



RIAZISARA

سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

<https://t.me/riazisara>



ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



همه‌هنگی کلاس خصوصی آنلاین ریاضی ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲

فصل دوم

Chapter One

تبدیلات لاپلاس

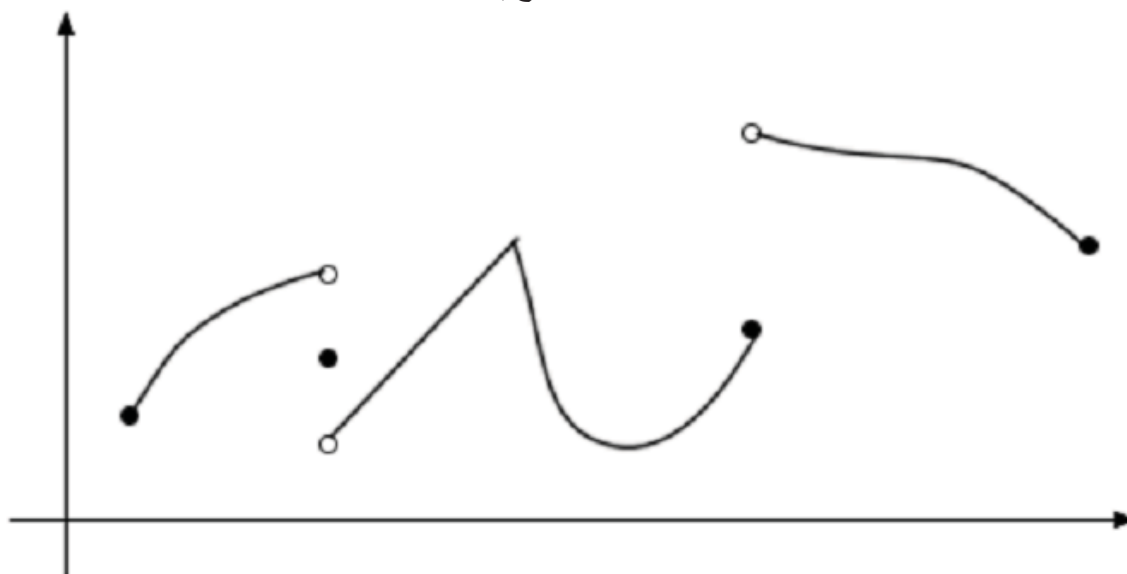
Laplace Transforms

بخش اول

2.1 تعریف

معادله پیوسته تکه ای Piecewise Continuous Function

یک تابع را در یک بازه ، پیوسته تکه ای می گویند ، اگر آن بازه را بتوان به تعداد محدودی زیر بازه تقسیم کرد ، بطوری که آن تابع ، در هر کدام از زیر بازه های باز ، پیوسته باشد ، و در نقاط انتهای هر زیر بازه یک حد محدود داشته باشد. در زیر تصویر یک تابع پیوسته تکه ای ملاحظه می کنید.



به عبارت دیگر ، یک تابع پیوسته تکه ای ، تابعی است که تعداد محدودی پاره گی یا گسیختگی در آن وجود دارد و هیچ جا به بی نهایت نمی رسد.

تعریف

فرض کنید $f(t)$ یک تابع پیوسته تکه ای باشد. تبدیل لاپلاس که با نماد $\mathcal{L}\{f(t)\}$ نشان می دهیم ، به صورت زیر تعریف می شود.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

نماد دیگری هم برای تبدیلات لاپلاس وجود دارد. برای راحتی کار ، اغلب تبدیلات لاپلاس را به صورت زیر نشان می دهیم.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$$

با این نماد ، ملاحظه می کنید که تبدیل ، در حقیقت یک تابع یک متغیر جدید بنام s است ، و لذا تمام t ها در مراحل انتگرال گیری حذف می شوند.

انتگرال در تعریف بالاییک **انتگرال ناسره** **Improper Integral** است. لذا ، بی مناسبت نیست که قبل از پرداختن به موضوع تبدیلات لاپلاس ، مثالی برای محاسبه انتگرال ناسره بیاوریم.

مثال ۱

اگر $c \neq 0$ باشد ، انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt$$

حل

بخاطر بیاورید که لازم است انتگرال ناسره را به حد تبدیل کنیم.

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{ct} dt$$

ابتدا ، انتگرال را انجام می دهیم ، سپس حد را محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{ct} dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{ct} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{c} \right) \Big|_0^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{c} e^{cn} - \frac{1}{c} \right) \end{aligned}$$

اینجا ، باید مواظب باشیم. مقدار c روی جواب ما اثر دارد. فرض کردیم c غیر صفر است. حالا باید نگران علامت c باشیم. اگر c مثبت باشد نمایی به طرف بی نهایت می رود. از طرف دیگر ، اگر c منفی باشد ، نمایی به طرف صفر می رود.

پس ، انتگرال فقط هنگامی همگرا است ، یعنی حد وجود دارد و کران دار است ، که $c < 0$ باشد. در این صورت داریم.

$$\int_0^{\infty} e^{ct} dt = -\frac{1}{c} \quad \text{به شرطی که } c < 0 \quad (2)$$

حالا که طریق محاسبه انتگرال ناسره را بخاطر آوردیم ، اجازه دهید ، چند تبدیلات لاپلاس را محاسبه کنیم.

مثال ۲

مطلوب است مقدار $\mathcal{L}\{1\}$

حل

اینجا کار زیادی نیست که انجام دهیم. اینجا داریم $f(t) = 1$ است. پس داریم.

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt$$

اینجا همان انتگرال مثال ۱ را داریم. با این تفاوت که $c = -s$ است. پس تنها کاری که باید انجام دهیم این است که شماره (2) را مجدداً بکار ببریم با جانشین کردن های متناسب. پس داریم.

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = -\frac{1}{-s} \quad \text{به شرطی که } -s < 0$$

باساده کردن داریم.

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad \text{به شرطی که } s > 0$$

ملاحظه می کنید که مجبور شدیم برای s محدودیت در نظر بگیریم تا بتوانیم محاسبه تبدیل را صحیح انجام دهیم. تمام تبدیلات لاپلاس روی s باید محدودیت داشته باشد.

مثال ۳

مطلوب است $\mathcal{L}\{e^{at}\}$

حل

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt$$

باز هم ملاحظه می کنید که می توانیم شماره (2) را بکار ببریم. در صورتیکه $c = a - s$ باشد. پس داریم.

