



RIAZISARA

www.riazisara.ir **سایت ویژه ریاضیات**

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

<https://t.me/riazisara>



ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



همراهی کلاس خصوصی آنلاین ریاضی ۰۹۲۲۰۶۳۳۰۶۲

بنام خدا
ریاضیات مهندسی
جلد اول

Engineering Mathematics

تألیف

انوشیروان صراف

دبیر اسبق دبیرستانهای تهران و شیراز

(سال های ۱۳۴۲ - ۱۳۶۵)

مدرس سابق دانشگاه ایالتی میسوری

(سال های ۱۹۹۶ - ۲۰۰۹)

آدرس ایمیل

John_Sarraf@yahoo.com

- 1) Advanced Engineering Mathematics, By Erwin Kreyszig
- 2) Differential Equations for Engineers, By David Kalbaugh
- 3) Understanding Engineering Mathematics, By Bill Cox
- 4) A Concise Handbook of Mathematics, Physics, and Engineering Sciences,
by Andrei Polyinin and Alexi Chernoutsan

بنام خداوند جان و خرد
فصل اول
سری ها ، انتگرال ها و تبدیلات فوریه
Fourier's
Series, Integrals and Transforms
بخش اول
فرمول های مهم

بخش ۱.۱ فرمول های مهم
پیش نیاز ها: یک دره کامل جبر ، هندسه ، مثلثات ، حسابان و معادلات دیفرانسیل

فرمول های مشتق
فرمول های عمومی General Formulas

1. $\frac{d}{dx}(c) = 0$
2. $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$
3. $\frac{d}{dx}(f(x) g(x)) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$
4. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$, for real numbers n
5. $\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$
6. $\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x)$
7. $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
8. $\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

تابع های مثلثاتی Trigonometric Functions

$$9. \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$10. \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$11. \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$12. \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$13. \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$14. \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

معکوس تابع های مثلثاتی Inverse Trigonometric Functions

$$15. \frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$16. \frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$17. \frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

$$18. \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$19. \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$20. \frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

تابع های توانی و لگاریتم Exponential and Logarithmic Functions

$$21. \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$22. \frac{d}{dx}(\ln |x|) = \frac{1}{x}$$

$$23. \frac{d}{dx}(b^x) = b^x \ln b$$

$$24. \frac{d}{dx}(\log_b x) = \frac{1}{x \ln b}$$

تابع های هیپر بالیک Hyperbolic Functions

$$25. \frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$$

$$26. \frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$$

$$27. \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$$

$$28. \frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

$$29. \frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x$$

$$30. \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -\operatorname{csch} x \coth x$$

معکوس تابع های هیپر بالیک

$$31. \frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$32. \frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2} (|x| < 1)$$

$$33. \frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < x < 1)$$

$$34. \frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$$

$$35. \frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| > 1)$$

$$36. \frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{1+x^2}} \quad (x \neq 0)$$

فرمول های مشتق

Basic Forms فرمول های اصلی

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad n \neq -1 \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| \quad (2)$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| \quad (4)$$

تابع های گویا Rational Functions

$$\int \frac{1}{(x+a)^2} dx = -\frac{1}{x+a} \quad (5)$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1 \quad (6)$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1} ((n+1)x - a)}{(n+1)(n+2)} \quad (7)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \quad (8)$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (9)$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln |a^2+x^2| \quad (10)$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2} dx = x - a \tan^{-1} \frac{x}{a} \quad (11)$$

بست سری های توانی Power Series Expansions

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (\text{Taylor series})$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}x^7 + \dots$$

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(k!)^2 2^{2k}}$$

$$J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k!(k+1)! 2^{2k+1}}$$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{k! \Gamma(n+k+1) 2^{2k+n}}$$

جدول تبدیل های لاپلاس Table of Laplace Transforms

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

1.	1	$\frac{1}{s}$
2.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
3.	$t^n, n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4.	$t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$
5.	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{\frac{3}{2}}}$

6.	$t^{n-\frac{1}{2}}, \quad n=1,2,3,\dots$	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) \sqrt{\pi}}{2^n s^{n+\frac{1}{2}}}$
7.	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
8.	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
9.	$t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
10.	$t \cos(at)$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
11.	$\sin(at) - at \cos(at)$	$\frac{2a^3}{(s^2 + a^2)^2}$
12.	$\sin(at) + at \cos(at)$	$\frac{2as^2}{(s^2 + a^2)^2}$
13.	$\cos(at) - at \sin(at)$	$\frac{s(s^2 - a^2)}{(s^2 + a^2)^2}$
14.	$\cos(at) + at \sin(at)$	$\frac{s(s^2 + 3a^2)}{(s^2 + a^2)^2}$
15.	$\sin(at + b)$	$\frac{s \sin(b) + a \cos(b)}{s^2 + a^2}$
16.	$\cos(at + b)$	$\frac{s \cos(b) - a \sin(b)}{s^2 + a^2}$

17.	$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
18.	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
19.	$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
20.	$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$
21.	$e^{at} \sinh(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$
22.	$e^{at} \cosh(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$
23.	$t^n e^{at}, \quad n=1,2,3,\dots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
24.	$f(ct)$	$\frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right)$
25.	$u_c(t) = u(t-c)$ Heaviside Function	$\frac{e^{-cs}}{s}$
26.	$\delta(t-c)$ Dirac Delta Function	e^{-cs}

- | | | |
|-----|----------------------------------|---|
| 27. | $u_c(t)f(t-c)$ | $e^{-cs}F(s)$ |
| 28. | $u_c(t)g(t)$ | $e^{-cs}\mathcal{L}\{g(t+c)\}$ |
| 29. | $e^{ct}f(t)$ | $F(s-c)$ |
| 30. | $t^n f(t), \quad n=1,2,3,\dots$ | $(-1)^n F^{(n)}(s)$ |
| 31. | $\frac{1}{t}f(t)$ | $\int_s^\infty F(u)du$ |
| 32. | $\int_0^t f(v)dv$ | $\frac{F(s)}{s}$ |
| 33. | $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$ | $F(s)G(s)$ |
| 34. | $f(t+T)=f(t)$ | $\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}$ |
| 35. | $f'(t)$ | $sF(s)-f(0)$ |
| 36. | $f''(t)$ | $s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$ |
| 37. | $f^{(n)}(t)$ | $s^n F(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)\dots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$ |

بخش ۱.۲ سری فوریه Fourier's Series

مقدمه

ریاضیات مهندسی عبارت است از هنر بکار بردن ریاضیات برای حل مسائل زندگی حقیقی. در ریاضیات مهندسی، تئوری‌های ریاضی را برای حل مسائل فیزیک، شیمی و کلیه علوم مهندسی بکار می‌بریم.

