شود. اما اگر فرض کنیم در هر نقطه ، شیب ریسمان ، کم است ، پس جا بجا ئی افقی نسبت به جا بجا ئی عمودی خیلی کوچک است. این یعنی می توانیم فرض کنیم در هر نقطه x روی ریسمان ، جا بجا ئی ، صرفا عمودی است. پس ، اجازه دهید این جا بجا ئی را $u(x, t)$ بنامیم.

ابتدا ، می خواهیم فرض کنیم ، نخ یک دست نیست. و لذا تراکم جرم ریسمان $\rho(x)$ ممکن است یک تابع x باشد.

سپس ، می خواهیم فرض کنیم که ریسمان کاملا انعطاف پذیر است. این یعنی ، ریسمان در مقابل خم شدن مقاومت نمی کنند. این یعنی ، نیرو ئی که از طرف ریسمان در هر نقطه x در نقاط انتها ئی اعمال می شود ، بر خود ریسمان مماس است. این نیرو را نیروی کشش **Tension** در ریسمان می نامیم و مقدار آنرا با $T(x, t)$ نشان می دهیم.

در نهایت ، فرض می کنیم $Q(x, t)$ مولفه عمودی هر نیرو ئی ، در واحد جرم ، باشد که روی ریسمان عمل می کند.

در صورتی که باز فرض کنیم شیب ریسمان کم است ، جا بجا ئی عمودی ریسمان در هر نقطه ، مطابق زیر است.

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \rho(x) Q(x, t) \quad (1)$$

این معادله دیفرانسیل پاره ای خیلی مشکل است که بتوان حل کرد. پس باید آنرا بیشتر ساده کنیم.

ابتدا فرض می کنیم ریسمان کاملا قابل ارتجاع است. این یعنی مقدار نیروی کشش $T(x, t)$ فقط بستگی به این دارد که ریسمان نزدیک x چه مقدار کشیده می شود. باز هم یاد آوری می کنیم که فرض می کنیم

شیب ریسمان در هر نقطه کم است. این یعنی نیروی کشش در ریسمان تقریباً مساوی نیروی کشش در ریسمان در حالت تعادل است. پس می توانیم فرض کنیم این نیروی کشش ثابت است ، یعنی $T(x, t) = T_0$ است.

علاوه بر این ، در بیشتر حالت ها ، تنها نیروی خارجی که روی ریسمان اثر می گذارد ، نیروی جاذبه است و اگر ریسمان به اندازه کافی سبک باشد ، اثر نیروی جاذبه روی جابجائی عمودی کم خواهد بود و لذا فرض می کنیم $Q(x, t) = 0$ است. در نتیجه ، معادله زیر را خواهیم داشت.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

اگر طرفین را بر تراکم جرم تقسیم کنیم و تعریف زیر را داشته باشیم

$$c^2 = \frac{T_0}{\rho}$$

به معادله موج یک بعدی می رسیم.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

ملاحظه می کنید همین معادله را در بخش قبل در مورد ریسمان در حالت افقی ، بدست آوردیم.

اگر به معادله حرارت در بخش قبل نگاه کنید ، تعدادی شرایط مرزی داشتیم. اما ، اینجا فقط یک نوع شرایط مرزی را در نظر می گیریم. برای معادله موج ، تنها شرط مرزی را که در نظر می گیریم ، مکان اولیه مرز ها است و یا

$$u(0, t) = h_1(t) \quad u(L, t) = h_2(t)$$

شرایط اولیه هم با آنچه در مورد حرارت دیدیم ، کمی متفاوت است. اینجا ، مشتق مرتبه دوم داریم ، پس به دو شرط اولیه احتیاج داریم. در هر نقطه ، ما هم جابجائی اولیه را مشخص می کنیم و هم سرعت اولیه ریسمان را. پس شرایط اولیه به صورت زیر خواهند بود.

$$u(x, 0) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

در خاتمه حالت های دو بعدی و سه بعدی را ذکر می کنیم. گر چه آنها را حل نخواهیم کرد. فرمول دو بعدی و سه بعدی موج به صورت زیر است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

اینجا ∇^2 لاپلاسی **Laplacian** یا عمل گر لاپلاس **Laplacian Operator** نامیده می شود. به صورت زیر است.

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

برای دو بعدی ، جمله آخر سمت راست را حذف می کنیم.



بخش 3.6 – چند اصطلاح و واژه مهم Terminology

قبل از شروع به حل معادلات دیفرانسیل پاره ای، لازم است به یک بخش دیگر بپردازیم. یعنی چند اصطلاح و واژه لازم. زیرا برای پرداختن به روش جدا سازی متغیر ها، لازم داریم.

با واژه **عمل گر Operator** شروع می کنیم. عمل گر عبارت است از یک تابع، اما بجای اعداد، یک تابع به عنوان شناسه می گیرد. در زیر چند نمونه از عمل گر را ملاحظه می کنید.

$$L = \frac{d}{dx} \quad L = \int dx \quad L = \int_a^b dx \quad L = \frac{\partial}{\partial t}$$

مثلا، اگر یک تابع مانند $u(x)$ داشته باشیم، و آنرا در عمل گر های بالا بگذاریم، پس داریم.

$$L(u) = \frac{du}{dx} \quad L(u) = \int u(x) dx \quad L(u) = \int_a^b u(x) dx \quad L(u) = \frac{\partial u}{\partial t}$$

اینجا L یک تابع است، اما شناسه این تابع، یک تابع دیگر است بنام $u(x)$ ، پس به L می گوئیم، عمل گر.

این ها، مثال ساده ای هستند. اما مشتق و انتگرال هم عمل گر هستند. عمل گر پیچیده، **عمل گر حرارت Heat Operator** است. عمل گر حرارت را با باز نویسی معادله حرارت، بدست می آوریم. عمل گر حرارت به صورت زیر است.

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - k \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

عمل گر خطی، عمل گری است که معادله زیر را برقرار کند.

$$L(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 L(u_1) + c_2 L(u_2)$$

عمل گر حرارت، یک نمونه از یک عمل گر خطی است. به سادگی می توان نشان داد با استفاده از خواص اصلی مشتق پاره ای، عمل گر حرارت، یک عمل گر خطی است. به طریق زیر.

$$\begin{aligned} L(c_1 u_1 + c_2 u_2) &= \frac{\partial}{\partial t}(c_1 u_1 + c_2 u_2) - k \frac{\partial^2}{\partial x^2}(c_1 u_1 + c_2 u_2) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(c_1 u_1) + \frac{\partial}{\partial t}(c_2 u_2) - k \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(c_1 u_1) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(c_2 u_2) \right] \\ &= c_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} + c_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} - k \left[c_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right] \\ &= c_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - k c_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial u_2}{\partial t} - k c_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$= c_1 \left[\frac{\partial u_1}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right] + c_2 \left[\frac{\partial u_2}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right]$$

$$= c_1 L(u_1) + c_2 L(u_2)$$

واژه بعدی که می‌خواهیم تعریف کنیم، **معادله خطی Linear Equation** است. یک معادله خطی، به صورت زیر است.

$$L(u) = f \quad (1)$$

اینجا، L یک عمل گر خطی است و f یک تابع شناخته شده است.

در زیر چند مثال معادلات دیفرانسیل پاره ای خطی ملاحظه می‌کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{Q(x, t)}{c\rho}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \nabla^2 u = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 8u - g(x, t)$$

دو معادله اول، معادله حرارت و معادله موج هستند. معادله سوم، **لاپلاسی Laplacian** است و معمولاً آنرا **معادله لاپلاس Laplace's Equation** می‌نامند. در حقیقت، معادله لاپلاس دو بعدی را در چند بخش حل خواهیم کرد. چهارمین معادله یک نمونه از معادله پیچیده است.

توجه داشته باشید که معادله حرارت و معادله چهارم، معادله های خطی هستند. وجود $Q(x, t)$ و $g(x, t)$ مانع خطی بودن آنها نیست. زیرا عمل گر در هر کدام از این معادلات، خطی هستند.

در زیر چند معادلات دیفرانسیل پاره ای غیر خطی ملاحظه می‌کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} = u + f(x, t)$$

این که چرا دو معادله بالا، غیر خطی هستند، در اولی وجود u^2 و در دومی وجود حاصل ضرب دو مشتق است.

حالا ، بر می گردیم به معادله (1). فرض کنید $f = 0$ باشد ، پس داریم.

$$L(u) = 0 \quad (2)$$

این را ، معادله متجانس خطی **Linear Homogeneous Equation** می نامیم. فراموش نکنید که L یک عمل گر خطی است.

توجه داشته باشید که $u = 0$ همیشه یک جواب معادله خطی متجانس است. $u = 0$ را جواب بدیهی **Trivial Solution** می نامیم. در حقیقت ، این یک راه خوب برای این که مشخص کنیم معادله ما ، یک معادله متجانس است. اگر L یک عمل گر خطی باشد و $u = 0$ را در معادله بگذاریم ، و $L(u) = 0$ بدست آوریم ، پس می دانیم که عمل گر ، متجانس است.

شرایط مرزی اولیه حرارت

$$u(0, t) = g_1(t) \quad u(L, t) = g_2(t)$$

خطی هستند و اگر $g_1 = g_2 = 0$ باشد ، پس متجانس هم است.

شرایط مرزی اولیه جریان حرارت مطابق زیر است و خطی است.

$$-K_0(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \varphi_1(t) \quad -K_0(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \varphi_2(t)$$

و فقط اگر $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 0$ باشد ، آنوقت متجانس هم است.

شرایط مرزی قانون سرمایش نیوتن هم خطی است

$$-K_0(0) \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = -H[u(0, t) - g_1(t)] \quad -K_0(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = H[u(L, t) - g_2(t)]$$

و اگر $g_1(t) = g_2(t) = 0$ باشد ، آنوقت متجانس هم است.

شرایط مرزی متناوب زیر هم خطی است و هم متجانس.

$$u(-L, t) = u(L, t) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t)$$

اصل بر هم نهی هم فراموش نشود.

اگر u_1 و u_2 جوابهای یک معادله خطی متجانس باشند ، پس $c_1 u_1 + c_2 u_2$ هم جوابهای آن معادله خطی متجانس هستند. اینجا c_1, c_2 هر مقداری می توانند باشند.

3.7 – مقدار ویژه و تابع ویژه Eigenvalue and Eigen-function

شاید ، عنوان این بخش برای شما تازگی داشته باشد. متأسفانه استادان محترم از این مبحث به سادگی می گذرند. اما این بخش مهمی است که در آینده به آن برخورد خواهیم کرد. گر چه بحث ما کمی خلاصه است. فقط تا آنجا بحث می کنیم که برای فهم و حل مسائل معادلات دیفرانسیل پاره ای لازم است. برای درک کامل مقدار ویژه و تابع ویژه به جبر خطی مراجعه کنید.

در جبر خطی آمده است که برای یک ماتریس مربع **Square Matrix** بنام A اگر بتوانیم مقادیر λ پیدا کنیم بطوری که بتوانیم برای آنها ، جواب های غیر صفر برای

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

پیدا کنیم ، پس λ را مقدار ویژه A و $\vec{x}$ را بردار ویژه مربوطه می نامیم.

پس بخاطر داشته باشید ، برای این که λ یک مقدار ویژه باشد ، باید بتوانیم جواب های غیر صفر برای معادله پیدا کنیم. خوب ، این چه ربطی به معادلات دیفرانسیل و مسائل مقدار مرزی دارد؟ اجازه دهید یکی دو مثال بیاوریم.

مثال 1 –

مساله مقدار مرزی زیر را حل کنید.

$$y'' + 4y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(2\pi) = 0$$

پاسخ

جواب کلی این معادله به صورت زیر است. اگر نمی دانید چرا ، باید به حل معادلات دیفرانسیل معمولی مراجعه کنید.

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

شرایط مرزی را بکار می بریم ، پس داریم.

$$0 = y(0) = c_1$$

$$0 = y(2\pi) = c_1$$

پس c_2 یک عدد اختیاری است ، و جواب به صورت زیر است.

$$y(x) = c_2 \sin(2x)$$

و در این حالت بی نهایت جواب داریم.

مثال 1 را می توانیم بصورت کلی زیر بنویسیم.

$$y'' + \lambda y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(2\pi) = 0 \quad (1)$$

اینجا $\lambda = 4$ است. و جوان غیر بدیهی و یا غیر صفر برای مساله با مقدار مرزی بدست آوردیم.

مثال 2

مساله مقدار مرزی زیر را حل کنید.

$$y'' + 3y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(2\pi) = 0$$

پاسخ

جواب کلی به صورت زیر است.

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x)$$

مقادیر مرزی را بکار می بریم.

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = c_1 \\ 0 &= y(2\pi) = c_2 \sin(2\sqrt{3}\pi) \Rightarrow c_2 = 0 \end{aligned}$$

در این حالت هر دو عدد ثابت صفر هستند ، پس جواب به صورت زیر است.

$$y(x) = 0$$

در مثال 2 جواب $y(x) = 0$ بود. اما ، این همیشه یک جواب هر معادله متجانس و هر شرایط مرزی متجانس است. و ما این جواب را ، **جواب بدیهی Trivial Solution** می نامیم. گاهی اوقات ، مانند مثال 2 جواب بدیهی ، تنها جواب است. اما ، معمولا ، جواب غیر بدیهی را ترجیح می دهیم.

پس لازم است مقادیر ویژه و تابع های ویژه را بشناسیم. تا بتوانیم مسائل مقادیر مرزی را حل کنیم. اینجا ، بطور خلاصه به موضوع می پردازیم. هدف ما در این بخش فقط توضیح مختصری است ، تا بتوانیم معادلات دیفرانسیل پاره ای را حل کنیم.

در ابتدای این بخش گفتیم λ در $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ یک مقدار ویژه است. برای این که λ یک مقدار ویژه باشد، باید بتوانیم جواب های غیر بدیهی برای معادله پیدا کنیم.

در دو مثال بالا، مساله مقدار مرزی متجانس به صورت زیر را حل کردیم.

$$y'' + \lambda y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(2\pi) = 0 \quad (1)$$

کلمه متجانس مهم است، فراموش نکنید. در مثال 1 داشتیم $\lambda = 4$ و جواب های غیر بدیهی برای مساله مقادیر مرزی پیدا کردیم. در مثال 2 داشتیم $\lambda = 3$ و تنها جوابی که بدست آوردیم، جواب بدیهی یعنی $y(x) = 0$ بود.

پس برای آن مقادیر λ که جواب های غیر بدیهی می دهند، λ را یک مقدار ویژه **Eigenvalue** برای مساله مقدار مرزی می نامیم و جواب های غیر بدیهی را تابع های ویژه **Eigen-functions** مساله مقادیر مرزی مربوط به مقدار ویژه داده شده می نامیم.

حالا، می دانیم که $\lambda = 4$ یک مقدار ویژه برای مساله مقادیر مرزی در فرمول (1) است با تابع های ویژه $y(x) = c_2 \sin(2x)$ و $\lambda = 3$ یک مقدار ویژه نیست.

در نهایت، سعی ما این است که مشخص کنیم آیا برای فرمول (1) مقادیر ویژه دیگری وجود دارد؟ اما قبل از این کار، اجازه دهید بطور مختصر توضیح دهیم چرا این قدر مهم است که مساله با مقادیر اولیه، متجانس باشد. ابتدا، به دو مثال زیر توجه کنید.

مثال 3

مساله با مقادیر اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + 4y = 0 \quad y(0) = -2 \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10$$

پاسخ

این هم مثال ساده ای است که باید بتوانید حل کنید. جزئیات را به خودتان واگذار می کنیم. جواب کلی به صورت زیر است.

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

حالا، شرایط مرزی را بکار می بریم.

$$\begin{aligned} -2 &= y(0) = c_1 \\ 10 &= y\left(\frac{\pi}{4}\right) = c_2 \end{aligned}$$

پس جواب به صورت زیر است.

$$y(x) = -2 \cos(2x) + 10 \sin(2x)$$

مثال دیگر

مثال 4

مساله با مقادیر مرزی زیر را حل کنید.

$$y'' + 4y = 0 \quad y(0) = -2 \quad y(2\pi) = -2$$

پاسخ

همان معادله دیفرانسیل مثال 1 است ، اما با مقادیر مرزی متفاوت. پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

شرایط مرزی را بکار می بریم.

$$\begin{aligned} -2 &= y(0) = c_1 \\ -2 &= y(2\pi) = c_1 \end{aligned}$$

پس ، اینجا بر خلاف مثال قبل ، هر دو شرایط مرزی به ما می گویند $c_1 = -2$ و هیچ کدام ، چیزی در مورد c_2 به ما نمی گویند. اما ، به خاطر داشته باشید که جوابی برای معادله دیفرانسیل می خواهیم که هر دو شرایط مرزی داده شده را برقرار کند. معادله زیر ، این کار را می کند.

$$y(x) = -2 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$$

به عبارت دیگر ، بدون توجه به مقدار c_2 یک جواب بدست می آوریم. ، پس در این حالت بی نهایت جواب برای مساله با مقدار مرزی بدست می آوریم.

در مثال های 1 و 4 معادله دیفرانسیل متجانس زیر را حل کردیم.

$$y'' + 4y = 0$$

با دو شرایط مرزی نا متجانس به صورت زیر

$$y(0) = a \quad y(2\pi) = b$$

در این دو مثال دیدیدیم که با تغییر مقدار a و یا b توانستیم یا جواب های غیر بدیهی بدست آوریم و یا اصلا ، جوابی بدست نیاوریم . در مورد مقادیر ویژه /تابع های ویژه احتیاج داریم که جواب هایی وجود داشته باشند ، و تنها راه اطمینان بخش این است که شرایط مرزی هم ، متجانس باشند . به عبارت دیگر ، لازم است مسئله با مقادیر مرزی ، متجانس باشد.

یک موضوع دیگر هم لازم است گوشزد کنیم.

اجازه دهید ، فرض کنیم یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم داشته باشیم و چند جمله ای مشخصه آن ، دو ریشه حقیقی متمایز به صورت زیر داشته باشد ،

$$r_1 = \alpha \quad r_2 = -\alpha$$

پس می دانیم جواب به صورت زیر است.

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}$$

اجازه دهید این را باز نویسی کنیم. برای این کار ، جمله ها را به صورت زیر به دو قسمت تقسیم می کنیم.

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} \\ &= \frac{c_1}{2} e^{\alpha x} + \frac{c_1}{2} e^{\alpha x} + \frac{c_2}{2} e^{-\alpha x} + \frac{c_2}{2} e^{-\alpha x} \end{aligned}$$

حالا جمله ها را به صورت زیر جمع و تفریق می کنیم.

$$y(x) = \frac{c_1}{2} e^{\alpha x} + \frac{c_1}{2} e^{\alpha x} + \frac{c_2}{2} e^{-\alpha x} + \frac{c_2}{2} e^{-\alpha x} + \left(\frac{c_1}{2} e^{-\alpha x} - \frac{c_1}{2} e^{-\alpha x} \right) + \left(\frac{c_2}{2} e^{\alpha x} - \frac{c_2}{2} e^{\alpha x} \right)$$

حالا ، مرتب می کنیم.

$$y(x) = \frac{1}{2} (c_1 e^{\alpha x} + c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x}) + \frac{1}{2} (c_1 e^{\alpha x} - c_1 e^{-\alpha x} - c_2 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x})$$

و در نهایت ، کمیت های داخل پرانتز ها فاکتور می گیریم و کسر ها را هم جا جا می کنیم. پس داریم.

$$y(x) = (c_1 + c_2) \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} + (c_1 - c_2) \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}$$

$$= \bar{c}_1 \frac{e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}}{2} + \bar{c}_2 \frac{e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}}{2}$$

شاید این کار ها که انجام دادیم ، بیهوده به نظر آید. اما چنین نیست. به دو جمله آخر نگاه کنید. این ها تابع های هیپر بالیک هستند. یعنی

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

پس ، راه دیگر نوشتن جواب یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم بطوری که چند جمله ای مشخصه آن دارای دو جواب حقیقی متمایز به صورت $r_1 = a$ و $r_2 = -a$ داشته باشد ، به صورت زیر است.

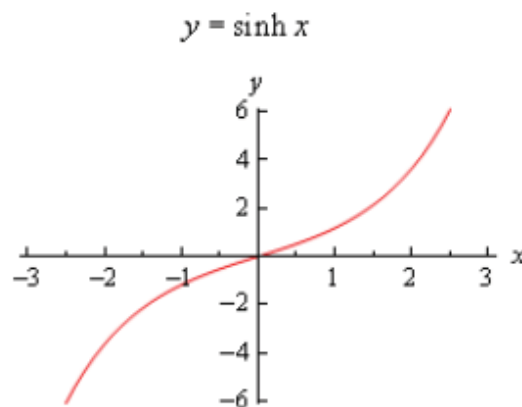
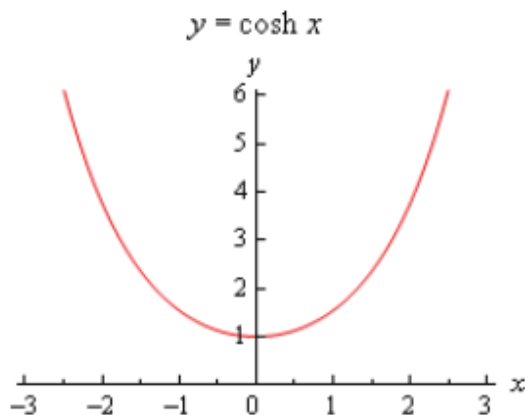
$$y(x) = c_1 \cosh(\alpha x) + c_2 \sinh(\alpha x)$$

بدست آوردن جوابی به صورت بالا ، کا ما را آسان می کند. زیرا ، تابع های هیپر بالیک خواص جالبی دارند .

اولین خاصیت آنها ، مشتق های هایپر بالیک است. یعنی

$$\frac{d}{dx}(\cosh(x)) = \sinh(x) \quad \frac{d}{dx}(\sinh(x)) = \cosh(x)$$

حالا ، به نمودار های آنها توجه کنید.



ملاحظه می کنید که $\cosh(0) = 1$ و $\sinh(0) = 0$ است. چون اغلب با شرایط مرزی در $x = 0$ کار خواهیم کرد، این محاسبه مفیدی خواهد بود.

خاصیت دیگر که مهم است، توجه کنید که $\cosh(x) > 0$ است برای تمام x ها، پس کسینوس هابیر بالیک هرگز صفر نیست. به همین طریق، ملاحظه می کنید $\sinh(x) = 0$ است اگر فقط $x = 0$ باشد. از این دو حقیقت خیلی استفاده خواهیم کرد، پس آنها را فراموش نکنید.

حالا که همه چیز در مورد مقادیر ویژه /تابع ها ویژه، دیده ایم، اجازه دهید روی یک مثال کار کنیم.

مثال 5

تمام مقادیر ویژه و تابع های ویژه برای مساله با مقادیر مرزی زیر را پیدا کنید.

$$y'' + \lambda y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(2\pi) = 0$$

پاسخ

در این بخش نگاهی به این مساله با مقادیر مرزی داشتیم و میدانیم یک مقدار ویژه $\lambda = 4$ است و میدانیم $\lambda = 3$ یک مقدار ویژه نیست. حالا که می خواهیم روی این موضوع کار کنیم، باید بخاطر بیاورید هنگامی یک مقدار ویژه برای λ پیدا می کنیم، اگر جواب های غیر بدیهی برای مساله با مقادیر مرزی، برا آن λ بخصوص، بدست آوریم.

به عبارت دیگر، برای این که بدانیم تمام مقادیر ویژه را بدست آورده ایم، نمی توان فقط با امتحان کردن چند مقدار تصادفی برای λ اکتفا کرد. خوشبختانه راهی برای این کار وجود دارد که تمام مقادیر ویژه /تابع های ویژه را پیدا کنیم. اما، چند حالت خواهیم داشت. سه حالتی که احتیاج داریم عبارتند از $\lambda < 0$ ، $\lambda = 0$ ، $\lambda > 0$. هر یک از این حالت ها یک شکل مخصوص جواب برای مساله با مقادیر مرزی، به ما می دهد. پس اجنزه دهید این حالت ها را شروع کنیم.

$\lambda > 0$

در این حالت، چند جمله ای مشخصه که از معادله دیفرانسیل بدست می آوریم، مطابق زیر است.

$$r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda}$$

در این حالت، چون میدانیم $\lambda > 0$ است، پس این ریشه ها، مختلط هستند و می توانیم آنها را به صورت زیر بنویسیم.

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda} i$$

لذا، جواب کلی معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

با استفاده از اولین شرط مرزی ، داریم.

$$0 = y(0) = c_1$$

پس با استفاده از این و بکار بردن شرط دوم مرزی داریم.

$$0 = y(2\pi) = c_2 \sin(2\pi\sqrt{\lambda})$$

این یعنی یکی از حالت های زیر را داریم.

$$c_2 = 0 \quad \text{یا} \quad \sin(2\pi\sqrt{\lambda}) = 0$$

اما ، بخاطر آوردن که گفتیم ما جواب غیر بدیهی می خواهیم , و اگر امکان اول را در نظر بگیریم ، جواب بدیهی برای تمام مقادیر $\lambda > 0$ بدست می آوریم. لذا فرض می کنیم $c_2 \neq 0$ است. این یعنی داریم.

$$\sin(2\pi\sqrt{\lambda}) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\pi\sqrt{\lambda} = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

به عبارت دیگر ، با توجه به این که می دانیم سینوس کجا صفر است ، به معادله دوم می رسیم. همچنین ، چون فرض می کنیم $\lambda > 0$ پس می دانیم $2\pi\sqrt{\lambda} > 0$ است و لذا n می تواند در این حالت یک عدد صحیح مثبت باشد.

حالا ، باید برای λ حل کنیم و در نتیجه تمام مقادیر ویژه مثبت برای این مساله با مقادیر مرزی خواهیم داشت.

پس مقادیر ویژه مثبت به صورت زیر هستند.

$$\lambda_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

و تابع های ویژه مربوط به این مقادیر ویژه ، به صورت زیر هستند.

$$y_n(x) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

توجه داشته باشید که y_n یعنی برای هر n یک تابع ویژه داریم. همچنین توجه کنید که c_2 را در تابع های ویژه، حذف کردیم. در مورد تابع های ویژه، ما فقط به خود تابع علاقه داریم و نه عدد ثابت جلو آن و لذا، معمولاً آنرا حذف می کنیم.

حالت دوم $\lambda = 0$

در این حالت مساله با مقادیر مرزی، به صورت زیر است.

$$y'' = 0 \quad y(0) = 0 \quad y(2\pi) = 0$$

و با دو مرتبه انتگرال گیری، جواب کلی به صورت زیر بدست می آید.

$$y(x) = c_1 + c_2x$$

با بکار بردن اولین شرط مرزی، داریم.

$$0 = y(0) = c_1$$

با استفاده از شرط مرزی دوم و نتیجه بدست آمده از شرط اول، داریم.

$$0 = y(2\pi) = 2c_2\pi$$

اینجا، بر خلاف حالت اول، انتخابی در مورد صفر کردن رابطه بالا نداریم. رابطه بالا فقط هنگامی صفر است که $c_2 = 0$ باشد.

لذا، برای این مساله با شرط مرزی، که خیلی هم مهم است، اگر داشته باشیم $\lambda = 0$ تنها جواب، جواب بدیهی است، پس $\lambda = 0$ نمی تواند برای این مساله با شرایط مرزی، یک مقدار ویژه باشد.

حالا، به آخرین حالت نگاه می کنیم.

$\lambda < 0$

در این حالت معادله مشخصه و جواب های آن، مانند حالت اول است. پس می دانیم که

$$r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$$

اما ، چون فرض کردیم $\lambda < 0$ است ، لذا دو ریشه حقیقی متمایز داریم. پس با استفاده از کار هائی که در بالا انجام دادیم ، می دانیم که جواب کلی به صورت زیر است.

$$y(x) = c_1 \cosh(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \sinh(\sqrt{-\lambda} x)$$

حالا ، با بکار بردن اولین شرط مرزی داریم.

$$0 = y(0) = c_1 \cosh(0) + c_2 \sinh(0) = c_1 (1) + c_2 (0) = c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

با بکار بردن دومین شرط مرزی داریم.

$$0 = y(2\pi) = c_2 \sinh(2\pi\sqrt{-\lambda})$$

چون فرض کردیم $\lambda < 0$ است ، پس می دانیم $2\pi\sqrt{-\lambda} \neq 0$ است و همچنین می دانیم

$$\sinh(2\pi\sqrt{-\lambda}) \neq 0$$

است و لذا ، مانند حالت دوم باید داشته باشیم $c_2 = 0$

پس ، برای این مساله با شرایط مرزی ، که باز هم مهم است ، اگر داشته باشیم $\lambda < 0$ فقط جواب بدیهی بدست می آوریم. پس مقدار ویژه منفی وجود ندارد.

پس ، بطور خلاصه برای این مساله با شرایط مرزی ، مقدار ویژه / تابع ویژه زیر را داریم.

$$\lambda_n = \frac{n^2}{4} \quad y_n(x) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

مثال 6

تمام مقادیر ویژه و تابع های ویژه برای مساله با مقادیر مرزی زیر را پیدا کنید

$$y'' + \lambda y = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y'(2\pi) = 0$$

پاسخ

اینجا ، می خواهیم با مشتق شرایط مرزی کار کنیم. کار ما تقریباً مانند مثال قبل است ، اما ، دیگر وارد جزییات نمی شویم. باید همان سه حالت را بررسی کنیم.

با $\lambda > 0$ شروع می کنیم. جواب کلی معادله دیفرانسیل مانند مثال قبل است ، پس داریم.

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

با بکار بردن اولین شرط مرزی ، داریم.

$$0 = y'(0) = \sqrt{\lambda} c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

بخاطر داشته باشید که فرض می کنیم $\lambda > 0$ است و لذا تساوی بالا صفر است فقط اگر $c_2 = 0$ باشد. حالا ، شرط دوم ، رابطه زیر را به ما میدهد.

$$0 = y'(2\pi) = -\sqrt{\lambda} c_1 \sin(2\pi\sqrt{\lambda})$$

بخاطر داشته باشید که جواب بدیهی نمی خواهیم و $\lambda > 0$ است ، پس فقط جواب غیر بدیهی بدست می آوریم اگر داشته باشیم

$$\sin(2\pi\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow 2\pi\sqrt{\lambda} = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

اگر برای λ حل کنیم ، دقیقاً همان مقادیر ویژه برای این مساله با شرط اولیه بدست می آوریم که در مثال قبل بدست آوردیم.

$$\lambda_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

تابع های ویژه مربوط به این مقادیر ویژه ، مطابق زیر هستند.

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

پس برای این مساله با مقدار مرزی ، کسینوس ها برای تابع های ویژه مربوط به مقادیر ویژه مثبت بدست آوردیم.

حالا ، حالت دوم $\lambda = 0$ جواب کلی به صورت زیر است .

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

با بکار بردن اولین شرط مرزی ، داریم.

$$0 = y'(0) = c_2$$

با استفاده از رابطه بالا ، جواب کلی به صورت زیر است.

$$y(x) = c_1$$

و توجه می کنید که این ، بطوربدیهی ، شرط دوم مرزی را برقرار می کند.

$$0 = y'(2\pi) = 0$$

لذا ، برخلاف مثال 5 ، $\lambda = 0$ یک مقدار ویژه برای این مساله با شرط مرزی است و تابع های ویژه مربوط به این مقدار ویژه ، به صورت زیر است.

$$y(x) = 1$$

مجددا ، یاد آوری می کنیم که عدد اختیاری برای تابع های ویژه را حذف کردیم.

و در نهایت برای حالت سوم $\lambda < 0$ جواب کلی به صورت زیر است.

$$y(x) = c_1 \cosh(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \sinh(\sqrt{-\lambda} x)$$

با بکار بردن اولین شرط مرزی ، داریم.

$$0 = y'(0) = \sqrt{-\lambda} c_1 \sinh(0) + \sqrt{-\lambda} c_2 \cosh(0) = \sqrt{-\lambda} c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

با بکار بردن شرط مرزی دوم داریم.

$$0 = y'(2\pi) = \sqrt{-\lambda} c_1 \sinh(2\pi\sqrt{-\lambda})$$

باز مانند مثال قبل می دانیم که $2\pi\sqrt{-\lambda} \neq 0$ است و لذا $\sinh(2\pi\sqrt{-\lambda}) \neq 0$ است. پس باید داشته باشیم $c_1 = 0$

پس، برای این مساله با شرط مرزی، هیچ مقدار ویژه منفی نداریم.