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = -\frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a} \quad \text{به شرطی که } s > 0$$

مثال ۴

مطلوب است $\mathcal{L}\{\sin(at)\}$

حل

اینجا از نماد دیگر استفاده می کنیم. یعنی داریم.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin(at)\} &= F(s) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} \sin(at) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-st} \sin(at) dt \end{aligned}$$

با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء داریم.

$$F(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(- \left(\frac{1}{a} e^{-st} \cos(at) \right) \Big|_0^n - \frac{s}{a} \int_0^n e^{-st} \cos(at) dt \right)$$

حالا جمله اول را ساده می کنیم و مجددا با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء، داریم.

$$F(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} (1 - e^{-sn} \cos(an)) - \frac{s}{a} \left(\left(\frac{1}{a} e^{-st} \sin(at) \right) \Big|_0^n + \frac{s}{a} \int_0^n e^{-st} \sin(at) dt \right) \right)$$

حالا، جمله دوم را محاسبه می کنیم، حد می گیریم، و ساده می کنیم.

$$\begin{aligned} F(s) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} (1 - e^{-sn} \cos(an)) - \frac{s}{a} \left(\frac{1}{a} e^{-sn} \sin(an) + \frac{s}{a} \int_0^n e^{-st} \sin(at) dt \right) \right) \\ &= \frac{1}{a} - \frac{s}{a} \left(\frac{s}{a} \int_0^\infty e^{-st} \sin(at) dt \right) \\ &= \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-st} \sin(at) dt \end{aligned}$$

ملاحظه می کنید که باید فرض کنیم $s > 0$ است تا بتوانیم دو حد زیر را انجام دهیم.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-sn} \cos(an) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-sn} \sin(an) = 0$$

بدون فرض بالا، انتگرال وا گرا خواهیم داشت. همچنین توجه داشته باشید هنگامی که به انتگرال بر می گردیم حد بالایی را به بی نهایت تبدیل می کنیم. پس داریم.

$$F(s) = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} F(s)$$

ساده می کنیم.

$$\mathcal{L}\{\sin(at)\} = F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad \text{به شرطی که } s > 0$$

ملاحظه می کنید که محاسبه تبدیلات لاپلاس اغلب در هم و بر هم است.

2.2 تبدیلات لاپلاس Laplace Transforms

همان طور که در بخش 2.1 دیدیم، محاسبه تبدیلات لاپلاس مستقیماً، بقرنچ و در هم و بر هم است. لذا معمولاً هنگام محاسبه تبدیلات لاپلاس، از جدول تبدیلات لاپلاس استفاده می‌کنیم و یا نرم افزار مربوطه را بکار می‌بریم. جدولی که اینجا می‌آوریم، کامل نیست، اما شامل بیشتر تبدیلات لاپلاس است که معمولاً بکار می‌روند. **جدول تبدیلات لاپلاس را در آخر همین بخش ملاحظه می‌کنید.** قبل از آوردن چند مثال، ابتدا به حقیقت زیر توجه کنید.

حقیقت Fact

اگر داشته باشیم $f(t)$ و $g(t)$ پس برای هر عدد ثابت a و b داریم.

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

به عبارت دیگر، نگران اعداد ثابت و یا مجموع و تفاضل نیستیم.

مثال 1

تبدیلات لاپلاس تابع های زیر را پیدا کنید.

$$(a) f(t) = 6e^{-5t} + e^{3t} + 5t^3 - 9$$

$$(b) g(t) = 4\cos(4t) - 9\sin(4t) + 2\cos(10t)$$

$$(c) h(t) = 3\sinh(2t) + 3\sin(2t)$$

$$(d) g(t) = e^{3t} + \cos(6t) - e^{3t}\cos(6t)$$

حل

به جدول مراجعه می‌کنیم و تبدیل لاپلاس مورد نظر را پیدا می‌کنیم. اینجا، با توضیحات بیشتر، کار را انجام می‌دهیم. چون برای اولین مرتبه است که از جدول استفاده می‌کنیم.

$$(a) f(t) = 6e^{-5t} + e^{3t} + 5t^3 - 9$$

$$\begin{aligned} F(s) &= 6\frac{1}{s-(-5)} + \frac{1}{s-3} + 5\frac{3!}{s^{3+1}} - 9\frac{1}{s} \\ &= \frac{6}{s+5} + \frac{1}{s-3} + \frac{30}{s^4} - \frac{9}{s} \end{aligned}$$

$$(b) \quad g(t) = 4 \cos(4t) - 9 \sin(4t) + 2 \cos(10t)$$

$$\begin{aligned} G(s) &= 4 \frac{s}{s^2 + (4)^2} - 9 \frac{4}{s^2 + (4)^2} + 2 \frac{s}{s^2 + (10)^2} \\ &= \frac{4s}{s^2 + 16} - \frac{36}{s^2 + 16} + \frac{2s}{s^2 + 100} \end{aligned}$$

$$(c) \quad h(t) = 3 \sinh(2t) + 3 \sin(2t)$$

$$\begin{aligned} H(s) &= 3 \frac{2}{s^2 - (2)^2} + 3 \frac{2}{s^2 + (2)^2} \\ &= \frac{6}{s^2 - 4} + \frac{6}{s^2 + 4} \end{aligned}$$

$$(d) \quad g(t) = e^{3t} + \cos(6t) - e^{3t} \cos(6t)$$

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{s-3} + \frac{s}{s^2 + (6)^2} - \frac{s-3}{(s-3)^2 + (6)^2} \\ &= \frac{1}{s-3} + \frac{s}{s^2 + 36} - \frac{s-3}{(s-3)^2 + 36} \end{aligned}$$

به تفاوت بین تابع مثلثاتی معمولی و هیپر بالیک توجه کنید. تنها تفاوتی که وجود دارد این است که a^2 برای تابع مثلثاتی معمولی، تبدیل می شود به $-a^2$ در تابع هیپر بالیک.

مثال 2

تبدیلات لاپلاس تابع های زیر را پیدا کنید

$$(a) f(t) = t \cosh(3t)$$

$$(b) h(t) = t^2 \sin(2t)$$

$$(c) g(t) = t^{\frac{3}{2}}$$

$$(d) f(t) = (10t)^{\frac{3}{2}}$$

$$(e) f(t) = tg'(t)$$

حل

$$(a) f(t) = t \cosh(3t)$$

این تابع در جدول نیست. اما، می توانیم از شماره 30 جدول استفاده کنیم، با $n = 1$ و اگر فرض کنیم $g(t) = \cosh(3t)$ باشد، پس داریم.

$$F(s) = \mathcal{L}\{tg(t)\} = -G'(s)$$

سپس داریم

$$G(s) = \frac{s}{s^2 - 9} \qquad G'(s) = -\frac{s^2 + 9}{(s^2 - 9)^2}$$

بر اساس شماره 30 داریم.

$$F(s) = \frac{s^2 + 9}{(s^2 - 9)^2}$$

$$(b) h(t) = t^2 \sin(2t)$$

باز از شماره 30 جدول استفاده می کنیم. به دو طریق می توانیم از شماره 30 استفاده کنیم. با $n = 1$ و فرض $f(t) = t \sin(2t)$ داریم.

$$H(s) = \mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s),$$

یا $n = 2$ و فرض $f(t) = \sin(2t)$ داریم.

$$H(s) = \mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = F''(s),$$

چون استفاده از مشتق مرتبه اول آسان تر است، از طریق اول استفاده می کنیم. پس از شماره 9 جدول استفاده می کنیم.

$$F(s) = \frac{4s}{(s^2 + 4)^2} \quad F'(s) = -\frac{12s^2 - 16}{(s^2 + 4)^3}$$

پس تبدیل ، می شود.

$$H(s) = \frac{12s^2 - 16}{(s^2 + 4)^3}$$

$$(c) \quad g(t) = t^{\frac{3}{2}}$$

این قسمت را با استفاده از شماره 6 با $n = 2$ یا از شماره 32 همراه با شماره 5 می توان انجام داد. از شماره 32 استفاده می کنیم. برای این کار توجه داشته باشید که

$$\int_0^t \sqrt{v} dv = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad t^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \int_0^t \sqrt{v} dv$$