یکی از رشته‌های مهم ریاضی که در علوم مهندسی بکار می‌رود، معادلات دیفرانسیل است و یکی از فصول مهم معادلات دیفرانسیل، معادلات دیفرانسیل پاره‌ای است. بسیاری از مسائل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را می‌توانیم حل کنیم، اگر بتوانیم تابع داده شده را به صورت یک جمع نامتناهی سینوس‌ها و کسینوس‌ها بنویسیم. اینجا است که سری‌های مثلثاتی، یعنی سری فوریه به کمک ما می‌آید. به همین دلیل اولین فصل این دفتر را به سری فوریه اختصاص داده‌ایم.

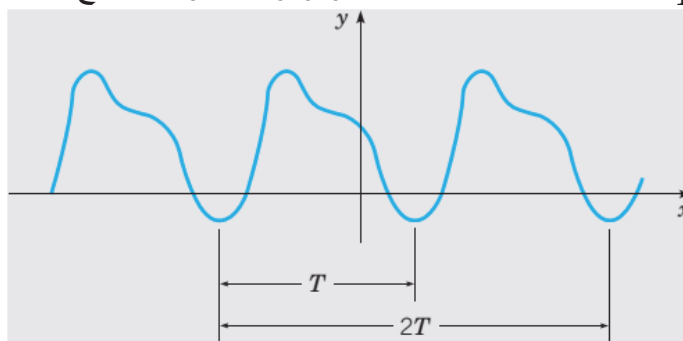
سری فوریه

سری فوریه، وسیله اساسی جهت بیان تابع‌های متناوب است. این تابع‌ها نقش مهمی در کار برد‌های مختلف دارند. مسلم است که شما با این تابع‌ها آشنا هستید. اما برای یادآوری، چند نکته را گوشزد می‌کنیم.

اگر p یک عدد مثبت باشد بنام دوره تناوب $f(x)$ ، پس $f(x+p) = f(x)$ است. اگر $f(x)$ دارای دوره تناوب p باشد، پس $2p$ هم دوره تناوب است. و بطور کلی $f(x+np) = f(x)$

است برای تمام x ‌ها.

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دارای دوره تناوب p باشند، پس $C_1f(x) + C_2g(x)$ هم دارای دوره تناوب p است. اینجا C_1, C_2 اعداد ثابت هستند. تصویر زیر نمودار یک تابع متناوب است.



فرض کنید $f(x)$ یک تابع با دوره تناوب 2π باشد، بطوری که بتوان آنرا توسط یک سری y نشان داد بطوری که همگرا باشد و دارای جمع $f(x)$ باشد، پس می‌نویسیم.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \quad (1)$$

شماره (1) را سری فوریه $f(x)$ می‌نامیم. ضریب‌های شماره (1) را ضریب‌های فوریه $f(x)$ می‌نامند. و با فرمول‌های اویلر بدست می‌آیند. یعنی

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (2)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

یک مثال ساده

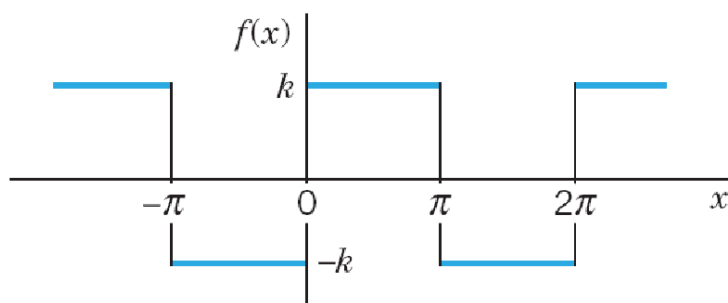
مثال ۱

موج مستطیلی متناوب

مطلوب است ضریب های فوریه برای تابع متناوب $f(x)$ با فرمول زیر.

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{اگر } -\pi < x < 0 \\ k & \text{اگر } 0 < x < \pi \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x) \quad (5)$$

تصویر زیر



این نوع تابع ها ، در مبحث اثر نیروی خارجی بر سیستم های مکانیکی ، مدار های الکتریکی و غیره بکار می روند.

حل

مقدار $f(x)$ در یک نقطه ، اثری روی انتگرال ندارد. پس می توانیم $f(x)$ را در $x = 0$ و $x = \pm\pi$ تعریف نشده ، رها کنیم.

پس بر اساس (2) داریم

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 -k dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} k dx = -\frac{1}{2\pi} \pi c + \frac{1}{2\pi} \pi c = 0$$

بر اساس (3) داریم.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-k) \cos nx dx + \int_0^{\pi} k \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-k \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 + k \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right] = 0 \end{aligned}$$

زیرا $\sin(nx) = 0$ است در $x = \pm\pi, 0, n = 1, 2, \dots$ بر اساس (4) داریم.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-k) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} k \sin nx \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[k \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^0 - k \frac{\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} \right].$$

چون $\cos(0) = 1$ و $\cos(-a) = \cos(a)$ پس

$$b_n = \frac{k}{n\pi} [\cos 0 - \cos(-n\pi) - \cos n\pi + \cos 0] = \frac{2k}{n\pi} (1 - \cos n\pi).$$

حالا، داریم $\cos(\pi) = -1, \cos(2\pi) = 1, \cos(3\pi) = -1, \dots$ پس بطور کلی

$$\cos(n\pi) = \begin{cases} -1 & \text{برای } n \text{ فرد} \\ 1 & \text{برای } n \text{ زوج} \end{cases}$$

پس

$$1 - \cos(n\pi) = \begin{cases} 2 & \text{برای } n \text{ فرد} \\ 0 & \text{برای } n \text{ زوج} \end{cases}$$

لذا ضریب های فوریه b_n به قرار زیر هستند.

$$b_1 = \frac{4k}{\pi}, \quad b_2 = 0, \quad b_3 = \frac{4k}{3\pi}, \quad b_4 = 0, \quad b_5 = \frac{4k}{5\pi}, \dots$$

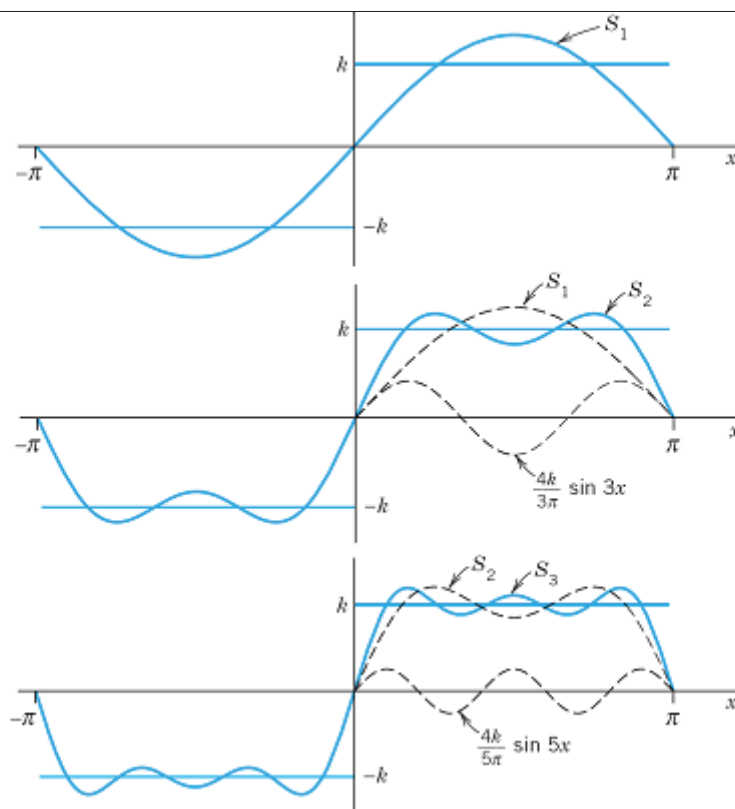
چون a_n ها صفر هستند، سری فوریه $f(x)$ به صورت زیر است.

$$\frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$

جمع های جزئی به صورت زیر هستند.

$$S_1 = \frac{4k}{\pi} \sin x, \quad S_2 = \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right),$$

تصویر های زیر، نشان می دهند، سری همگرا است.