بطور خلاصه برای این مساله با شرط مرزی، مقادیر ویژه /تابع های ویژه، بصورت زیر هستند.

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{n^2}{4} & y_n(x) &= \cos\left(\frac{nx}{2}\right) & n &= 1, 2, 3, \dots \\ \lambda_0 &= 0 & y_0(x) &= 1 \end{aligned}$$

ملاحظه می کنید که در حقیقت می توانیم این ها را تلفیق کنیم و بگذاریم n ها بجای یک، از صفر شروع شوند. پس مقادیر ویژه /تابع های ویژه برای این مساله به صورت زیر هستند.

$$\lambda_n = \frac{n^2}{4} \quad y_n(x) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

مثال 7

تمام مقادیر ویژه و تابع های ویژه برای مساله با مقادیر مرزی زیر را پیدا کنید

$$y'' + \lambda y = 0 \quad y(-\pi) = y(\pi) \quad y'(-\pi) = y'(\pi)$$

پاسخ

در این مثال قصد نداریم جواب و مشتق را در مرزها مشخص کنیم. بجای آن مشخص می کنیم که جواب باید در هر دو مرزها و مشتق جواب در هر دو مرزها، باید یکی باشند. همچنین این نوع شرط مرزی باید بجای بازه $[0, L]$ بازه $[-L, L]$ باشد.

مانند مثال های قبل سه حالت را بررسی می کنیم.

$$\lambda > 0$$

در این حالت جواب کلی به صورت زیر است.

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

شرط مرزی اول را بکار می‌بریم و با توجه به این که کسینوس یک تابع زوج است و این که سینوس یک تابع فرد است، داریم.

$$\begin{aligned} c_1 \cos(-\pi\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin(-\pi\sqrt{\lambda}) &= c_1 \cos(\pi\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) \\ c_1 \cos(\pi\sqrt{\lambda}) - c_2 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) &= c_1 \cos(\pi\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) \\ -c_2 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) &= c_2 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) \\ 0 &= 2c_2 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) \end{aligned}$$

اینجا، بر خلاف دو مثال قبل رابطه بالا چیزی به ما نمی‌گوید. می‌توانستیم داشته باشیم $\sin(\pi\sqrt{\lambda}) = 0$ اما در هر حال $c_2 = 0$ است.

حالا، شرط مرزی دوم را بکار می‌بریم.

$$\begin{aligned} -\sqrt{\lambda} c_1 \sin(-\pi\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda} c_2 \cos(-\pi\sqrt{\lambda}) &= -\sqrt{\lambda} c_1 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda} c_2 \cos(\pi\sqrt{\lambda}) \\ \sqrt{\lambda} c_1 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda} c_2 \cos(\pi\sqrt{\lambda}) &= -\sqrt{\lambda} c_1 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda} c_2 \cos(\pi\sqrt{\lambda}) \\ \sqrt{\lambda} c_1 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) &= -\sqrt{\lambda} c_1 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) \\ 2\sqrt{\lambda} c_1 \sin(\pi\sqrt{\lambda}) &= 0 \end{aligned}$$

پس چیزی مانند شرط مرزی اول بدست آوردیم. چون فرض کردیم $\lambda > 0$ است پس یا $c_1 = 0$ است و یا $\sin(\pi\sqrt{\lambda}) = 0$ است.

اما، توجه کنید که اگر $\sin(\pi\sqrt{\lambda}) \neq 0$ باشد، پس باید $c_1 = c_2 = 0$ باشد و لذا جواب بدیهی بدست می‌آوریم. پس لازم است $\sin(\pi\sqrt{\lambda}) = 0$ باشد پس مانند آنچه در دو مثال قبل انجام دادیم، می‌توانیم مقادیر ویژه زیر را داشته باشیم.

$$\pi\sqrt{\lambda} = n\pi \Rightarrow \lambda = n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

بخاطر داشته باشید $\lambda > 0$ پس باید n ها را بجای صفر از یک شروع کنیم.

پس، حالا مقادیر ویژه را می‌دانیم، اما تابع‌های ویژه چی؟ جواب یک مقدار ویژه داده شده به صورت

زیر است.

$$y(x) = c_1 \cos(nx) + c_2 \sin(nx)$$

و هیچ دلیلی نداریم که باور کنیم هر یک از این اعداد ثابت صفر هستند و یا صفر نیستند. در چنین حالتی دو مجموعه تابع های ویژه داریم ، یکی برای هر عدد ثابت. دو مجموعه طبع های ویژه به صورت زیر است.

$$y_n(x) = \cos(nx) \quad y_n(x) = \sin(nx) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

حالا ، حالت دوم

$$\lambda = 0$$

جواب کلی به صورت زیر است.

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

اولین شرط مرزی را بکار می بریم ، پس داریم.

$$\begin{aligned} c_1 + c_2(-\pi) &= c_1 + c_2(\pi) \\ 2\pi c_2 &= 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{aligned}$$

با استفاده از نتیجه بالا ، جواب کلی ، به صورت زیر است.

$$y(x) = c_1$$

ملاحظه می کنید که این بطور بدیهی ، دومین شرط مرزی را برقرار می کند ، همانطور که در یکی از مثال های بالا دیدیم. لذا باز $\lambda = 0$ را داریم به عنوان مقدار ویژه این مساله با شرایط مرزی و تابع ویژه مربوطه

$$y(x) = 1$$

و در نهایت ، سومین حالت

$$\lambda < 0$$

جواب کلی به صورت زیر است.

$$y(x) = c_1 \cosh(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \sinh(\sqrt{-\lambda} x)$$

با استفاده از شرط مرزی اول و با توجه به این که کسینوس هایپر بالیک زوج است و سینوس هایپر بالیک فرد است داریم.

$$\begin{aligned} c_1 \cosh(-\pi\sqrt{-\lambda}) + c_2 \sinh(-\pi\sqrt{-\lambda}) &= c_1 \cosh(\pi\sqrt{-\lambda}) + c_2 \sinh(\pi\sqrt{-\lambda}) \\ -c_2 \sinh(\pi\sqrt{-\lambda}) &= c_2 \sinh(\pi\sqrt{-\lambda}) \\ 2c_2 \sinh(\pi\sqrt{-\lambda}) &= 0 \end{aligned}$$

در این حالت فرض کردیم $\lambda < 0$ است، پس $\pi\sqrt{-\lambda} \neq 0$ است، که به ما میگوید $\sinh(\pi\sqrt{-\lambda}) \neq 0$ است، پس داریم $c_2 = 0$.

حالا، شرط مرزی دوم را بکار می بریم، پس داریم.

$$\begin{aligned} \sqrt{-\lambda} c_1 \sinh(-\pi\sqrt{-\lambda}) &= \sqrt{-\lambda} c_1 \sinh(\pi\sqrt{-\lambda}) \\ 2\sqrt{-\lambda} c_1 \sinh(\pi\sqrt{-\lambda}) &= 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{aligned}$$

چون فرض کردیم $\lambda < 0$ است، پس باید داشته باشیم $c_1 = 0$

پس، در این حالت، بر مساله با شرایط مرزی، تنها جواب، یک جواب بدیهی است. و بنا بر این هیچ مقدار ویژه منفی نداریم.

خلاصه برای این مساله با شرایط مرزی داریم.

$$\begin{array}{lll} \lambda_n = n^2 & y_n(x) = \sin(nx) & n = 1, 2, 3, \dots \\ \lambda_n = n^2 & y_n(x) = \cos(nx) & n = 1, 2, 3, \dots \\ \lambda_0 = 0 & y_0(x) = 1 & \end{array}$$

توجه کنید که اعتراف کردیم برای $\lambda > 0$ دو مجموعه تابع های ویژه داریم و آنها را جداگانه بر شمردیم. اینجا هم می توان آنها را تلفیق کرد و لذا داریم.

$$\begin{array}{lll} \lambda_n = n^2 & y_n(x) = \sin(nx) & n = 1, 2, 3, \dots \\ \lambda_n = n^2 & y_n(x) = \cos(nx) & n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{array}$$

مثال 8

تمام مقادیر ویژه و تابع های ویژه برای مساله با مقادیر مرزی زیر را پیدا کنید

$$x^2 y'' + 3xy' + \lambda y = 0 \quad y(1) = 0 \quad y(2) = 0$$

پاسخ

این یک معادله دیفرانسیل اویلر است. و می دانیم که باید ریشه های تابع درجه دوم زیر را پیدا کنیم.

$$r(r-1) + 3r + \lambda = r^2 + 2r + \lambda = 0$$

ریشه های این معادله درجه دوم به صورت زیر است.

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4\lambda}}{2} = -1 \pm \sqrt{1-\lambda}$$

اینجا، جواب بستگی به این دارد که آیا ریشه های حقیقی متمایز هستند یا نه، آیا ریشه ها مضاعف هستند و یا مختلط هستند. و این حالت ها بستگی به مقدار / علامت $1-\lambda$ دارد. پس اجازه دهید به این حالت ها بپردازیم.

$$1-\lambda < 0, \lambda > 1$$

در این حالت ریشه ها، مختلط هستند و لازم است آنها را به صورت زیر بنویسیم تا بتوانیم جواب را بنویسیم.

$$r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\lambda} = -1 \pm \sqrt{-(\lambda-1)} = -1 \pm i\sqrt{\lambda-1}$$

با نوشتن ریشه ها به این طریق، می دانیم $\lambda-1 > 0$ است و بنا بر این $\sqrt{\lambda-1}$ یک عدد حقیقی است. که باید به ترتیب، جواب زیر را بنویسیم.

$$y(x) = c_1 x^{-1} \cos(\ln(x)\sqrt{\lambda-1}) + c_2 x^{-1} \sin(\ln(x)\sqrt{\lambda-1})$$

با استفاده از شرط مرزی اول داریم.

$$0 = y(1) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

شرط مرزی دوم، به ما نتیجه زیر را می دهد.

$$0 = y(2) = \frac{1}{2} c_2 \sin(\ln(2) \sqrt{\lambda - 1})$$

برای احتراز از جواب بدیهی، برای این حالت لازم است داشته باشیم.

$$\sin(\ln(2) \sqrt{\lambda - 1}) = 0 \Rightarrow \ln(2) \sqrt{\lambda - 1} = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

کمی پیچیده است. به هر حال برای λ حل می کنیم. و در نتیجه مقادیر ویژه زیر را برای این حالت داریم.

$$\lambda_n = 1 + \left(\frac{n\pi}{\ln 2} \right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

چون $\lambda > 1$ است پس n ها را از یک شروع می کنیم.

تابع های ویژه مربوط به این مقادیر ویژه به صورت زیر هستند.

$$y_n(x) = x^{-1} \sin\left(\frac{n\pi}{\ln 2} \ln(x)\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

حالت دوم

$$1 - \lambda = 0, \lambda = 1$$

اینجا ریشه مضاعف $r_{1,2} = -1$ پس جواب به صورت زیر است.

$$y(x) = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-1} \ln(x)$$

با استفاده از شرط مرزی اول داریم.

$$0 = y(1) = c_1$$

شرط مرزی دوم به ما عبارت زیر را می دهد.

$$0 = y(2) = \frac{1}{2}c_2 \ln(2) \Rightarrow c_2 = 0$$

و لذا فقط جواب بدیهی خواهیم داشت و بنا بر این $\lambda = 1$ یک مقدار ویژه نیست.

حالت سوم

$$1 - \lambda > 0, \lambda < 1$$

در این حالت، دو ریشه حقیقی متمایز داریم و جواب به صورت زیر است.

$$y(x) = c_1 x^{-1+\sqrt{1-\lambda}} + c_2 x^{-1-\sqrt{1-\lambda}}$$

با بکار بردن شرط مرزی اول، داریم.

$$0 = y(1) = c_1 + c_2 \Rightarrow c_2 = -c_1$$

با استفاده از این، جواب می شود.

$$y(x) = c_1 x^{-1+\sqrt{1-\lambda}} - c_1 x^{-1-\sqrt{1-\lambda}}$$

با استفاده از شرط مرزی دوم، داریم.

$$0 = y(2) = c_1 2^{-1+\sqrt{1-\lambda}} - c_1 2^{-1-\sqrt{1-\lambda}} = c_1 (2^{-1+\sqrt{1-\lambda}} - 2^{-1-\sqrt{1-\lambda}})$$

چون می دانیم $\lambda \neq 1$ است، در این حالت توان های دو جمله داخل پارانتر یکی نیستند، پس جمله داخل پارانتر، صفر نیست. این یعنی داریم.

$$c_1 = c_2 = 0$$

و لذا در این حالت فقط جواب بدیهی داریم و هیچ مقدار ویژه ای که $\lambda < 1$ باشد، نداریم.

پس تنها مقادیر ویژه برای این مساله با شرط مرزی، از حالت اول بدست می آید.

مثال 9

تمام مقادیر ویژه و تابع های ویژه برای مساله با مقادیر مرزی زیر را پیدا کنید

$$y'' + \lambda y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(1) + y(1) = 0$$

پاسخ

حالت اول

$$\lambda > 0$$

جواب کلی این معادله دیفرانسیل مانند چند مثال اول است. پس داریم.

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x)$$

اولین شرط مرزی را بکار می بریم ، پس داریم.

$$0 = y(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

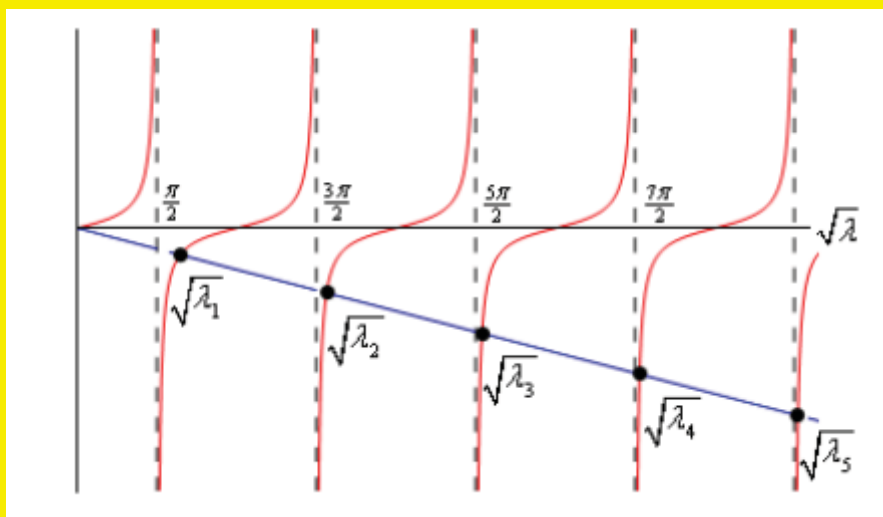
دومین شرط مرزی را بکار می بریم ، پس داریم.

$$\begin{aligned} 0 = y(1) + y'(1) &= c_2 \sin(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda} c_2 \cos(\sqrt{\lambda}) \\ &= c_2 (\sin(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda})) \end{aligned}$$

پس اگر $c_2 = 0$ قرار دهیم ، جواب بدیهی بدست می آوریم. لذا برای این که این شرط مرزی برقرار شود ، باید بجای عملیات بالا ، مطابق زیر عمل کنیم.

$$\begin{aligned} 0 &= \sin(\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}) \\ \sin(\sqrt{\lambda}) &= -\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}) \\ \tan(\sqrt{\lambda}) &= -\sqrt{\lambda} \end{aligned}$$

این معادله جواب دارد ، اما ، باید چند روش عددی بکار ببریم تا این جواب ها را بدست آوریم. برای این که ببینید چه پیش می آید ، اجازه دهید نمودار های $\tan(\sqrt{\lambda})$ و $-\sqrt{\lambda}$ را روی یک صفحه مختصات رسم کنیم. در زیر نمودار را ملاحظه می کنید. مشاهده می کنید که محور افقی ، در حقیقت مقادیر $\sqrt{\lambda}$ است.



پس ، مقادیر ویژه برای این حالت هنگامی اتفاق می افتد که دو نمودار یکدیگر را قطع می کنند. خط آبی رنگ ، نمودار $-\sqrt{\lambda}$ است. آنچه نمودار نشان می دهد در حقیقت ریشه دوم مقدار ویژه است. اولین پنج مقدار ویژه را روی نمودار نشان داده ایم. آنچه ملاحظه می کنید در حقیقت ریشه دوم مقدار ویژه اصلی است.

نکته جالب اینجا است که هر چه دور تر می رویم ، مقادیر ویژه به خط مجانب تانژانت نزدیک تر می شود. پس می توانیم بگوییم برای n خیلی بزرگ ، می توانیم مقدار ویژه را نزدیک خط مجانب تانژانت تخمین بزنیم.

در زیر هم تخمین عددی مقدار ویژه را ملاحظه می کنید.

$\sqrt{\lambda_1} = 2.0288$	$\lambda_1 = 4.1160$	(2.4674)
$\sqrt{\lambda_2} = 4.9132$	$\lambda_2 = 24.1395$	(22.2066)
$\sqrt{\lambda_3} = 7.9787$	$\lambda_3 = 63.6597$	(61.6850)
$\sqrt{\lambda_4} = 11.0855$	$\lambda_4 = 122.8883$	(120.9027)
$\sqrt{\lambda_5} = 14.2074$	$\lambda_5 = 201.8502$	(199.8595)
$\sqrt{\lambda_n} \approx \frac{2n-1}{2}\pi$	$\lambda_n \approx \frac{(2n-1)^2}{4}\pi^2$	$n = 6, 7, 8, \dots$

تابع های ویژه این حالت مطابق زیر است.

$$y_n(x) = \sin(\sqrt{\lambda_n} x) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

حالت دوم

$$\lambda = 0$$

جواب کلی مطابق زیر است.

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

با استفاده از شرط مرزی اول داریم.

$$0 = y(0) = c_1$$

با استفاده از این، جواب کلی می شود.

$$y(x) = c_2 x$$

با بکار بردن شرط مرزی دوم، داریم.

$$0 = y'(1) + y(1) = c_2 + c_2 = 2c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

لذا در این حالت، فقط جواب بدیهی بدست می آوریم. پس $\lambda = 0$ یک مقدار ویژه نیست.

در نهایت، حالت سوم

$$\lambda < 0$$

جواب کلی به صورت زیر است.

$$y(x) = c_1 \cosh(\sqrt{-\lambda} x) + c_2 \sinh(\sqrt{-\lambda} x)$$

با بکار بردن شرط مرزی اول داریم.

$$0 = y(0) = c_1 \cosh(0) + c_2 \sinh(0) = c_1 \Rightarrow c_1 = 0$$

با بکار بردن این، جواب کلی می شود.

$$y(x) = c_2 \sinh(\sqrt{-\lambda} x)$$

با بکار بردن شرط مرزی دوم ، داریم.

$$\begin{aligned} 0 = y'(1) + y(1) &= \sqrt{-\lambda} c_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}) + c_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}) \\ &= c_2 (\sqrt{-\lambda} \cosh(\sqrt{-\lambda}) + \sinh(\sqrt{-\lambda})) \end{aligned}$$

بر اساس فرض که گفتیم $\lambda < 0$ است ، پس $\sqrt{-\lambda} > 0$ است. و این به ما می می گوید $\sinh(\sqrt{-\lambda}) > 0$ است و می دانیم $\cosh(x) > 0$ است برای تمام x ها ، پس

$$\sqrt{-\lambda} \cosh(\sqrt{-\lambda}) + \sinh(\sqrt{-\lambda}) \neq 0$$

لذا ، باید داشته باشیم $c_2 = 0$ و مجددا در حالت سوم ، جواب بدیهی بدست می آوریم .

خلاصه ، تنها مقادیر ویژه برای این مساله با شرایط مرزی ، از $\lambda < 0$ بدست می آید که در بالا گفته شد.

3.8 – تفکیک متغیر ها Separation of Variables

حالا وقت آن رسیده که در مورد یکی از روش های متداول حل معادلات دیفرانسیل پاره ای، یعنی **تفکیک متغیر ها** بپردازیم. روش تفکیک متغیر ها همیشه نمی تواند مورد استفاده قرار گیرد. اما، این روش را می توان برای حل معادله حرارت یک بعدی، معادله موج یک بعدی و معادله دو بعدی لاپلاس $\nabla^2 u = 0$ بکار برد.

برای بکار بردن روش تفکیک متغیر ها، باید با یک معادله دیفرانسیل پاره ای خطی متجانس با شرط های مرزی خطی متجانس کار کنیم. فعلا در مورد شرایط اولیه نگران نیستیم، زیرا جوابی که در ابتدا بدست می آوریم، بندرت شرایط اولیه را بر قرار می کند. اما، همان طور که خواهیم دید راه هایی وجود دارد که جوابی بدست آوریم که شرایط اولیه را بر قرار می کنند، در صورتی که چند پیش نیاز ساده را داشته باشند.

روش تفکیک متغیر ها، متکی به این فرض است که یک تابع به صورت زیر

$$u(x, t) = \varphi(x) G(t) \quad (1)$$

یک جواب یک معادله دیفرانسیل پاره ای متجانس خطی بر حسب x و t خواهد بود. به این جواب می گویند یک **جواب حاصل ضرب Product Solution** و در صورتی که شرایط مرزی هم متجانس و خطی باشند، این جواب هم شرایط مرزی را بر هم بر قرار می کند. اما، همانطور که در بالا گفته شد، این جواب شرط اولیه را بر قرار نمی کند. در هر حال، این نگرانی ما در بخش بعدی است.

این سؤال پیش می آید که چرا این روش را انتخاب کردیم و از کجا بدانیم این روش کار می کند؟ بهترین جواب این است که این روش کار می کند. و خواهیم دید که کار می کند، زیرا این روش معادله دیفرانسیل پاره ای را به دو معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می کند. و در صورتی که بتوانیم این دو معادله را حل کنیم، کار ما انجام شده است و لذا این روش به ما کمک می کند یک جواب برای معادلات دیفرانسیل پاره ای پیدا کنیم.

اجازه دهید، قبل از حل معادلات دیفرانسیل پاره ای به طریق تفکیک متغیر ها، برای یاد آوری، مثالی از معادله دیفرانسیل معمولی از طریق تفکیک متغیر ها برای شما حل می کنیم.

معادله زیر را از طریق تفکیک متغیر ها، حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}$$

طرفین را در $3y^2$ ضرب می کنیم.

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = 2x$$

طرفین را در dx ضرب می کنیم.

$$3y^2 dy = 2x dx$$

حالا انتگرال می گیریم.

$$\int 3y^2 dy = \int 2x dx$$

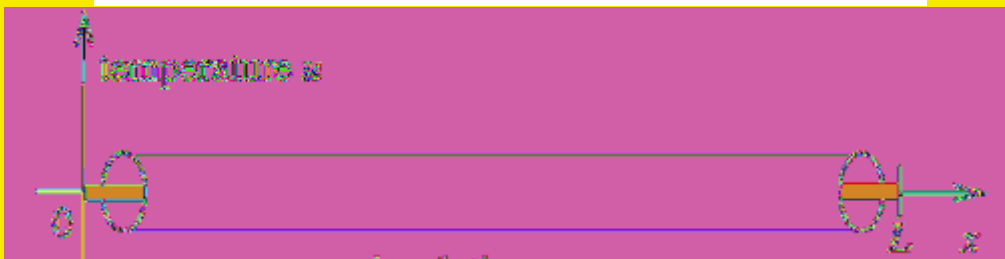
$$y^3 = x^2 + C$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + C}$$

مثال 1 - تفکیک متغیر ها را روی معادله دیفرانسیل زیر انجام دهید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0$$



پاسخ

اینجا ، یک معادله حرارت داریم ، بدون منبع ، با شرایط مرزی حرارتی ثابت. این معادله متجانس هم است. شرایط اولیه اینجا وجود دارد ، زیرا باید باشد. اما ، آنرا نا دیده می گیریم تا بخش بعدی.

روش تفکیک متغیر ها به ما می گوید ، فرض کنیم جواب ، به صورت حاصل ضرب است. یعنی

$$u(x, t) = \varphi(x) G(t)$$

پس کاری که باید انجام دهیم این است که این را در معادله دیفرانسیل بگذاریم تا ببینیم چه بدست می آوریم.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi(x) G(t)) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varphi(x) G(t))$$

$$\varphi(x) \frac{dG}{dt} = k G(t) \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$$

همانطور که ملاحظه می کنید ، $\varphi(x)$ از مشتق زمانی فاکتور گرفتیم و از مشتق محوری $G(t)$ فاکتور گرفتیم و بعد از فاکتور گرفتن ، دیگر مشتق پاره ای نداریم.

اینجا باید کمی توضیح دهیم. مشتق محوری یا اگر علمی تر صحبت کنیم مشتق فضایی عبارت است از میزان تغییر یک مقدار فیزیکی نسبت به آن $\text{Spatial Derivative}$ $\frac{d}{dx}$ مشتق فضایی است.

و مشتق زمانی تغییرات نسبت به زمان است. اینجا dt مشتق زمانی است.

به نظر می‌رسد تا اینجا کار مهمی انجام نداده ایم. حد اقل مشتق پاره ای را به مشتق معمولی تبدیل کرده ایم. این خودش کار مهمی است.

حالا می‌خواهیم t ها را یک طرف و x ها را در طرف دیگر داشته باشیم. به عبارت دیگر می‌خواهیم متغیر ها را از هم جدا کنیم. اجازه دهید طرفین را بر $G(t) \varphi(x)$ تقسیم کنیم.

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dt} = k \frac{1}{\varphi} \frac{d^2\varphi}{dx^2} \Rightarrow \frac{1}{kG} \frac{dG}{dt} = \frac{1}{\varphi} \frac{d^2\varphi}{dx^2}$$

ملاحظه می‌کنید که طرفین را هم بر k تقسیم کردیم. این کار را برای راحتی انجام داده ایم. اگر ببینیم کار خوبی انجام نداده ایم، بر می‌گردیم و اصلاح می‌کنیم. فعلا، قبول کنید که کار خوبی انجام داده ایم.

حالا، ملاحظه می‌کنید که در طرف چپ فقط تابع t داریم و در طرف راست فقط تابع x .

کمی فکر کنیم. چگونه امکان دارد یک تابع فقط بر حسب t مساوی یک تابع فقط بر حسب x باشد؟ شاید، غیر ممکن باشد. اما اگر هر دو طرف اعداد ثابت و مساوی باشند، چطور؟

پس، باید داشته باشیم.

$$\frac{1}{kG} \frac{dG}{dt} = \frac{1}{\varphi} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\lambda$$

اینجا $-\lambda$ — عدد ثابت تفکیک **Separation Constant** نامیده می‌شود و اختیاری است.

سؤال بعدی این است چرا علامت منفی داریم؟ پاسخ این است که برای راحتی کار.

اما، از کجا می‌دانیم این کار واقعا برای راحتی کار است؟ پاسخ، در قدم بعدی دید می‌شود. اگر این کار مفید نباشد، بر می‌گردیم و اصلاح می‌کنیم.

خوب، اجازه دهید به کار خود ادامه دهیم. معادله بالا را می‌توانیم به دو معادله دیفرانسیل معمولی تقسیم کنیم.

$$\frac{dG}{dt} = -k\lambda G \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\lambda\varphi$$

هر دو معادله بدست آمده بالا، معادله های دیفرانسیل خیلی ساده ای هستند. اما چون نمی‌دانیم λ چیست، پس نمی‌توانیم مشتق فضایی یعنی همان جمله ای که x دارد، حل کنیم. اما، اگر بخواهیم، می‌توانیم معادله زمان را حل کنیم. گرچه همیشه این امکان وجود ندارد. در حقیقت، فعلا نمی‌

خواهیم هیچ کدام را حل کنیم.

قدم آخر این است که مطمئن شویم جواب حاصلضرب ما، یعنی $u(x, t) = \varphi(x) G(t)$ شرایط مرزی را برقرار می‌کند؟ پس اجازه دهید هر دو را در جواب بگذاریم.، پس داریم.

$$u(0, t) = \varphi(0) G(t) = 0 \quad u(L, t) = \varphi(L) G(t) = 0$$

اجازه دهید معادله اول را در نظر بگیریم. یا $\varphi(0) = 0$ است و یا $G(t) = 0$ است برای هر t اما اگر $G(t) = 0$ باشد برای هر t پس داریم $u(x, t) = 0$ یعنی جواب بدیهی. و قبلاً هم گفتیم جواب بدیهی، برای هر معادله متجانس خطی یک جواب است. ما بدنبال جواب غیر بدیهی هستیم. لذا، فرض خواهیم کرد که باید داشته باشیم $\varphi(0) = 0$. به همین طریق، از دومین شرط مرزی، خواهیم داشت $\varphi(L) = 0$ تا بتوانیم از جواب بدیهی دوری کنیم. توجه داشته باشید که توانستیم شرایط مرزی را این چنین کاهش دهیم، زیرا آنها متجانس بودند. اگر متجانس نبودند، نمی توانستیم این کار را انجام دهیم.

پس، بعد از انجام تفکیک متغیرها، به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول رسیدیم که باید برای $G(t)$ حل کنیم و یک معادله مقدار مرزی مرتبه دوم که باید برای $\varphi(x)$ حل کنیم. هدف این بخش فقط همین بود. تا بخش دوم که سعی می‌کنیم، آنرا حل کنیم.

خوب، تا اینجا چه چیزی یاد گرفتیم؟ با تفکیک متغیرها، توانستیم معادله دیفرانسیل پاره ای متجانس خطی با شرایط مرزی متجانس به یک معادله دیفرانسیل معمولی برای یکی از معادله‌ها، اینجا $G(t)$ ، تبدیل کنیم.

مثال ۲ – روش تفکیک متغیرها را روی معادله دیفرانسیل پاره ای زیر بکار ببرید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

پاسخ

اینجا یک معادله حرارت داریم بدون هیچ منبع و کاملاً عایق شده.

پس مانند مثال اول، فرض می‌کنیم جواب حاصلضرب ما به صورت زیر است.

$$u(x, t) = \varphi(x) G(t)$$

و چون خود معادله دیفرانسیل تغییر نکرده ، با جانشین کردن ، به همان نتیجه مثال اول میرسیم. پس دو معادله دیفرانسیل معمولی که باید حل کنیم ، به صورت زیر است.

$$\frac{dG}{dt} = -k\lambda G \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\lambda\varphi$$

نکته این مثال در حقیقت این بود که با شرایط مرزی کار کنیم. پس اجازه دهید جواب حاصلضرب را در آنها بگذاریم ، تا صورت های زیر را بدست آوریم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial (G(t)\varphi(x))}{\partial x}(0,t) &= 0 & \frac{\partial (G(t)\varphi(x))}{\partial x}(L,t) &= 0 \\ G(t) \frac{d\varphi}{dx}(0) &= 0 & G(t) \frac{d\varphi}{dx}(L) &= 0 \end{aligned}$$

عیناً مانند مثال اول اگر بخواهیم از جواب بدیهی دوری کنیم و لذا نمی توانیم برای هر t داشته باشیم $G(t0) = 0$ پس باید داشته باشیم.

$$\frac{d\varphi}{dx}(0) = 0 \quad \frac{d\varphi}{dx}(L) = 0$$

در زیر خلاصه آنچه در این مساله با تفکیک متغیر ها بدست می آوریم ، ملاحظه می کنید.

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= -k\lambda G & \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi &= 0 \\ \frac{d\varphi}{dx}(0) &= 0 & \frac{d\varphi}{dx}(L) &= 0 \end{aligned}$$

حالا ، اجازه دهید ببینیم اگر شرایط مرزی متناوب بامعادله حرارت بکار ببریم ، چه بدست می آوریم.

مثال 3- روش تفکیک متغیر ها روی معادله دیفرانسیل پاره ای زیر بکار برید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad u(-L, t) = u(L, t) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t)$$

پاسخ

ابتدا ، توجه کنید که این شرایط مرزی ، شرایط مرزی متجانس هستند. اگر مطابق زیر آنها را باز نویسی کنیم

$$u(-L, t) - u(L, t) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

واضح تر به نظر می رساند.