حالا با استفاده از شماره 5 داریم.

$$f(t) = \sqrt{t} \quad F(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$$

و در نهایت خواهیم داشت.

$$G(s) = \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}} \right) \left(\frac{1}{s} \right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4s^{\frac{5}{2}}}$$

اگر شماره 6 را بکار برده بودیم ، همین نتیجه را بدست می آوردیم.

$$(d) \quad f(t) = (10t)^{\frac{3}{2}}$$

از شماره 24 استفاده می کنیم ، همراه با جواب قسمت قبل. توجه داشته باشید اگر

$$g(t) = t^{\frac{3}{2}}$$

باشد ، پس

$$f(t) = g(10t)$$

لذا ، تبدیل می شود

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{1}{10} G\left(\frac{s}{10}\right) \\
 &= \frac{1}{10} \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4\left(\frac{s}{10}\right)^{\frac{5}{2}}} \right) \\
 &= 10^{\frac{3}{2}} \frac{3\sqrt{\pi}}{4s^{\frac{5}{2}}}
 \end{aligned}$$

(e) $f(t) = tg'(t)$

باز هم از شماره 30 استفاده می‌کنیم همچنین از شماره 35

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{tg'(t)\} &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}\{g'\} \\
 &= -\frac{d}{ds} \{sG(s) - g(0)\} \\
 &= -(G(s) + sG'(s) - 0) \\
 &= -G(s) - sG'(s)
 \end{aligned}$$

بخاطر داشته باشید که $g(0)$ یک عدد ثابت است پس هنگامی که انتگرال می‌گیریم، صفر بدست می‌آوریم.

Table of Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. $\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12. $\sin(at) + at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13. $\cos(at) - at \sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14. $\cos(at) + at \sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	16. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
17. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23. $t^n e^{at}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
25. $u_c(t) = u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{e^{-cs}}{s}$	26. $\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	e^{-cs}
27. $u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$	28. $u_c(t) g(t)$	$e^{-cs} \mathcal{L}\{g(t+c)\}$
29. $e^{ct} f(t)$	$F(s-c)$	30. $t^n f(t), n=1,2,3,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31. $\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(u) du$	32. $\int_0^t f(v) dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33. $\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$	$F(s)G(s)$	34. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1-e^{-sT}}$
35. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	36. $f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
37. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		

2.3 معکوس تبدیلات لاپلاس Inverse Laplace Transforms

همان طور که در بخش 3.2 دیدیم، اگر جدول تبدیلات را در اختیار داشته باشیم، پیدا کردن تبدیل لاپلاس یک تابع، کار مشکلی نیست. حالا می‌خواهیم عکس این کار را انجام دهیم. یعنی، اگر یک تبدیل $F(s)$ به ما داده شده باشد، و از ما خواسته باشند، تابع یا تابع های اصلی را پیدا کنیم. خواهیم دید که این کار پیچیده تر و طولانی تر از پیدا کردن تبدیلات است. در این حالت می‌گوییم می‌خواهیم معکوس تبدیل لاپلاس $F(s)$ را پیدا کنیم و نماد زیر را بکار می‌بریم.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

باز هم مانند بخش قبل، حقیقت زیر را بکار می‌بریم.

حقیقت Fact

اگر دو تبدیل لاپلاس $F(s)$ و $G(s)$ داشته باشیم، پس

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s) + bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$$

است، برای هر عدد ثابت a و b

مجدداً جدول تبدیلات لاپلاس را در آخر این بخش، می‌آوریم.

مثال 1

معکوس هر یک از تبدیلات زیر را پیدا کنید.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad F(s) &= \frac{6}{s} - \frac{1}{s-8} + \frac{4}{s-3} \\ \text{(b)} \quad H(s) &= \frac{19}{s+2} - \frac{1}{3s-5} + \frac{7}{s^5} \\ \text{(c)} \quad F(s) &= \frac{6s}{s^2+25} + \frac{3}{s^2+25} \\ \text{(d)} \quad G(s) &= \frac{8}{3s^2+12} + \frac{3}{s^2-49} \end{aligned}$$

حل

$$\text{(a)} \quad F(s) = \frac{6}{s} - \frac{1}{s-8} + \frac{4}{s-3}$$

مخرج کسر اول مانند مخرج شماره 1 جدول است اما صورت کسر در جدول یک است، پس قبل از پیدا کردن معکوس، از 6 فاکتور می‌گیریم، تا صورت هم یک بشود.

کسر دوم، به نظر می‌رسد که نمایی باشد، با $a = 8$ و صورت هم همان است که باید باشد.

کسر سوم هم نمایی است با $a = 3$ اما باید از 4 فاکتور بگیریم

پس بر اساس جدول شماره 1 برای کسر اول و جدول شماره 2 برای کسر های دوم و سوم داریم.

$$F(s) = 6 \frac{1}{s} - \frac{1}{s-8} + 4 \frac{1}{s-3}$$

$$f(t) = 6(1) - e^{8t} + 4(e^{3t})$$

$$= 6 - e^{8t} + 4e^{3t}$$

$$(b) \quad H(s) = \frac{19}{s+2} - \frac{1}{3s-5} + \frac{7}{s^5}$$

به نظر می رسد ، کسر اول ، نمایی است با $a = -2$ حالا لازم است از 19 فاکتور بگیریم. در این مسائل ، مواظب علامت های منفی باشید. کسر دوم تقریبا ، نمایی به نظر می رسد ، بجز این که بجای s در مخرج $3s$ داریم. پس باید 3 را از مخرج فاکتور بگیریم. به نظر می رسد مخرج کسر سوم مانند شماره 3 جدول است با $n = 4$ اما ، صورت ، صحیح نیست. اینجا صورت 7 است ولی احتیاج به $4! = 24$ داریم. اصلاح آن آسان است. صورت را در $\frac{4!}{4!}$ ضرب می کنیم. پس اجازه دهید ابتدا تبدیل را بنویسیم.

$$H(s) = \frac{19}{s - (-2)} - \frac{1}{3(s - \frac{5}{3})} + \frac{7 \frac{4!}{4!}}{s^{4+1}}$$

$$= 19 \frac{1}{s - (-2)} - \frac{1}{3} \frac{1}{s - \frac{5}{3}} + \frac{7}{4!} \frac{4!}{s^{4+1}}$$

پس تا اینجا ، چه کرده ایم؟ از کسر اول 19 فاکتور گرفتیم. از مخرج کسر دوم 3 فاکتور گرفتیم. از صورت کسر سوم $\frac{7}{4!}$ فاکتور گرفتیم. حالا معکوس را پیدا می کنیم.

$$h(t) = 19e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{\frac{5t}{3}} + \frac{7}{24}t^4$$

$$(c) \quad F(s) = \frac{6s}{s^2 + 25} + \frac{3}{s^2 + 25}$$

اینجا مخرج هر دو کسر ، یکی است. و جدول می گوید یا شماره 7 داریم یا شماره 8 صورت کسر ها به ما می گویند که در حقیقت کدام را داریم. کسر اول ، در صورت s دارد ، پس یعنی کسر اول باید شماره 8 باشد. و باید از 6 فاکتور بگیریم. کسر دوم ، در صورت فقط یک عدد ثابت