ملاحظه می کنیم که در $x = 0$ و $x = \pi$ ، یعنی نقاط ناپیوستگی، تمام جمع های پاره ای مقدار صفر دارند میانگین حد های k و $-k$ تابع در این نقاط صفر است.

علاوه بر این، اگر فرض کنیم $f(x)$ عبارت است از جمع سری و اگر $x = \frac{\pi}{2}$ قرار دهیم، خواهیم داشت.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = k = \frac{4k}{\pi} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - + \dots\right).$$

و در نهایت داریم.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + - \dots = \frac{\pi}{4}.$$

این فرمول معروف لیبینیز Leibniz است. این فرمول نشان می دهد مقادیر سری های مختلف با جمله های ثابت را می توان توسط محاسبه سری فوریه در نقاط مشخص، بدست آورد.

یاد آوری: می گوئیم دو تابع u و v در $a \leq x \leq \beta$ متعامد هستند، اگر ضرب داخلی آنها صفر باشد. یعنی اگر

$$\int_a^\beta u(x)v(x) = 0 \quad (6)$$

یک مجموعه از تابع ها را **متعامد متقابل** **Mutually Orthogonal** می گویند اگر هر دو تابع متمایز در آن مجموعه ، متعامد باشند.

قضیه ۱ متعامد بودن تابع های سینوس و کسینوس

Orthogonality of the Sine and Cosine Functions

تابع های $\sin nx$ و $\cos nx$ برای $n = 1, 2, \dots$ تشکیل یک مجموعه تابع های متعامد متقابل در بازه $-\pi \leq x \leq \pi$ و یا هر بازه به طول 2π می دهند ، یعنی ضرب داخلی آنها صفر است. پس برای هر عدد صحیح m و n داریم.

$$(a) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0 \quad (n \neq m)$$

$$(b) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0 \quad (n \neq m)$$

و برای $n \neq m$ یا $n = m$ داریم.

$$(c) \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0$$

قضیه ۲ همگرایی سری فوریه

فرض می کنیم $f(x)$ یک تابع متناوب باشد با دوره تناوب 2π و در بازه $-\pi \leq x \leq \pi$ تکه ای پیوسته باشد. علاوه بر این فرض می کنیم $f(x)$ مشتق سمت راست و سمت چپ در هر نقطه آن بازه داشته باشد. پس سری فوریه تابع $f(x)$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

با ضرایب های

$$(a) \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$(b) \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(c) \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad n = 1, 2, \dots$$

همگرا است. جمع آن $f(x)$ است، بجز در نقاط x_0 که $f(x)$ ناپیوسته است. در این نقاط، جمع سری عبارت است از میانگین حد های سمت راست و سمت چپ $f(x)$ در x_0 .

حد سمت چپ $f(x)$ در x_0 چنین تعریف می شود: حد $f(x)$ در حالی که x از سمت چپ به x_0 نزدیک می شود، و آنرا با نماد $f(x_0 - 0)$ نشان می دهند. پس

$$f(x_0 - 0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h)$$

حد سمت راست $f(x)$ در x_0 چنین تعریف می شود: حد $f(x)$ در حالی که x از سمت راست به x_0 نزدیک می شود، و آنرا با نماد $f(x_0 + 0)$ نشان می دهند. پس

$$f(x_0 + 0) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h)$$

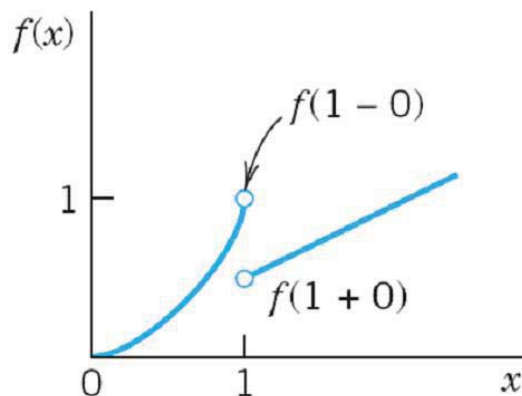
حد های سمت چپ و راست $f(x)$ در x_0 به ترتیب چنین تعریف می شوند: حد های

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{-h} \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h}$$

هنگامی که $h \rightarrow 0$

توجه دارید که فرمول ها همیشه از چپ به راست خوانده می شوند.

البته اگر $f(x)$ در x_0 پیوسته باشد، جمله دوم در صورت های کسر ها فقط $f(x_0)$ است. تصویر زیر



در تصویر بالا تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{اگر } x < 1 \\ \frac{x}{2} & \text{اگر } x > 1 \end{cases}$$

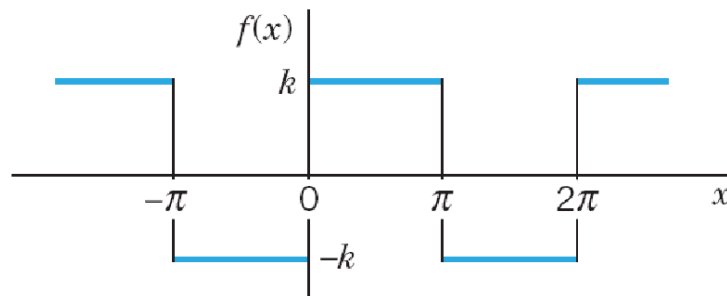
حد سمت چپ $f(1 - 0) = 1$ است.

حد سمت راست $f(1 + 0) = \frac{1}{2}$ است.

مثال ۲

همگرایی در نقطه جهش

در مثال ۱ موج مستطیلی در $x = 0$ یک جهش دارد. حد سمت چپ آن $-k$ است و حد سمت راست آن k است. تصویر مثال ۱ را مجدداً در ذیل ملاحظه می کنید.



پس میانگین این دو حد، صفر است.

سری فوریه در مثال ۱ که مجدداً در ذیل می آوریم.

$$\frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$

در حقیقت به صفر همگرا است وقتی که $x = 0$ است. زیرا تمام جمله ها شامل سینوس هستند و می دانیم که $\sin(0) = 0$ است. بقیه جهش ها هم، با قضیه ۲ هماهنگی دارند.