این معادله دیفرانسیل پاره ای را انجام داده ایم. پس با

$$u(x, t) = \varphi(x) G(t)$$

شروع می کنیم و دو معادله های دیفرانسیل معمولی که باید حل کنیم ، مطابق زیر هستند.

$$\frac{dG}{dt} = -k\lambda G \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\lambda\varphi$$

جواب حاصلضرب را در شرایط مرزی باز نویسی شده می گذاریم ، پس داریم.

$$G(t) \varphi(-L) - G(t) \varphi(L) = G(t) [\varphi(-L) - \varphi(L)] = 0$$

$$G(t) \frac{d\varphi}{dx}(-L) - G(t) \frac{d\varphi}{dx}(L) = G(t) \left[\frac{d\varphi}{dx}(-L) - \frac{d\varphi}{dx}(L) \right] = 0$$

و می توانیم ببینیم که جواب غیر بدیهی بدست می آوریم اگر

$$\begin{aligned}\varphi(-L) - \varphi(L) &= 0 & \frac{d\varphi}{dx}(-L) - \frac{d\varphi}{dx}(L) &= 0 \\ \varphi(-L) &= \varphi(L) & \frac{d\varphi}{dx}(-L) &= \frac{d\varphi}{dx}(L)\end{aligned}$$

پس اگر روش تفکیک متغیر ها را روی این مساله بکار ببریم ، خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}\frac{dG}{dt} &= -k\lambda G & \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi &= 0 \\ \varphi(-L) &= \varphi(L) & \frac{d\varphi}{dx}(-L) &= \frac{d\varphi}{dx}(L)\end{aligned}$$

حالا ، اجازه دهید روش تفکیک متغیر ها روی معادله موج با مرز های ثابت بکار ببریم تا ببینیم چه بدست می آوریم.

مثال 4 - روش تفکیک متغیر ها را روی معادله دیفرانسیل پاره ای زیر بکار برید.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) &= f(x) & \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= g(x) \\ u(0, t) &= 0 & u(L, t) &= 0\end{aligned}$$

پاسخ

مانند ، معادله حرارت ، دو شرایط اولیه وجود دارند ، زیرا برای مساله لازم است. در حقیقت کاری به آنها نداریم ، زیرا همانطور که قبلا گفته شد ، جواب حاصلضرب آنها را بر قرار نمی کند.

در بخش های بعدی ، با آنها کار خواهیم کرد. هدف این مثال این است که با استفاده از روش تفکیک متغیر ها ، به دو معادله دیفرانسیل معمولی برسیم .

پس ، اجازه دهید جواب حاصلضرب $u(x, t) = \varphi(x) h(t)$ را در معادله موج بگذاریم. اینجا ، G را به h تبدیل کردیم تا با g در دومین شرط اولیه اشتباه نشود. پس داریم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varphi(x)h(t)) &= c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varphi(x)h(t)) \\ \varphi(x) \frac{d^2 h}{dt^2} &= c^2 h(t) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \\ \frac{1}{c^2 h} \frac{d^2 h}{dt^2} &= \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dx^2}\end{aligned}$$

ملاحظه می کنید که c^2 را به طرف راست منتقل کردیم، به همان دلیل که k را در معادله حرارت جابجا کردیم. این کار، حل مساله با شرط اولیه را کمی آسان تر می کند.

همچنین، ملاحظه می کنید که در معادله بدست آمده بالا، طرف چپ فقط تابع t است و در طرف راست فقط تابع x . باز هم $-\lambda$ را به عنوان عدد ثابت تفکیک بکار می بریم. پس بعد از بکار بردن عدد ثابت تفکیک، داریم.

$$\frac{1}{c^2 h} \frac{d^2 h}{dt^2} = \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\lambda$$

پس، دو معادله های دیفرانسیل معمولی زیر را بدست می آوریم.

$$\frac{d^2 h}{dt^2} = -\lambda c^2 h \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\lambda \varphi$$

شرایط اولیه در این مثال، مانند مثال اول هستند، پس با جانشین کردن جواب حاصل ضرب، در شرایط اولیه، داریم.

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi(L) = 0$$

با استفاده از روش تفکیک متغیر ها، داریم.

$$\begin{aligned}\frac{d^2 h}{dt^2} &= -\lambda c^2 h & \frac{d^2 \varphi}{dx^2} &= -\lambda \varphi \\ \varphi(0) &= 0 & \varphi(L) &= 0\end{aligned}$$

حالا، اجازه دهید به معادله دو بعدی لاپلاس، نگاهی کنیم.

مثال 5- روش تفکیک متغیر ها را روی معادله دیفرانسیل پاره ای زیر بکار برید.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \quad 0 \leq x \leq L \quad 0 \leq y \leq H \\ u(0, y) &= g(y) \quad u(L, y) = 0 \\ u(x, 0) &= 0 \quad u(x, H) = 0\end{aligned}$$

پاسخ

این مساله کمی با معادلات حرارت و موج فرق دارد. تفاوت اول این است که در این مساله، متغیر زمان نداریم. بجای آن، هر دو متغیر را فضایی در نظر می گیریم. فراموش نکنید که گفتیم متغیر های فضایی، متغیر های مربوط به محور ها است. و اینجا ملاحظه می کنید بجای متغیر های x و t داریم x و y . همچنین فرض می کنیم هر دو متغیر ها در دامنه ای هستند که در مساله نشان داده شده است. این، همچنین به این معنی است که دیگر شرایط اولیه نداریم. بلکه بجای آن، مجموعه های شرایط مرزی داریم. یکی برای x و یکی برای y .

همچنین، سه شرایط مرزی متجانس داریم و یکی، نامتجانس. البته به دلیلی. هنگامی که عملاً، خواستیم این معادله لاپلاس را حل کنیم، خواهیم دید که در حقیقت این لازم است.

برای این مساله، جواب حاصلضرب زیر را بکار می بریم.

$$u(x, y) = h(x) \varphi(y)$$

اغلب، راحت تر است که قبل از پرداختن به معادله دیفرانسیل شرایط مرزی را در دست داشته باشیم. در این حالت سه شرط مرزی متجانس داریم که باید همه را تبدیل کنیم. چون قبلاً این کار را کرده ایم، خودتان نشان دهید که نتیجه زیر را بدست می آوریم.

$$h(L) = 0 \quad \varphi(0) = 0 \quad \varphi(H) = 0$$

با جانشین کردن این در معادله دیفرانسیل و تفکیک کردن آن، داریم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(h(x)\varphi(y)) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(h(x)\varphi(y)) &= 0 \\ \varphi(y)\frac{d^2h}{dx^2} + h(x)\frac{d^2\varphi}{dy^2} &= 0 \\ \frac{1}{h}\frac{d^2h}{dx^2} &= -\frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dy^2}\end{aligned}$$

خوب ، حالا باید در مورد یک تفکیک عدد ثابت تصمیم بگیریم. توجه داشته باشید ، هنگامی که تصمیم به تفکیک عدد ثابت می گیریم ، باید مطمئن شویم که معادله دیفرانسیل

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \lambda\varphi = 0$$

پیدا شود. البته ، حروف ممکن است متفاوت باشند ، این بستگی به تعریف ما ، در مورد جواب حاصلضرب دارد. در توضیحات بعد از مثال اول توجه شود که گفتیم چگونه این معادله را برای جواب غیر بدیهی یعنی جواب غیر صفر ، حل کنیم. در هر حال برای حل آن احتیاج به شرایط مرزی داریم.

پس ، برای مساله ما اینجا ، دو شرط مرزی برای $\varphi(y)$ داریم. اما ، برای $h(x)$ فقط یک شرط مرزی داریم. و بنا بر این می بینیم که مساله با مقدار مرزی که باید حل کنیم ، شامل $\varphi(y)$ است و لذا لازم است عدد ثابت تفکیک انتخاب کنیم. اینجا باید λ را انتخاب کنیم.

با استفاده از عدد ثابت تفکیک داریم.

$$\frac{1}{h}\frac{d^2h}{dx^2} = -\frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dy^2} = \lambda$$

پس ، دو معادله دیفرانسیل معمولی که از معادله لاپلاس بدست می آوریم ، به صورت زیر است.

$$\frac{d^2h}{dx^2} = \lambda h \quad - \quad \frac{d^2\varphi}{dy^2} = \lambda\varphi$$

و اگر این را باز نویسی کنیم ، داریم.

$$\frac{d^2 h}{dx^2} - \lambda h = 0 \quad \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \lambda \varphi = 0$$

حالا ، ملاحظه می کنید که این را قبلا حل کرده ایم ، اما با کمی تفاوت.

پس خلاصه می کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h}{dx^2} - \lambda h &= 0 & \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \lambda \varphi &= 0 \\ h(L) &= 0 & \varphi(0) &= 0 \quad \varphi(H) = 0 \end{aligned}$$

مثال 6

تفکیک متغیر ها را روی معادله دیفرانسیل زیر انجام دهید.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \\ u(x, 0) &= f(x) \quad u(0, t) = 0 \quad - \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = u(L, t) \end{aligned}$$

پاسخ

این یک معادله حرارت است با جمله مبدا $Q(x, t) = -cpu$ که هم خطی است و هم متجانس. همچنین ملاحظه می کنید شرط مرزی مخلوط داریم.

در $x = 0$ حرارت محدود Prescribed Temperature
و قانون خنک سازی نیوتن Newton's Law of Cooling در $x = L$
پس با فرمول زیر شروع می کنیم.

$$u(x, t) = \varphi(x) G(t)$$

و با جانشین کردن آن در معادله دیفرانسیل پاره ای ، داریم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\varphi(x) G(t)) &= k \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varphi(x) G(t)) - \varphi(x) G(t) \\ \varphi(x) \frac{dG}{dt} &= k G(t) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \varphi(x) G(t) \end{aligned}$$

قدم بعدی این است که طرفین را بر $\varphi(x) G(t)$ تقسیم کنیم. با این کار جمله دوم سمت راست می شود یک.

پس بعد از تفکیک و معرفی عدد ثابت تغییر داریم.

$$\frac{1}{k} \left(\frac{1}{G} \frac{dG}{dt} + 1 \right) = \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\lambda$$

با کمی باز نویسی ، معادله های دیفرانسیل معمولی زیر را داریم.

$$\frac{dG}{dt} = -(\lambda k + 1) G \quad \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\lambda \varphi$$

حالا ، با شرایط مرزی کار می کنیم.

$$G(t) \varphi(0) = 0$$

$$G(t) \frac{d\varphi}{dx}(L) + G(t) \varphi(L) = G(t) \left[\frac{d\varphi}{dx}(L) + \varphi(L) \right] = 0$$

ملاحظه می کنید که جواب غیر بدیهی بدست می آوریم اگر

$$\varphi(0) = 0 \quad \frac{d\varphi}{dx}(L) + \varphi(L) = 0$$

پس ، با انجام تفکیک متغیر ها داریم.

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= -(\lambda k + 1) G & \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \lambda \varphi &= 0 \\ \varphi(0) &= 0 & \frac{d\varphi}{dx}(L) + \varphi(L) &= 0 \end{aligned}$$

بخش 3.9 – حل معادله حرارت Solving the Heat Equation

حالا ، وقت آن رسیده که یک معادله دیفرانسیل پاره ای را بطور کامل حل کنیم. در بخش قبل تفکیک متغیر ها را در مورد چندین معادله دیفرانسیل پاره ای بکار بردیم تا آنها را به معادله های دیفرانسیل معمولی کاهش دهیم. در این بخش ، آن معادله های دیفرانسیل معمولی را حل می کنیم و نتیجه را برای بدست آوردن یک جواب برای معادله دیفرانسیل پاره ای ، بکار می بریم. در این بخش روی معادله حرارت متمرکز می شویم و در بخش های بعدی معادله لاپلاس و معادله موج را حل می کنیم.

اولین مساله ای که به آن می پردازیم ، توزیع حرارت در یک میله است با مرز های حرارتی صفر. این کار را در چند مرحله انجام می دهیم.

اولین کاری که انجام می دهیم پیدا کردن یک جواب است ، بطوری که معادله دیفرانسیل پاره ای و شرایط مرزی را برقرار کند. جوابی که بدست خواهیم آورد ، شرایط مرزی زیادی را برقرار نمی کند ، بلکه یک شرط اولیه را بخوبی برقرار می کند.

مثال 1

یک جواب برای معادله دیفرانسیل پاره ای زیر پیدا کنید که شرایط مرزی را هم برقرار کند.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0$$

پاسخ

اولین کاری که باید انجام دهیم ، تفکیک متغیر ها است. گر چه این کار را در بخش قبل انجام دادیم ، اجازه دهید آنچه انجام دادیم خلاصه کنیم.

ابتدا ، فرض می کنیم جواب به صورت زیر خواهد بود.

$$u(x, t) = \varphi(x) G(t)$$

این را در معادله مشتق پاره ای و شرایط مرزی می گذاریم. معادله را جدا می کنیم تا یک تابع t در یک طرف یک تابع x در طرف دیگر قرار گیرد.

وسپس یک عدد ثابت تفکیک **Separation Constant** معرفی می کنیم. این کار به ما دو معادله دیفرانسیل معمولی می دهد. این کار را در مثال 2 در بخش 3.8 انجام دادیم. و دو معادله دیفرانسیل معمولی ، به صورت زیر هستند.

$$\frac{dG}{dt} = -k\lambda G \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(0) = 0 \quad \frac{d\varphi}{dx}(L) = 0$$

تابع زمان را می توان هر وقت بخواهیم ، حل کنیم. اما ، چون هنوز نمی دانیم λ چیست ، اجازه دهید فعلا آنرا کنار بگذاریم. از طرف دیگر ، در بسیاری از مسائل ، فقط مساله مقدار مرزی را می توان در این مرحله حل کرد ، پس انتظار نداشته باشید آن تابع دیگر هم حالا حل کنیم.

تابع فضایی یا همان تابعی که مربوط است به محور های x, y یک مساله مقدار مرزی است و بر اساس آنچه در بخش مقدار ویژه /تابع ویژه گفتیم تنها برای مقادیر معینی از λ دارای جواب غیر بدیهی یعنی غیر صفر هستند. و بخاطر دارید که ما آنها را مقادیر ویژه نامیدیم. هنگامی که آن مقادیر ویژه را بدست آوریم ، می توانیم تابع های ویژه را پیدا کنیم.

در حقیقت مساله فضایی را برای $L = 2\pi$ حل کردیم.

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi = 0$$

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi(L) = 0$$

سه حالتی را که قبلا گفتیم ، اینجا عمل می کنیم.

$$\lambda > 0$$

در این حالت می دانیم که جواب معادله دیفرانسیل ، به صورت زیر است.

$$\varphi(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

شرط مرزی اول را بکار می بریم ، پس داریم.

$$0 = \varphi(0) = c_1$$

شرط مرزی دوم را بکار می بریم و با استفاده از نتیجه بالا ، داریم.

$$0 = \varphi(L) = c_2 \sin(L\sqrt{\lambda})$$

ما بدنبال جواب غیر بدیهی هستیم ، یعنی باید داشته باشیم

$$\sin(L\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow L\sqrt{\lambda} = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

پس ، مقادیر ویژه مثبت و تابع های ویژه مربوطه این مساله با مقدار مرزی ، به صورت زیر است.

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

توجه دارید که به c_2 در تابع ویژه احتیاج نداریم ، زیرا در عدد ثابت دیگری حل می شود. اینرا بعداً می بینیم.

$$\lambda = 0$$

در این حالت جواب معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$\varphi(x) = c_1 + c_2 x$$

شرایط مرزی را بکار می بریم ، پس داریم.

$$0 = \varphi(0) = c_1 \quad 0 = \varphi(L) = c_2 L \Rightarrow c_2 = 0$$

در این حالت ، تنها جوابی که بدست می آوریم ، جواب بدیهی است ، پس $\lambda = 0$ یک مقدار ویژه برای این مساله با مقدار مرزی نیست.

$$\lambda < 0$$

در این حالت ، جواب معادله دیفرانسیل ، به صورت زیر است.

$$\varphi(x) = c_1 \cosh(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}x)$$

با بکار بردن اولین شرط مرزی ، داریم.

$$0 = \varphi(0) = c_1$$

و با استفاده از شرط دوم ، داریم.

$$0 = \varphi(L) = c_2 \sinh(L\sqrt{-\lambda})$$

پس، چون فرض کردیم $\lambda < 0$ و لذا $L\sqrt{-\lambda} \neq 0$ است، و این یعنی $\sinh(L\sqrt{-\lambda}) \neq 0$ است. پس باید داشته باشیم $c_2 = 0$ و در این صورت فقط جواب بدیهی بدست می آوریم.

لذا، هیچ مقدار ویژه منفی برای این مساله با شرایط مرزی نداریم.

لیست کامل مقادیر ویژه و تابع های ویژه، به صورت زیر است.

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

حالا، اجازه دهید معادله دیفرانسیل زمان را حل کنیم.

$$\frac{dG}{dt} = -k\lambda_n G$$

گرچه مقدار λ را میدانیم، اما فعلا برای دوری از سر در گمی بیشتر، آنرا جانشین نمی کنیم. بجای آن λ_n را بکار می بریم، برای این که بخاطر داشته باشید، تعداد بی نهایت مقدار ممکن داریم.

پس جواب به صورت زیر است. این یک معادله دیفرانسیل خطی تفکیک پذیر مرتبه اول است.

$$G(t) = ce^{-k\lambda_n t} = ce^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

خوب، حالا هر دو معادله دیفرانسیل معمولی را بدست آوردیم و حل کردیم، پس در نهایت می توانیم یک جواب بنویسیم. اما، در حقیقت بی نهایت جواب داریم. پس جواب حاصل ضرب به صورت زیر است.

$$u_n(x, t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

توجه کنید u_n بکار بردیم تا بگوییم برای هر n یک جواب متفاوت داریم. همچنین c را به B_n در مساله زمان تبدیل کردیم تا نشان دهیم برای هر n یک جواب متفاوت داریم، و همچنین c_2 را در c مستحیل کردیم. تا یک عدد ثابت در جواب داشته باشیم.

مثال 2

مساله حرارت زیر را برای شرایط اولیه زیر ، حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0$$

$$(a) f(x) = 6 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

$$(b) f(x) = 12 \sin\left(\frac{9\pi x}{L}\right) - 7 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

پاسخ

$$(a) f(x) = 6 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

به نظر مشکل می آید ، اما چنین نیست. در مثال 1 آخرین جوابی که بدست آوردیم به صورت زیر بود.

$$u_n(x, t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

کافی است در جواب بالا $n = 1$ و $B = 6$ قرار دهیم. پس داریم.

$$u(x, t) = 6 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 t}$$

جوابی که میخواستیم ، بدست آوردیم. این یک جواب حاصلضرب است برای مثال اول و لذا معادله دیفرانسیل پاره ای و شرایط مرزی و شرط اولیه را برقرار می کند ، زیرا اگر $t = 0$ قرار دهیم ، توان از بین می رود.

$$(b) f(x) = 12 \sin\left(\frac{9\pi x}{L}\right) - 7 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)$$

این هم تقریباً به اسانی قبلی است. اصل بر هم نهی **Principle of Superposition**

را بخاطر آورید که گفتیم اگر دو جواب برای یک معادله خطی متجانس داشته باشیم، که اینجا داریم، پس مجموع آنها هم یک جواب است. پس، آنچه باید انجام دهیم این است که n و B_n را همان طور که در قسمت اول انجام دادیم به صورتی انتخاب کنیم که هر یک از شرایط اولیه را برقرار کنند و سپس آنها را با هم جمع کنیم. با این کار داریم.

$$u(x, t) = 12 \sin\left(\frac{9\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{9\pi}{L}\right)^2 t} - 7 \sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{4\pi}{L}\right)^2 t}$$

می توانید امتحان کنید و ببینید که در حقیقت شرایط اولیه و مرزی را برقرار می کند.

پس دیدیم که جواب ما برای اولین مثال، حد اقل چند شرط اولیه را برقرار می کند.

حالا، اجازه دهید ایده ای را که در قسمت دوم مثال دوم بکار بردیم، توسعه دهیم تا ببینیم می توانیم جوابی پیدا کنیم که هر شرط اولیه را برقرار کند. البته اصل بر هم نهی منحصر به دو جواب نیست، بلکه می توان آنرا برای تعداد بیشتری هم بکار برد. مثلاً جواب زیر هم، یک جواب برای معادله دیفرانسیل پاره ای است.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^M B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

ملاحظه می کنید، این جواب نه تنها شرایط مرزی را برقرار می کند، بلکه هر شرط اولیه را هم برقرار می کند.

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^M B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

حتی می توان تا بی نهایت تعمیم داد.

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

این سری سمت راست دقیقاً سری سینوسی فوریه است. حتی می توان سری سینوسی فوریه را برای هر تابع پیوسته پاره ای در $0 \leq x \leq L$ بکار برد.

پس ، در صورتی که شرط اولیه ، پیوسته پاره ای باشد ، بعد از بکار بردن شرط اولیه برای جواب ، می توانیم B_n را مشخص کنیم ، مانند آنچه در مورد سری سینوسی فوریه برای شرط اولیه انجام می دادیم . پس می توانیم با استفاده از متعامد بودن سینوس ها ، آنها را پیدا کنیم ، ضریب ها هم به صورت زیر هستند.

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

پس ، در نهایت می توانیم یک معادله دیفرانسیل پاره ای را بطور کامل حل کنیم.

مثال 3

مساله با مقدار مرزی زیر را حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = 20 \quad u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0$$

پاسخ

کار زیادی نیست که باید انجام دهیم ، زیرا بیشتر کار ها را در مثال های قبل انجام دادیم.

ابتدا ، جواب به صورت زیر است.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

ضریب ها به صورت زیر هستند.

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L 20 \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \left(\frac{20L(1 - \cos(n\pi))}{n\pi} \right) = \frac{40(1 - (-1)^n)}{n\pi}$$

اگر این ها را در جواب بگذاریم ، داریم.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40(1 - (-1)^n)}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

در مثال بعدی هم مجدداً نگاهی داریم به انتشار حرارت در یک میله با مرز های کاملاً عایق

Perfectly Insulated

دیگر قدم به قدم جلو نمیرویم. جواب کامل را مانند یک مثال ساده انجام می دهیم و به جوابی میرسیم که هر شرط اولیه پیوسته پاره ای را برقرار می کند.

مثال 4

یک جواب برای معادله دفرانسیل پاره ای زیر پیدا کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

پاسخ

در مثال 2 بخش 3.8 روش تفکیک متغیر ها را برای این مساله بکار بردیم. پس ، بعد از فرض به این که جواب به صورت زیر است

$$u(x, t) = \varphi(x) G(t)$$

وبکار بردن تفکیک متغیر ها ، دو معادله دیفرانسیل معمولی زیر را بدست آوردیم ، که باید حل کنیم.

$$\frac{dG}{dt} = -k\lambda G \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi = 0$$

$$\frac{d\varphi}{dx}(0) = 0 \quad \frac{d\varphi}{dx}(L) = 0$$

در مثال 2 بخش 3.7 مساله مقدار مرزی را برای $L = 2\pi$ حل کردیم ، پس مانند مثال اول در همین بخش ، توضیحات زیادی نخواهیم داد. اگر مایل به یاد آوری هستید ، به این بخش مراجعه کنید. اجازه دهید ، سه حالت ها را بررسی کنیم.

$$\lambda > 0$$

جواب معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$\varphi(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

با استفاده از شرط مرزی اول ، داریم.

$$0 = \frac{d\varphi}{dx}(0) = \sqrt{\lambda} c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

شرط دوم مرزی به می دهد.

$$0 = \frac{d\varphi}{dx}(L) = -\sqrt{\lambda} c_1 \sin(L\sqrt{\lambda})$$

بخاطر داشته باشید که فرض ما $\lambda > 0$ است. پس فقط هنگامی جواب غیر بدیهی بدست می آوریم اگر

$$\sin(L\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow L\sqrt{\lambda} = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

باشد ، مقادیر ویژه مثبت و تابع های ویژه مربوطه این مساله به صورت زیر است.

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \varphi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\lambda = 0$$

جواب کلی به صورت زیر است.

$$\varphi(x) = c_1 + c_2 x$$

با بکار بردن اولین شرط مرزی داریم.

$$0 = \frac{d\varphi}{dx}(0) = c_2$$

با استفاده از این ، جواب کلی به صورت زیر است.

$$\varphi(x) = c_1$$

و ملاحظه می کنید این شرط مرزی دوم را ، برقرار می کند. لذا ، $\lambda = 0$ یک مقدار ویژه برای این

مساله است و تابع ویژه مربوطه به صورت زیر است.

$$\varphi(x) = 1$$

$$\lambda < 0$$

جواب کلی به صورت زیر است.

$$\varphi(x) = c_1 \cosh(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}x)$$

با استفاده از اولین شرط مرزی داریم.

$$0 = \frac{d\varphi}{dx}(0) = \sqrt{-\lambda}c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

دومین شرط مرزی به ما می دهد .

$$0 = \frac{d\varphi}{dx}(L) = \sqrt{-\lambda}c_1 \sinh(L\sqrt{-\lambda})$$

می دانیم $L\sqrt{-\lambda} \neq 0$ است و لذا $\sinh(L\sqrt{-\lambda}) \neq 0$ است. بنا بر این باید داشته باشیم $c_1 = 0$ در نتیجه مساله با مقدار مرزی هیچ مقدار ویژه منفی ندارد.

پس لیست کامل مقادیر ویژه و تابع های ویژه برای این مساله به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 & \varphi_n(x) &= \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & n &= 1, 2, 3, \dots \\ \lambda_0 &= 0 & \varphi_0(x) &= 1 \end{aligned}$$

ملاحظه می کنید اگر $n = 0$ فرض کنیم پس $\lambda_0 = 0$ و تابع ویژه آن بدست می آوریم ، پس مجموعه مقادیر ویژه و تابع های ویژه به صورت زیر است.

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \varphi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

مساله زمان هم ، مانند مثال اول است. یعنی

$$G(t) = ce^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

پس ، جواب حاصلضرب به صورت زیر است.

$$u_n(x, t) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

و جواب این معادله دیفرانسیل پاره ای به صورت زیر است.

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

اگر شرط اولیه را بکار ببریم ، داریم.

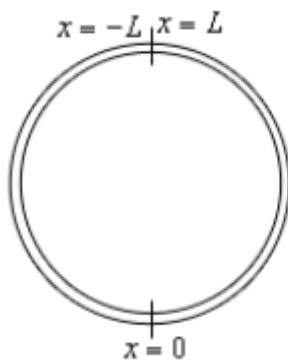
$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

و می بینیم که این چیزی بجز سری کسینوسی **Fourier Cosine Series** برای $f(x)$ روی $0 \leq x \leq L$ نیست ، پس باز هم می توانیم از متعامد بودن کسینوس ها استفاده کنیم برای پیدا کردن ضریب ها ، پس داریم.

$$A_n = \begin{cases} \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx & n = 0 \\ \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx & n \neq 0 \end{cases}$$

آخرین مثال این بخش ، کمی با دو مثال اول متفاوت است. می خواهیم توزیع حرارت را در یک حلقه مدور نازک بررسی کنیم. سطح جانبی کاملاً عایق است و همچنین حلقه بقدری نازک است ، که درجه حرارت در حلقه نسبت به فاصله با مرکز حلقه تغییر نمی کند.

همان طور که در تصویر زیر ملاحظه می کنید فرض می کنیم $x = 0$ باشد و فرض می کنیم x طول کمان حلقه باشد از این نقطه.



فرض می کنیم x مثبت باشد، اگر به سمت راست $x = 0$ حرکت کنیم و اگر به سمت چپ این نقطه حرکت کنیم، x منفی باشد. این یعنی در بالای حلقه $x = L$ و $x = -L$ با هم تلاقی می کنند. با این کار می توانیم حلقه را یک میله بطول $2L$ در نظر بگیریم و در نتیجه معادله ای که قبلا در این بخش مورد بررسی قرار داریم، مصداق دارد.

در انتهای حلقه، دو انتها را اتصال حرارتی کامل **Perfect Thermal Contact** در نظر می گیریم. این یعنی در دو انتها، هم درجه حرارت **Temperature** و هم جریان حرارت **Heat Flux** باید مساوی باشند. به عبارت دیگر باید داشته باشیم.

$$u(-L, t) = u(L, t) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t)$$

این را شرایط مرزی متناوب **Periodic Boundary Conditions** می نامیم.

مثال 5

یک جواب برای معادله دیفرانسیل پاره ای زیر پیدا کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad u(-L, t) = u(L, t) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t)$$

پاسخ

در مثال 3 بخش 3.8 روش تفکیک متغیرها را در مورد این مساله بکار بردیم. پس اگر فرض کنیم جواب به صورت زیر باشد.

$$u(x, t) = \varphi(x) G(t)$$

دو معادله دیفرانسیل معمولی زیر را بدست می آوریم که باید حل کنیم.

$$\frac{dG}{dt} = -k\lambda G \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \lambda\varphi = 0$$

$$\varphi(-L) = \varphi(L) \quad \frac{d\varphi}{dx}(-L) = \frac{d\varphi}{dx}(L)$$

همان طور که در دو مثال قبل دیدیم ، قبلا یک مساله با مقدار مرزی مانند این را در بخش مقادیر ویژه /تابع های ویژه حل کردیم با $L = \pi$. پس اگر احتیاج به توضیح بیشتر دارید به آن بخش مراجعه کنید.

باز هم سه حالت داریم که باید بررسی کنیم.

$$\lambda > 0$$

جواب کلی این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$\varphi(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

با استفاده از اولین شرط مرزی و بخاطر آوردن این که کسینوس یک تابع زوج است و سینوس یک تابع فرد ، داریم.

$$\begin{aligned} c_1 \cos(-L\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin(-L\sqrt{\lambda}) &= c_1 \cos(L\sqrt{\lambda}) + c_2 \sin(L\sqrt{\lambda}) \\ -c_2 \sin(L\sqrt{\lambda}) &= c_2 \sin(L\sqrt{\lambda}) \\ 0 &= 2c_2 \sin(L\sqrt{\lambda}) \end{aligned}$$

در این مرحله نمی توانیم چیزی در مورد c_2 یا سینوس بگوییم که آیا یکی از آنها می تواند صفر باشد. پس اجازه دهید شرط دوم را بکار ببریم.

$$\begin{aligned} -\sqrt{\lambda} c_1 \sin(-L\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda} c_2 \cos(-L\sqrt{\lambda}) &= -\sqrt{\lambda} c_1 \sin(L\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda} c_2 \cos(L\sqrt{\lambda}) \\ \sqrt{\lambda} c_1 \sin(L\sqrt{\lambda}) &= -\sqrt{\lambda} c_1 \sin(L\sqrt{\lambda}) \\ 2\sqrt{\lambda} c_1 \sin(L\sqrt{\lambda}) &= 0 \end{aligned}$$

چیزی شبیه بالا بدست آوردیم. اما اگر $\sin(L\sqrt{\lambda}) \neq 0$ باشد ، پس مجبور هستیم داشته باشیم

$$c_1 = c_2 = 0 \quad \text{و این جواب بدیهی به ما میدهد ، که نمی خواهیم.}$$

این یعنی باید داشته باشیم $\sin\left(L\sqrt{\lambda}\right) = 0$ که بر اساس کار ما روی مثال های قبل مقادیر ویژه مثبت برای این مساله ، به صورت زیر است.

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

حالا ، دلیلی وجود ندارد که فکر کنیم $c_1 = 0$ است یا $c_2 = 0$ است. آنچه می دانیم این است که هر دو نمی توانند صفر شوند. پس یعنی در حقیقت می توانیم دو مجموعه تابع های ویژه مربوط به مقادیر ویژه مثبت داشته باشیم. و آنها عبارتند از

$$\varphi_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad \varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$\lambda = 0$
جواب کلی به صورت زیر است.

$$\varphi(x) = c_1 + c_2 x$$

با استفاده از اولین شرط مرزی داریم.

$$\begin{aligned} c_1 + c_2(-L) &= c_1 + c_2(L) \\ 2Lc_2 &= 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{aligned}$$

پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$\varphi(x) = c_1$$

و این ، دومین شرط مرزی را برقرار می کند. لذا $\lambda = 0$ یک مقدار ویژه برای این مساله با شرایط مرزی است. و تابع های ویژه مربوطه هم به صورت زیر است.

$$\varphi(x) = 1$$

$\lambda < 0$
برای این حالت ، جواب کلی به صورت زیر است.

$$\varphi(x) = c_1 \cosh(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sinh(\sqrt{-\lambda}x)$$

با استفاده از اولین شرط مرزی و با توجه به این حقیقت که کسینوس هیپربولیک زوج است و سینوس هیپربولیک فرد است، داریم.

$$\begin{aligned} c_1 \cosh(-L\sqrt{-\lambda}) + c_2 \sinh(-L\sqrt{-\lambda}) &= c_1 \cosh(L\sqrt{-\lambda}) + c_2 \sinh(L\sqrt{-\lambda}) \\ -c_2 \sinh(-L\sqrt{-\lambda}) &= c_2 \sinh(L\sqrt{-\lambda}) \\ 2c_2 \sinh(L\sqrt{-\lambda}) &= 0 \end{aligned}$$

در این حالت فرض ما این است که $\lambda < 0$ می باشد و لذا $L\sqrt{-\lambda} \neq 0$ است. این به می گوید

$$\sinh(L\sqrt{-\lambda}) \neq 0 \quad \text{پس باید داشته باشیم} \quad c_2 = 0$$

اجازه دهید دومین شرط مرزی را بکار ببریم، پس داریم.

$$\begin{aligned} \sqrt{-\lambda} c_1 \sinh(-L\sqrt{-\lambda}) &= \sqrt{-\lambda} c_1 \sinh(L\sqrt{-\lambda}) \\ 2\sqrt{-\lambda} c_1 \sinh(L\sqrt{-\lambda}) &= 0 \Rightarrow c_1 = 0 \end{aligned}$$

بر اساس فرض ما در مورد λ هیچ راهی نداریم جز این که $c_1 = 0$ باشد. و لذا این مساله مقدار ویژه منفی ندارد.