دارد، پس کسر دوم باید شماره 7 باشد. اما، باید صورت را در $\frac{5}{5}$ ضرب کنیم تا صورت مانند آنچه در جدول است، بشود. لذا تبدیل به صورت زیر می شود.

$$\begin{aligned} F(s) &= 6 \frac{s}{s^2 + (5)^2} + \frac{3 \frac{5}{5}}{s^2 + (5)^2} \\ &= 6 \frac{s}{s^2 + (5)^2} + \frac{3}{5} \frac{5}{s^2 + (5)^2} \end{aligned}$$

حالا از روی جدول معکوس تبدیل را پیدا می کنیم. به صورت زیر.

$$f(t) = 6 \cos(5t) + \frac{3}{5} \sin(5t)$$

$$(d) \quad G(s) = \frac{8}{3s^2 + 12} + \frac{3}{s^2 - 49}$$

اگر از مخرج کسر اول 3 فاکتور بگیریم، یک سینوس خواهد بود. کسر دوم یک سینوس هیپر بالیک به نظر می آید، یعنی شماره 17 اما، به تفاوت این دو توجه کنید. باید صورت هر دو را به طریقی مانند صورت جدول تبدیل کنیم. پس مساله را به شکل زیر باز نویسی می کنیم.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{3} \frac{8}{s^2 + 4} + \frac{3}{s^2 - 49} \\ &= \frac{1}{3} \frac{(4)(2)}{s^2 + (2)^2} + \frac{3 \frac{7}{7}}{s^2 - (7)^2} \end{aligned}$$

پس، معکوس تبدیل به شکل زیر خواهد بود.

$$g(t) = \frac{4}{3} \sin(2t) + \frac{3}{7} \sinh(7t)$$

حالا، چند مساله مشکل تر مطرح می کنیم.

مثال 2

معکوس هر یک از تبدیلات زیر را پیدا کنید

$$(a) F(s) = \frac{6s-5}{s^2+7}$$

$$(b) F(s) = \frac{1-3s}{s^2+8s+21}$$

$$(c) G(s) = \frac{3s-2}{2s^2-6s-2}$$

$$(d) H(s) = \frac{s+7}{s^2-3s-10}$$

حل

$$(a) F(s) = \frac{6s-5}{s^2+7}$$

ظاهراً ، مخرج این یکی ، یا یک سینوس است یا یک کسینوس. اما صورت ، با هیچ یک از این دو در جدول ، مطابقت ندارد. یک کسینوس باید در صورت یک s داشته باشد با حد اکثر یک ضریب عدد ثابت. اما ، یک سینوس ، فقط یک عدد ثابت بدون s در صورت ، لازم دارد. در این مثال ، هر دو را در صورت داریم. یعنی هم s داریم و هم یک عدد ثابت. اما اصلاح آن آسان است. فقط لازم است کسر را به دو کسر تبدیل کنیم. و سپس معکوس تبدیل را پیدا کنیم.

$$F(s) = \frac{6s}{s^2+7} - \frac{5\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}}{s^2+7}$$

$$f(t) = 6\cos(\sqrt{7}t) - \frac{5}{\sqrt{7}}\sin(\sqrt{7}t)$$

همیشه انتظار نداشته باشید که مربع کامل داشته باشد. همان طور که ملاحظه می کنید $a = \sqrt{7}$ است.

$$(b) F(s) = \frac{1-3s}{s^2+8s+21}$$

در جدول هیچ مخرجی پیدا نمی شود که شبیه مخرج این مثال باشد. اما ، اگر مخرج را مربع کامل کنیم ، می توانیم مانند آن در جدول پیدا می کنیم.

$$\begin{aligned}s^2 + 8s + 21 &= s^2 + 8s + 16 - 16 + 21 \\&= s^2 + 8s + 16 + 5 \\&= (s + 4)^2 + 5\end{aligned}$$

پس داریم.

$$F(s) = \frac{1 - 3s}{(s + 4)^2 + 5}$$

با این باز نویسی ، به نظر می رسد که شماره 19 یا 20 جدول را داریم. اگر بخواهیم صورت کسر ماند شماره 19 باشد ، باید در صورت فقط یک عدد ثابت باشد. اگر بخواهیم مانند شماره 20 باشد ، باید در صورت $s - a$ باشد. اما هیچ کدام از اینها را نداریم. پس باید صورت را به شکل مناسب در آوریم.

برای اصلاح صورت ، همیشه سعی می کنیم اول $s - a$ بدست آوریم. این قسمت مهم مساله است. همچنین لازم است مواظب عدد 3 که جلو s نشسته است ، باشیم. یک راه این است که که آنرا به دو قسمت تقسیم کنیم ، و از قسمت دوم 3 را فاکتور بگیریم و سپس صورت این قسمت را اصلاح کنیم. این کار عملی است ، اما در پاسخ سه جمله بدست می آوریم. و فقط دو جمله لازم داریم. پس مطابق زیر عمل می کنیم.

$$\begin{aligned}F(s) &= \frac{1 - 3(s + 4 - 4)}{(s + 4)^2 + 5} \\&= \frac{1 - 3(s + 4) + 12}{(s + 4)^2 + 5} \\&= \frac{-3(s + 4) + 13}{(s + 4)^2 + 5}\end{aligned}$$

در صورت یک $s + 4$ لازم داریم. پس از صورت 3- فاکتور می گیریم. و در نهایت مساله به صورت زیر می نویسیم.

$$F(s) = -3 \frac{s + 4}{(s + 4)^2 + 5} + \frac{13 \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}}{(s + 4)^2 + 5}$$

و معکوس تبدیل مطابق زیر است.

$$f(t) = -3e^{-t} \sin(\sqrt{5}t) + \frac{13}{\sqrt{5}} e^{-t} \sin(\sqrt{5}t)$$

$$(c) \quad G(s) = \frac{3s-2}{2s^2-6s-2}$$

این مساله هم مانند قبلی است. بایدمخرج را به مربع کامل تبدیل کنیم. اولین کاری که باید انجام دهیم این است که از 2 فاکتور بگیریم. و سپس مربع را کامل کنیم. فراموش نشود که هنگام کامل کردن مربع، باید ضریب s^2 باید 1 باشد. پس داریم.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{3s-2}{2(s^2-3s-1)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{3s-2}{s^2-3s+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}-1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{3s-2}{(s-\frac{3}{2})^2-\frac{13}{4}} \end{aligned}$$

پس به نظر می رسد شماره 21 و 22 داریم، اگر صورت را اصلاح کنیم. در ذیل کاری که باید انجام دهیم، می آوریم.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{2} \frac{3(s-\frac{3}{2}+\frac{3}{2})-2}{(s-\frac{3}{2})^2-\frac{13}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{3(s-\frac{3}{2})+\frac{5}{2}}{(s-\frac{3}{2})^2-\frac{13}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3(s-\frac{3}{2})}{(s-\frac{3}{2})^2-\frac{13}{4}} + \frac{\frac{5}{2} \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}}{(s-\frac{3}{2})^2-\frac{13}{4}} \right) \end{aligned}$$

و در نهایت، تبدیل به صورت زیر است.

$$g(t) = \frac{1}{2} \left(3e^{\frac{3t}{2}} \cosh\left(\frac{\sqrt{13}}{2}t\right) + \frac{5}{\sqrt{13}} e^{\frac{3t}{2}} \sinh\left(\frac{\sqrt{13}}{2}t\right) \right)$$

$$(d) \quad H(s) = \frac{s+7}{s^2-3s-10}$$

به نظر می رسد که این یکی هم مانند دو مساله های قبلی است ، اما چنین نیست. در دو مساله قبل ، نمی توانستیم مخرج را به آسانی فاکتور بگیریم ، اما این یکی را می توان به آسانی فاکتور گیری کرد. در ذیل مخرج را به عوامل اول تجزیه می کنیم ، یعنی فاکتور می گیریم.

$$H(s) = \frac{s+7}{(s+2)(s-5)}$$

صورت این کسر نشان می دهد که دو تابع نمایی داریم. اما برای این که تابع نمایی داشته باشیم ، باید یک جمله در صورت داشته باشیم و هیچ s وجود نداشته باشد.