تابع های با هر دوره تناوب $p = 2L$

گفتیم $f(x+p) = f(x)$ است. پس، سری فوریه تابع $f(x)$ با دوره تناوب $2L$ بدست می آوریم.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

با ضریب های فوریه $f(x)$ که بوسیله فرمول اویلر بدست می آید.

$$(a) \quad a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$(b) \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(c) \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

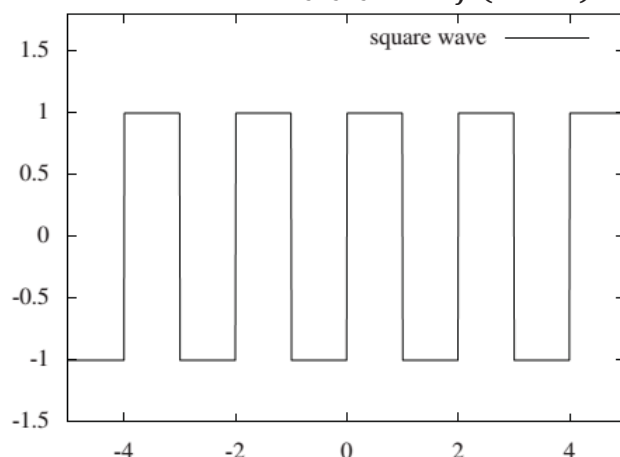
مثال ۳

مثال سری فوریه

سری فوریه برای تابع موج مربعی زیر را پیدا کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x \leq 1 \\ -1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

برای $x \in (0, 2]$ با $f(x+2) = f(x)$ تصویر زیر.



حل

ضریب های فوریه را محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 f(x) \sin \frac{2n\pi x}{2} dx \\ &= \int_0^1 (1) \sin(n\pi x) dx + \int_1^2 (-1) \sin(n\pi x) dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[-\cos(n\pi x) \Big|_0^1 - -\cos(n\pi x) \Big|_1^2 \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} [-\cos(n\pi) + 1 + \cos(2n\pi) - \cos(n\pi)] \\ &= \frac{2}{n\pi} [1 - \cos(n\pi)]. \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^2 f(x) \cos \frac{2n\pi x}{2} dx \\ &= \int_0^1 (1) \cos(n\pi x) dx + \int_1^2 (-1) \cos(n\pi x) dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left[\sin(n\pi x) \Big|_0^1 - \sin(n\pi x) \Big|_1^2 \right]$$

$$= 0.$$

و

$$b_0 = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 1 dx - \int_1^2 dx = x \Big|_0^1 - x \Big|_1^2 = 0.$$

در نهایت.

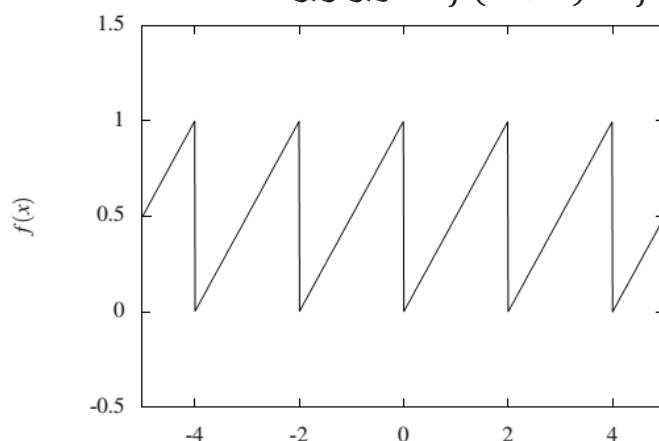
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi)) \sin(n\pi x).$$

مثال ۴

مطلوب است سری فوریه تابع موج دندانه اره Sawtooth Wave زیر.

$$f(x) = \frac{x}{2}$$

برای $x \in (0, 2]$ و $f(x+2) = f(x)$ تصویر زیر



ضریب های فوریه را محاسبه می کنیم. $T = 2$ پس $L = 1$ است.

$$a_n = \frac{1}{1} \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{1} dx = \int_0^2 \frac{x}{2} \sin(n\pi x) dx = -\frac{\cos 2n\pi}{n\pi}$$

و برای $n \neq 0$

$$b_n = \frac{1}{1} \int_0^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{1} dx = 0$$

و برای $n = 0$

$$b_0 = \frac{1}{1} \int_0^2 \frac{x}{2} dx = 1.$$

و در نهایت.

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\cos(2n\pi)}{n\pi} \sin(n\pi x).$$

مثال ۵

سری فوریه برای تابع زیر محاسبه کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

برای

$$f(x+2) = f(x).$$

حل

تابع، متناوب است با دوره تناوب $T = 2$ پس $L = 1$ ضریب ها عبارتند از.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \sin \frac{n\pi x}{1} dx \\ &= \int_{-1}^0 1 \sin(n\pi x) dx + \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi x) \Big|_{-1}^0 - \left(\frac{1}{n\pi} x \cos(n\pi x) \right) \Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \cos(n\pi x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{n\pi} (1 - \cos(-n\pi)) - \frac{1}{n\pi} (\cos(n\pi) - 0) + \frac{1}{n^2 \pi^2} (0 - 0) \\ &= -\frac{1}{n\pi} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \cos \frac{n\pi x}{1} dx \\
 &= \int_{-1}^0 1 \cos(n\pi x) dx + \int_0^1 x \cos(n\pi x) dx \\
 &= \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{n\pi} x \sin(n\pi x) \Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi} \int_0^1 \sin(n\pi x) dx \\
 &= \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{n\pi} x \sin(n\pi x) \Big|_0^1 + \frac{1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{n^2\pi^2} (\cos(n\pi) - 1).
 \end{aligned}$$

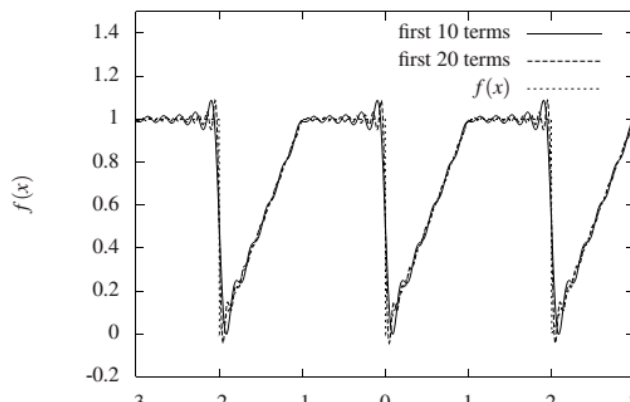
و

$$b_0 = \int_{-1}^0 (1)(1) dx + \int_0^1 x dx = x \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = 0 - (-1) + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

و در نهایت.

$$f(x) = \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n\pi} \sin(n\pi x) + \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x) \right).$$

تصویر زیر.