خلاصه، مجموعه مقادیر ویژه و تابع های ویژه زیر را داریم و توجه کنید که $\lambda = 0$ را در کسینوس ادغام کرده ایم. زیر کار ها را کمی ساده می کند.

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 & \varphi_n(x) &= \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & n &= 0, 1, 2, 3, \dots \\ \lambda_n &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 & \varphi_n(x) &= \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) & n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

مساله زمان مانند دو مساله حرارت قبل است، پس داریم.

$$G(t) = ce^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

این مساله کمی با دو مساله قبل فرق دارد. اینجا در حقیقت دو جواب حاصل ضرب ممکن داریم که معادله دیفرانسیل پاره ای و شرایط مرزی را برقرار می کنند. و آنها عبارتند از

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} & n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ u_n(x, t) &= B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} & n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

اصل هم نهشتی اینجا هم معتبر است، پس مجموع هر کدام از اینها هم جواب این مساله دیفرانسیل پاره ای است.

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

اگر شرط اولیه را بکار ببریم، داریم.

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

و باز مانند دو مثال قبل، سری فوریه داریم. تفاوت اینجا این است که سری فوریه کامل برای یک شرط اولیه پیوسته پاره ای در $-L \leq x \leq L$ داریم.

ضریب ها هم به صورت زیر هستند.

$$A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

یک سری فوریه کامل احتیاج به بازه $-L \leq x \leq L$ دارد در صورتی که سری سینوسی و کسینوسی فوریه احتیاج به $0 \leq x \leq L$ دارد.

بخش 3.10 – معادله حرارت با مرز های حرارتی غیر صفر

Heat Equation with Non-Zero Temperature Boundaries

در بخش 3.9 به مساله زیر پرداختیم.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0$$

دور مورد مساله بالا هیچ اشتباهی وجود ندارد. اما این که حرارت در دو انتها ثابت نگاه داریم ، کمی غیرواقع بینانه است. دو مساله دیگر که مورد بررسی قرار دادیم ، یعنی مرز های عایق شده و حلقه نازک ، مسائل واقعی تر هستند .

در این بخش می خواهیم در مورد مساله زیر بحث کنیم.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad u(0, t) = T_1 \quad u(L, t) = T_2 \quad (1)$$

در این حالت ، مرز ها دارای حرارت های ثابت T_1 یا T_2 هستند. مشکل اینجا این است که روش تفکیک متغیر ها دیگر کار نمی کند ، زیرا شرایط مرزی دیگر متجانس نیستند. بخاطر بیاورید که روش تفکیک متغیر ها فقط هنگامی کار می کند که هم معادله دیفرانسیل پاره ای و هم شرایط مرزی ، خطی و متجانس باشند. پس ، لازم است به طریقی با شرایط مرزی کار کنیم ، قبل از این که سعی کنیم ، مساله را حل کنیم.

خوشبختانه راه اسانی برای این کار وجود دارد. اجازه دهید کمی این مساله را مورد بررسی قرار دهیم. هیچ منبعی نیست که انرژی حرارتی به میله اضافه یا از میله کم کند. همچنین ، شرایط مرزی ما حرارت های ثابتی هستند ، پس نمی توانند نسبت به زمان تغییر کنند و هیچ جریان حرارتی اولیه وجود ندارد که بطور پیوسته انرژی حرارتی اضافه یا کم کند. پس ، هیچ انرژی حرارتی به میله وارد یا از آن خارج نمی شود. پس هیچ تغییری در حرارت میله ایجاد نمی شود و ثابت است.

یا به عبارت دیگر باید انتظار داشته باشیم ، هنگامی که $t \rightarrow \infty$ توزیع حرارت $u(x, t)$ به صورت زیر رفتار می کند.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u_E(x)$$

اینجا ، $u_E(x)$ تعادل حرارت Equilibrium Temperature نامیده می شود. توجه داشته باشید که این باید معادله حرارت و شرایط مرزی را برقرار کند. اما ، شرط اولیه را برقرار نمی کند زیرا این توزیع حرارت است هنگامی که $t \rightarrow \infty$ در صورتی که شرط اولیه در $t = 0$ است. پس تعادل حرارت باید شماره (2) زیر را برقرار کند.

این یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم است که حل آن آسان می باشد. اگر از آن دو مرتبه انتگرال بگیریم، داریم.

$$u_E(x) = c_1x + c_2$$

و با بکار بردن شرایط مرزی، این به عهده شما است، خواهیم داشت.

$$u_E(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L}x$$

خوب، این چه ربطی به حل مساله شماره (1) بالا دارد؟ فرض می کنیم تعریف زیر را داشته باشیم.

$$v(x, t) = u(x, t) - u_E(x) \quad (3)$$

اینجا، $u(x, t)$ حل شماره (1) است و $u_E(x)$ تعادل حرارت برای شماره (1) است.

حالا، اجازه دهید این را مطابق زیر باز نویسی کنیم.

$$u(x, t) = v(x, t) + u_E(x)$$

و اجازه دهید چند مشتق بگیریم.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial u_E}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_E}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

در هر دو مشتق بالا، این حقیقت را بکار بردیم که $u_E(x)$ تعادل حرارت است و لذا مستقل از زمان t است. و باید معادله دیفرانسیل شماره (2) را برقرار کند.

این به ما می گوید که هم $u(x, t)$ و هم $v(x, t)$ باید همان معادله دیفرانسیل پاره ای را برقرار کند. اجازه دهید، ببینیم شرایط اولیه و شرایط مرزی برای $v(x, t)$ باید چه باشد.

$$v(x, 0) = u(x, 0) - u_E(x) = f(x) - u_E(x)$$

$$v(0, t) = u(0, t) - u_E(0) = T_1 - T_1 = 0$$

$$v(L, t) = u(L, t) - u_E(L) = T_2 - T_2 = 0$$

پس، شرط اولیه عملاً در هم و بر هم است، اما شرایط مرزی، متجانس هستند. معادله دیفرانسیل پاره ای که باید $v(x, t)$ برقرار کند، به صورت زیر است.

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$v(x, 0) = f(x) - u_E(x) \quad v(0, t) = 0 \quad v(L, t) = 0$$

در مثال 5 بخش 3.9 دیدیم چگونه این را حل کنیم، پس جواب به صورت زیر است.

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t}$$

ضریب ها هم به صورت زیر هستند.

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L (f(x) - u_E(x)) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

پس جواب شماره (1) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_E(x) + v(x, t) \\ &= T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-k\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 t} \end{aligned}$$

و ضریب ها را در بالا دادیم.

بخش 3.11 – معادله لاپلاس Laplace's Equation

معادله دیفرانسیل پاره ای که حالا می خواهیم مورد بحث قرار دهیم ، معادله دو بعدی لاپلاس است. یعنی

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

قبل از شروع به حل این مساله ، یک سؤال که بطور طبیعی پیش می آید ، این است که آیا این معادله جایی پیدا می شود؟ جواب ، اری است. اگر معادله دو بعدی حرارت را در نظر بگیریم. یعنی

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u + \frac{Q}{cp}$$

ملاحظه می شود که معادله لاپلاس مربوط می شود به پیدا کردن **Equilibrium Solution** جواب **تعال**، یعنی جواب مستقل از زمان، اگر هیچ منبعی وجود نداشته باشد. پس این مسئله در فیزیک پیدا می شود.

این که چگونه معادله لاپلاس را حل کنیم بستگی به فضای دو بعدی شئی دارد که در آن مساله را حل می کنیم. اجازه دهید مساله را روی مختصات مستطیلی $0 \leq x \leq L$ ، $0 \leq y \leq H$ حل کنیم. برای این فضا معادله لاپلاس همراه با چهار شرایط مرزی داریم.

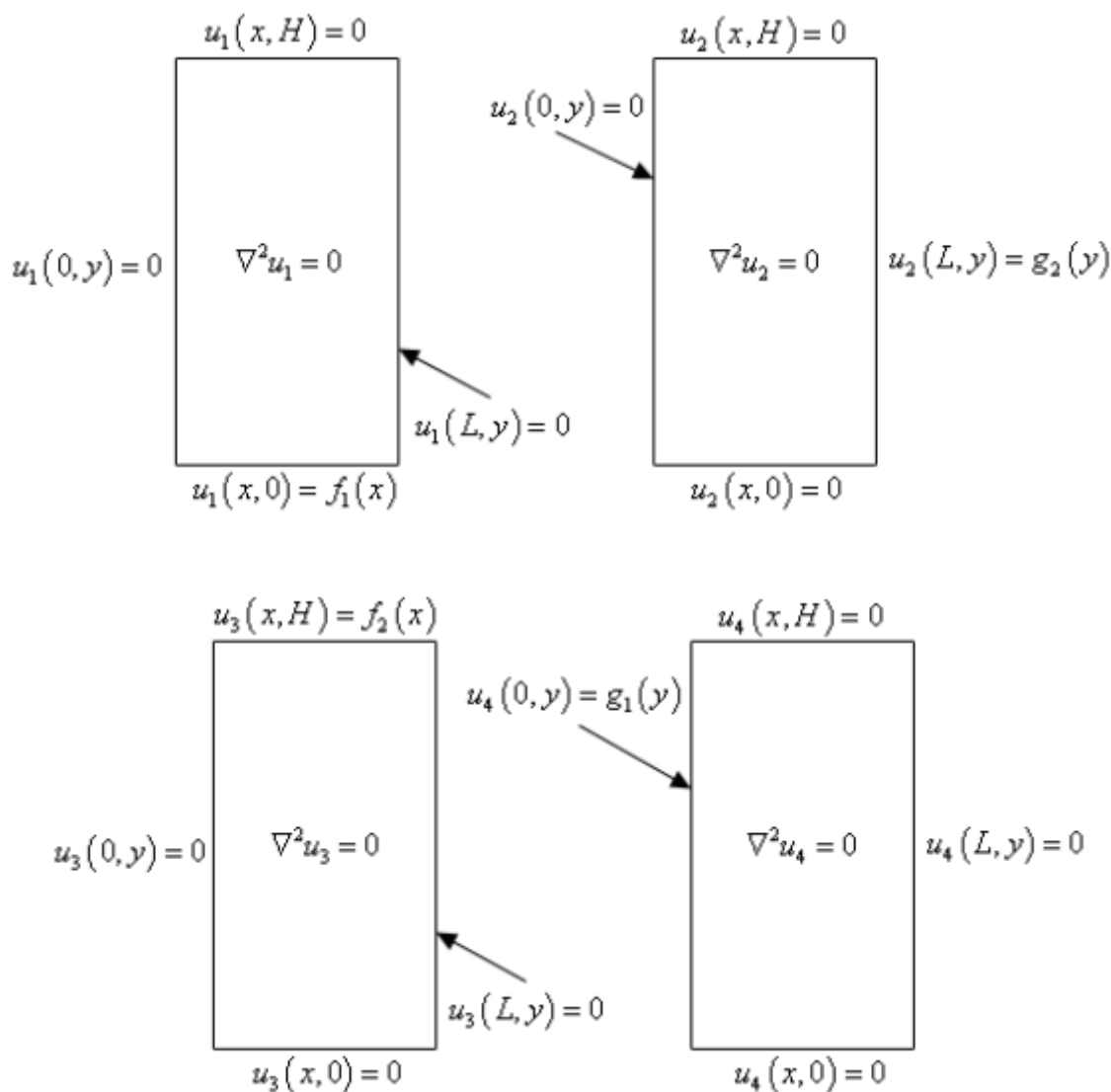
$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(0, y) &= g_1(y) \quad u(L, y) = g_2(y) \\ u(x, 0) &= f_1(x) \quad u(x, H) = f_2(x) \end{aligned} \tag{1}$$

چیز مهمی که اینجا داریم این است که بر خلاف معادله حرارت ، شرایط اولیه نداریم. هر دو متغیر ، متغیر های مخصوص هستند و هر متغیر به صورت مشتق مرتبه دوم ظاهر می شوند ، پس برای هر متغیر دو شرط مرزی لازم داریم.

موضوع دیگری که باید مطرح کنیم این است ، در حالی که معادله دیفرانسیل پاره ای هم خطی است و هم متجانس ، اما شرایط مرزی فقط خطی هستند ، اما متجانس نیستند. این ، مشکل ایجاد می کند ، زیرا در روش تفکیک متغیر ها ، لازم است شرایط مرزی متجانس داشته باشیم.

برای حل کامل معادله لاپلاس ، باید آنرا چهار مرتبه حل می کنیم. هر مرتبه آنرا با فقط یکی از چهار شرط مرزی که می تواند غیر متجانس باشد ، در حالی که سه شرط بقیه متجانس هستند.

چهار مساله را می توان بهتر با تصویر های زیر بیان کرد.



وقتی که تمام این چهار مساله را حل کردیم ، جواب سیستم اصلی ما ، یعنی شماره (1) به صورت زیر خواهد بود.

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y) + u_4(x, y)$$

چون می دانیم معادله لاپلاس ، خطی و متجانس است ، و هر یک از این قطعه ها یک جواب معادله لاپلاس است ، پس مجموع آنها هم یک جواب خواهد بود. همچنین ، این جواب هر یک از چهار شرط مرزی را بر قرار می کند. اولین را ثابت می کنیم و بقیه را به عهده شما می گذاریم که ثابت کنید.

$$u(x, 0) = u_1(x, 0) + u_2(x, 0) + u_3(x, 0) + u_4(x, 0) = f_1(x) + 0 + 0 + 0 = f_1(x)$$

در هر یک از این حالت ها ، آن شرط مرزی نا متجانس تک و تنها ، جای شرط اولیه در مسائل معادله حرارت که در دو بخش قبل حل کردیم ، می گیرد. روش تفکیک متغیر ها را در هر یک از مسائل بکار میبریم و یک جواب حاصلضرب پیدا می کنیم که معادله دیفرانسیل و سه شرط مرزی متجانس را برقرار کند. با استفاده از اصل بر هم نهی ، یک جواب برای مساله پیدا می کنیم و سپس آخرین شرط مرزی را بکار می بریم تا مقدار اعداد ثابت که در مساله باقی مانده ، پیدا کنیم.

اینجا دو حالت را انجام می دهیم و بقیه را به عهده شما می گذاریم.

مثال 1

یک جواب برای معادله دیفرانسیل پاره ای زیر پیدا کنید.

$$\begin{aligned}\nabla^2 u_4 &= \frac{\partial^2 u_4}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_4}{\partial y^2} = 0 \\ u_4(0, y) &= g_1(y) \quad u_4(L, y) = 0 \\ u_4(x, 0) &= 0 \quad u_4(x, H) = 0\end{aligned}$$

پاسخ

فرض می کنیم جواب ما به صورت زیر است.

$$u_4(x, y) = h(x) \varphi(y)$$

و بخاطر آوردن این تفکیک متغیر ها را در مورد این مساله ، با کمی تغییر در نام گذاری ، در مثال 5 بخش 3.8 انجام دادیم. پس براساس آن مساله می دانیم تفکیک متغیر ها ، دو معادله دیفرانسیل معمولی زیر را به ما می دهد که باید حل کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{d^2 h}{dx^2} - \lambda h &= 0 & \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \lambda \varphi &= 0 \\ h(L) &= 0 & \varphi(0) = 0 \quad \varphi(H) &= 0\end{aligned}$$

توجه داشته باشید که در این حالت ، بر خلاف معادله حرارت ، باید ابتدا مساله مقدار مرزی را حل کنیم. بدون شناخت λ هیچ راهی وجود ندارد که بتوانیم معادله دیفرانسیل اول بالا را با فقط یک شرط مرزی حل کنیم. زیرا علامت λ روی جواب اثر می گذارد.

همچنین توجه داشته باشید این مساله با مقدار مرزی را در مثال 1 بخش 3.9 حل کردیم ، پس اینجا دو باره حل نمی کنیم. با تغییر در حروف بکار رفته ، مقادیر ویژه و تابع های ویژه ، به صورت زیر هستند.

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 \quad \varphi_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

حالا که مقادیر ویژه را می دانیم ، اجازه دهید اولین معادله دیفرانسیل را با بکار بردن مقدار λ بنویسیم.

$$\frac{d^2 h}{dx^2} - \left(\frac{n\pi}{H}\right)^2 h = 0$$

$$h(L) = 0$$

چون ضریب $h(x)$ در معادله دیفرانسیل بالا مثبت است ، پس می دانیم جواب آن به صورت زیر است.

$$h(x) = c_1 \cosh\left(\frac{n\pi x}{H}\right) + c_2 \sinh\left(\frac{n\pi x}{H}\right)$$

اما ، این حقیقتا مناسب شرط مرزی $h(L) = 0$ نیست. پس می توان دریافت که ، جواب زیر هم یک جواب است.

$$h(x) = c_1 \cosh\left(\frac{n\pi (x-L)}{H}\right) + c_2 \sinh\left(\frac{n\pi (x-L)}{H}\right)$$

باید شما این را در معادله دیفرانسیل بگذارید و چک کنید که این در حقیقت یک جواب است. با بکار بردن شرط مرزی تک و تنها در مورد این جواب ، داریم.

$$0 = h(L) = c_1$$

جواب اولین معادله دیفرانسیل ، می شود

$$h(x) = c_2 \sinh\left(\frac{n\pi (x-L)}{H}\right)$$

تا اینجا می توانیم پیش برویم. زیرا فقط یک شرط مرزی داشتیم. اما این مساله ای نیست. زیرا حالا به اندازه کافی اطلاعات داریم تا بتوانیم جواب حاصلضرب برای این معادله دیفرانسیل پاره ای تشکیل دهیم.

یک جواب حاصلضرب برای این معادله دیفرانسیل پاره ای به صورت زیر است.

$$u_n(x, y) = B_n \sinh\left(\frac{n\pi(x-L)}{H}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

اصل بر هم نهی می گوید جواب زیر یک جواب برای معادله دیفرانسیل پاره ای ما است.

$$u_4(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi(x-L)}{H}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right)$$

و این جواب ، سه شرط مرزی را برقرار می کنند.

برای پیدا کردن اعداد ثابت کافی است آخرین شرط مرزی را بکار ببریم.

$$u_4(0, y) = g_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi(-L)}{H}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right)$$

در مسائل قبل ، این را انجام داده ایم و آشکار شده که این یک نوع سری فوریه است. اختلاف اینجا این است که ضریب های سری سینوسی فوریه حالا به صورت زیر است.

$$B_n \sinh\left(\frac{n\pi(-L)}{H}\right)$$

بجای فقط B_n

بخاطر آورید که یک سری سینوسی فوریه ، فقط یک سری ضریب ها است. پس ضرب ها را می توان

با استفاده از همان فرمول ها که در بخش سری سینوسی فوریه **Fourier Sine Series**

گفته شد ، برای یک تابع $0 \leq y \leq H$ پیدا کنیم.

$$B_n \sinh\left(\frac{n\pi(-L)}{H}\right) = \frac{2}{H} \int_0^H g_1(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) dy \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$B_n = \frac{2}{H \sinh\left(\frac{n\pi(-L)}{H}\right)} \int_0^H g_1(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) dy \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

کمی در هم و بر هم است. کاری نمی توان کرد.

مثال ۲

یک جواب برای معادله دیفرانسیل پاره ای زیر پیدا کنید.

$$\begin{aligned}\nabla^2 u_3 &= \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} = 0 \\ u_3(0, y) &= 0 \quad u_3(L, y) = 0 \\ u_3(x, 0) &= 0 \quad u_3(x, H) = f_2(x)\end{aligned}$$

پاسخ

این اولین مساله ای است که تا کنون ، تفکیک متغیر ها روی آن انجام نداده ایم. پس شروع می کنیم. فرض می کنیم جواب به صورت زیر باشد.

$$u_3(x, y) = h(x) \varphi(y)$$

ابتدا ، این را در مورد شرایط مرزی متجانس بکار می بریم ، زیرا هنگامی که می خواهیم عدد ثابت تفکیک انتخاب کنیم ، این ها را لازم داریم. شرایط مرزی به صورت زیر خواهد بود. دلیل آنرا به عهده شما می گذاریم.

$$h(0) = 0 \quad h(L) = 0 \quad \varphi(0) = 0$$

حالا ، جواب حاصلضرب را در معادله دیفرانسیل می گذاریم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(h(x) \varphi(y)) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(h(x) \varphi(y)) &= 0 \\ \varphi(y) \frac{d^2 h}{dx^2} + h(x) \frac{d^2 \varphi}{dy^2} &= 0 \\ \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} &= -\frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dy^2}\end{aligned}$$

حالا ، لازم است عدد ثابت تفکیک را انتخاب کنیم. دو شرط مرزی متجانس رو h داریم پس اجازه دهید عدد ثابت را طوری انتخاب کنیم تا معادله دیفرانسیل برای h یک مساله با مقدار مرزی آشنا به ما تحویل دهد بطوری که لازم نشود کار را دوباره انجام دهیم. در این حالت بر خلاف حالت u_4 احتیاج به λ — داریم.

گاهی لازم است برای عدد ثابت تفکیک λ انتخاب کنیم و گاهی $\lambda = 0$ پس بعد از اضافه کردن عدد ثابت تفکیک داریم.

$$\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} = -\frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = -\lambda$$

و دو معادله دیفرانسیل معمولی که در این حالت بدست می آوریم ، همراه با شرایط مرزی آنها ، به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 h}{dx^2} + \lambda h &= 0 & \frac{d^2 \varphi}{dy^2} - \lambda \varphi &= 0 \\ h(0) = 0 \quad h(L) &= 0 & \varphi(0) &= 0 \end{aligned}$$

حالا ، همان طور که در بالا گفته شد ، باید عدد ثابتی انتخاب کنیم که کار می کند ، اولین مساله با مقدار مرزی را حل کرده ایم. پس ، مقادیر ویژه و تابع های ویژه برای اولین مساله با مقدار مرزی ، به صورت زیر است.

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad h_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

دومین معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dy^2} - \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \varphi &= 0 \\ \varphi(0) &= 0 \end{aligned}$$

چون ضریب φ مثبت است ، می دانیم یک جواب برای این ، به صورت زیر است.

$$\varphi(y) = c_1 \cosh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + c_2 \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

پس با استفاده از شرط مرزی برای این ، داریم.

$$\varphi(y) = c_2 \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

و این جواب می شود

$$\varphi(y) = c_2 \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right)$$

پس جواب حاصلضرب برای این حالت می شود

$$u_n(x, y) = B_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

پس جواب این معادله دیفرانسیل پاره ای به صورت زیر است.

$$u_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

در نهایت ، اجازه دهید شرط مرزی نا متجانس را بکار ببریم تا ضریب های این جواب را پیدا کنیم. پس داریم.

$$u_3(x, H) = f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh\left(\frac{n\pi H}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

همان طور که انتظار می رفت ، باز یک سری سینوسی بدست آوریم و لذا با استفاده کار هائی که قبلا انجام داده ایم ، داریم.

دو حالت از چهار حالت شماره (1) را انجام داده ایم.

مثال 3

یک جواب برای معادله دیفرانسیل پاره ای زیر پیدا کنید.

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \\ |u(0, \theta)| &< \infty \quad u(a, \theta) = f(\theta) \\ u(r, -\pi) &= u(r, \pi) \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, -\pi) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi)\end{aligned}$$

پاسخ

فرض می کنیم جواب به صورت زیر باشد.

$$u(r, \theta) = \varphi(\theta) G(r)$$

با جانشین کردن این در شرایط مرزی متناوب ، داریم.

$$\begin{aligned}\varphi(-\pi) &= \varphi(\pi) \quad \frac{d\varphi}{d\theta}(-\pi) = \frac{d\varphi}{d\theta}(\pi) \\ |G(0)| &< \infty\end{aligned}$$

حالا ، اجازه دهید جواب حاصلضرب را در معادله دیفرانسیل پاره ای بگذاریم.

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} (\varphi(\theta) G(r)) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\varphi(\theta) G(r)) &= 0 \\ \varphi(\theta) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} \right) + G(r) \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} &= 0\end{aligned}$$

در این حالت تنها تقسیم بر جواب حاصلضرب برای تفکیک متغیر ها کافی نیست. اما لازم است. همچنین مجبور هستیم بر r^2 هم تقسیم کنیم تا کاملاً متغیر ها را از هم جدا کرده باشیم. پس با انجام این کار ها و حرکت دادن یکی از آنها به طرف دیگر علامت تساوی ، داریم.

$$\frac{r}{G} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} \right) = -\frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} = \lambda$$

اینجا λ بکار بردیم تا معادله دیفرانسیلی برای φ پیدا کنیم که با آنچه انجام داده ایم، جور باشد.

معادله های دیفرانسیل معمولی که بدست می آوریم، به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} \right) - \lambda G &= 0 & \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} + \lambda \varphi &= 0 \\ |G(0)| < \infty & & \varphi(-\pi) = \varphi(\pi) & \quad \frac{d\varphi}{d\theta}(-\pi) = \frac{d\varphi}{d\theta}(\pi) \end{aligned}$$

این مساله با مقدار مرزی را در بخش 3.7 مثال 7 انجام دادیم، اما در آن مثال بجای $\varphi_n(\theta)$ داشتیم $y_n(x)$ یعنی فقط نام گذاری متغیر ها متفاوت بود. پس لازم نیست مجدداً آن کار ها را انجام دهیم و داریم.

$$\begin{aligned} \lambda_n &= n^2 & \varphi_n(\theta) &= \sin(n\theta) & n &= 1, 2, 3, \dots \\ \lambda_n &= n^2 & \varphi_n(\theta) &= \cos(n\theta) & n &= 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

در معادله دیفرانسیل معمولی اول می گذاریم و با استفاده از قانون حاصلضرب مشتق، داریم.

$$\begin{aligned} r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dG}{dr} \right) - n^2 G &= 0 \\ r \left(r \frac{d^2 G}{dr^2} + \frac{dG}{dr} \right) - n^2 G &= 0 \\ r^2 \frac{d^2 G}{dr^2} + r \frac{dG}{dr} - n^2 G &= 0 \end{aligned}$$

این یک معادله دیفرانسیل اویلر **Euler Differential Equation** است، پس می دانیم جواب ها به صورت $G(r) = r^p$ خواهند بود، در صورتی که p یک ریشه

$$\begin{aligned} p(p-1) + p - n^2 &= 0 \\ p^2 - n^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad p = \pm n \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

باشد.

پس، چون $n = 0$ دو ریشه مضاعف می دهد، در مقابل، اگر $n \neq 0$ باشد، دو ریشه متمایز حقیقی

می دهد ، دو حالت اینجا داریم. آنها به صورت زیر هستند.

$$\begin{aligned} G(r) &= c_1 + c_2 \ln r & n &= 0 \\ G(r) &= \bar{c}_1 r^n + \bar{c}_2 r^{-n} & n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

حالا ، باید شرط $|G(0)| < \infty$ را بخاطر آوریم. هر یک از جوابهای بالا $G(r) \rightarrow \infty$ هنگامی که $r \rightarrow 0$. لذا برای این که شرط مرزی برقرار باشد ، باید داشته باشیم

$$c_2 = \bar{c}_2 = 0.$$

پس جواب به صورت زیر کاهش می یابد.

$$G(r) = c_1 r^n \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

و ملاحظه می کنید چون جمله دوم از بین می رود ، می توانیم دو جواب را در یک جواب ادغام کنیم.

پس دو جواب حاصلضرب برای این مساله داریم. یعنی

$$\begin{aligned} u_n(r, \theta) &= A_n r^n \cos(n\theta) & n &= 0, 1, 2, 3, \dots \\ u_n(r, \theta) &= B_n r^n \sin(n\theta) & n &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

پس جواب ما مجموع تمام این جوابها است ، یعنی

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^n \sin(n\theta)$$

با استفاده از آخرین شرط مرزی ، داریم.

$$u(a, \theta) = f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n a^n \cos(n\theta) + \sum_{n \setminus (L=\pi)=1}^{\infty} B_n a^n \sin(n\theta)$$

این یک سری کامل فوریه برای $f(\theta)$ در بازه $-\pi \leq \theta \leq \pi$ است ، یعنی $L = \pi$. همچنین باز ملاحظه می کنید که ضریب های سری فوریه کمی پیچیده تر از معمول است. باز هم خاصیت متعامد

بودن سینوس و کسینوس را بکار می‌بریم برای بدست آوردن A_n, B_n و یا می‌توانیم فرمول‌های سری فوریه را بکار ببریم. ، پس داریم.

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \\ A_n a^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ B_n a^n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

برای ضریب‌ها ، حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \\ A_n &= \frac{1}{\pi a^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ B_n &= \frac{1}{\pi a^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

بخش 3.12 – حل معادله ریسمان مرتعش Solving Vibrating String Equation

در این بخش می خواهیم معادله ریسمان مرتعش حل کنیم. به عبارتی حل یک بعدی معادله موج جهت پیدا کردن جا بجایی یک ریسمان مرتعش.

مثال 1

مطلوب است حل معادله دیفرانسیل پاره ای زیر.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(x, 0) &= f(x) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \\ u(0, t) &= 0 \quad u(L, t) = 0\end{aligned}$$

پاسخ

در این مساله دو شرط اولیه داریم. تا کنون به این نوع مساله بر خورد نداشته ایم. اما پرداختن به این موضوع، مشکلی ایجاد نمی کند.

تا بحال، روش تفکیک متغیر ها را در مورد این مساله بکار برده ایم. اجازه دهید آنرا مجددا انجام دهیم.

پس، با جواب حاصلضرب شروع می کنیم.

$$u(x, t) = \varphi(x) h(t)$$

این را در شرایط مرزی می گذاریم، پس داریم.

$$\varphi(0) = 0 \quad \varphi(L) = 0$$

جواب حاصلضرب را در معادله دیفرانسیل می گذاریم، تفکیک متغیر ها را انجام می دهیم، و یک عدد ثابت تفکیک معرفی می کنیم، پس داریم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varphi(x)h(t)) &= c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\varphi(x)h(t)) \\ \varphi(x) \frac{d^2 h}{dt^2} &= c^2 h(t) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \\ \frac{1}{c^2 h} \frac{d^2 h}{dt^2} &= \frac{1}{\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -\lambda\end{aligned}$$

برای راحتی کار، c^2 را به طرف چپ انتقال دسیم و $-\lambda$ را برای عدد ثابت تفکیک انتخاب کردیم

پس، دو معادله های دیفرانسیل معمولی که از طریق تفکیک متغیر ها بدست آوردیم، به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}\frac{d^2 h}{dt^2} + c^2 \lambda h &= 0 & \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \lambda \varphi &= 0 \\ \varphi(0) &= 0 & \varphi(L) &= 0\end{aligned}$$

مساله مقدار مرزی بالا را در مثال 1 بخش 3.9 حل کردیم و لذا مقادیر ویژه و تابع های ویژه این مساله به صورت زیر هستند.

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \quad \varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

پس اولین معادله دیفرانسیل معمولی به صورت زیر است.

$$\frac{d^2 h}{dt^2} + \left(\frac{n\pi c}{L}\right)^2 h = 0$$

و چون واضح است که ضریب h مثبت است، جواب این به صورت زیر است.

$$h(t) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right)$$

چون دلیلی وجود ندارد که فکر کنیم هر یک از دو ضرب های بالا صفر هستند، پس دو جواب حاصل ضرب بدست می آوریم.