برای اصلاح ، باید کسر مورد نظر را به کسر های جزئی تبدیل کنیم. یعنی روش کسر جزئی بکار ببریم. به عبارت دیگر یک کسر را به صورت مجموع دو کسر ساده بنویسم. به صورت زیر.

$$H(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-5}$$

آیا روش تجزیه یک کسر به کسر های کوچکتر را بخاطر می آورید؟ در این مثال یک روش را به شما نشان می دهیم بعد از این روش کلی را خاطر نشان می کنیم. باید اعداد ثابت A و B را پیدا کنیم. به صورت زیر عمل می کنیم.

$$\frac{s+7}{(s+2)(s-5)} = \frac{A(s-5) + B(s+2)}{(s+2)(s-5)}$$

چون مخرج ها مساوی هستند ، پس لازم است صورت ها هم مساوی باشند. پس داریم.

$$s+7 = A(s-5) + B(s+2)$$

این تساوی باید برای تمام s ها برقرار باشد. پس اگر قرار است برای هر s تساوی بالا برقرار باشد ، پس باید برای $s = -2$ هم برقرار باشد. یعنی یک عدد اختیار می کنیم. هر عددی که مناسب دیدیم. پس داریم.

$$5 = A(-7) + B(0) \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{5}{7}$$

پس A را پیدا کردیم. به همین طریق B را پیدا می‌کنیم. برای این کار $s = 5$ را اختیار می‌کنیم.

$$12 = A(0) + B(7) \Rightarrow B = \frac{12}{7}$$

همیشه این روش کار نمی‌کند، اما اگر کار کند، روش ساده‌ای است. لذا اعداد ثابت تبدیل به صورت زیر است.

$$H(s) = \frac{-\frac{5}{7}}{s+2} + \frac{\frac{12}{7}}{s-5}$$

حالا به راحتی می‌توانیم از روی جدول، معکوس تبدیل را پیدا کنیم.

$$h(t) = -\frac{5}{7}e^{-2t} + \frac{12}{7}e^{5t}$$

یادآوری چگونه یک کسر را به کسرهای کوچک یا تبدیل کنید.

ابتدا تا آنجا که ممکن است، مخرج را فاکتورگیری کنید، یعنی به حاصلضرب عوامل ساده‌تر تبدیل کنید. سپس برای هر کدام از فاکتورهای موجود در مخرج، از جدول زیر استفاده کنید.

فاکتور در مخرج	جمله در کسر جزئی
$ax + b$	$\frac{A}{ax + b}$
$(ax + b)^k$	$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}$
$ax^2 + bx + c$	$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$
$(ax^2 + bx + c)^k$	$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{A_kx + B_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$

مثال 3

معکوس هر یک از تبدیلات زیر را پیدا کنید

$$(a) \quad G(s) = \frac{86s - 78}{(s+3)(s-4)(5s-1)}$$

$$(b) \quad F(s) = \frac{2-5s}{(s-6)(s^2+11)}$$

$$(c) \quad G(s) = \frac{25}{s^3(s^2+4s+5)}$$

حل

$$(a) \quad G(s) = \frac{86s - 78}{(s+3)(s-4)(5s-1)}$$

این تجزیه به کسر های جزئی

$$G(s) = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{5s-1}$$

اینجا مانند مثال قبل وارد جزئیات نمی شویم. می خواهیم صورت هر کسر جزئی را پیدا کنیم. آسان ترین راه ، مانند مثال بالا این است که صورت ها را مساوی قرار دهیم.

$$86s - 78 = A(s-4)(5s-1) + B(s+3)(5s-1) + C(s+3)(s-4)$$

مانند مثال قبل یک مقدار مناسب برای s انتخاب می کنیم.

$$s = -3 \quad -336 = A(-7)(-16) \quad \Rightarrow \quad A = -3$$

$$s = \frac{1}{5} \quad -\frac{304}{5} = C\left(\frac{16}{5}\right)\left(-\frac{19}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad C = 5$$

$$s = 4 \quad 266 = B(7)(19) \quad \Rightarrow \quad B = 2$$

پس تجزیه به کسر های جزئی ، به صورت زیر است.

$$G(s) = -\frac{3}{s+3} + \frac{2}{s-4} + \frac{1}{s-\frac{1}{5}}$$

و در نهایت ، معکوس تبدیل به صورت زیر است.

$$g(t) = -3e^{-3t} + 2e^{4t} + e^{\frac{t}{5}}$$

$$(b) \quad F(s) = \frac{2-5s}{(s-6)(s^2+11)}$$

برای اولین مرتبه در مخرج چند جمله ای درجه دوم داریم. تجزیه به کسر های جزئی به صورت زیر است.

$$F(s) = \frac{A}{s-6} + \frac{Bs+C}{s^2+11}$$

پس صورت ها را مساوی قرار می دهیم.

$$2-5s = A(s^2+11) + (Bs+C)(s-6)$$

اینجا ، می توانیم $s = 6$ قرار دهیم و A را به اسانی پیدا کنیم ، اما B و C را به این طریق نمی توانیم پیدا کنیم. پس راه طولانی تری را باید انتخاب کنیم. راه طولانی این است که ضرب های سمت راست را انجام دهیم و جمله های مشابه را با هم جمع کنیم.

$$\begin{aligned} 2-5s &= A(s^2+11) + (Bs+C)(s-6) \\ &= As^2 + 11A + Bs^2 - 6Bs + Cs - 6C \\ &= (A+B)s^2 + (-6B+C)s + 11A - 6C \end{aligned}$$

برای این که طرفین مساوی باشند ضریب های s^2 و s و اعداد ثابت باید مساوی باشند.

$$\left. \begin{array}{l} s^2: \quad A+B=0 \\ s^1: \quad -6B+C=-5 \\ s^0: \quad 11A-6C=2 \end{array} \right\} \Rightarrow A = -\frac{28}{47}, \quad B = \frac{28}{47}, \quad C = -\frac{67}{47}$$

ملاحظه می کنید که برای نشان دادن عدد ثابت s^0 بکار بردیم. این فقط قرار دادی است هر نماد دیگری

هم می توانید بکار ببرید. همچنین ملاحظه می کنید که ضریب ها کسری هستند. پس تجزیه به کسر های جزئی به صورت زیر است.