مثال ۶

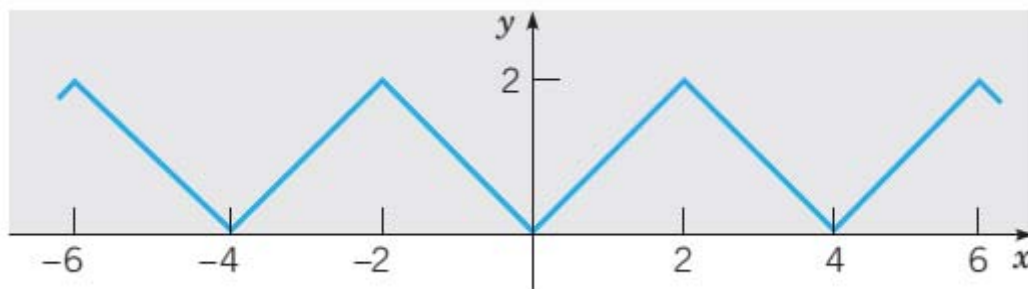
فرض کنید یک سری فوریه وجود دارد که به تابع f زیر همگرا می شود.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2 \end{cases} \\
 f(x+4) &= f(x)
 \end{aligned}$$

مطلوب است ضریب های سری فوریه برای این تابع

حل

این تابع موج مثلثی است با دوره تناوب 4 است. تصویر زیر.



پس در این حالت $L = 2$ است. و سری فوریه به صورت زیر است.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{2} + b_m \sin \frac{m\pi x}{2} \right),$$

برای $m = 0$ داریم.

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = 1 + 1 = 2.$$

برای $m > 0$ داریم.

$$a_m = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) \cos \frac{m\pi x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos \frac{m\pi x}{2} dx.$$

این انتگرال از طریق انتگرال گیری پاره ای محاسبه می شود. نتیجه به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{m\pi} x \sin \frac{m\pi x}{2} - \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \cos \frac{m\pi x}{2} \right] \Big|_{-2}^0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{m\pi} x \sin \frac{m\pi x}{2} + \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \cos \frac{m\pi x}{2} \right] \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 + \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \cos m\pi + \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \cos m\pi - \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \right] \\ &= \frac{4}{(m\pi)^2} (\cos m\pi - 1), \quad m = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} -\frac{8}{(m\pi)^2} & \text{اگر } m \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } m \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

و در نهایت داریم.

$$b_m = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

ضریب های بدست آمده بالا را در تابع می گذاریم ، پس داریم.

$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots \right)$$

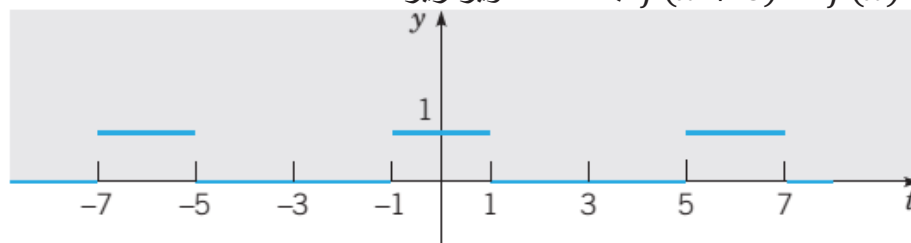
$$= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos(m\pi x/2)}{m^2}$$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}.$$

مثال ۷

فرض کنید داشته باشیم.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 3 \end{cases}$$

و فرض کنید $f(x+6) = f(x)$ باشد ، تصویر زیر

مطلوب است ضریب های سری فوریه.

حل

چون دوره تناوب f مساوی 6 است ، پس $L = 3$ است. در نتیجه سری فوریه به صورت زیر است.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{3} + b_n \sin \frac{n\pi x}{3} \right)$$

ضریب های a_n و b_n با $L = 3$ را به صورت های زیر بدست می آوریم.

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 dx = \frac{2}{3}$$

به همین طریق

$$a_n = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

و

$$b_n = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \sin \frac{n\pi x}{3} dx = -\frac{1}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_{-1}^1 = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

و در نهایت، سری های فوریه f به صورت زیر است.

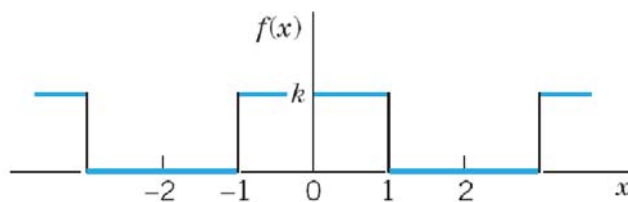
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} \cos \frac{n\pi x}{3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left[\cos \left(\frac{\pi x}{3} \right) + \frac{\cos \left(\frac{2\pi x}{3} \right)}{2} - \frac{\cos \left(\frac{4\pi x}{3} \right)}{4} - \frac{\cos \left(\frac{5\pi x}{3} \right)}{5} + \dots \right] \end{aligned}$$

مثال ۸

موج مستطیلی تناوبی

سری فوریه تابع زیر را پیدا کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } -2 < x < -1 \\ k & \text{اگر } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{اگر } 1 < x < 2 \end{cases}$$

برای $p = 2L = 4, L = 2$ تصویر زیر

حل

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{k}{2} \\ a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 k \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{2k}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

پس $a_n = 0$ است، اگر n زوج باشد و $a_n = \frac{2k}{n\pi}$ است، اگر $n = 1, 5, 9, \dots$ باشد و برای

$$a_n = -\frac{2k}{n\pi} \quad n = 3, 7, 11, \dots$$

و $b_n = 0$ است، برای $n = 1, 2, 3, \dots$ لذا سری فوریه به صورت زیر است.

$$f(x) = \frac{k}{2} + \frac{2k}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{2} x - \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{2} x + \frac{1}{5} \cos \frac{5\pi}{2} x - + \dots \right).$$

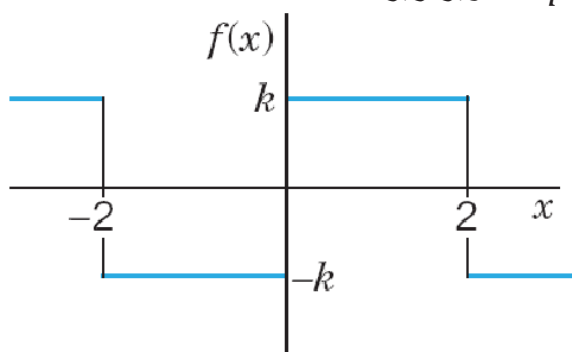
مثال ۹

موج مستطیلی متناوب

سری فوریه تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{اگر } -2 < x < 0 \\ k & \text{اگر } 0 < x < 2 \end{cases}$$

برای $L = 2$ ، $p = 2L = 4$ تصویر زیر



حل

$$a_0 = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \left[\int_{-2}^0 (-k) \cos \frac{n\pi x}{2} dx + \int_0^2 k \cos \frac{n\pi x}{2} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{2k}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_{-2}^0 + \frac{2k}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 \right] = 0, \end{aligned}$$

پس سری فوریه، جمله های کسینوس ندارد.