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= A_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ u_n(x, t) &= B_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

پس ، جواب به صورت زیر است.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

حالا ، برای بکار بردن دومین شرط اولیه ، لازم است از عبارت بالا نسبت به t مشتق بگیریم ، پس

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{n\pi c}{L} A_n \sin\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \frac{n\pi c}{L} B_n \cos\left(\frac{n\pi c t}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right]$$

حالا ، اگر شرایط اولیه را بکار ببریم ، داریم.

$$\begin{aligned} u(x, 0) = f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

هر دوی این ها سری سینوسی فوری هستند. اولی برای $f(x)$ روی $0 \leq x \leq L$ و دومی برای $g(x)$ روی $0 \leq x \leq L$ با یک ضریب تقریباً در هم و بر هم. مانند مثال های قبل می توانیم از متعامد بودن سینوس ها برای بدست آوردن A_n و B_n استفاده کنیم و یا فرمول های کار های قبل را بکار ببریم.

آسان تر است که از فرمول های سری سینوسی فوری استفاده کنیم ، پس داریم.

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \frac{n\pi c}{L} B_n &= \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

و حالا برای B_n حل می کنیم ، پس داریم.

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$
$$B_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

بخش 3.13 – حل دالامبر معادله موج D'Alembert Solution Of Wave Equation

روش دالامبر یک جواب برای معادله موج در فضای یک بعدی به ما می دهد.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1)$$

معادله بالا ، ارتعاشات یک ریسمان را مدل سازی می کند.

می توانیم جواب کلی را با تغییر متغیر ها بدست آوریم. یعنی فرض می کنیم

$$\xi = x - ct \quad \text{و} \quad \eta = x + ct$$

باشد. با استفاده از قاعده زنجیره ای **Chain Rule** داریم.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4)$$

$$= -c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta} . \quad (5)$$

با استفاده از شماره (4) و (5) برای محاسبه سمت چپ و سمت راست شماره (3) به ترتیب ، داریم.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \quad (6)$$

$$= \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \left(-c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \left(-c \frac{\partial y}{\partial \xi} + c \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \quad (8)$$

$$= c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - 2 c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} + c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} , \quad (9)$$

پس ، با جانشین کردن و بسط ، داریم.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0. \quad (10)$$

این معادله دیفرانسیل پاره ای ، جواب کلی زیر را دارد.

$$y(x, t) = f(\xi) + g(\eta) \quad (11)$$

$$= f(x - ct) + g(x + ct), \quad (12)$$

اینجا ، f و g تابع های اختیاری هستند. f نمایش حرکت سمت راست موج و g نمایش حرکت سمت چپ موج را نمایش می دهد.

مساله مقدار اولیه برای یک ریسمان در مکان $y(x, t = 0) = y_0(x)$ به صورت یک تابع مسافت در امتداد ریسمان x و سرعت عمودی

$$\left. \partial y / \partial t \right|_{t=0} = v_0(x)$$

می توان به صورت زیر پیدا کرد. از شرط اولیه و شماره (12) داریم.

$$y_0(x) = f(x) + g(x). \quad (13)$$

با مشتق گیری نسبت به t داریم.

$$v_0(x) = f'(x) \frac{\partial(x-ct)}{\partial t} + g'(x) \frac{\partial(x+ct)}{\partial t} \quad (14)$$

$$= -c f'(x) + c g'(x), \quad (15)$$

و با انتگرال گرفتن ، داریم.

$$\int_a^x v_0(s) ds = -c f(x) + c g(x). \quad (16)$$

با حل شماره (13) و (14) برای f و g داریم.

$$f(x) = \frac{1}{2} y_0(x) - \frac{1}{2c} \int_a^x v_0(s) ds \quad (17)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} y_0(x) + \frac{1}{2c} \int_a^x v_0(s) ds, \quad (18)$$

با جانشین کردن اینها در شماره (13) جواب معادله موج با شرط اولیه مخصوص ، به صورت زیر است.

$$y(x, t) = \frac{1}{2} y_0(x - ct) + \frac{1}{2} y_0(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(s) ds. \quad (19)$$

بخش 3.14 — حل دالامبر معادله موج در دامنه بی نهایت

D'Alembert Solution of Wave Equation in Infinite Domain

در این بخش مساله کوشی Cauchy در دامنه بی نهایت بر رسی می کنیم با دو شرایط اولیه کوشی بر وزن لوزی

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= F(x) & -\infty < x < \infty \\ u_t(x, 0) &= G(x) & -\infty < x < \infty\end{aligned}\quad (3)$$

این سوال پیش می آید که چرا دو شرط اولیه داریم. زیرا معادله دیفرانسیل پاره ای شماره (3) یک معادله مرتبه دوم است در زمان t و لذا لازم است دو شرط اولیه داشته باشیم تا یک جواب یگانه و یکتا داشته باشیم. اگر دلیل فیزیکی خواسته باشید، برای ریسمان مرتعش، باید هم جابجایی و هم سرعت را مشخص کنیم.

مانند معادله حرارت و معادله لاپلاس، جواب معادله موج مرتبه دوم را می توان از طریق تفکیک متغیر ها یا تبدیل فوریه بدست آورد. اما اینجا روش دیگری بکار می بریم. یعنی حل دالامبر معادله موج، که مناسب تر است، اگر دامنه نامحدود داشته باشیم. روش دالامبر از طریق تغییر متغیر ها انجام می گیرد.

عمل گر های معادله دیفرانسیل خطی شماره (3) را فاکتور می گیریم، پس داریم.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0. \quad (4)$$

حالا، تبدیل یا به عبارت دیگر تغییر متغیر ها را انجام می دهیم. یعنی

$$\xi = x - ct \quad \eta = x + ct \quad (5)$$

اینجا ξ و η را متغیر های ممیز Characteristic Variables می نامند. معادله شماره (5) نمایش دو خانواده ممیز ها برای معادله موج هستند. برای بیان شماره (3) بر حسب ξ و η قاعده زنجیره ای Chain Rule را بکار می بریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\end{aligned}$$

با استفاده از رابطه های بالا ، شماره (4) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\left[c \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] \left[c \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) - c \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] u = 0$$

که با ساده کردن ، داریم.

$$2c \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \right] 2c \left[-\frac{\partial}{\partial \xi} \right] u = 0$$

یا

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0. \quad (6)$$

پس می بینیم ، معادله موج شماره (3) با بکار بردن جمله های ξ و η کاملاً ساده شد. و می گوئیم شماره (6) **شکل قانونی Canonical Form** شماره (3) است. این معادله ساده است ، زیرا می توان آنرا مستقیماً با دو مرتبه انتگرال گیری ، حل کرد. ابتدا بر حسب η انتگرال می گیریم ، پس داریم.

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \int 0 d\eta = f(\xi) \quad (7)$$

اینجا عدد ثابت انتگرال گیری f ، یک تابع اختیاری ξ است. سپس با انتگرال گرفتن از شماره (7) نسبت ξ داریم.

$$u(\xi, \eta) = \int f(\xi) d\xi + \phi(\eta) = \phi(\eta) + \psi(\xi) \quad (8)$$

اینجا ϕ و ψ تابع های اختیاری یک متغیره هستند. لذا ، اگر u قرار باشد که یک جواب معادله موج باشد ، به صورت زیر باید باشد.

$$u(x, t) = \phi(x + ct) + \psi(x - ct). \quad (9)$$

لازم است توضیح دهیم که $\phi(x + ct)$ یعنی $\phi(\eta)$ محاسبه شده در $\eta = x + ct$ و $\psi(x - ct)$ یعنی $\psi(\xi)$ محاسبه شده در $\xi = x - ct$. چون در معادله موج ، مشتق مرتبه دوم است ، تابع های ϕ و ψ باید دو مرتبه مشتق پذیر باشند. شماره (9) صورت کلی حل دالامبر معادله موج شماره (3) است. این یکی از موارد کمیاب است که صورت کلی حل یک معادله دیفرانسیل پاره ای را می توان پیدا کرد. اما ، پیدا کردن صورت دقیق تابع های ϕ و ψ که شرط اولیه داده شده را بر قرار کنند همیشه آسان نیست. شرایط اولیه باید اطلاعات کافی بدهند تا ϕ و ψ محاسبه کرد ، که تابع های یک متغیر $\eta = x + ct$ و $\xi = x - ct$ هستند.

اگر زمان t را به عنوان پارامتر در نظر بگیریم، تبدیل $\xi = x - ct$ نمایش یک حرکت انتقالی سیستم مختصات است به طرف راست به مقدار ct . چون این انتقال متناسب زمان است، یک نقطه یعنی عدد ثابت ξ با سرعت c به طرف راست حرکت می کند. یعنی یک جواب به صورت

$$u(x, t) = \psi(x - ct)$$

نمایش یک موج است که با سرعت c حرکت می کند بدون تغییر شکل آن. به همین طریق

$$u = \phi(x + ct)$$

نمایش یک موج است که با سرعت $-c$ به طرف چپ حرکت می کند، بدون تغییر شکل.

از معادله (9) واضح است که هر جواب معادله موج (3) مجموع یک موج است که با سرعت $-c$ در جهت چپ و یک موج با سرعت c به طرف راست در حال حرکت هستند. چون این دو موج در جهت مخالف حرکت می کنند، شکل $u(x, t)$ بطور کلی با زمان تغییر می کند.

حالا، از طریق شرایط اولیه داده شده، می پردازیم به مشخص کردن شکل تابع های ϕ و ψ . چون معادله مرتبه دوم t است، دو شرط اولیه لازم است. شرایط اولیه به صورت زیر داده شده است.

$$u(x, 0) = F(x), \quad u_t(x, 0) = G(x). \quad (10)$$

چون جواب کلی، شرط اولیه $u(x, 0) = F(x)$ را برقرار می کند، داریم.

$$F(x) = \phi(x) + \psi(x). \quad (11)$$

یعنی، تابع های ϕ و ψ باید طوری انتخاب شوند که مجموع آنها $F(x)$ باشد. بر اساس قاعده زنجیره ای و معادله (8) داریم.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial \xi} + c \frac{\partial u}{\partial \eta} = -c \frac{d\psi}{d\xi} + c \frac{d\phi}{d\eta} \\ u_t &= -c\psi'(\xi) + c\phi'(\eta) \end{aligned}$$

بر می گردیم به متغیر های اصلی

$$u_t(x, t) = c\phi'(x + ct) - c\psi'(x - ct).$$

پس ، با استفاده از مشتق ، شرط اولیه $u(x, 0) = G(x)$ داریم.

$$G(x) = c\phi'(x) - c\psi'(x) \quad (12)$$

با انتگرال گرفتن از این معادله نسبت به x داریم.

$$\phi(x) - \psi(x) = \frac{1}{c} \int_{x_0}^x G(s) ds \quad (13)$$

اینجا ، x_0 یعنی عدد ثابت انتگرال گیری ، به عنوان حد پائینی انتگرال بکار رفته است. شماره های (11) و (13) را برای ϕ و ψ حل می کنیم ، پس داریم.

$$\phi(x) = \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x G(s) ds \quad (14a)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}F(x) - \frac{1}{2c} \int_{x_0}^x G(s) ds \quad (14b)$$

لذا ، جواب کامل مساله با مقدار اولیه به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \phi(x + ct) + \psi(x - ct) \\ &= \frac{1}{2}F(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x+ct} G(s) ds + \frac{1}{2}F(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x_0} G(s) ds \end{aligned} \quad (15)$$

اینجا

$$\phi(x + ct) = \frac{1}{2}F(x + ct) + \frac{1}{2c} \int_{x_0}^{x+ct} G(s) ds \quad (16a)$$

$$\psi(x - ct) = \frac{1}{2}F(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x_0} G(s) ds \quad (16b)$$

هستند. می توان جواب شماره (15) را به صورت زیر باز نویسی کرد.

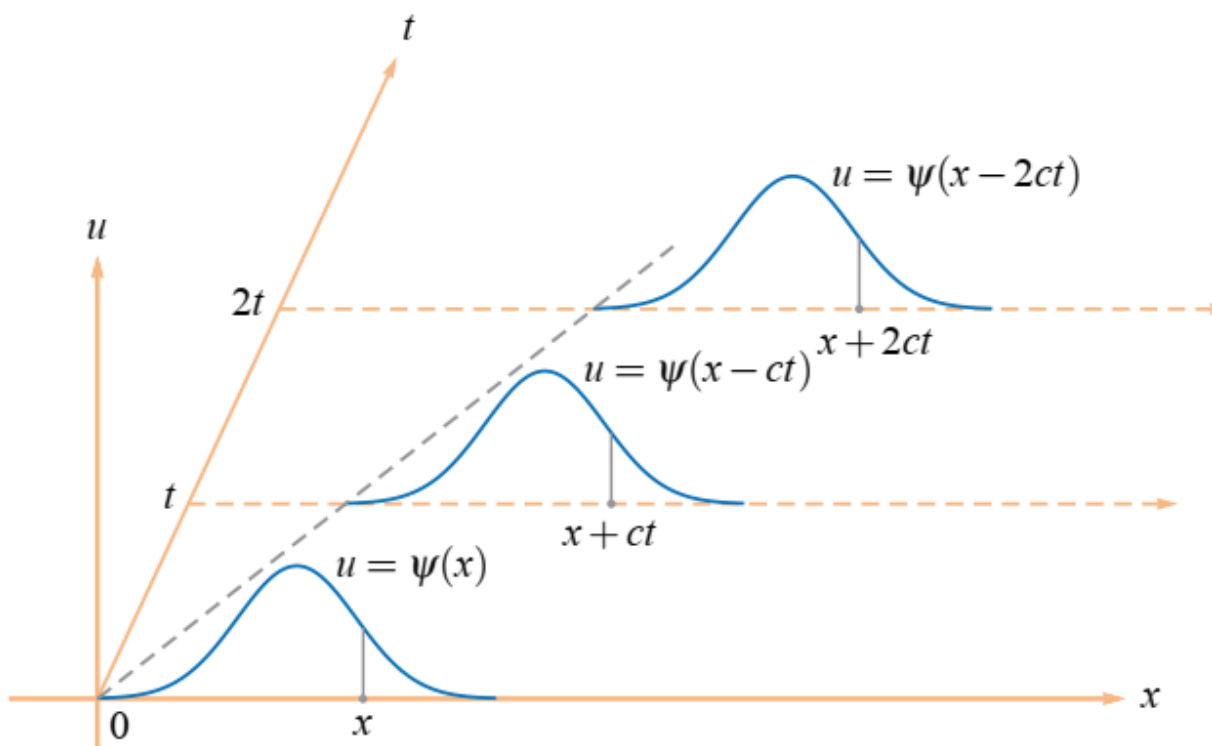
$$u(x, t) = \frac{1}{2} [F(x + ct) + F(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} G(s) ds. \quad (17)$$

این جواب ، به حل دالامبر معادله موج معروف است.

ملاحظه می کنید که همان جواب بخش 3.13 بدست آوردیم، با تغییراتی در نام گذاری متغیر ها.

اهمیت فیزیکی حل دالامبر را می توان با نگاه کردن به فرم معادله شماره (15) توضیح داد واضح است که $\psi(x - ct)$ نمایش یک موج متحرک در جهت مثبت x با سرعت c و بدون تغییر شکل است. به همین طریق $\phi(x + ct)$ یک موج متحرک است در جهت منفی x با سرعت c بدون تغییر شکل. در تصویر شماره 1 یک موج در جهت مثبت x در حرکت است با سرعت c بدون تغییر شکل.

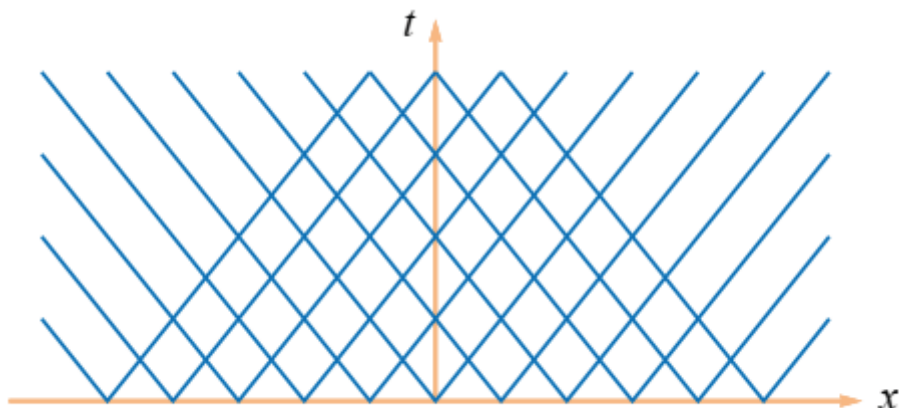
تصویر 1



موج متحرک در جهت مثبت x

معادله موج شماره (3) دارای دو مجموعه منحنی های مشخصه شامل خطوط مستقیم است. اعضای این مجموعه با شیب $\frac{1}{c}$ و $-\frac{1}{c}$ به ترتیب مشخصه های متحرک به طرف راست و متحرک به طرف چپ نامیده می شوند. نمودار این ها را در تصویر شماره 2 ملاحظه می کنید.

تصویر ۲



خطوط مشخصه موج معادله (3)

وابستگی دامنه و نفوذ برد Domain of Dependence and Range of Influence
جالب است اگر بدانیم کدام قسمت دامنه روی مقدار u در یک نقطه $P(x_p, t_p)$ اثر دارد. بر اساس جواب دالامبر شماره (17)

$$u(x_p, t_p) = \frac{1}{2} [F(x_p + ct_p) + F(x_p - ct_p)] + \frac{1}{2c} \int_{x_p - ct_p}^{x_p + ct_p} G(s) ds$$

می توان دید که مقدار $u(x_p, t_p)$ بستگی به اطلاعات اولیه F در نقطه های $x_p - ct_p$ و $x_p + ct_p$ دارد. مقدار $u(x_p, t_p)$ همچنین بستگی به مقدار G در بازه $[x_p - ct_p, x_p + ct_p]$ دارد. این مقدار محل تقاطع خط اولیه است با دو خط مشخصه

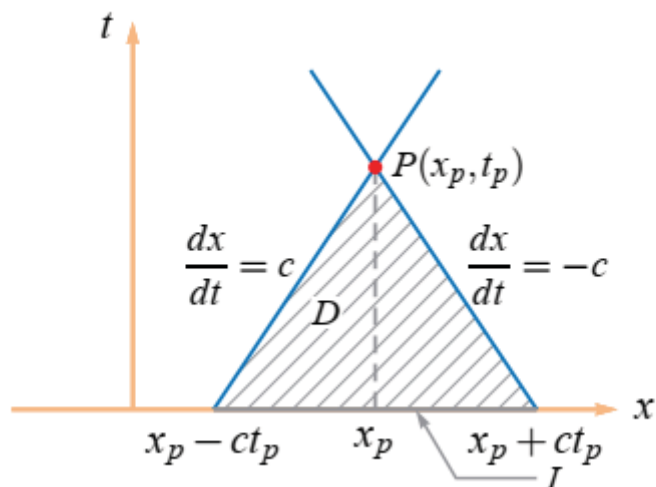
$$x - ct = x_p - ct_p \text{ و } x + ct = x_p + ct_p$$

با شیب $\pm \left(\frac{1}{c}\right)$ که از نقطه $P(x_p, t_p)$ می گذرد. بازه

$$I = [x_p - ct_p, x_p + ct_p]$$

را دامنه وابستگی جواب در $P(x_p, t_p)$ می نامند. تصویر 3

تصویر 3



دامنه وابستگی I و ناحیه تعیین کننده D نقطه $P(x_p, t_p)$

Domain of Dependence I and region of determinacy D of Point $P(x_p, t_p)$

حل دالامبر برای $G = 0$

رفتار جواب را با در نظر گرفتن دو حالت $G(x) = 0$ و $F(x) = 0$ بهتر می توان فهمید. ابتدا حالت $G(x) = 0$ را بررسی می کنیم.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = F(x) \quad -\infty < x < \infty \quad (18)$$

$$u_t(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < \infty$$

در این حالت حل دالامبر شماره (17) به صورت زیر است.

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [F(x + ct) + F(x - ct)] \quad (19)$$

بخش 3.15 – حل معادلات دیفرانسیل پاره ای با استفاده از تبدیل لاپلاس

Solving PDEs Using Laplace Transform

در فیزیک داریم معادله حرارت. توزیع حرارت در یک ناحیه داده شده و غیرو. تابع u داریم با دو متغیر: $u(x, t)$ اینجا متغیر t نمایش $t \geq 0$ است. متغیر دیگر یعنی x یک مکان است. تبدیل لاپلاس $u(x, t)$ به صورت زیر است.

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = \int_0^\infty u(x, t)e^{-st} dt$$

اینجا پارامتر x به عنوان یک عدد ثابت عمل می کند. برای راحتی کار، حرف U را بجای تبدیل لاپلاس بکار می بریم. یعنی

$$\mathcal{L}[u(x, t)] = U(x, s) = U$$

چون معادله دیفرانسیل که باید حل کنیم به صورت های زیر به نظر می رسد

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = x$$

یا

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x),$$

احتیاج به مشتق های مربوطه تبدیلات لاپلاس داریم. و اینها مانند تبدیل لاپلاس تابع $y(t)$ هستند. یعنی داریم.

$$\mathcal{L}[u_t(x, t)] = \mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = sU(x, s) - u(x, 0), \quad (1)$$

$$\mathcal{L}[u_{tt}(x, t)] = \mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = s^2U(x, s) - su(x, 0) - u_t(x, 0). \quad (2)$$

چون تبدیل نسبت به t انجام می دهیم، تصور می کنیم که منطقی باشد $\frac{\partial u}{\partial x}$ را در جلو اینتگرال قرار دهیم. یعنی

$$\mathcal{L}[u_x(x, t)] = \mathcal{L}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dt = \frac{d^2}{dx^2} \int_0^\infty e^{-st} u(x, t) dt = \frac{d^2}{dx^2} \mathcal{L}[u(x, t)]$$

پس

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = \frac{dU}{dx}, \quad (3)$$

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right] = \frac{d^2 U}{dx^2}. \quad (4)$$

معادله دیفرانسیل پاره ای به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می شود.

مثال

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = x \quad x > 0, t > 0, \quad u(x=0, t) = 0, u(x, t=0) = 0$$

یک معادله دیفرانسیل پاره ای به ما داده شده است. از طریق لاپلاس حل می کنیم. پس باید هر جمله را تبدیل کنیم. تبدیل نسبت به زمان t انجام می شود، بعد دیگر یعنی x یک عدد ثابت فرض می شود. تبدیل $\frac{\partial u}{\partial t}$ مشابه $y'(t) = \frac{dy}{dt}$ است. و شماره (1) را برای $\frac{\partial u}{\partial x}$ بکار می بریم، $\frac{\partial}{\partial x}$ را از انتگرال بیرون می آوریم، زیرا تبدیل روی t انجام می شود، در حالی که مشتق گیری نسبت به x است و سپس بر اساس (3) یعنی $\mathcal{L}[\partial u / \partial x] = d/dx U$ داریم.

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dx} + sU(x, s) - u(x, 0) &= x \cdot \frac{1}{s} \\ \frac{dU}{dx} + sU(x, s) &= x \cdot \frac{1}{s} \end{aligned}$$

بر اساس شرایط مرزی / اولیه داده شده $u(x, 0) = 0$ است. معادله دیفرانسیل پاره ای را به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل کردیم. معادله آخر را می توان به صورت معادله دیفرانسیل خطی حل کرد. حالا، متغیر وابسته U است و متغیر مستقل x است. می خواهیم $U(x)$ را حل کنیم، s یک عدد ثابت در نظر گرفته می شود.

$$U' + sU = x \frac{1}{s} \implies P(x) = s \implies \mu(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{\int s dx} = e^{sx}$$

معادله خطی را با ضریب انتگرال گیری

$$\mu(x) = e^{\int P(x) dx}$$

حل می کنیم. یعنی این ضریب انتگرال گیری را در معادله دیفرانسیل ضرب می کنیم، خلاصه این که مطابق آنچه در مورد حل معادلات دیفرانسیل معمولی خوانده ایم، حل می کنیم.

$$\begin{aligned}
 e^{sx} U' + e^{sx} sU &= s^{sx} x \frac{1}{s} \\
 \frac{d}{dx} e^{sx} U &= e^{sx} x \frac{1}{s} \\
 e^{sx} U &= \frac{1}{s} \cdot \frac{(sx - 1)e^{sx}}{s^2} + c \\
 U(x, s) &= \frac{1}{s} \cdot \frac{sx - 1}{s^2} + ce^{-sx} = \frac{x}{s^2} - \frac{1}{s^3} + ce^{-sx}
 \end{aligned}$$

انتگرال e^{sx} از طریق انتگرال گیری جز به جز حل می‌کنیم

$$(uv)' = u'v + uv' \implies u'v = (uv)' - uv' \implies \int u'v = uv - \int uv'$$

سپس باید یک جمله را پیدا کنیم، که محاسبه مشتق آن آسان است یعنی (x) و دومی که محاسبه انتگرال آن آسان است یعنی (e^{sx}) .

$$\begin{aligned}
 \int e^{sx} x dx &= \left| \begin{array}{ll} u' = e^{sx} & u = \frac{1}{s} e^{sx} \\ v = x & v' = 1 \end{array} \right| = \frac{1}{s} e^{sx} x - \int \frac{1}{s} e^{sx} dx = x \frac{1}{s} e^{sx} - \frac{1}{s^2} e^{sx} = \\
 &= \frac{(xs - 1)e^{sx}}{s^2}
 \end{aligned}$$

با استفاده از شرایط مرزی / اولیه داریم.

$$\begin{aligned}
 u(x=0, t) = 0 &\implies U(x=0, s) = 0 \implies 0 = -\frac{1}{s^3} + c \implies c = \frac{1}{s^3} \implies \\
 \implies U(x, s) &= \frac{x}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^3} e^{-sx}
 \end{aligned}$$

به جواب رسیدیم، اما در دامنه s حالا باید معکوس تبدیل لاپلاس را بکار ببریم.

$$u(x, t) = xt - \frac{1}{2}t^2 + u(t-x) \cdot \frac{1}{2}(t-x)^2$$

اینجا $u(t-x)$ معادل $u_x(t)$ است. و این تابع پلکانی واحد است. جواب بالا رسماً، صحیح است. اما باید حالت‌ها را در نظر بگیریم. دو جمله اول به هیچ تابع پلکانی وابسته نیستند. و از صفر تا بی نهایت معتبر هستند. جمله آخر، به خاطر تابع پلکانی $u_x(t)$ غیر فعال است تا $t = x$ بشود.

$$u(x, t) = \begin{cases} xt - \frac{1}{2}t^2 & t < x \\ xt - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}(t-x)^2 & t \geq x \end{cases}$$

این را می توان ساده کرد.

$$u(x, t) = \begin{cases} xt - \frac{1}{2}t^2 & t < x \\ \frac{1}{2}x^2 & t \geq x \end{cases}$$

بخش 3.16 موج سینوسی Sine Wave

گر چه ممکن است در مثلثات ، در مورد تابع سینوس و کسینوس خوانده باشید و مسلما موج سینوسی در مقوله معادلات دیفرانسیل نمی گنجد ، اما چون این تابع به عنوان یک موج بر رسی می شود ، پس لازم است آنرا در این فصل مورد بحث قرار دهیم.

یک موج سینوسی ، یک نمودار تابع سینوس در مثلثات است. یک سینوسوئد **Sinusoid** نامی است که به هر منحنی که بتوان آنرا به صورت زیر نوشت ، اطلاق می شوند.

$$y = A \sin(B(x - C)) + D$$

اینجا B و A مثبت هستند. سینوسوئد ها شکل کلی تابع سینوس هستند.

علاوه بر ریاضیات ، تابع های سینوسوئد ها در علوم و مهندسی کار برد دارند. این تابع در طبیعت هم اتفاق می افتد. مثلا موج های اقیانوس ، امواج صوت ، امواج نور و غیرو.

شکل کلی تابع کسینوس هم می توان به صورت زیر نوشت.

$$y = A \sin(B(x - C)) + D$$

زیرا ، تابع کسینوس شبیه تابع سینوس است ، بجز یک جا بجایی افقی به طرف چپ 90° یا $\frac{\pi}{2}$ ،

هر تابع کسینوس را می توان به صورت یک تابع سینوس نوشت.

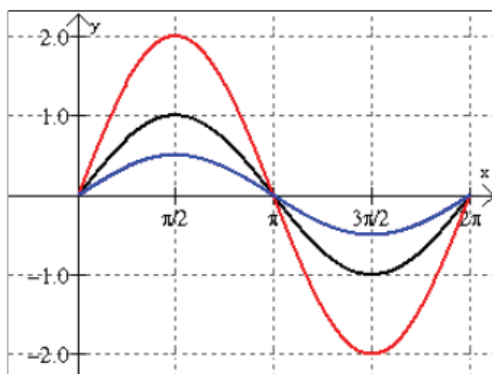
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

اجازه دهید با شکل ساده تر نمودار های $y = A \cos(Bx)$ و $y = A \sin(Bx)$ شروع کنیم.

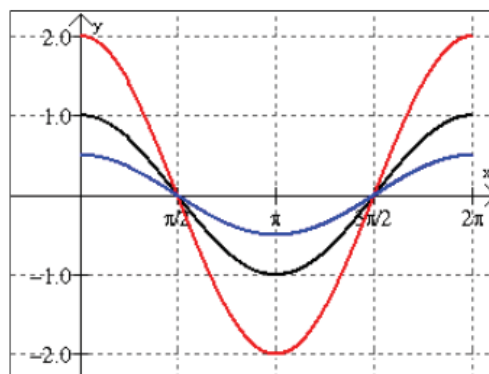
عدد A جلو سینوس یا کسینوس ، ارتفاع نمودار را تغییر می دهد ، این عدد را ارتفاع یا دامنه نوسان **Amplitude** می نامند. دامنه نوسان عبارت است از نصف فاصله بین مقدار ماکسیمیم و مینیمیم تابع است. چون فاصله یک عدد مثبت است ، پس دامنه نوسان را با $|A|$ نشان می دهیم. این یعنی A مثبت است. افزایش یا کاهش مقدار A سبب کشیده شدن یا کوچک شدن عمودی ، نمودار می شود. به مثال های زیر توجه کنید.

$$\begin{aligned} y &= \sin x \\ y &= 2 \sin x \\ y &= \frac{1}{2} \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \cos x \\ y &= 2 \cos x \\ y &= \frac{1}{2} \cos x \end{aligned}$$



نمودار های سینوس



نمودار های کسینوس

عدد B جلو x تعداد سیکل ها یا تناوب ها **Cycles** است، در بازه $[0, 2\pi]$ مقدار B روی دوره تناوب **Period** اثر می گذارد. دوره تناوب سینوس و کسینوس $\left| \frac{2\pi}{B} \right|$ است. هنگامی که $0 < B < 1$ است، دوره تناوب تابع بیش از 2π است، نمودار بطور افقی گسترده می شود. هنگامی که $B > 1$ است، دوره تناوب کمتر از 2π است، نمودار بطور افقی کوچک می شود و یا به اصطلاح مثل پارچه، آب می رود. به مثال های زیر توجه کنید.

$$y = \sin x; \text{ period} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

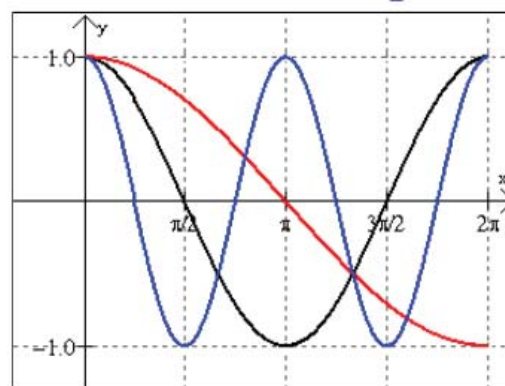
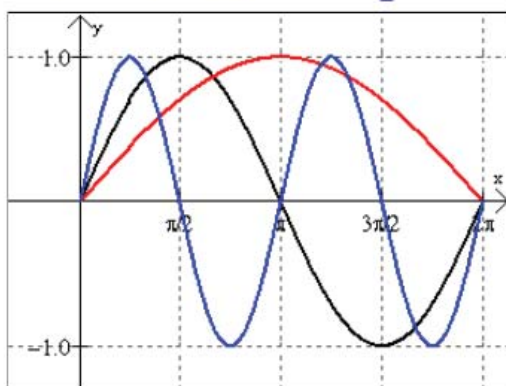
$$y = \cos x; \text{ period} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

$$y = \sin\left(\frac{1}{2}x\right); \text{ period} = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$$

$$y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right); \text{ period} = \frac{2\pi}{1/2} = 4\pi$$

$$y = \sin(2x); \text{ period} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$y = \cos(2x); \text{ period} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$



توجه کنید که این نمودار ها بطور افقی عرض آنها تغییر می کند، اما ارتفاع تغییر نمی کند. دو نمودار قرمز رنگ فقط قسمتی از نمودار کامل را نشان می دهد، یعنی بین صفر تا 2π اگر نمودار کامل را بخواهیم نشان دهیم، باید دامنه را به 4π گسترش دهیم. اما دو نمودار آبی رنگ، نمودار کامل را بین صفر و 2π نشان می دهند.