$$F(s) = \frac{1}{47} \left(-\frac{28}{s-6} + \frac{28s-67}{s^2+11} \right)$$

$$= \frac{1}{47} \left(-\frac{28}{s-6} + \frac{28s}{s^2+11} - \frac{67 \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}}}{s^2+11} \right)$$

و معکوس تبدیل به صورت زیر است.

$$f(t) = \frac{1}{47} \left(-28e^{6t} + 28\cos(\sqrt{11}t) - \frac{67}{\sqrt{11}}\sin(\sqrt{11}t) \right)$$

$$(c) \quad G(s) = \frac{25}{s^3(s^2+4s+5)}$$

می توان نوشت

$$s^3 = (s-0)^3$$

پس تبدیل به کسر های جزئی می شود.

$$G(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4s+5}$$

صورت ها را مساوی قرار می دهیم.

$$25 = As^2(s^2+4s+5) + Bs(s^2+4s+5) + C(s^2+4s+5) + (Ds+E)s^3$$

$$= (A+D)s^4 + (4A+B+E)s^3 + (5A+4B+C)s^2 + (5B+4C)s + 5C$$

با مساوی قرار دادن ضریب ها داریم.

$$\left. \begin{array}{l} s^4 : A + D = 0 \\ s^3 : 4A + B + E = 0 \\ s^2 : 5A + 4B + C = 0 \\ s^1 : 5B + 4C = 0 \\ s^0 : 5C = 25 \end{array} \right\} \Rightarrow A = \frac{11}{5}, B = -4, C = 5, D = -\frac{11}{5}, E = -\frac{24}{5}$$

سیستم بالا، کمی بغرنج به نظر می‌رسد. ابتدا C را از معادله آخر بدست می‌آوریم. سپس می‌توانیم B را از معادله چهارم بدست آوریم. معادله سوم، A را به ما می‌دهد. الی آخر. اینها را در تجزیه قرار می‌دهیم و از تمام جمله‌ها $\frac{1}{5}$ فاکتور می‌گیریم، در نتیجه داریم.

$$G(s) = \frac{1}{5} \left(\frac{11}{s} - \frac{20}{s^2} + \frac{25}{s^3} - \frac{11s + 24}{s^2 + 4s + 5} \right)$$

حالا باید کسر آخر را مربع کامل کنیم. پس داریم.

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{1}{5} \left(\frac{11}{s} - \frac{20}{s^2} + \frac{25}{s^3} - \frac{11s + 24}{s^2 + 4s + 5} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{11}{s} - \frac{20}{s^2} + \frac{25}{s^3} - \frac{11(s + 2 - 2) + 24}{(s + 2)^2 + 1} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{11}{s} - \frac{20}{s^2} + \frac{25 \frac{2!}{2!}}{s^3} - \frac{11(s + 2)}{(s + 2)^2 + 1} - \frac{2}{(s + 2)^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

و در نهایت، معکوس تبدیل به صورت زیر است.

$$g(t) = \frac{1}{5} \left(11 - 20t + \frac{25}{2} t^2 - 11e^{-2t} \cos(t) - 2e^{-2t} \sin(t) \right)$$

Table of Laplace Transforms

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
1. 1	$\frac{1}{s}$	2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3. $t^n, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	4. $t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5. $\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$	6. $t^{n-\frac{1}{2}}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7. $\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	8. $\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
9. $t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$	10. $t \cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
11. $\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2+a^2)^2}$	12. $\sin(at) + at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2+a^2)^2}$
13. $\cos(at) - at \sin(at)$	$\frac{s(s^2-a^2)}{(s^2+a^2)^2}$	14. $\cos(at) + at \sin(at)$	$\frac{s(s^2+3a^2)}{(s^2+a^2)^2}$
15. $\sin(at+b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2+a^2}$	16. $\cos(at+b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2+a^2}$
17. $\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	18. $\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
19. $e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$	20. $e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$
21. $e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2-b^2}$	22. $e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2-b^2}$
23. $t^n e^{at}, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	24. $f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
25. $u_c(t) = u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{e^{-cs}}{s}$	26. $\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	e^{-cs}
27. $u_c(t) f(t-c)$	$e^{-cs} F(s)$	28. $u_c(t) g(t)$	$e^{-cs} \mathcal{L}\{g(t+c)\}$
29. $e^{ct} f(t)$	$F(s-c)$	30. $t^n f(t), n=1,2,3,\dots$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
31. $\frac{1}{t} f(t)$	$\int_s^\infty F(u) du$	32. $\int_0^t f(v) dv$	$\frac{F(s)}{s}$
33. $\int_0^t f(t-\tau) g(\tau) d\tau$	$F(s) G(s)$	34. $f(t+T) = f(t)$	$\frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1-e^{-sT}}$
35. $f'(t)$	$sF(s) - f(0)$	36. $f''(t)$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
37. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$		

2.4 - حل مسائل با مقدار اولیه بوسیله تبدیلات لاپلاس

Solving IVP's with Laplace Transforms

حالا باز بر می گردیم به معادلات دیفرانسیل. در سه بخش های گذشته در مورد تبدیلات لاپلاس و چگونه معکوس تبدیلات لاپلاس را بگیریم، صحبت کردیم. این ها وسیله های با ارزشی هستند برای چند بخش بعدی. پس آنچه یاد گرفته ایم، فراموش نشود. قبل از پرداختن به معادلات دیفرانسیل، یک فرمول دیگر هم احتیاج داریم. لازم است یاد بگیریم چگونه تبدیل لاپلاس یک مشتق بدست آوریم. ابتدا به خاطر آورید که $f^{(n)}$ یعنی مشتق n ام تابع f حالا حقیقت زیر را داریم.

Fact حقیقت

فرض کنید $f, f', f'', \dots, f^{(n-1)}$ همگی تابع های پیوسته باشند و $f^{(n)}$ یک تابع پیوسته تکه ای باشد پس

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

چون می خواهیم با معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم کار کنیم، راحت تر است که تبدیل لاپلاس دو مشتق اول را داشته باشیم.

$$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$$

توجه داشته باشید که $y(0)$ و $y'(0)$ اغلب همان هایی هستند که در مسائل با مقدار اولیه بکار می بردیم. پس اگر می خواهیم این فرمول ها را برای حل مسائل با مقدار اولیه بکار ببریم، به شرط اولیه در $t = 0$ احتیاج داریم.

مثال 1

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' - 10y' + 9y = 5t, \quad y(0) = -1 \quad y'(0) = 2$$

حل

اولین کاری که باید انجام دهیم این است که تبدیلات لاپلاس همه جملات در معادله دیفرانسیل را بدست آوریم.

$$\mathcal{L}\{y''\} - 10\mathcal{L}\{y'\} + 9\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{5t\}$$

با استفاده از جدول تبدیلات لاپلاس داریم.