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \left[\frac{2k}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_{-2}^0 - \frac{2k}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 \right] \\ &= \frac{k}{n\pi} (1 - \cos n\pi - \cos n\pi + 1) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{4k}{n\pi} & \text{اگر } n = 1, 3, \dots \\ 0 & \text{اگر } n = 2, 4, \dots \end{cases}$$

لذا، سری فوریه، به صورت زیر است.

$$f(x) = \frac{4k}{\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{2} x + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{2} x + \dots \right).$$

همانطور که در بالا دیدیم، مقیاس را عوض کردیم و گفتیم تابع های با هر دوره تناوب $p = 2L$ می توانیم بنویسیم. حالا در فرمول زیر

$$\frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$

بجای x می نویسیم v پس داریم.

$$\frac{4k}{\pi} \left(\sin v + \frac{1}{3} \sin 3v + \frac{1}{5} \sin 5v + \dots \right).$$

چون دوره تناوب 2π در v مربوط می شود به $2L = 4$ پس داریم $k = \frac{\pi}{L} = \frac{\pi}{2}$ و

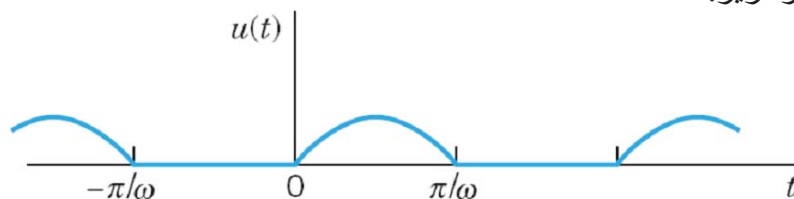
$$v = kx = \frac{\pi x}{2}$$

پس همان سری فوریه اولیه را داریم.

مثال ۱۰

تبدیل کننده نیم موج یا تبدیل کننده AC به DC

یک ولتاژ سینوسی $E \sin \omega t$ از یک تبدیل کننده نیم موج که قسمت منفی را حذف می کنند، عبور داده می شود. تصویر زیر.



مطلوب است سری فوریه تابع متناوب بدست آمده. اینجا t زمان است.

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } -L < t < 0 \\ E \sin \omega t & \text{اگر } 0 < t < L \end{cases}$$

اینجا $L = \frac{\pi}{\omega}$. $p = 2L = \frac{2\pi}{\omega}$ است.

حل

چون $u = 0$ است، هنگامی که $-L < t < 0$ است، در فرمول

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

بجای x می نویسیم t ، پس داریم.

$$a_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} E \sin \omega t dt = \frac{E}{\pi}$$

از فرمول

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

با $x = \omega t$ و $y = n\omega t$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\pi/\omega} E \sin \omega t \cos n\omega t dt = \frac{\omega E}{2\pi} \int_0^{\pi/\omega} [\sin (1+n)\omega t + \sin (1-n)\omega t] dt.$$

اگر $n = 1$ باشد ، انتگرال سمت راست ، صفر است ، و اگر $n = 2, 3, \dots$ باشد ، داریم.

$$a_n = \frac{\omega E}{2\pi} \left[-\frac{\cos (1+n)\omega t}{(1+n)\omega} - \frac{\cos (1-n)\omega t}{(1-n)\omega} \right]_0^{\pi/\omega}$$

$$= \frac{E}{2\pi} \left(\frac{-\cos (1+n)\pi + 1}{1+n} + \frac{-\cos (1-n)\pi + 1}{1-n} \right).$$

اگر n فرد باشد ، این مساوی صفر است، و برای n زوج داریم.

$$a_n = \frac{E}{2\pi} \left(\frac{2}{1+n} + \frac{2}{1-n} \right) = -\frac{2E}{(n-1)(n+1)\pi} \quad (n = 2, 4, \dots).$$

به همین طریق از فرمول

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

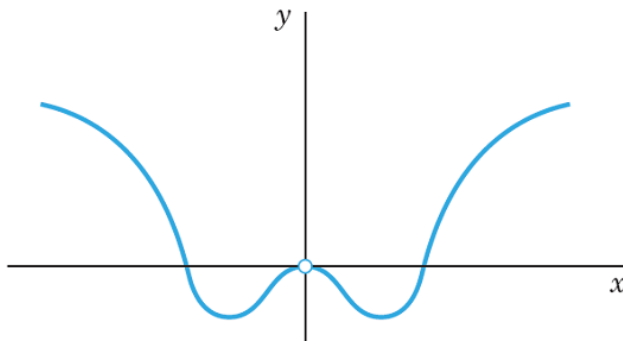
داریم $b_1 = \frac{E}{2}$ و $b_n = 0$ است برای $n = 2, 3, \dots$
در نتیجه

$$u(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin \omega t - \frac{2E}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \dots \right).$$

بخش ۱.۳ تابع های زوج و فرد Even and Odd Functions

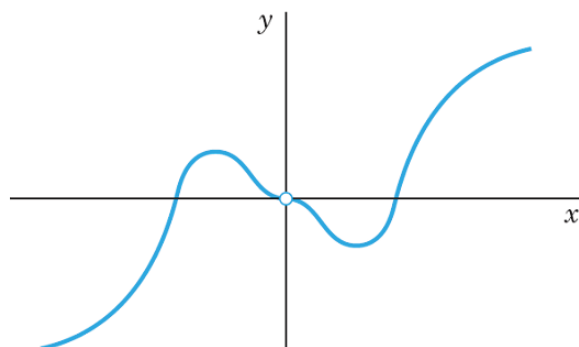
اگر یک تابع زوج باشد ، سری فوریه آن فقط شامل جمله های کسینوس است. اگر یک تابع فرد باشد ، سری فوریه آن فقط شامل جمله های سینوس است.

نمودار تابع زوج



تابع g زوج است ، اگر $g(-x) = g(x)$ باشد ، پس نمودار آن نسبت به محور عمودی ، قرینه است. تابع h فرد است ، اگر $h(-x) = -h(x)$ ، پس نمودار آن نسبت به مبدا مختصات قرینه است.

نمودار تابع فرد



قضیه ۱

سری فوریه کسینوسی ، سری فوریه سینوسی

Fourier Cosine Series, Fourier Sine Series

سری فوریه یک تابع زوج با دوره تناوب $2L$ یک سری فوریه کسینوسی است.

(1)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

اینجا f زوج است. با ضریب های

$$(2) \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

ملاحظه می کنید که انتگرال فقط از صفر تا L محاسبه می شود.

سری فوریه یک تابع فرد با دوره تناوب $2L$ یک سری فوریه سینوسی است.