مثال 1

نمودار تابع زیر را در دامنه $0 \leq x \leq 2\pi$ رسم کنید.

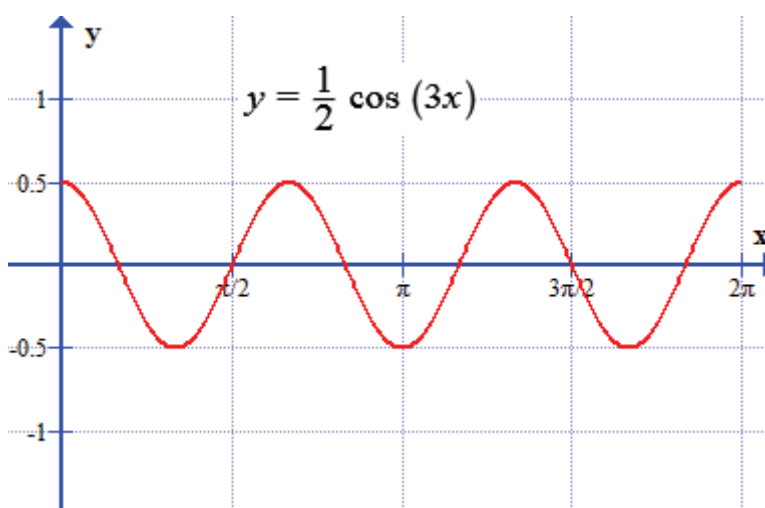
$$y = \frac{1}{2} \cos(3x)$$

پاسخ

مقدار $A = \frac{1}{2}$ است، این یعنی بطور عمودی نمودار آب می رود و لذا دامنه نوسان $\frac{1}{2}$ است. مقدار $B = 3$ به ما می گوید سه سیکل یا تناوب کامل در دامنه صفر تا 2π خواهیم داشت. یعنی نمودار بطور افقی آب می رود. دوره تناوب این نمودار

$$\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$$

است.



مثال 2

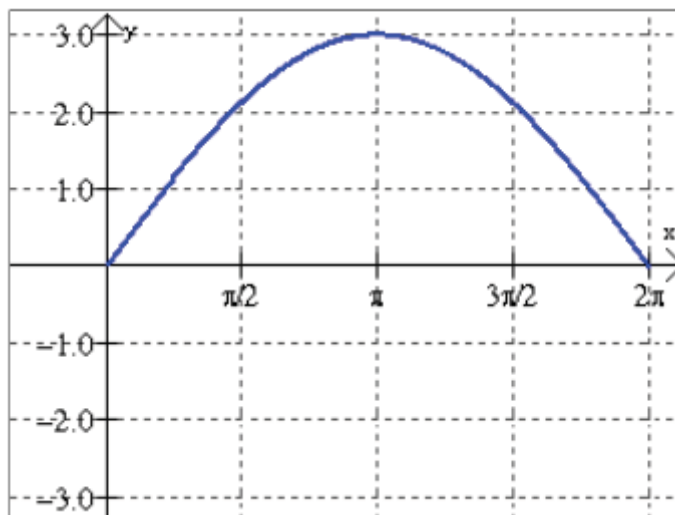
نمودار تابع زیر را در دامنه $0 \leq x \leq 2\pi$ رسم کنید.

$$y = 3 \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

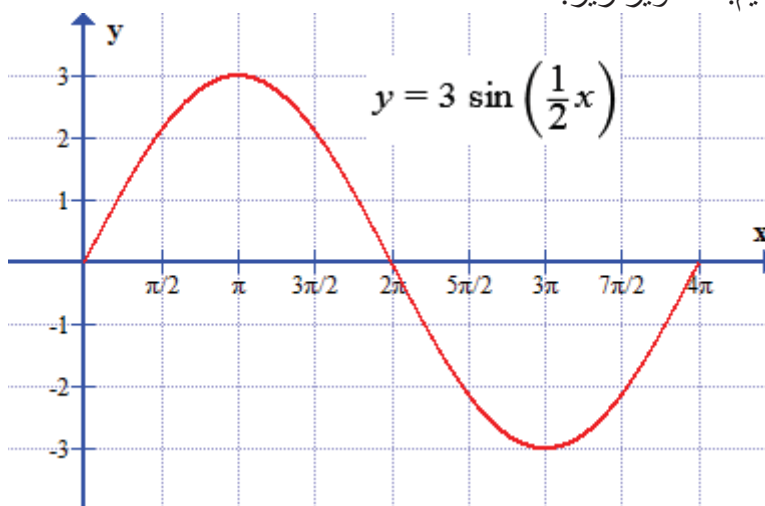
پاسخ

مقدار $A = 3$ به ما می گوید که این نمودار، گسترش عمودی دارد و ارتفاع یا دامنه نوسان 3 است. مقدار $B = \frac{1}{2}$ به ما می گوید که یک سیکل یا تناوب کامل نمودار، احتیاج به دامنه بیش از صفر تا 2π است. دور تناوب به صورت زیر است.

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi = 720^\circ$$



ملاحظه می کنید که در بازه $[0, 2\pi]$ نمودار کامل مشخص نیست. برای رسم نمودار کامل، باید دامنه را به 4π افزایش دهیم. تصویر زیر.



مثال 3

نمودار تابع زیر را در دامنه $0 \leq x \leq 2\pi$ را رسم کنید.

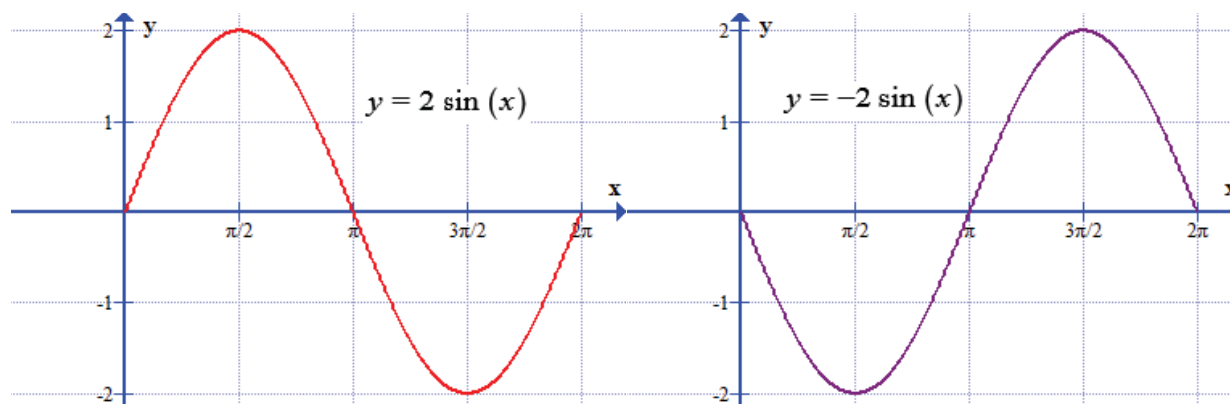
$$y = -2 \sin(x)$$

پاسخ

در مورد این مساله دقت کنید. ارتفاع یا دامنه نوسان 2 است، مسافت یا فاصله یک مقدار مثبت است. این مساله را اگر به صورت زیر بنویسیم، واضح تر است.

$$y = 2(-\sin x)$$

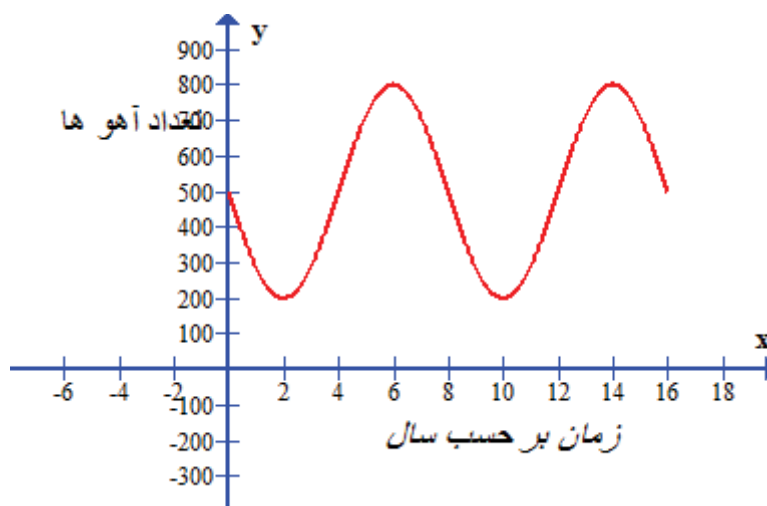
این نمودار، انعکاس نمودار $y = 2 \sin x$ روی محور x است. دامنه نوسان 2 به ما می گوید که نمودار، گسترش عمودی دارد. برای روشن شدن، نمودار $y = 2 \sin x$ به رنگ قرمز و نمودار $y = -2 \sin(x)$ به رنگ بنفش رسم می کنیم تا موضوع انعکاس روی محور x مشخص شود.



مثال 4

به این مثال جالب توجه کنید.

عوامل زیادی روی جمعیت آهو ها اثر می گذارد. مثلاً آب و هوا، شکار، حیوانات درنده و غیره. نمودار زیر نمایش تغییر تدریجی جمعیت آهو ها به صورت یک تابع زمان را نشان می دهد. یک تابع بنویسید که این تابع را نشان دهد. به عبارتی، یک تابع بنویسید که نمایش این نمودار باشد.



پاسخ

$$f(x) = -300 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 500$$

توضیح

فرمول کلی سینوس مطابق زیر است.

$$y = A \sin(B(x - C)) + D$$

با توجه به نمودار، دامنه نوسان $|A| = |-300| = 300$ است.

اینجا $B = 8$ است، پس دوره تناوب $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ است.

اینجا $C = 500$ است، یعنی تعداد اولیه آهو ها 500 است.

بخش 3.17 مسائل کار بردی معادله موج Applications of Wave Equation

مساله 1

سرعت یک موج در یک رسانگر 900 متر در ثانیه است. اگر 3000 موج در 2 دقیقه از یک نقطه به خصوص این رسانگر عبور کنند، مطلوب است طول موج آن.

پاسخ

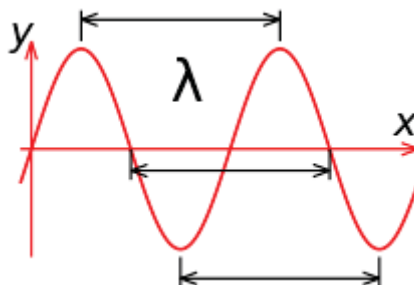
سرعت موج در رسانگر $v = 900 \frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$ است.

فرکانس موج عبارت است از تعداد موج هائی که در هر ثانیه عبور می کند.

$$n = \frac{\text{موج}}{\text{دقیقه}} = \frac{3000}{2 \times 60} = 25 \text{ Hz}$$

$$\lambda = \text{طول موج} = ?$$

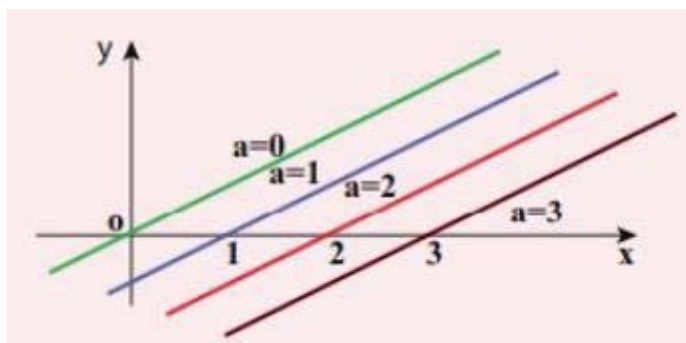
$$\lambda = \frac{v}{n} = \frac{900}{25} = 36 \text{ متر}$$



مساله 2

نمودار $y = x - a$ را برای مقادیر مختلف a رسم کنید.

پاسخ

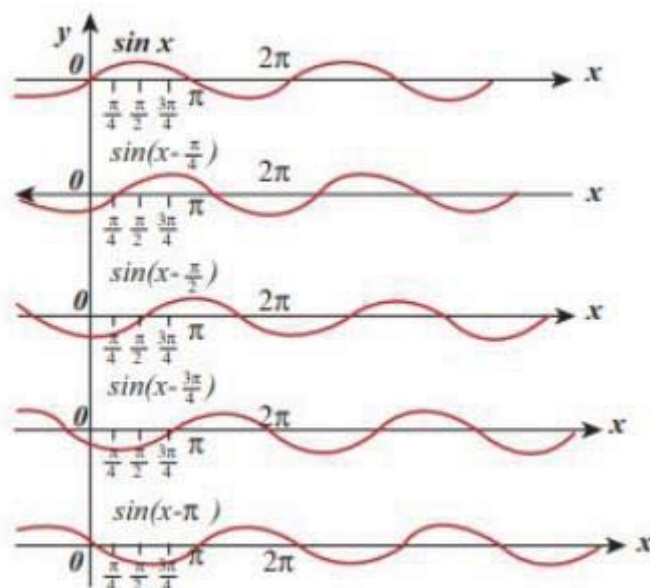


این یعنی، هنگامی که مقدار a افزایش می یابد، خط به طرف راست، تغییر مکان می دهد. برای $a = vy$ تابع $y = x - vt$ معادله دیفرانسیل را برقرار می کند. گرچه این تابع معادله دیفرانسیل را برقرار می کند، برای تمام مقادیر x و t صادق نیست. لذا نمایانگر یک موج نیست.

مساله 3

موج $y = \sin(x - a)$ برای $a = 0, a = \frac{\pi}{4}, a = \frac{\pi}{2}, a = \frac{3\pi}{2}, a = \pi$ چگونه به نظر می آید؟ این موج را رسم کنید.

پاسخ



از تصویر بالا، ملاحظه می کنیم که برای مقادیر گفته شده بالا، به طرف راست تغییر مکان می دهد. علاوه بر این، می توانیم $a = vt$ و $v = \frac{\pi}{4}$ در نظر بگیریم و نمودار را برای زمان های مختلف $t = 0, t = 1, t = 2, \dots$ نمودار را رسم کنیم. باز هم ملاحظه می کنیم $y = \sin(x - vt)$ به طرف راست جا بجا می شود. پس $y = \sin(x - vt)$ یک موج است که به طرف راست حرکت می کند. اگر داشته باشیم $y = \sin(x + vt)$ آنوقت، یک موج متحرک به طرف چپ است.

توضیح و یاد آوری

در فیزیک، عدد موج Wavenumber به صورت زیر تعریف می شود.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

اینجا، λ طول موج Wavelength است.

مساله 4

طول موج دو موج سینوسی $\lambda_1 = 1 \text{ m}$ و $\lambda_2 = 6 \text{ m}$ است. مطلوب است اعداد موج های مربوطه.

پاسخ

$$k_1 = \frac{2\pi}{1} = 6.28 \frac{\text{رادیان}}{\text{متر}}$$

$$k_2 = \frac{2\pi}{6} 1.05 \frac{\text{رادیان}}{\text{متر}}$$

مساله 5

یک برج تلفن، یک موج با فرکانس 900 MHz پخش می کند. مطلوب است طول موج های پخش شده از این برج تلفن. سرعت موج پخش شده از برج $c = 3 \times 10^8 \frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$ است.

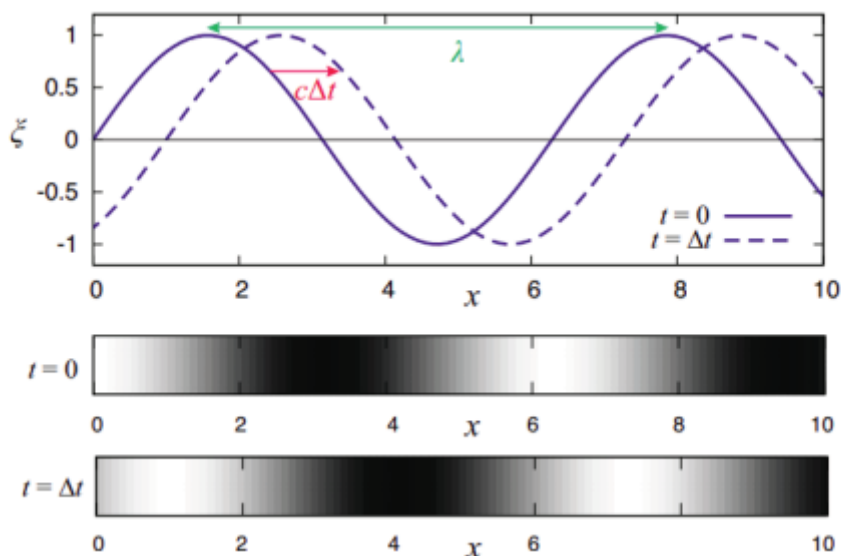
پاسخ

$$f = 900 \text{ MHz} = 900 \times 10^6 \text{ Hz}$$

$$c = 3 \times 10^8 \frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}} \text{ سرعت موج}$$

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{3 \times 10^8}{900 \times 10^6} = 0.33 \text{ متر}$$

تصویر زیر



مساله 6

یک موج دارای فرکانس 10 Hz و طول 30 m است. مطلوب است، سرعت این موج.

پاسخ

$$v = f \times \lambda$$

$$v = 10 \text{ Hz} \times 30 \text{ m} = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}} \frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$$

مساله 7

اگر فرکانس موج مساله 6 به 20 Hz تغییر پیدا کند ، مطلوب است طول موج.

پاسخ

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{300 \frac{m}{s}}{10 \text{ Hz}} = 30 \text{ m}$$

مساله 9

سرعت صوت $346 \frac{m}{s}$ است. اگر یک موج صوت با فرکانس 55 Hz جا بجا شود ، مطلوب است طول موج این صوت .

پاسخ

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{346 \frac{m}{s}}{55 \text{ Hz}} = 6.3 \text{ متر}$$

مساله 10

اگر صوت مساله 9 در آب حرکت کند با همان طول موج ، با چه فرکانسی این صوت در حرکت است؟
سرعت صوت در آب $350 \frac{m}{s}$ است.

پاسخ

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{350 \frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}}{6.3 \text{ متر}} = 55.55 \text{ Hz}$$

پس فرکانس این صوت 55.55 Hz یا $\frac{55.55}{\text{ثانیه}}$ تناوب است.

مساله 11

اگر سرعت یک موج $150 \frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$ ثانیه و فرکانس آن 2 Hz باشد ، مطلوب است طول موج آن.

پاسخ

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{150 \frac{m}{s}}{2 \text{ Hz}} = 75 \text{ متر}$$

مساله 12

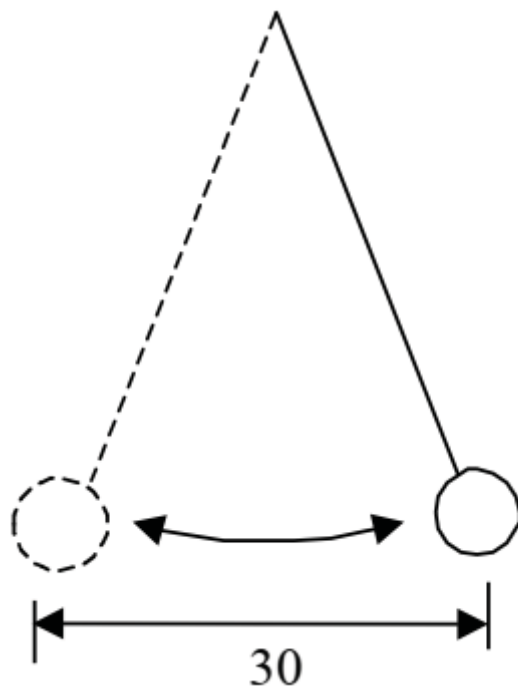
طول موج یک اقیانوس 10 m است. در هر ۲ ثانیه، یک موج از یک نقطه ثابت عبور می‌کند. مطلوب است سرعت این موج.

پاسخ

$$v = f \times \lambda = 2\text{ Hz} \times 10\text{ m} = 20 \frac{\text{متر}}{\text{ثانیه}}$$

مساله 13

پاندول ساعت پدر بزرگ در هر دقیقه ۲۰ تناوب یا دور گردش کامل دارد. مسافت رفت و برگشت پاندل ۳۰ سانتی متر است. یک تابع به صورت $f(t) = A \sin Bt$ بنویسید که حرکت پاندول را نشان بدهد. t تعداد دقیقه‌ها است.



پاسخ

رفت و برگشت پاندول ۳۰ سانتی متر است، پس دامنه نوسان $A = \frac{30}{2} = 15$ است و $B = \frac{1}{20}$ است. پس داریم.

$$f(t) = 15 \sin \left(\frac{2\pi}{\frac{1}{20}} \right) t = 15 \sin 40\pi = 15 \sin 124.66t$$

مساله 14

یک حرکت متناوب با معادله زیر بیان می شود

$$f(t) = 160 \sin(500\pi t - 100)$$

مطلوب است

الف - دوره تناوب

ب - فرکانس

ج - گام جابجایی

د - دامنه نوسان

پاسخ

الف

$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{500\pi} = \frac{1}{250} = 0.004$$

ب

$$\text{فرکانس} = \frac{1}{\text{دوره تناوب}} = \frac{1}{\frac{1}{250}} = 250$$

ج

$$\text{گام جابجایی} = \frac{C}{B} = \frac{100}{500\pi} = \frac{1}{5\pi} = 0.06366$$

د

$$\text{دامنه نوسان} = A = 160$$

مساله 15

یک موج صوتی از طریق حرکت سینوسی تعریف شده است که معادله آن به صورت زیر است.

$$f(t) = -230 \sin(30\pi t - 20)$$

مطلوب است

الف - دامنه نوسان

ب - دوره تناوب

ج - فرکانس

د - گام جابجایی

پاسخ

الف

$$\text{دامنه نوسان} = |A| = |-230| = 230$$

ب

$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{30\pi} = \frac{1}{15} = 0.0667$$

ج

$$\text{فرکانس} = \frac{1}{\text{دوره تناوب}} = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$$

د

$$\text{گام جابجائی} = \frac{C}{B} = \frac{20}{30\pi} = \frac{2}{3\pi} = 0.2122$$

مساله 16

یک ایستگاه رادیو FM با فرکانس 97 KHz یا $\frac{97000}{\text{ثانیه}}$ تناوب برنامه پخش می کند. دکمه صدای رادیو روی 5 است، یعنی دامنه نوسان صدا 5 است. یک تابع به صورت

$$f(t) = A \sin Bt$$

برای بیان امواج صوتی فرستاده شده بنویسید.

پاسخ

چون داریم

$$f = 97000$$

پس

$$p = \frac{1}{f} = \frac{1}{97000}$$

و

$$B = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\frac{1}{97000}} = 194000\pi = 609,469$$

$$A = 5$$

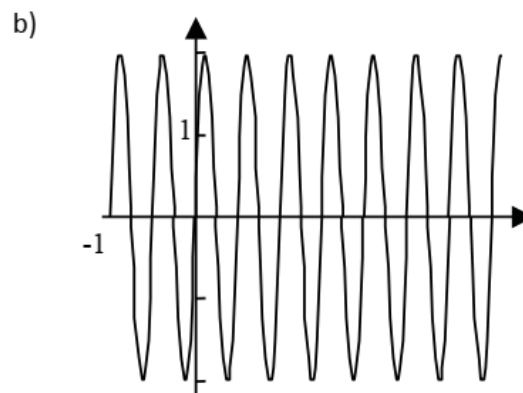
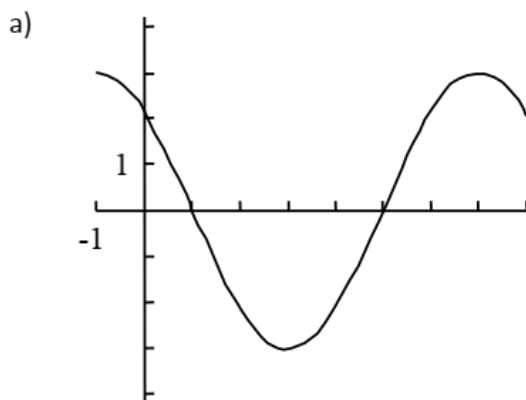
پس داریم.

$$f(t) = 5 \sin 194000\pi t = 5 \sin 609,469t$$

مساله 17

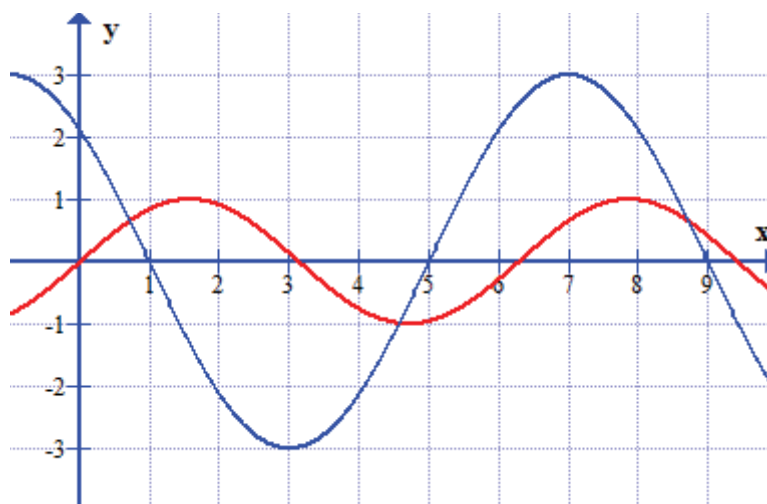
برای هر یک از نمودارهای زیر، مطلوب است

- 1 - دامنه نوسان
- 2 - دوره تناوب
- 3 - فرکانس
- 4 - گام جابجائی
- 5 - معادله



پاسخ
(a)

- 1) دامنه نوسان $A = 3$
- 2) دوره تناوب $p = 8$
- 3) فرکانس $f = \frac{1}{p} = \frac{1}{8}$
- 4) $1 = \text{گام جابجایی}$ یا $5 = \text{گام جابجایی}$
- 5) $f(x) = 3 \sin \frac{\pi}{4}(x - 5)$ یا $f(x) = 3 \sin \frac{\pi}{4}(x - 1)$



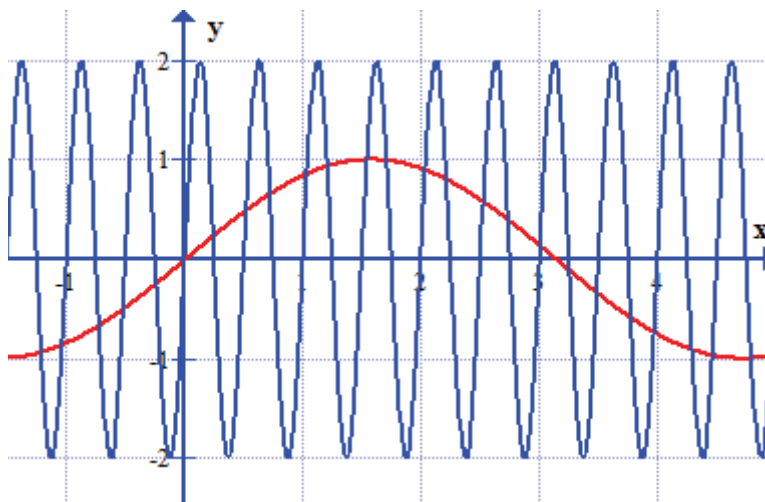
(b)

- 1) دامنه نوسان $A = 2$
- 2) دوره تناوب $p = \frac{1}{2}$

$$3) f = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \text{ فرکانس}$$

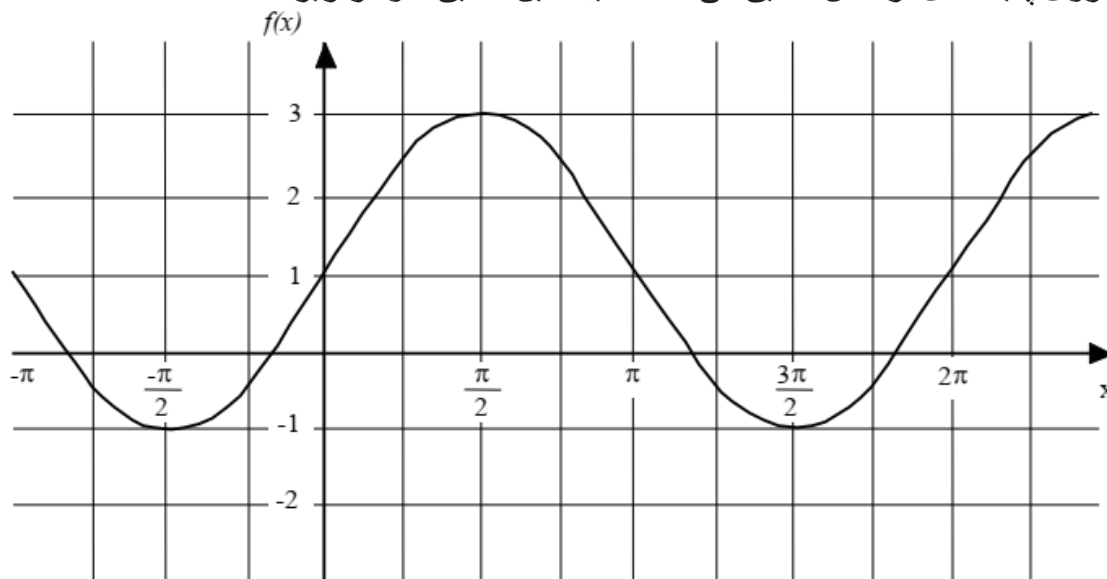
$$4) \text{ گام جابجایی} = 0$$

$$5) f(x) = 2 \sin(4\pi x)$$



مساله 18

پارسا روی پدیده های ارتعاش تحقیق می کند ، نتیجه این تحقیق نمودار زیر است.



مطلوب است یک تابع برای نمودار بالا.

پاسخ

$$f(x) = 2 \sin x + 1$$

بخش 3.18

Applications of Heat Equation مسائل کار بردی حرارت

مساله 1

مقدار 1.4 kJ انرژی به یک میله آلومینیم منتقل می شود. اگر حرارت از 20°C به 45°C برسد ،
مطلوب است جرم میله

$$c_{\text{آلومینیم}} = 0.900 \frac{\text{J}}{\text{g}^\circ \text{C}} = \text{حرارت مخصوص آلومیتیم}$$

پاسخ

معادله مقدار انرژی حرارتی لازم برای بالا بردن حرارت یک ماده .

$$Q = mc \times \Delta T$$

در فرمول بالا Q مجموع انرژی لازم بر حسب ژول **Joules**

حرف m جرم بر حسب گرم.

حرف c حرارت مخصوص یا حرارت ویژه ماده بر حسب ژول بر گرم ضرب در درجه سانتی گراد است ، یعنی

$$\left(\frac{\text{J}}{\text{g}^\circ \text{C}} \right)$$

و ΔT عبارت است از تغییر حرارت ، بر حسب سانتی گراد *Kelvins* یا *Celsius* اگر در مقیاس های دیگر باشد ، باید تبدیل کار.