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 10(sY(s) - y(0)) + 9Y(s) = \frac{5}{s^2}$$

شرط های اولیه را در معادله بالا می گذاریم و جمله هایی که $Y(s)$ در آنها هست ، جمع آوری می کنیم.

$$(s^2 - 10s + 9)Y(s) + s - 12 = \frac{5}{s^2}$$

برای $Y(s)$ حل می کنیم.

$$Y(s) = \frac{5}{s^2(s-9)(s-1)} + \frac{12-s}{(s-9)(s-1)}$$

اجازه دهید مروری کنیم به آنچه می خواهیم انجام دهیم . سعی ما این است که جواب $y(t)$ برای یک مساله با مقادیر اولیه پیدا کنیم. تا اینجا ، فقط تبدیل لاپلاس جواب را پیدا کرده ایم. پس برای این که جواب را پیدا کنیم ، لازم است معکوس تبدیل لاپلاس را پیدا کنیم. اما ، قبل از پیدا کردن معکوس لاپلاس ، ملاحظه می کنید که باید دو مرتبه کسر های جزئی انجام دهیم. اما ، اگر دو جمله عبارت بالا را ادغام کنیم ، فقط لازم است کسر ها جزئی را یک مرتبه انجام دهیم. پس داریم.

$$Y(s) = \frac{5 + 12s^2 - s^3}{s^2(s-9)(s-1)}$$

تجزیه به کسر های جزئی این تبدیل به صورت زیر است.

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-9} + \frac{D}{s-1}$$

صورت ها را مساوی قرار می دهیم.

$$5 + 12s^2 - s^3 = As(s-9)(s-1) + B(s-9)(s-1) + Cs^2(s-1) + Ds^2(s-9)$$

مقادیر مناسبی برای s پیدا می کنیم، و برای اعداد ثابت حل می کنیم، پس داریم.

$$\begin{array}{llll}
 s=0 & 5=9B & \Rightarrow & B=\frac{5}{9} \\
 s=1 & 16=-8D & \Rightarrow & D=-2 \\
 s=9 & 248=648C & \Rightarrow & C=\frac{31}{81} \\
 s=2 & 45=-14A+\frac{4345}{81} & \Rightarrow & A=\frac{50}{81}
 \end{array}$$

حالا ، اعداد ثابت را جانشین می کنیم.

$$Y(s) = \frac{50}{81} + \frac{5}{s^2} + \frac{31}{81} \frac{1}{s-9} - \frac{2}{s-1}$$

در نهایت با پیدا کردن معکوس ، جواب مساله را به صورت زیر بدست می آوریم.

$$y(t) = \frac{50}{81} + \frac{5}{9}t + \frac{31}{81}e^{9t} - 2e^t$$

کار زیادی برای حل مساله بالا انجام دادیم ، در صورتی که با استفاده از روش های فصول قبل در جلد اول ، می توانستیم سریع تر جواب را پیدا کنیم. می خواستیم طریق بکار بردن تبدیلات لاپلاس برای حل یک مساله با مقدار اولیه را نشان دهیم. اما گاهی اوقات ، مسائلی پیش می آید ، که با روش های قبلی که خوانده ایم ، نمی توانیم آنها را حل کنیم. به یک مساله تقریبا ساده دیگر نگاهی می کنیم.

مثال 2

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$2y'' + 3y' - 2y = te^{-2t}, \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = -2$$

حل

مانند مثال قبل ، ابتدا تبدیل لاپلاس تمام جمله های معادله دیفرانسیل را پیدا می کنیم. با قرار دادن شرط های اولیه داریم.

$$2(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)) + 3(sY(s) - y(0)) - 2Y(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$$

$$(2s^2 + 3s - 2)Y(s) + 4 = \frac{1}{(s+2)^2}$$

برای $Y(s)$ حل می‌کنیم.

$$Y(s) = \frac{1}{(2s-1)(s+2)^3} - \frac{4}{(2s-1)(s+2)}$$

همان‌طور که قبلاً‌ها انجام دادیم، دو جمله را ادغام می‌کنیم.

$$Y(s) = \frac{1 - 4(s+2)^2}{(2s-1)(s+2)^3}$$

$$= \frac{-4s^2 - 16s - 15}{(2s-1)(s+2)^3}$$

پس، تجزیه کسرهای جزئی به صورت زیر است.

$$Y(s) = \frac{A}{2s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} + \frac{D}{(s+2)^3}$$

صورت‌ها را مساوی قرار می‌دهیم، پس داریم.

$$-4s^2 - 16s - 15 = A(s+2)^3 + B(2s-1)(s+2)^2 + C(2s-1)(s+2) + D(2s-1)$$

$$= (A+2B)s^3 + (6A+7B+2C)s^2 + (12A+4B+3C+2D)s + 8A-4B-2C-D$$

در نتیجه سیستم زیر را بدست می‌آوریم.

$$\left. \begin{array}{l} s^3 : \quad A + 2B = 0 \\ s^2 : \quad 6A + 7B + 2C = -4 \\ s^1 : 12A + 4B + 3C + 2D = -16 \\ s^0 : \quad 8A - 4B - 2C - D = -15 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -\frac{192}{125} \quad B = \frac{96}{125} \\ C = -\frac{2}{25} \quad D = -\frac{1}{5} \end{array}$$

مخرج مشترک تمام این ضریب ها 125 است. از این مخرج مشترک فاکتور می گیریم.

$$Y(s) = \frac{1}{125} \left(\frac{-192}{2(s - \frac{1}{2})} + \frac{96}{s+2} - \frac{10}{(s+2)^2} - \frac{25 \frac{2!}{2!}}{(s+2)^3} \right)$$

ملاحظه می کنید که از مخرج جمله اول هم 2 فاکتور گرفته ایم. صورت جمله آخر هم اصلاح کرده ایم تا با جمله داخل جدول تبدیلات جور شود. معکوس تبدیل را بدست می آوریم. پس داریم.

$$y(t) = \frac{1}{125} \left(-96e^{\frac{t}{2}} + 96e^{-2t} - 10te^{-2t} - \frac{25}{2}t^2e^{-2t} \right)$$

مثال 3

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y'' - 6y' + 15y = 2\sin(3t), \quad y(0) = -1 \quad y'(0) = -4$$

حل

تبدیل تمام جملات را پیدا می کنیم و سپس شرایط اولیه را جانشین می کنیم.

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6(sY(s) - y(0)) + 15Y(s) &= 2 \frac{3}{s^2 + 9} \\ (s^2 - 6s + 15)Y(s) + s - 2 &= \frac{6}{s^2 + 9} \end{aligned}$$

حالا، برای $Y(s)$ حل می کنیم و همه را در یک جمله ادغام می کنیم، همانطور که در مثال قبل عمل کردیم.

$$Y(s) = \frac{-s^3 + 2s^2 - 9s + 24}{(s^2 + 9)(s^2 - 6s + 15)}$$

حالا ، تجزیه به کسر های جزئی می کنیم.

$$Y(s) = \frac{As + B}{s^2 + 9} + \frac{Cs + D}{s^2 - 6s + 15}$$

حالا ، صورت ها را مساوی قرار می دهیم.

$$\begin{aligned} -2s^2 - 9s + 24 &= (As + B)(s^2 - 6s + 15) + (Cs + D)(s^2 + 9) \\ &= (A + C)s^3 + (-6A + B + D)s^2 + (15A - 6B + 9C)s + 15B + 9D \end{aligned}$$

ضریب ها را مساوی قرار می دهیم و برای اعداد ثابت حل می کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} s^3 : \quad A + C = -1 \\ s^2 : \quad -6A + B + D = 2 \\ s^1 : \quad 15A - 6B + 9C = -9 \\ s^0 : \quad 15B + 9D = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} A = \frac{1}{10} & B = \frac{1}{10} \\ C = -\frac{11}{10} & D = \frac{5}{2} \end{array}$$

حالا ، اینها را در تجزیه کسر های جزئی قرار می دهیم , مخرج جمله دوم را مربع کامل می کنیم و برای مرحله معکوس تبدیل , صورت ها را اصلاح می کنیم , پس داریم.