(3)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

اینجا f فرد است. با ضریب های

(4)

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

قضیه ۲

جمع و ضرب عددی Sum and Scalar Multiple

ضریب های فوریه یک جمع $f_1 + f_2$ عبارتند از مجموع ضریب های متناظر فوریه f_1 و f_2
ضریب های فوریه cf عبارتند از c ضرب در ضریب های متناظر فوریه f

مثال ۱ پالس مستطیلی یا موج مستطیلی Rectangular Pulse

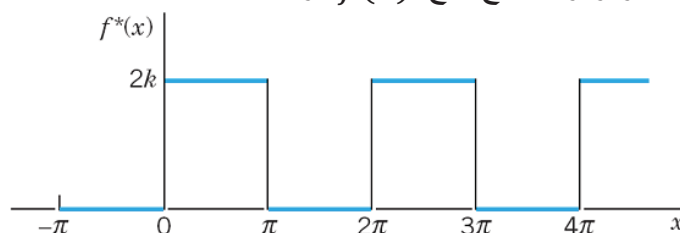
یاد آوری: در مثال ۱ بخش ۱.۲ تابع زیر را داشتیم.

$$f(x) = \begin{cases} -k & \text{if } -\pi < x < 0 \\ k & \text{if } 0 < x < \pi \end{cases}$$

سری زیر را بدست آوردیم.

$$\frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$

حالا، تابع $f^*(x)$ در تصویر زیر، جمع تابع $f(x)$ در مثال ۱ بخش ۱.۲ و عدد ثابت k است.



پس از آن مثال و قضیه ۲ بالا نتیجه می گیریم که

$$f^*(x) = k + \frac{4k}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right).$$

مثال ۲

نیم موج تبدیل کننده برق متناوب Half-Wave Rectifier

تابع $u(t)$ در مثال ۱۰ بخش ۱.۲ یک سری فوریه کسینوسی دارد به اضافه یک جمله

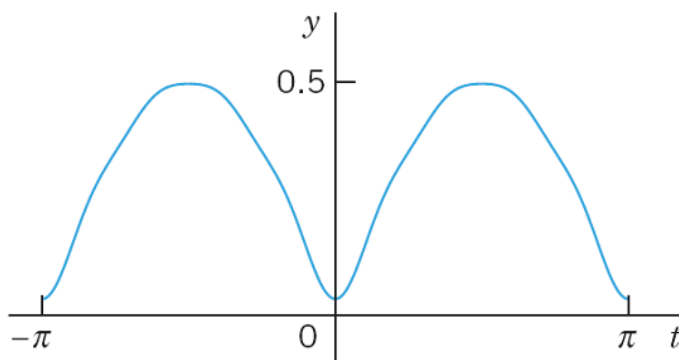
$$v(t) = \frac{E}{2} \sin \omega t$$

برای یاد آوری، آنرا در ذیل ملاحظه می کنید.

$$u(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2} \sin \omega t - \frac{2E}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t + \dots \right).$$

از این مثال و قضیه ۲ بالا، نتیجه می گیریم که $u(t) - v(t)$ باید یک تابع زوج باشد. تصویر زیر این موضوع را نشان می دهد.

$$u(t) - v(t) \text{ با } E = 1, \omega = 1$$

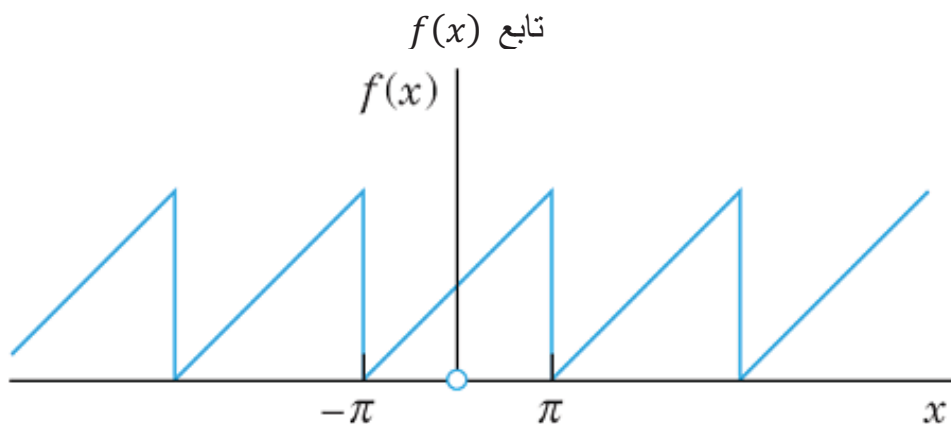


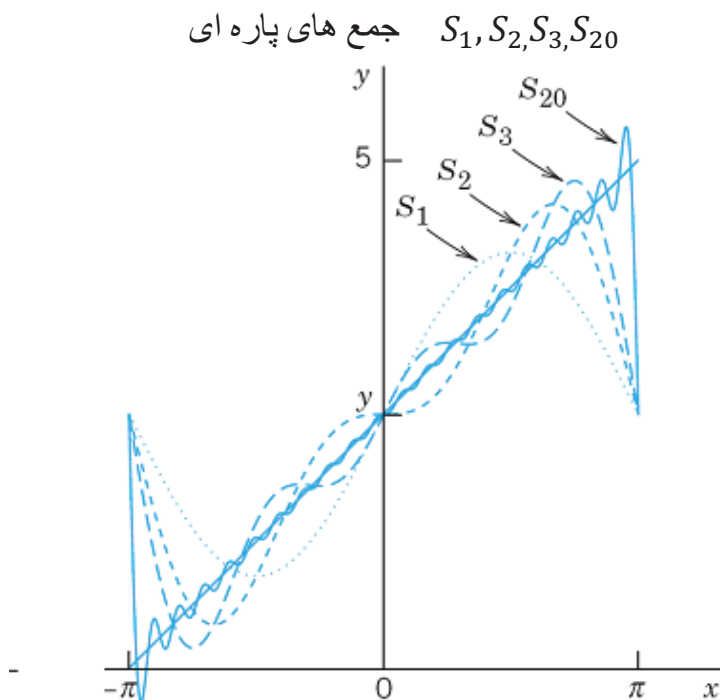
مثال ۳ موج دندانه اره Sawtooth Wave

مطلوب است سری فوریه تابع زیر

$$f(x) = x + \pi \text{ اگر } -\pi < x < \pi \text{ و } f(x + 2\pi) = f(x)$$

تصویر زیر.





حل

داریم. $f = f_1 + f_2$ اینجا $f_1 = x$ است و $f_2 = \pi$ ضرب های فوریه f_2 صفر هستند، بجز جمله ثابت که π است. پس بر اساس قضیه ۲ ضرب های فوریه a_n, b_n همان ضرب های f_1 است، بجز a_0 که π است. چون f_1 فرد است $a_n = 0$ است برای $n = 1, 2, \dots$ و

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx.$$

از طریق انتگرال گیری پاره ای داریم.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right] = -\frac{2}{n} \cos n\pi.$$

پس

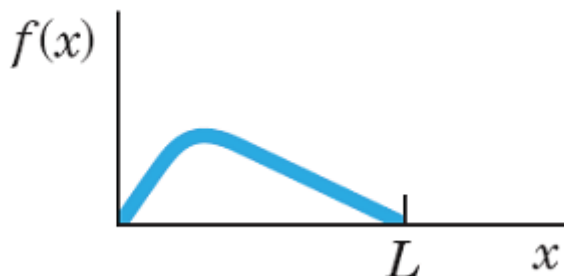
$$b_1 = 2, b_2 = -2/2, b_3 = 2/3, b_4 = -2/4, \dots,$$

و در نهایت، سری فوریه $f(x)$ به صورت زیر است.