برای حل این مساله ، یعنی پیدا کردن m فرمول بالا را باز نویسی می کنیم . ، یعنی

$$m = \frac{Q}{c \times \Delta T}$$

$$m = \frac{1400 \text{ J}}{0.900 \frac{\text{J}}{\text{g}^\circ \text{C}} \times 25^\circ \text{C}} = 62.22 \text{ گرم}$$

مساله 2

کدام یک از حالت های زیر قانون صفر ترمو دینامیک را تعریف می کند؟

$$H = U + PV$$

$$X = Y, Y = Z, X = Z$$

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{t}$$

$$\Delta U = Q - W$$

پاسخ

$$X = Y, Y = Z, X = Z$$

توضیح

قانون صفر ترمو دینامیک می گوید اگر شئی X با شئی Y در تعادل حرارتی باشد و شئی Y با شئی Z در تعادل حرارتی Thermal Equilibrium باشد، پس شئی X با شئی Z در تعادل حرارتی است.

مساله 3

یک ظرف محتوی 50 g آب، روی یک چراغ خوراک پزی قرار دارد. اگر 14 KJ انرژی به ظرف داده شود، و فرض کنید تمام این انرژی به آب منتقل شود، درجه حرارت آب چه مقدار افزایش می یابد؟ حرارت مخصوص آب $4.17 \frac{\text{J}}{\text{g}^\circ\text{C}}$ است.

پاسخ

$$Q = mc \Delta T$$

فرمول را باز نویسی می کنیم.

$$\Delta Y = \frac{Q}{mc} = \frac{14 \times 10^3 \text{ J}}{50 \text{ g} \times 4.17 \frac{\text{J}}{\text{g}^\circ\text{C}}} = 67.15 \text{ درجه سانتی گراد}$$

مساله 4

مقدار 5 g از یک جسم داریم. اگر 227.7 J انرژی به آن داده شود، حرارت آن 115° افزایش می یابد. مطلوب است حرارت مخصوص آن جسم.

پاسخ

$$Q = mc \Delta T$$

فرمول را باز نویسی می کنیم.

$$c = \frac{Q}{m\Delta T} = \frac{227.7 \text{ J}}{(5\text{ g})(115^\circ)} = 0.396 \frac{\text{J}}{\text{g}^\circ\text{C}}$$

یاد آوری

هنگامی که حرارت از یک ملکول به ملکول دیگر منتقل می شود، به آن رسانش حرارت گفته می شود.

معادله رسانش یا هدایت حرارت Thermal Conduction Equation

$$q = \frac{Q}{t} = K A \frac{T_h - T_c}{d}$$

در فرمول بالا K رسانش حرارتی، q میزان یا نرخ انتقال حرارت، t زمان انتقال، Q مقدار انتقال حرارت، A مساحت جسم، T_h درجه حرارت ناحیه گرم، T_c درجه حرارت ناحیه سرد.

مساله 5

یک قطعه یخ به ضخامت 10 cm با درجه حرارت 0°C روی یک تخته سنگ به مساحت 2400 cm^2 قرار دارد. تخته سنگ در معرض حرارت 100°C قرار می گیرد. مطلوب است رسانش حرارتی تخته سنگ، اگر 4000 g یخ در مدت یک ساعت ذوب شود. ضریب حرارتی یخ $80 \frac{\text{cal}}{\text{gm}}$ است.

پاسخ
داده ها

سانتی متر مربع $A = 2400 \text{ cm}^2$ مساحت تخته سنگ

سانتی متر $d = 10 \text{ cm}$ ضخامت یخ

ثانیه $t = 3600 \text{ s}$ = ساعت $t = 1 \text{ hr}$ زمان انتقال حرارت

کالری $Q = mL = 4000 \text{ g} \times 80 \frac{\text{cal}}{\text{g}} = 320000 \text{ cal}$ مقدار رسانش حرارت

کالری $q = \frac{Q}{t} = \frac{320000 \text{ cal}}{3600 \text{ s}} = 89 \frac{\text{cal}}{\text{s}}$ ثانیه نرخ رسانش حرارت

فرمول نرخ رسانش حرارت به صورت زیر است.

$$q = K A \frac{T_h - T_c}{d}$$

فرمول بالا را باز نویسی می کنیم.

$$K = \frac{q d}{A(T_h - T_c)} = \frac{89 \frac{\text{cal}}{\text{s}} \frac{\text{کالری}}{\text{ثانیه}} \times 10 \text{ cm} \text{ سانتی متر}}{2400 \text{ cm}^2 \text{ سانتی متر مربع} \times 100^\circ \text{ C} \text{ درجه سانتی گراد}} \\ = 3.7 \times 10^{-3} \frac{\text{cal}}{\text{cm s}^\circ \text{ C}} \frac{\text{کالری}}{\text{درجه سانتی گراد} \times \text{ثانیه} \times \text{سانتی متر}}$$

بخش 3.19 – تمرینات فصل سوم

مساله (1)

نشان دهید $u = \sin x \cosh y$ معادله دیفرانسیل زیر را برقرار می‌کند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

پاسخ

این معادله دیفرانسیل پاره ای، به معادله لاپلاس در فضای دو بعدی معروف است. این معادله، کاربرد های زیادی دارد از جمله در برق ساکن *Electrostatics*، جریان مایع *Fluid Flow*، هدایت حرارت *Heat Conduction*.

$$u = \sin x \cosh y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \sinh y$$

مجددا مشتق می‌گیریم.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x \cosh y \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin x \cosh y$$

پس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin x \cosh y + \sin x \cosh y = 0$$

لذا، تابع داده شده $u(x, y)$ در حقیقت یک جواب معادله دیفرانسیل پاره ای است.

مساله (2)

نشان دهید $u = e^{-2\pi^2 t} \sin \pi x$ یک جواب معادله دیفرانسیل زیر است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

پاسخ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -2\pi^2 e^{-2\pi^2 t} \sin \pi x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \pi e^{-2\pi^2 t} \cos \pi x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\pi^2 e^{-2\pi^2 t} \sin \pi x$$

پس،

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

است.

در حقیقت معادله دیفرانسیل پاره ای بالا ، شکل کلی زیر را دارد.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k} \frac{\partial u}{\partial t}$$

اینجا ، k یک عدد ثابت مثبت است. این معادله را

معادله هدایت حرارت یک بعدی One-Dimensional Heat Conduction Equation

و یا **معادله انتشار Diffusion** می گویند. در یک زمینه انتشار حرارت ، متغیر وابسته u نمایش دمای $u(x, t)$ است.

سومین معادله دیفرانسیل پاره ای مهم که شامل دو متغیر مستقل است بنام

معادله موج یک بعدی One-Dimensional Wave Equation نامیده می شود. شکل کلی این معادله به صورت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

است. توجه داشته باشید که هر دو مشتق های پاره ای در معادله موج ، مرتبه دوم هستند ، در صورتی که در معادله انتشار حرارت مشتق زمان ، مرتبه اول است.

مساله (3)

نشان دهید اگر a یک عدد ثابت باشد ، پس $u(x, t) = \sin(at) \cos(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل زیر است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

پاسخ

چون a یک عدد ثابت است ، مشتق های پاره ای نسبت به t به صورت زیر هستند.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= a \cos(at) \cos(x) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -a^2 \sin(at) \cos(x) \end{aligned}$$

همچنین

$$u_x = -\sin(at) \sin(x) \quad \text{و} \quad u_{xx} = -\sin(at) \cos(x)$$

پس

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a^2 \sin(at) \cos(x)$$

لذا

$$u(x, t) = \sin(at) \cos(x)$$

یک جواب

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

است.

مساله (4)

مطلوب است مقدار حرارت لازم تا یک کیلو گرم آهن از $250^\circ C$ به $650^\circ C$ برسد.

پاسخ

کیلو گرم $m = 1$

حرارت مخصوص آهن $C = 0.45 J_g - 1 C$

اختلاف درجه حرارت $\Delta T = 700^\circ C - 250^\circ C$

$\Delta T = 450^\circ C$

حالا فرمول حرارت را بکار می بریم.

$$c = \frac{Q}{m\Delta T}$$

باز نویسی می کنیم.

$$Q = mc\Delta T$$

$$Q = 1 \times 0.45 \times 10^3 \times 450$$

$$= 20.25 J$$

مساله (5)

مطلوب است جواب های u معادله دیفرانسیل پاره ای زیر.

$$u_{xx} - u = 0$$

پاسخ

چون مشتق های y وجود ندارد ، می توانیم این معادله دیفرانسیل پاره ای را مانند

$$u'' - u = 0$$

حل کنیم. بر اساس آنچه در معادلات دیفرانسیل معمولی دیدیم

$$u = Ae^x + Be^{-x}$$

اینجا A و B اعداد ثابت هستند. یا A و B ممکن است تابع های y باشند. بطوری که جواب به صورت زیر می شود.

$$u(x, y) = A(y)e^x + B(y)e^{-x}$$

اینجا A و B تابع های اختیاری هستند. پس تعداد زیادی جواب خواهیم داشت. می توانید با مشتق گرفتن نتیجه ، چک کنید.

مساله 6

معادله دیفرانسیل پاره ای زیر را حل کنید.

$$u_{xy} = -u_x$$

پاسخ

فرض می کنیم $u_x = p$ باشد ، پس

$$p_y = -p$$

$$\frac{p_y}{p} = -1$$

$$\ln|p| = -y + \tilde{c}(x)$$

$$p = c(x)e^{-y}$$

با انتگرال گرفتن بر حسب x داریم.

$$u(x, y) = f(x)e^{-y} + g(y)$$

اینجا

$$f(x) = \int c(x)dx$$

اینجا $f(x)$ و $g(x)$ اختیاری هستند.

مساله 7

یک موج روی یک ریسمان محکم کشیده شده با تابع موج زیر مدل سازی شده است.

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) = 0.2 \text{ m} \sin(6.28 \text{ m}^{-1}x - 1.57 \text{ s}^{-1}t).$$

مطلوب است دامنه نوسان ، طول موج و سرعت موج.

پاسخ

الف — دامنه نوسان یا Amplitude که ما آنرا با A نشان می دهیم، مستقیماً از معادله موج بدست می آید.

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t) = 0.2 \text{ m} \sin(6.28 \text{ m}^{-1}x - 1.57 \text{ s}^{-1}t).$$

پس

$$A = 0.2 \text{ متر}$$

ب — شماره موج که همان k است را می توان برای پیدا کردن طول موج استفاده کرد. پس

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{6.28 \text{ m}^{-1}} = 1.0 \text{ m}.$$

ج - دوره تناوب موج را می توان با استفاده از فرکانس زاویه ای بدست آورد. ω فرکانس زاویه ای است.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

پس دوره تناوب T داریم.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1.57 \text{ s}^{-1}} = 4 \text{ s}.$$

پس دوره تناوب 4 ثانیه است.

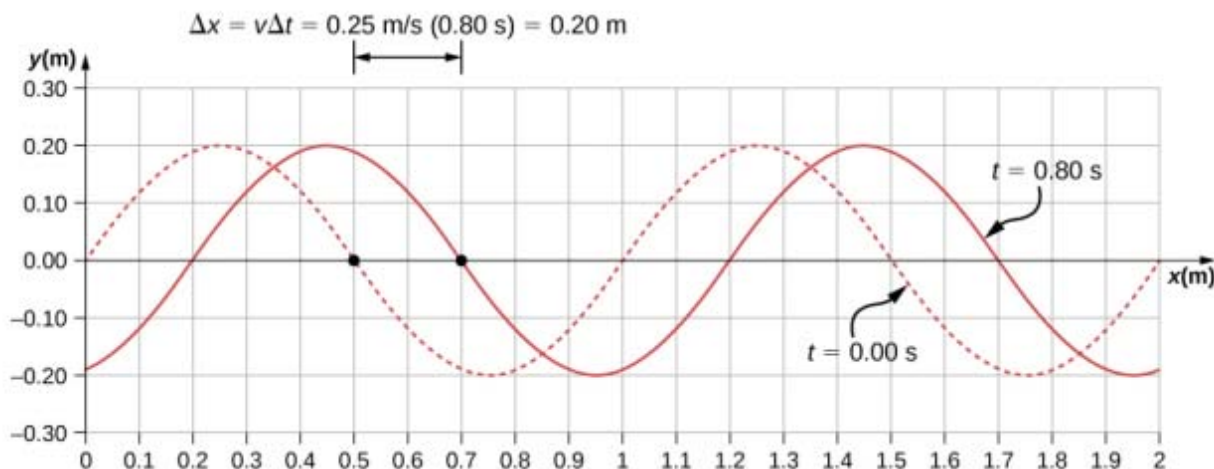
د - سرعت موج را می توان با استفاده از شماره موج و فرکانس زاویه ای پیدا کرد. جهت موج را می توان بوسیله علامت $kx \pm \omega t$ پیدا کرد. علامت منفی یعنی موج در جهت مثبت x حرکت می کند. پس

$$|v| = \frac{\omega}{k} = \frac{1.57 \text{ s}^{-1}}{6.28 \text{ m}^{-1}} = 0.25 \text{ m/s}.$$

پس سرعت موج 0.25 متر در ثانیه است.

نکته مهم

تمام مشخصات موج ، در تابع موج وجود دارند. سرعت موج عبارت است از سرعت موج در جهت موازی با حرکت موج. با نقطه گذاری در زمان های $t = 0.00$ و $t = 0.80$ ثانیه را می توان سرعت موج را به تصویر کشید. تصویر زیر



مسئله 8

مطلوب است یک جواب برای معادله موج زیر.

$$u_{tt} - 4u_{xx} = \sin t + x^{2000}$$

پاسخ

از ما خواسته شده است که یک جواب پیدا کنیم ، نه یک جواب کلی.

بر اساس اصل بر هم نهی می توان u را به صورت $u = v + w$ نوشت بطوری که v و w جواب های

$$v_{tt} - 4v_{xx} = \sin t, \quad (1.52)$$

$$w_{tt} - 4w_{xx} = x^{2000}. \quad (1.53)$$

باشند. به این طریق جواب های هر یک از این معادله ها را به اسانی می توان بدست آورد.

$$v(x, t) = -\sin t, \quad w(x, t) = -\frac{1}{4 \times 2001 \times 2002} x^{2002}.$$

پس

$$u(x, t) = -\sin t - \frac{1}{4 \times 2001 \times 2002} x^{2002}.$$

مساله 9

در صورت انتخاب مناسب a, b

نشان دهید که معادله زیر یک جواب به صورت $u(x, y) = f(ax + by)$ دارد. اعداد ثابت را پیدا کنید.

$$u_x + 3u_y = 0.$$

پاسخ

معادله را به دو صورت زیر تفکیک می کنیم.

$$u_x = af', \quad u_y = bf'.$$

پس a و b هر عدد ثابتی می توانند باشد. مثلاً

$$a + 3b = 0.$$

مساله 10

نشان دهید یک جواب منحصر به فرد برای سیستم زیر وجود دارد.

$$u_x = 3x^2y + y,$$

$$u_y = x^3 + x,$$

پاسخ

اولین معادله را نسبت به x انتگرال می گیریم.

$$u(x, y) = x^3y + xy + F(y)$$

باید $F(y)$ را پیدا کنیم. این جواب را نسبت به y مشتق می گیریم ، پس داریم.

$$[u(x, y)]' = 3x + x$$

پس نتیجه می گیریم F یک عدد ثابت است. در نهایت شرط اولیه $u(0,0) = 0$ بکار می بریم پس داریم

$$F(y) = 0$$

مساله 11

معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

این معادله را در مختصات $s = x, t = x - y$ بنویسید.

پاسخ

جانشین می کنیم

$$v(s, t) = u(x, y)$$

با استفاده از قنون زنجیره ای داریم.

$$u_x = v_s + v_t \quad u_y = -v_t,$$

و

$$u_{xx} = v_{ss} + v_{tt} + 2v_{st} \quad u_{xy} = -v_{tt} - v_{st} \quad u_{yy} = v_{tt}.$$

پس

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = v_{ss}.$$

و معادله می شود.

$$v_{ss} = 0.$$

مساله 12

مطلوب است معادله دیفرانسیل پاره ای زیر.

$$c = f(x^2 - y^2)$$

پاسخ

یک مرتبه نسبت به x و یک مرتبه نسبت به y مشتق می گیریم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot f'(x^2 - y^2) \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \cdot f'(x^2 - y^2) \quad \dots (2)$$

شماره (1) را بر شماره (2) تقسیم می کنیم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} / \frac{\partial u}{\partial y} = -x/y$$

در نهایت داریم.

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

مساله 13

معادله دیفرانسیل زیر حل کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x \quad \text{یا} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = x \quad (1.1)$$

پاسخ

در معادله دیفرانسیل بالا چون یک مشتق نسبت به x وجود دارد، می توانیم معادله دیفرانسیل را مانند یک معادله دیفرانسیل معمولی عمل کنیم. و دومین متغیر را یک پارامتر یا عدد ثابت در نظر بگیریم. پس داریم.

$$u(x, t) = \frac{x^2}{2} = C(t)$$

برای هر تابع مشتق پذیر $C(t)$ حالا می توانیم چک کنیم که

$$u(x, t) = \frac{x^2}{2} + C(t)$$

در حقیقت یک جواب معادله دیفرانسیل است. برای این کار، ابتدا $u(x, t)$ را نسبت به x مشتق می گیریم، پس داریم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + 0$$

این را در معادله دیفرانسیل می گذاریم، پس داریم.

$$\text{طرف راست} = \frac{\partial u}{\partial x} = x + 0 = \text{طرف چپ}$$

پس نشان دادیم

$$u(x, t) = \frac{x^2}{2} + C(t)$$

یک جواب معادله دیفرانسیل است، برای هر تابع مشتق پذیر $C(t)$.

مساله 14

چک کنید که $u(x, t) = f(x - at)$ یک جواب معادله زیر است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.2)$$

اینجا، a یک عدد ثابت است و $f(s)$ یک تابع مشتق پذیر اختیاری است.

پاسخ

ابتدا، با استفاده از قانون زنجیره ای از $u(x, t)$ نسبت به x مشتق می گیریم. پس داریم.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - at)$$

توجه کنید که چون $f(s)$ یک تابع یک متغیره است، می توانیم نماد f' را بکار ببریم. به همین طریق با استفاده از قانون زنجیره ای از $u(x, t)$ نسبت به t مشتق می گیریم. پس داریم.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'(x - at)(-a)$$

این دو مشتق های پاره ای را یعنی

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - at) \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = f'(x - at)(-a)$$

در معادله دیفرانسیل پاره ای می گذاریم، پس داریم.

$$\text{طرف راست} = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f'(x - at) + f'(x - at)(-a) = 0 = \text{طرف چپ}$$

پس نشان دادیم $u(x, t) = f(x - at)$ یک جواب معادله دیفرانسیل پاره ای است.

مساله 15

چک کنید که

$$u(x, y) = x^2 + y^2 + C_1x + C_2y + C_3$$

یک جواب معادله دیفرانسیل پاره ای زیر است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4, \quad (1.3)$$

اینجا C_1, C_2, C_3 اعداد ثابت هستند.

پاسخ

ابتدا $u(x, y)$ را نسبت به x و y دو مرتبه مشتق می گیریم. پس داریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + C_1, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + C_2, \quad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2.$$

در معادله دیفرانسیل پاره ای می گذاریم. پس داریم.

$$\text{طرف راست} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 + 2 = 4 = \text{طرف چپ}$$

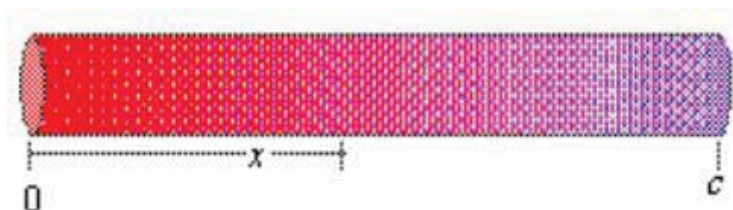
پس نشان دادیم

$$u(x, y) = x^2 + y^2 + C_1x + C_2y + C_3$$

یک جواب مشتق پاره ای است.

یاد آوری

اگر $u(x, t)$ حرارت یک میله فلزی در فاصله x از انتهای میله باشد ،



پس تحت شرایط مناسب ، $u(x, t)$ یک جواب معادله حرارت زیر است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

اینجا k یک عدد ثابت است.

مثال دیگر

اگر $u(x, t)$ جابجایی یک ریسمان در زمان t باشد ، پس ارتعاش ریسمان احتمالا معادله موج یک بعدی زیر را برقرار می کند. a یک عدد ثابت است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

مساله 16

نشان دهید اگر a یک عدد ثابت باشد ، پس $u(x, y) = \sin(at) \cos(x)$ یک جواب معادله زیر است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

پاسخ

چون a یک عدد ثابت است ، مشتق های پاره ای نسبت به t به صورت های زیر است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \cos(at) \cos(x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a^2 \sin(at) \sin(x) \quad (3)$$

علاوه بر این ،

$$u_x = -\sin(at) \sin(x) \quad \text{و} \quad u_{xx} = -\sin(at) \cos(x)$$

بطوری که

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -a^2 \sin(at) \cos(x) \quad (4)$$

چون (3) و (4) یکی هستند ، پس

$$u(x, y) = \sin(at) \cos(x)$$

یک جواب (2) است.

مساله 17

نشان دهید $u(x, t) = e^y \sin(x)$ یک جواب معادله لاپلاس زیر است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

پاسخ

با $u_x = e^y \cos(x)$ و $u_{xx} = -e^y \sin(x)$ شروع می کنیم.

علاوه بر این

$$u_y = e^y \sin(x) \quad y_{yy} = e^y \sin(x)$$

بطوری که

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^y \sin(x) + e^y \sin(x) = 0$$

مساله 18

برای عدد ثابت k جواب معادله دیفرانسیل زیر را از طریق تفکیک ، پیدا کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

پاسخ

برای این کار عمل جانشینی زیر را انجام می دهیم.

$$u(x, t) = X(x) T(t)$$

پس داریم.

$$\frac{\partial}{\partial t} (X(x) T(t)) = k \frac{\partial^2}{\partial x^2} (X(x) T(t))$$

بعد از محاسبه مشتق ها داریم.

$$X(x) T'(t) = kT(t) X''(x)$$

برای تفکیک متغیرها، طرفین را بر $kX(x)T(t)$ تقسیم می‌کنیم.

$$\frac{X(x) T'(t)}{kX(x) T(t)} = \frac{kT(t) X''(x)}{kX(x) T(t)}$$

به صورت زیر ساده می‌شود.

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

پس یک λ وجود دارد بطوری که داریم

$$\frac{T'}{kT} = \lambda \quad \text{و} \quad \frac{X''}{X} = -\lambda$$

این‌ها به معادله‌های دیفرانسیل معمولی زیر تبدیل می‌شوند.

$$T'' = \lambda kT \quad \text{و} \quad X'' = -\lambda X$$

جواب اولی، یک تابع نمایی به صورت زیر است.

$$T(t) = Pe^{\lambda kt}$$

اگر $\lambda > 0$ باشد، پس حرارت به طرف ∞ می‌رود، که از نظر فیزیکی امکان پذیر نیست. پس فرض می‌کنیم λ منفی باشد، یعنی می‌توان گفت $\lambda = -\omega^2$ برای یک عدد ω در نتیجه داریم

$$X'' = -\omega^2 X \quad \text{یا} \quad X'' + \omega^2 X = 0$$

معادله $X'' + \omega^2 X = 0$ نوسانگر هارمونیک است، که دارای جواب زیر است.

$$X(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$$

در نتیجه، جواب تفکیک یافته برای معادله حرارت به صورت زیر است.

$$u(x, t) = X(x) T(t) = Pe^{-\omega^2 kt} (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$$

مساله 19

مطلوب است جواب تفکیکی معادله زیر.

$$F_x + 2xF_y = 0.$$

پاسخ

شکل تفکیک یافته

$$F(x, y) = X(x) Y(y)$$

منتج به

$$\frac{\partial}{\partial x} (X(x) Y(y)) + 2x \frac{\partial}{\partial y} (X(x) Y(y)) = 0$$

می شود ، که خود به صورت زیر در می آید.

$$X'(x) Y(y) = -2x X(x) Y'(y)$$

طرفین را بر $X(x)Y(y)$ تقسیم می کنیم ، در نتیجه داریم.

$$\frac{X'(x)}{-2xX(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)}$$

اما ، یک تابع x می تواند مساوی یک تابع y برای تمام x ها و y ها باشد ، فقط اگر هر دو تابع اعداد ثابت باشند. پس یک عدد ثابت λ وجود دارد ، بطوری که

$$\frac{X'(x)}{-2xX(x)} = \lambda$$

و

$$\frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda$$

باشد. در نتیجه $Y'(y) = \lambda Y(y)$ که این دلالت می کند $Y(y) = C_1 e^{\lambda y}$. اما $X'(x) = \lambda x X(x)$ است ، بطوری که تفکیک متغیر ها نتیجه زیر را می دهد.

$$\frac{dX}{dx} = -2\lambda x X \quad \Rightarrow \quad \frac{dX}{X} = \lambda x dx$$

پس

$$\int \frac{dX}{X} = \lambda \int x dx$$

که منجر به

$$\ln |X| = -\lambda x^2 + C_2$$

$$|X| = e^{-\lambda x^2 + C_2}$$

$$X(x) = \pm e^{C_2} e^{-\lambda x^2}$$

می شود. پس اگر فرض کنیم $C_3 = \pm e^{C_2}$ باشد ، پس

$$Y(y) = C_3 e^{\left(\frac{x^2}{2}\right)}$$

و جواب تفکیک یافته به صورت زیر است.

$$F(x, y) = C e^{-\lambda x^2} e^{\lambda y} = C e^{\lambda(y-x^2)}$$

اینجا $C = C_1 C_2$ یک عدد ثابت است.

نکته مهم

جواب مساله کوشی برای معادله موج زیر

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

بوسیله فرمول دالامبر داده می شود.

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(f(x - at) + f(x + ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-at}^{x+ct} g(s) ds.$$

این فرمول ها را بخاطر بسپارید.

مساله 20

مساله کوشی Cauchy برای معادله موج زیر حل کنید. کوشی بر وزن لوزی

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin x & |x| \leq \pi \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

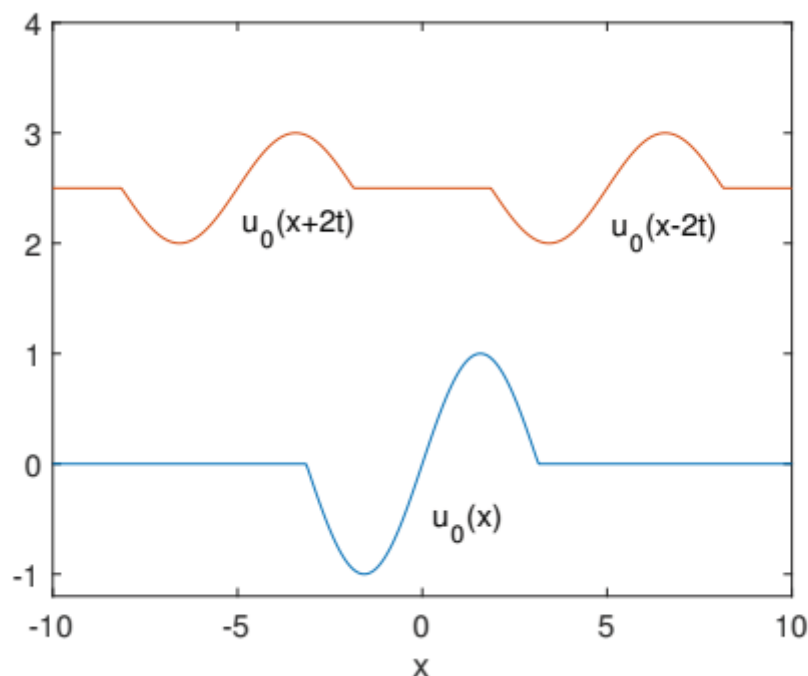
پاسخ

بطور ساده ، جواب به صورت زیر است.

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (f(x - 2t) + f(x + 2t)).$$

اگر t به اندازه کافی بزرگ باشد ، پس ناحیه های غیر صفر $f(x - 2t)$ و $f(x + 2t)$ تداخل نمی کنند. بطور وضوح می بینیم که یک موج سینوسی در دامنه $(-\pi, \pi)$ به طرف راست و چپ پراکنده می شود با نصف مقدار. نمودار در زیر ملاحظه می کنید. $f(x - ct)$ را موج راست رونده و $f(x + ct)$ را موج چپ رونده می گویند.

تصویر زیر نمودار شرط اولیه $u_0(x)$ و یک جواب $u(x, t)$ در زمان $t = 2.5$ به طرف جواب موج با سرعت $c = 2$



مساله 21

مساله کوشی برای معادله موج زیر حل کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(x, 0) = \sin x \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = xe^{-x^2}.$$

پاسخ

بر اساس فرمول دالامبر ، جواب به اورت زیر است.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left(\sin(x - \sqrt{2}t) + \sin(x + \sqrt{2}t) \right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{x-\sqrt{2}t}^{x+\sqrt{2}t} se^{-s^2} ds \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin(x - \sqrt{2}t) + \sin(x + \sqrt{2}t) \right) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(e^{-(x-\sqrt{2}t)^2} - e^{-(x+\sqrt{2}t)^2} \right). \end{aligned}$$

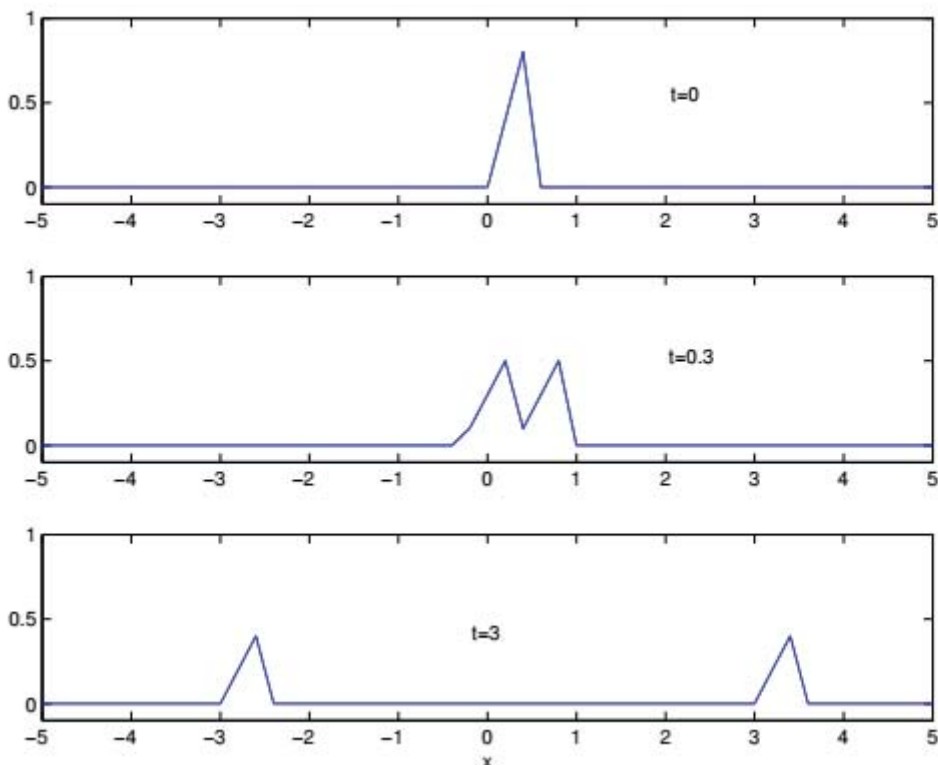
مساله 22

نمودار جواب مساله کوشی برای معادله موج برای t بزرگ ، رسم کنید.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u(x, 0) \begin{cases} 2x & \text{اگر } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \text{اگر } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

در تصویر زیر ، نمودار جواب در زمان های $t = 0$ ، $t = 0.3$ ، $t = 5$ نشان می دهیم.



مساله 23

فرض کنید $f(x) = 1$ و $g(x) = \sin x$ باشد. آیا این دو تابع در $(0, 2\pi)$ متعامد هستند؟

پاسخ

ضرب داخلی را چک می کنیم.

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) \bar{g}(x) dx = \int_0^{2\pi} \sin x dx = 0.$$

چون انتگرال حاصلضرب این دو در بازه داده شده مساوی صفر است ، پس این دو تابع در بازه $(0, 2\pi)$ متعامد هستند ، اما در بازه $(0, \pi)$ متعامد نیستند. در هر بازه بطول 2π متعامد هستند.