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{1}{10} \left(\frac{s+1}{s^2+9} + \frac{-11s+25}{s^2-6s+15} \right) \\
 &= \frac{1}{10} \left(\frac{s+1}{s^2+9} + \frac{-11(s-3+3)+25}{(s-3)^2+6} \right) \\
 &= \frac{1}{10} \left(\frac{s}{s^2+9} + \frac{1\frac{1}{3}}{s^2+9} - \frac{11(s-3)}{(s-3)^2+6} - \frac{8\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}}{(s-3)^2+6} \right)
 \end{aligned}$$

در نهایت معکوس تبدیل را پیدا می‌کنیم.

$$y(t) = \frac{1}{10} \left(\cos(3t) + \frac{1}{3} \sin(3t) - 11e^{3t} \cos(\sqrt{6}t) - \frac{8}{\sqrt{6}} e^{3t} \sin(\sqrt{6}t) \right)$$

تا کنون ، مقدار اولیه در $t = 0$ داشتیم. اما همیشه چنین نیست و گاهی اوقات ، مقدار اولیه در نقطه‌ای جز $t = 0$ خواهیم داشت.

مثال 4

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید

$$y'' + 4y' = \cos(t-3) + 4t, \quad y(3) = 0 \quad y'(3) = 7$$

حل

اولین کاری که باید انجام دهیم این است که چون شرط‌های اولیه در $t = 0$ نیستند ، آنها را اصلاح کنیم. زیرا تنها راهی که می‌توانیم تبدیلات لاپلاس مشتق‌ها را بگیریم ، این است که شرط‌های اولیه در $t = 0$ باشند.

این یعنی ، لازم است مساله با شرط اولیه را طوری تنظیم کنیم که شرط‌های اولیه در $t = 0$ باشند. این کار آسانی است. اما باید تغییراتی در متغیر بدهیم. پس تعریف زیر را خواهیم داشت.

اجازه دهید با معادله دیفرانسیل اصلی شروع کنیم.

$$y''(t) + 4y'(t) = \cos(t-3) + 4t$$

ملاحظه می کنید که t را در قسمت مشتق ها هم اضافه کردیم تا کار ها بطور صحیح پیش برود. حالا، عمل جانشینی برای t انجام می دهیم.

$$y''(\eta+3)+4y'(\eta+3)=\cos(\eta)+4(\eta+3)$$

حالا ، تعریف زیر را هم انجام می دهیم.

$$u(\eta)=y(\eta+3)$$

پس بر اساس قاعده زنجیره ای برای مشتق اول داریم.

$$u'(\eta)=\frac{du}{d\eta}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{d\eta}=y'(\eta+3)$$

به همین طریق ، برای مشتق دوم داریم.

$$u''(\eta)=y''(\eta+3)$$

شرط های اولیه برای $u(\eta)$ به صورت زیر هستند.

$$\begin{aligned} u(0) &= y(0+3) = y(3) = 0 \\ u'(0) &= y'(0+3) = y'(3) = 7 \end{aligned}$$

پس ، مساله با شرط اولیه برای متغیر های جدید به صورت زیر است.

$$u''+4u'=\cos(\eta)+4\eta+12, \quad u(0)=0 \quad u'(0)=7$$

عبارت بالا ، یک مساله با مقدار اولیه است ، که می توانیم روی آن تبدیلات لاپلاس بکار ببریم به شرطی که در جدول بجای t ها ، η ها بکار ببریم. پس با بکار بردن تبدیلات لاپلاس برای این معادله جدید و مقدار اولیه جدید ، داریم.

$$s^2 U(s) - su(0) - u'(0) + 4(sU(s) - u(0)) = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{4}{s^2} + \frac{12}{s}$$

$$(s^2 + 4s)U(s) - 7 = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{4 + 12s}{s^2}$$

برای $U(s)$ حل می‌کنیم. داریم.

$$(s^2 + 4s)U(s) = \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{4 + 12s + 7s^2}{s^2}$$

$$U(s) = \frac{1}{(s+4)(s^2+1)} + \frac{4 + 12s + 7s^2}{s^3(s+4)}$$

ملاحظه می‌کنید که بر خلاف مثال‌های قبل، جمله‌ها را تلفیق نکردیم. در مثال‌های قبل این کار را کردیم، زیرا مخرج یک جمله، مخرج مشترک تمام جمله‌ها بود. در صورتی که در این مثال جمله‌ها تلفیق می‌کردیم، پاسخ بغرنج و پیچیده‌ای بدست می‌آوردیم. اینجا هم قصد نداریم کارها را برای شما مشکل کنیم. تا کنون، تجزیه به کسرهای جزئی زیاد انجام داده‌ایم. با تجزیه به کسرهای جزئی داریم.

$$\frac{1}{(s+4)(s^2+1)} = \frac{\frac{1}{17}}{s+4} + \frac{1}{17} \left(\frac{-s+4}{s^2+1} \right)$$

$$\frac{4 + 12s + 7s^2}{s^3(s+4)} = \frac{1}{s^3} + \frac{\frac{11}{4}}{s^2} + \frac{\frac{17}{16}}{s} - \frac{\frac{17}{16}}{s+4}$$

این‌ها را در تبدیل می‌گذاریم و جمله‌های مشابه ادغام می‌کنیم، پس داریم.

$$U(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{\frac{11}{4}}{s^2} + \frac{\frac{17}{16}}{s} - \frac{\frac{273}{272}}{s+4} + \frac{1}{17} \left(\frac{-s+4}{s^2+1} \right)$$

$$= \frac{1 \frac{2!}{2!}}{s^3} + \frac{\frac{11}{4}}{s^2} + \frac{\frac{17}{16}}{s} - \frac{\frac{273}{272}}{s+4} + \frac{1}{17} \left(\frac{-s}{s^2+1} + \frac{4}{s^2+1} \right)$$

حالا ، با معکوس گرفتن ، جواب مساله با مقدار اولیه جدید بدست می آوریم. فراموش نشود بجای t ها ، باید η ها را بکار ببریم.

$$u(\eta) = \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{11}{4}\eta + \frac{17}{16} - \frac{273}{272}e^{-4\eta} + \frac{1}{17}(4\sin(\eta) - \cos(\eta))$$

این جوابی که می خواهیم ، نیست. به دنبال $y(t)$ هستیم. این کار را با توجه که

$$y(t) = y(\eta + 3) = u(\eta) = u(t - 3)$$

است. پس جواب مساله با شرط اولیه ، به صورت زیر است.

$$y(t) = \frac{1}{2}(t-3)^2 + \frac{11}{4}(t-3) + \frac{17}{16} - \frac{273}{272}e^{-4(t-3)} + \frac{1}{17}(4\sin(t-3) - \cos(t-3))$$

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t - \frac{43}{16} - \frac{273}{272}e^{-4(t-3)} + \frac{1}{17}(4\sin(t-3) - \cos(t-3))$$

پس می توانیم مساله با شرط اولیه ، هنگامی که $t = 0$ نیست را حل کنیم.