مساله 24

جواب کلی معادله دیفرانسیل پاره ای زیر را پیدا کنید.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

پاسخ

الف - فرض می‌کنیم $u(x, y) = G(x)H(y)$ باشد. یعنی می‌توان u را به صورت حاصلضرب دو تابع نوشت. یکی وابسته به x و دیگری وابسته به y . در نتیجه داریم.

$$H \frac{dG}{dx} + G \frac{dH}{dy} = 0 \quad (1)$$

ب - باز نویسی می‌کنیم، بطوری که تابع x یک طرف و تابع y در طرف دیگر قرار گیرد. برای این کار، شماره (1) را در $\frac{1}{GH}$ ضرب می‌کنیم.

$$\Rightarrow \frac{1}{G} \frac{dG}{dx} = \frac{-1}{H} \frac{dH}{dy} \quad (2)$$

ج - چون سمت چپ فقط وابسته به x است و سمت راست فقط وابسته به y است، معادله در صورتی برقرار است که

یک عدد ثابت = سمت راست = سمت چپ

باشد.

پس معادله (2) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dx} = \frac{-1}{H} \frac{dH}{dy} = c$$

تعجب نکنید. تاکنون λ بکار می‌بردیم. حالا c بکار می‌بریم. شما هر چه دوست دارید بکار برید. حالا معادله دیفرانسیل پاره ای به دو معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شد.

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dx} = c \quad (3)$$

$$\frac{1}{H} \frac{dH}{dy} = -c \quad (4)$$

د - u را باز نویسی می‌کنیم.

$$u(x, y) = e^{(cx-cy)}$$

می‌توان به اسانی نشان داد که این، معادله دیفرانسیل پاره ای اصلی را برقرار می‌کند.

نکته یاد آوری

معادله دیفرانسیل معمولی

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

جواب کلی زیر را دارد.

$$y = Ae^{kx}$$

اینجا A, k اعداد ثابت هستند.

مساله 25

مطلوب است y به صورت یک تابع x اگر داشته باشیم.

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

و شرط اولیه $y(0) = 3$

پاسخ

اینجا $k = -2$ پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = Ae^{-2x}$$

شرط اولیه را بکار می‌بریم. $x = 0$ و $y = 3$ پس جواب مساله با شرط اولیه داده شده به صورت زیر است.

$$y = 3e^{-2x}$$

نکته یاد آوری

یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم به صورت زیر است.

$$a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad (1)$$

اینجا a, b, c اعداد ثابت هستند. معادله کمکی به صورت زیر است.

$$am^2 + bm + c = 0 \quad (2)$$

که با درج جواب آزمایشی $y = e^{mx}$ در (1) بدست آمد.

جواب کلی (1) بستگی به حل یا ریشه های معادله درجه دوم (2) دارد.

الف - اگر (2) دو ریشه حقیقی متمایز $m = m_1$ و $m = m_2$ باشد، پس

$$y = Ae^{m_1x} + Be^{m_2x}$$

است.

ب - اگر (2) دارای دو ریشه مضاعف حقیقی $m = m_1$ باشد، پس

$$y = (A + Bx)e^{m_1x}$$

است.

ج - اگر (2) ریشه های مختلط $m = a \pm j\beta$ باشد، پس

$$y = e^{ax}(A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

است.

مساله 26

جواب کلی معادله زیر را پیدا کنید.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$$

معادله کمکی $m^2 - 4 = 0$ است. حالا، ریشه های معادله کمکی را پیدا می‌کنیم. $m = \pm 2$

در نهایت ، جواب کلی معادله دیفرانسیل معمولی را می نویسیم.
 $y = Ae^{2x} + Be^{-2x}$

مساله 27

جواب کلی معادله زیر را پیدا کنید.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$$

پاسخ

معادله کمکی به صورت زیر است.

$$m^2 + 9 = 0$$

ریشه های این معادله

$$m = \pm 3i$$

است. پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = A \cos 3x + B \sin 3x$$

نکته یاد آوری

جواب کلی

$$\frac{d^2y}{dx^2} - n^2y = 0$$

به صورت زیر است.

$$y = Ae^{nx} + Be^{-nx}$$

یا معادل آن در تابع های هایپر بالیک

$$y = C \cosh nx + D \sinh nx$$

جواب کلی

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$$

به صورت زیر است.

$$y = A \cos nx + B \sin nx$$

مساله 28

نشان دهید

$$u = \sin x \cosh y$$

معادله دیفرانسیل پاره ای زیر را برقرار می کند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

پاسخ

این معادله لاپلاس در فضای دو بعدی است کهکار برد های بی در الکتریسته ساکن ، جریان حرارت و جریان مایعات دارد.

$$u = \sin x \cosh y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x \cosh y$$

و

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin x \sinh y$$

با مشتق گیری مجدد ، داریم.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x \cosh y$$

و

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin x \cosh y$$

پس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\sin x \cosh y + \sin x \cosh y = 0$$

لذا تابع داده شده در حقیقت یک جواب معادله دیفرانسیل پاره ای است.

مساله 29

نشان دهید

$$u = e^{-2\pi^2 t} \sin \pi x$$

یک جواب معادله دیفرانسیل پاره ای زیر است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

پاسخ

ابتدا

$$\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{و} \quad \frac{\partial u}{\partial x}$$

پیدا می کنیم. پس داریم.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -2\pi^2 e^{-2\pi^2 t} \sin \pi x$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \pi e^{-2\pi^2 t} \cos \pi x$$

حالا $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ را پیدا می کنیم. پس داریم.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\pi^2 e^{-2\pi^2 t} \sin \pi x,$$

پس در حقیقت

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t}$$

است. معادله دیفرانسیل بالا یک معادله یک بعدی هدایت حرارت است. یا معادله انتشار

One-Dimensional Heat Conduction

یا

Diffusion Equation

مساله 30

الف - نشان دهید تابع زیر ، معادله یک بعدی موج را برقرار می کنند.

$$u(x, t) = u_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right)$$

در فرمول بالا u_0, l, c اعداد ثابت هستند.

ب - نشان دهید شرایط مرزی زیر برقرار است.

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0.$$

ج - نشان دهید شرایط اولیه زیر برقرار است.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

و

$$u(x, 0) = u_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right).$$

د - تفسیر فیزیکی این مساله را بیان کنید.

پاسخ

الف

یاد آوری ، معادله یک بعدی موج به صورت زیر است.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

یا

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

پس مشتق های لازم را محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= u_0 \frac{\pi}{\ell} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right) & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -u_0 \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -u_0 \left(\frac{\pi c}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right) & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -u_0 \left(\frac{\pi c}{\ell}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right)\end{aligned}$$

می بینیم که

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

پس نشان دادیم.

ب- در $u(x, t)$ داده شده $x = 0$ قرار می دهیم و t را اختیاری، پس

$$u(x, 0) = u_0 \sin 0 \cos\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right) = 0$$

است، برای تمام t ها.

به همین طریق $x = l$ و t اختیاری، داریم.

$$u(\ell, 0) = u_0 \sin \pi \cos\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right) = 0$$

برای تمام t ها.

ج- ابتدا $\frac{\partial u}{\partial t}$ را برای x و t محاسبه می کنیم.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u_0 \left(\frac{\pi c}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi ct}{\ell}\right)$$

حالا، $t = 0$ و x را اختیاری قرار می دهیم.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -u_0 \left(\frac{\pi c}{\ell}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \sin 0 = 0.$$

همچنین، $t = 0$ در $u(x, t)$ قرار می دهیم. پس داریم.

$$u(x, 0) = u_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \cos 0 = u_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right).$$

د- از طریق ریاضی، نشان دادیم $u(x, t)$ معادله یک بعدی موج را برقرار می کند. همچنین دو شرایط داده شده.

یک تفسیر فیزیکی این مسئله این است که $u(x, t)$ نمایش جابجایی یک ریسمان کشیده شده بین دو نقطه $x = 0$ و $x = l$ است. واضح است که مکان هر نقطه P روی ریسمان مرتعش بستگی به فاصله آن نقطه از انتها در زمان t دارد. شرایط مرزی (b) نشان می دهد که ریسمان در دو انتها، ثابت است.

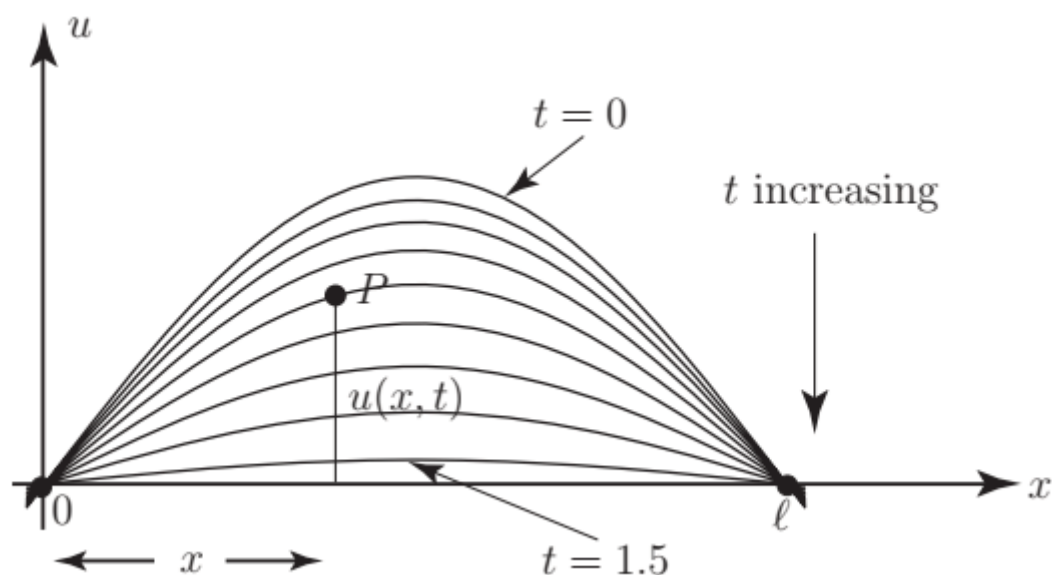
شرط اولیه

$$u(x, 0) = u_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

جا بجایی ریسمان را در $t = 0$ نشان می دهد.
شرط اولیه

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0$$

می گویند ریسمان در $t = 0$ در حالت سکون است.



در تصویر بالا t increasing یعنی t در حال افزایش است.

سری فوریه زیاد برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و پاره ای بکار می رود ، اینجا چند نمونه می آوریم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad \begin{array}{c} \text{Diagram of a unit circle in the xy-plane with radius } r=1 \text{ and angle } \phi. \text{ The circle is labeled } x^2 + y^2 \leq 1. \text{ The axes are labeled } x \text{ and } y. \text{ The angle } \phi \text{ is shown between the positive } x \text{-axis and the radius } r. \text{ The point } (x, y) \text{ is on the circle.} \end{array} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

مثال یاد آوری

مساله 31

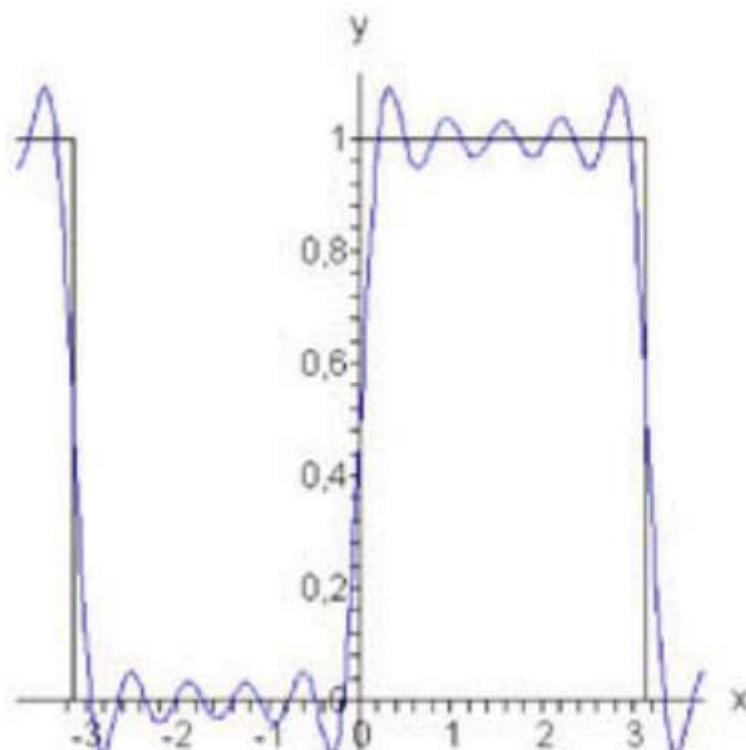
مطلوب است سری فوریه برای موج دندانه اره تعریف شده در بازه $[-\pi, \pi]$ با دور تناوب 2π .

پاسخ

ضریب های فوریه برای موج دندانه اره محاسبه می کنیم. چون این تابع فرد است، پس

$$a_0 = a_n = 0$$

است. تصویر زیر.



حالا، ضریب b_n را محاسبه می کنیم.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx$$

برای محاسبه انتگرال آخر، از طریق انتگرال گیری جز بجز، عمل می کنیم. یعنی

$$\int_{-\pi}^{\pi} u \, dv = (uv) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} u \, du$$

فرض می کنیم $u = x$ ، $dv = \sin nx \, dx$ باشد، پس

$$du = dx, v = \int \sin nx \, dx = -\frac{\cos nx}{n}$$

است. لذا انتگرال می شود.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\left(-\frac{x \cos nx}{n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) dx \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{n\pi} \left[-2\pi \cos n\pi + \left(\frac{\sin nx}{n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] \\
 &= \frac{1}{n\pi} \left[-2\pi \cos n\pi + \frac{1}{n} (\sin n\pi - \sin(-n\pi)) \right] \\
 &= \frac{1}{n\pi} \left[-2\pi \cos n\pi + \frac{2 \sin n\pi}{n} \right] = \frac{2}{n\pi} \left[\frac{\sin n\pi}{n} - \pi \cos n\pi \right]
 \end{aligned}$$

با جانشین کردن $\sin n\pi = 0$ و $\cos n\pi = (-1)^n$ برای تمام اعداد صحیح n داریم.

$$b_n = \frac{2}{n\pi} (-\pi(-1)^n) = -\frac{2}{n} (-1)^n = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

لذا بسط سری فوریه موج دندانه اره به صورت زیر است.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin nx$$

تصویر بالا

مساله 32

مطلوب است جواب معادله دیفرانسیل زیر از طریق سری فوریه.

$$y'' + 2y = 3x$$

با شرایط مرزی $y(0) = y(1) = 0$

پاسخ

سری سینوسی فوریه را بکار می بریم برای نشان دادن جواب نا متجانس ، تا شرایط مرزی را برقرار کند. نتیجه مساله 31 را بکار می بریم. می توانیم سمت راست معادله را به صورت سری زیر بنویسیم.

$$3x = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x.$$

فرض می کنیم جواب به صورت زیر است.

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x.$$

با جانشین کردن در معادله دیفرانسیل ، داریم.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 \pi^2) b_n \sin n\pi x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x.$$

چون ضریب های هر شکل سینوس باید مساوی یکدیگر باشد ، پس داریم.

$$(2 - n^2 \pi^2) b_n = \frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

یا

$$b_n = \frac{6(-1)^{n+1}}{n\pi(2 - n^2\pi^2)}.$$

لذا جواب معادله دیفرانسیل داده شده به صورت سری زیر است.

$$y(x) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(2 - n^2\pi^2)} \sin n\pi x.$$

مساله 33

مطلوب است جواب های متناوب معادله دیفرانسیل زیر.

$$y' + ky = f(x),$$

اینجا، k یک عدد ثابت است و $f(x)$ یک تابع با دوره تناوب 2π .

پاسخ

تابع $f(x)$ در سمت راست را به صورت یک سری فوریه، نشان می دهیم.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

ضریب های مختلط فوریه با فرمول زیر تعریف می شود.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

فرض می کنیم جواب را بتوان با بسط سری فوریه نشان داد. یعنی

$$y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{inx},$$

مشتق این، به صورت زیر است.

$$y' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in y_n e^{inx}.$$

این را در معادله دیفرانسیل می گذاریم، پس داریم.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} in y_n e^{inx} + k \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

چون این معادله برای تمام n ها معتبر است، پس داریم.

$$iny_n + ky_n = c_n \text{ or } y_n = \frac{c_n}{in + k}.$$

لذا، c_n و k اعداد شناخته شده هستند، پس جواب به صورت زیر است.

$$y(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{in + k} e^{inx}.$$

مساله 34

با استفاده از بسط سری فوریه، معادله یک بعدی هدایت حرارت را حل کنید.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

با شرایط مرزی دیریک لت Dirichlet

$$T = T_1 \text{ اگر } x = 0$$

و

$$T = T_2 \text{ اگر } x = L$$

باشد.

با توزیع حرارت اولیه $T(x, 0) = f(x)$

پاسخ

ابتدا، باید توزیع حرارت در حالت پایدار Steady State Temperature Distribution تحت شرایط مرزی داده شده را تعریف کنیم. معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

انتگرال می گیریم، جواب کلی به صورت زیر است.

$$T_0(x) = C_1 + C_2 x.$$

ضریب های C_1 و C_2 را از شرایط مرزی

$$T_0(0) = T_1, T_0(L) = T_2.$$

پیدا می کنیم. در نتیجه، داریم.

$$T_0(x) = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L}$$

حالا، جواب حرارت وابسته به زمان Time-Dependent Temperature Solution را می سازیم. یک متغیر جدید معرفی می کنیم.

$$y(x, t) = T(x, t) - T_0(x).$$

شرایط مرزی برای $y(x, t)$ می شود.

$$y(0, t) = y(L, t) = 0,$$

شرط اولیه را می توان به صورت زیر نوشت.

$$y(x, 0) = f(x) - T_0(x) = g(x).$$

با توجه به شرایط مرزی جدید ، طبیعی است که بسط سری سینوسی فوریه را در نظر بگیریم. پس

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L},$$

ضریب های b_n بوسیله فرمول زیر تعریف می شوند.

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

به فرض این که این ضریب ها شناخته شوند.

در جستجوی جواب کلی به صورت سری هستیم ، با ضریب های وابسته به زمان $c_n(t)$.

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

واضح است که ، شرایط مرزی $y(0, t) = 0$ و $y(L, t) = 0$ برقرار هستند ، برای تمام $t > 0$ ها. شرایط اولیه $c_n(t)$ به صورت زیر هستند.

$$c_n(0) = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

با جانشین کردن این عبارت ها در معادله توزیع حرارت

$$k \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial t}$$

پس

$$-k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} c_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dc_n(t)}{dt} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

طرفین آخرین عبارت در $\sin \frac{n\pi x}{L}$ ضرب می کنیم و در بازه $[0, L]$ انتگرال می گیریم و با استفاده از رابطه های متعامد ، داریم.

$$\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0 & \text{اگر } m \neq n \\ \frac{L}{2} & \text{اگر } m = n \end{cases}$$

سپس داریم.

$$-k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} c_n(t) \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dc_n(t)}{dt} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx$$

یا

$$-k \frac{m^2 \pi^2}{L^2} c_m(t) = \frac{dc_m(t)}{dt}.$$

با حل این معادله دیفرانسیل معمولی برای $c_n(t)$ داریم.

$$\frac{dc_m}{c_m} = -\frac{km^2 \pi^2}{L^2} dt, \Rightarrow$$

$$\int \frac{dc_m}{c_m} = -\frac{km^2 \pi^2}{L^2} \int dt, \Rightarrow$$

$$\ln c_m(t) = -\frac{km^2 \pi^2}{L^2} t + C_0, \Rightarrow$$

$$c_m(t) = Ae^{\left(-\frac{km^2 \pi^2}{L^2} t\right)}$$

چون در این حالت $m = n$ است، می‌توانیم بنویسیم

$$c_n(t) = Ae^{\left(-\frac{kn^2 \pi^2}{L^2} t\right)}$$

اینجا $A = e^{C_0}$ یک عدد ثابت است، منوط به شرایط اولیه

با توجه به این که $c_n(0) = b_n$ است، جواب $c_n(t)$ به صورت زیر بدست می‌آوریم.

$$c_n(t) = b_n \exp \left(-\frac{kn^2 \pi^2}{L^2} t \right).$$

در نتیجه جواب نهایی معادله حرارت به صورت زیر است.

$$T(x, t) = T_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp \left(-\frac{kn^2 \pi^2}{L^2} t \right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$T_1 + (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp \left(-\frac{kn^2\pi^2}{L^2} t \right) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

مساله 35

مطلوب است جواب معادله موج برای ریسمان ثابت.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L$$

با شرایط مرزی

$$u(0, t) = u(L, t) = 0$$

ریسمان در دو انتها ثابت است.

جا بجایی اولیه و سرعت به صورت زیر هستند.

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x),$$

اینجا $f(x)$ و $g(x)$ تابع هایی هستند که توسط استفاده کننده تعریف می شود ، مانند

$$f(0) = f(L) = g(0) = g(L) = 0.$$

پاسخ

در جستجوی تمام جواب های متناوب هستیم که در آنها متغیر های x و t جدا هستند ، یعنی به صورت زیر.

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

پس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = XT''$$

و

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T.$$

با جانشین کردن این دو در معادله موج ، داریم.

$$XT'' = a^2 X''T$$

یا

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T}.$$

اینجا ، تابع اول فقط تابع x است و دومی ، تابع t است. این اتفاق در صورتی امکان دارد که طرفین معادله ، ثابت باشند ، پس

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{T} = \text{ثابت} = \alpha$$

اگر این عدد ثابت α مثبت باشد ، می توانیم بنویسیم $\alpha = \lambda^2$ پس داریم.

$$T'' = a^2 \lambda^2 T$$

با جواب کلی زیر

$$T(t) = a \sinh(a\lambda t) + b \cosh(a\lambda t).$$

چنین جوابی نمی تواند تابع متناوب بر حسب t ایجاد کند. پس آن عدد ثابت a منفی است ، یعنی

$$\alpha = -\lambda^2$$

پس معادله موج ما می تواند به دو معادله دیفرانسیل معمولی تقسیم شود.

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad T'' + a^2 \lambda^2 T = 0.$$

با حل معادله اول ، داریم.

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x,$$

اینجا C_1, C_2 اعداد ثابت انتگرال گیری هستند.

با در نظر گرفتن شرایط مرزی برای این ریسمان ثابت ، داریم.

$$X(0) = X(L) = 0.$$

پس

$$X(0) = C_1 = 0, \quad X(L) = C_2 \sin \lambda L = 0.$$

با قرار دادن $C_2 \neq 0$ داریم

$$\lambda L = \pi n$$

اینجا n یک عدد صحیح است. پس مقادیر ویژه به صورت زیر هستند.

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

تابع های ویژه مربوطه هم ، به صورت زیر هستند.

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{L}.$$

برای $\lambda = \lambda_n$ معادله دوم می شود ،

$$T_n = A_n \cos a \lambda_n t + B_n \sin a \lambda_n t = A_n \cos \frac{a \pi n t}{L} + B_n \sin \frac{a \pi n t}{L}.$$

پس می توان نوشت.

$$u_n(x, t) = \sin \frac{\pi n x}{L} \left(A_n \cos \frac{a \pi n t}{L} + B_n \sin \frac{a \pi n t}{L} \right).$$

اینجا n یک عدد صحیح مثبت است A_n و B_n اعداد ثابت اختیاری هستند که بستگی به شرایط اولیه دارند.

حالا ، می توانیم جواب کلی معادله موج را به صورت یک تلفیق خطی جواب های مخصوص بنویسیم.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{L} \left(A_n \cos \frac{a \pi n t}{L} + B_n \sin \frac{a \pi n t}{L} \right).$$

اگر فرض کنیم این سری مشتق پذیر باشد ، داریم.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{L} \left(-A_n \frac{a\pi n}{L} \sin \frac{a\pi n t}{L} + B_n \frac{a\pi n}{L} \cos \frac{a\pi n t}{L} \right).$$

با استفاده از شرایط اولیه، اعداد ثابت A_n و B_n را مشخص می‌کنیم.

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{\pi n x}{L} = f(x),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{a\pi n}{L} \sin \frac{\pi n x}{L} = g(x).$$

همان طور که ملاحظه می‌کنید، باید $f(x)$ و $g(x)$ را به سری بر اساس سیستم متعام

$$\left\{ \sin \frac{\pi n x}{L} \right\}$$

بسط دهیم. بر اساس فرمول‌های ضریب‌های فوریه، داریم.

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx, \quad B_n = \frac{2}{a\pi n} \int_0^L g(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

پس، جواب معادله موج با شرایط مرزی و اولیه داده شده به صورت سری نامتناهی زیر است.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{L} \left(A_n \cos \frac{a\pi n t}{L} + B_n \sin \frac{a\pi n t}{L} \right),$$

اینجا A_n و B_n همان است که در فرمول‌های بالا ذکر شد.

اولین جمله $u_1(x, t)$ سری بالا، آوای اصلی **Fundamental Tone** نامیده می‌شود. بقیه جمله‌ها **هارمونیک** نامیده می‌شوند. دوره تناوب و فرکانس مطابق زیر است.

$$T_n = \frac{2L}{an}, \quad \omega_n = \frac{a\pi n}{L}.$$

مساله 36

مطلوب است جواب معادله لاپلاس.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

روی یک دیره $x^2 + y^2 \leq 1$ با شرط مرزی

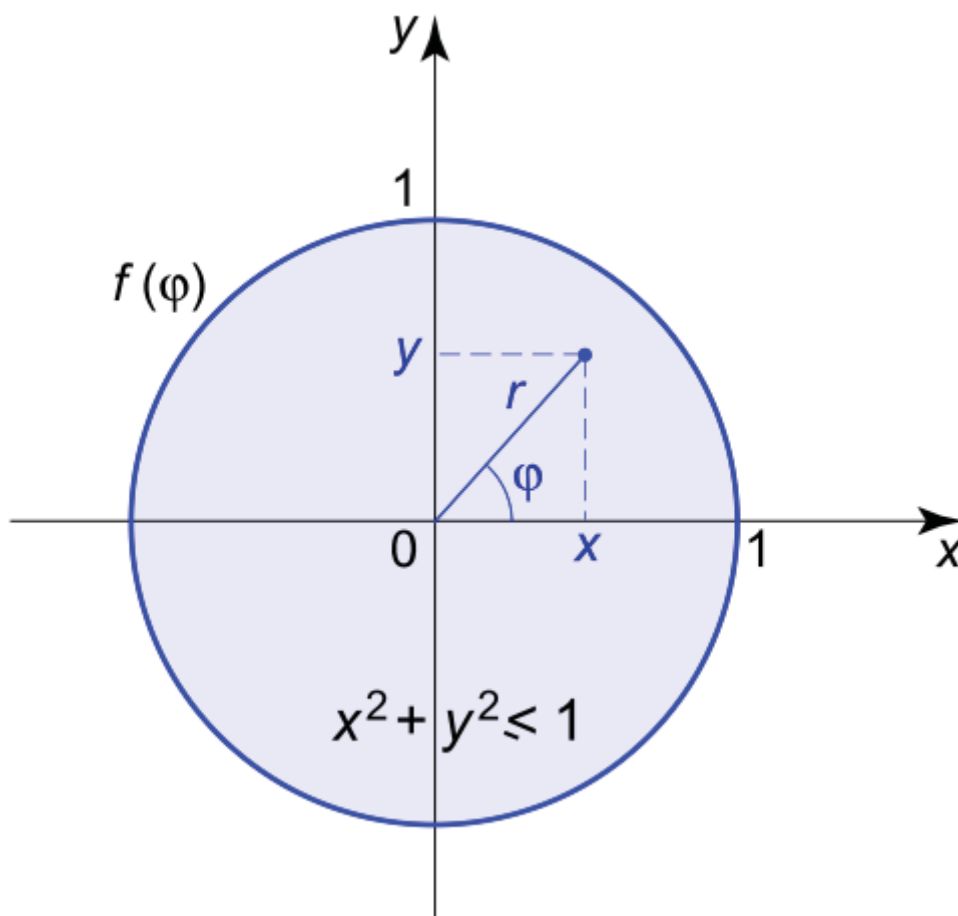
$$u(x, y)|_{x^2+y^2=1} = f(x, y).$$

پاسخ

جواب را در مختصات قطبی (r, φ) پیدا می کنیم. رابطه بین مختصات کارتزین و مختصات قطبی به صورت زیر است.

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

با توجه به تصویر زیر.



در مختصات قطبی، تابع $u(x, y)$ می شود $u(r, \varphi)$ یعنی تابع وابسته است به r و φ . واضح است که $u(r, \varphi)$ یک تابع φ است با دور تناوب 2π .

معادله لاپلاس در مختصات قطبی به صورت زیر است.

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

به دنبال جواب $u(r, \varphi)$ به صورت یک بسط سری فوریه، هستیم، یعنی

$$u(r, \varphi) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r) \cos n\varphi + b_n(r) \sin n\varphi],$$

اینجا ضریب های فوریه $a_n(r)$ و $b_n(r)$ بستگی به شعاع r دارند.

فرض می کنیم تابع $u(r, \varphi)$ به اندازه کافی پیوسته است، پس می توانیم آنرا نسبت r و φ مشتق بگیریم. پس داریم.

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{a'_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a'_n(r) \cos n\varphi + b'_n(r) \sin n\varphi],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{a''_0(r)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a''_n(r) \cos n\varphi + b''_n(r) \sin n\varphi],$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} [-a_n(r)n \sin n\varphi + b_n(r)n \cos n\varphi],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = \sum_{n=1}^{\infty} [-a_n(r)n^2 \cos n\varphi - b_n(r)n^2 \sin n\varphi].$$

با جانشین کردن این، در معادله لاپلاس داریم.

$$\begin{aligned} & \frac{r^2 a''_0(r)}{2} + \frac{r a'_0(r)}{2} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(r^2 a''_n(r) + r a'_n(r) - n^2 a_n(r) \right) \cos n\varphi \right. \\ & \left. + \left(r^2 b''_n(r) + r b'_n(r) - n^2 b_n(r) \right) \sin n\varphi \right] = 0. \end{aligned}$$

چون این عبارت برای تمام r ها و φ ها، مساوی صفر است، نتیجه می گیریم.

$$r^2 a_n''(r) + r a_n'(r) - n^2 a_n(r) = 0 \text{ for } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$r^2 b_n''(r) + r b_n'(r) - n^2 b_n(r) = 0 \text{ for } n = 1, 2, 3, \dots$$

پس یک سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی بجای معادله دیفرانسیل پاره ای اصلی، بدست آورده ایم. مهم این است که هر کدام از این معادله های معمولی را می توان مستقل، حل کرد.

می توان چک کرد که تابع های

$$a_n(r) = a_n(1)r^n, \quad b_n(r) = b_n(1)r^n$$

آخرین معادلات دیفرانسیل را بر قرار می کنند.

اینجا، اعداد ثابت $a_n(1)$ و $b_n(1)$ را باید از شرایط اولیه معادلات دیفرانسیل معمولی پیدا کرد. برای بدست آوردن این شرایط اولیه، تابع $f(\varphi) = u(1, \varphi)$ را در سری فوریه بسط می دهیم، پس داریم.

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) = u(1, \varphi) \\ &= \frac{a_0(1)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(1) \cos n\varphi + b_n(1) \sin n\varphi]. \end{aligned}$$

با مساوی قرار دادن ضریب های $\cos n\varphi$ و $\sin n\varphi$ در این عبارت، داریم.

$$a_n(1) = \alpha_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$b_n(1) = \beta_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

لذا، سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی، دارای جواب های زیر است.

$$a_n(r) = \alpha_n r^n, \quad b_n(r) = \beta_n r^n.$$

پس جواب معادله لاپلاس، به صورت زیر است.

$$u(r, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi),$$

اینجا، a_n و β_n اعداد شناخته شده ای هستند که توسط شرایط مرزی تعریف شده اند.

این جواب را می توانیم ساده کنیم.

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos nt \cos n\varphi + \sin nt \sin n\varphi) \right] dt.$$

توجه داشته باشید که

$$\cos nt \cos n\varphi + \sin nt \sin n\varphi = \cos n(t - \varphi).$$

پس

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(t - \varphi) \right] dt.$$

می توان نشان داد که با استفاده از فرمول

$$x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

جمله داخل کروشه ، به سری هندسی نامتناهی که جمع آن مطابق زیر است ، تبدیل می شود.

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n(t - \varphi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \varphi) + r^2}.$$

پس ، جواب به صورت زیر است.

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(t - \varphi) + r^2} dt.$$

عبارت آخر ، انتگرال پواسون **Poisson's Integral** برای دایره واحد ، نامیده می شود .