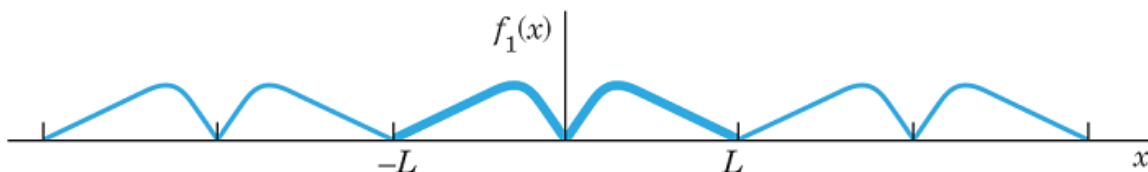
$$f(x) = \pi + 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - + \dots \right).$$

بسط های نیم دامنه Half-Range Expansions

اگر یک تابع بجای این که روی دامنه کامل $-L$ تا L تعریف شده باشد ، روی نصف دامنه ، مثلاً از 0 تا L تعریف شده باشد ، می توان آنرا به صورت یک سری سینوسی و یا کسینوسی بسط داد. تصویر زیر را ملاحظه کنید.

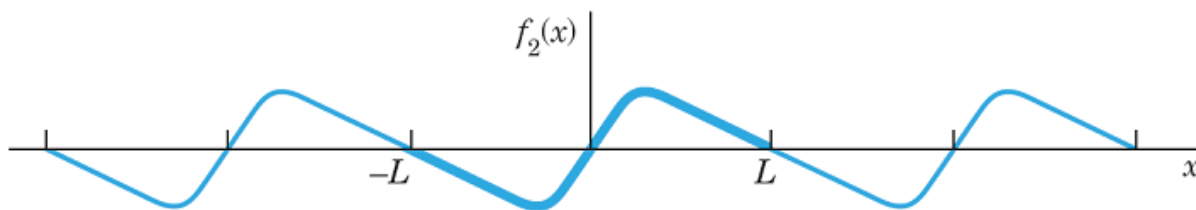


برای تابع f در تصویر بالا ، می توانیم ضریب های فوریه را از فرمول (2) یا از فرمول (4) قضیه شماره ۱ محاسبه کنیم. یکی را می توانیم انتخاب کنیم. این بستگی به این دارد که کدام یک عملی تر است. اگر فرمول شماره (2) را انتخاب کنیم ، (1) بدست می آوریم. این **بسط متناوب زوج** f است. تصویر زیر.



ملاحظه می کنید که f روی دامنه کامل یعنی $-L \leq x \leq L$ بسط داده شده است. یعنی آن قسمت نمودار که ضخیم تر رسم شده است.

اگر فرمول (4) استفاده کنیم ، شماره (3) را بدست می آوریم. یعنی **بسط متناوب فرد** f . تصویر زیر.



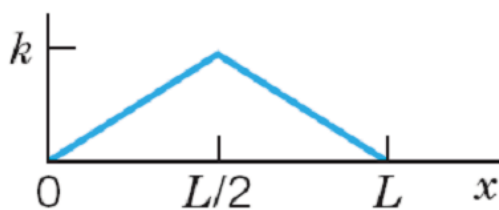
تصویر بالا بسط فرد است در دامنه $-L \leq x \leq L$ قسمت نمودار ضخیم تر.

مثال ۴

مثلث و بسط های نیم دامنه آن Triangle and Its Half-Range Expansions
مطلوب است دو بسط نیم دامنه تابع زیر

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{L} x & \text{if } 0 < x < \frac{L}{2} \\ \frac{2k}{L} (L - x) & \text{if } \frac{L}{2} < x < L. \end{cases}$$

تصویر زیر.



حل

الف - بسط متناوب زوج Even Periodic Extension
از فرمول (2) داریم.

$$a_0 = \frac{1}{L} \left[\frac{2k}{L} \int_0^{L/2} x \, dx + \frac{2k}{L} \int_{L/2}^L (L - x) \, dx \right] = \frac{k}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{L} \left[\frac{2k}{L} \int_0^{L/2} x \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx + \frac{2k}{L} \int_{L/2}^L (L - x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx \right]$$

حالا، a_n در نظر می گیریم. برای انتگرال اول، از طریق انتگرال گیری پاره ای داریم.

$$\begin{aligned} \int_0^{L/2} x \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx &= \frac{Lx}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{L} x \Big|_0^{L/2} - \frac{L}{n\pi} \int_0^{L/2} \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \\ &= \frac{L^2}{2n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

به همین طریق برای انتگرال دوم داریم.

$$\begin{aligned} \int_{L/2}^L (L - x) \cos \frac{n\pi}{L} x \, dx &= \frac{L}{n\pi} (L - x) \sin \frac{n\pi}{L} x \Big|_{L/2}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{L/2}^L \sin \frac{n\pi}{L} x \, dx \\ &= \left(0 - \frac{L}{n\pi} \left(L - \frac{L}{2} \right) \sin \frac{n\pi}{2} \right) - \frac{L^2}{n^2\pi^2} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

این دو نتیجه را در فرمول برای a_n می گذاریم. جمله های سینوس و یک فکتور L^2 حذف می شود. پس داریم.

$$a_n = \frac{4k}{n^2 \pi^2} \left(2 \cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1 \right).$$

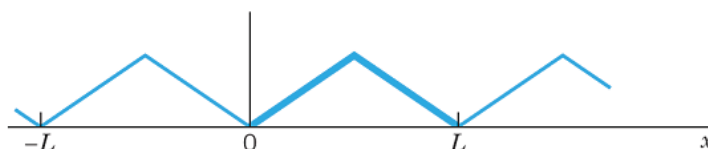
پس

$$a_2 = -16k/(2^2 \pi^2), \quad a_6 = -16k/(6^2 \pi^2), \quad a_{10} = -16k/(10^2 \pi^2), \dots$$

و $a_n = 0$ است برای $n \neq 2, 6, 10, 14, \dots$ لذا بست نیم دامنه اول $f(x)$ به صورت زیر است .

$$f(x) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2} \left(\frac{1}{2^2} \cos \frac{2\pi}{L} x + \frac{1}{6^2} \cos \frac{6\pi}{L} x + \dots \right).$$

تصویر زیر



این سری فوریه کسینوسی ، نشان گر بسط متناوب زوج تابع داده شده $f(x)$ با دوره تناوب $2L$

ب - بسط متناوب فرد Odd Periodic Extension

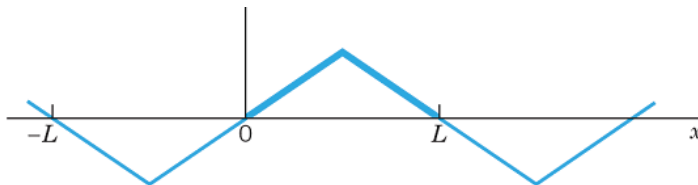
از شماره (4) خواهیم داشت.

$$(5) \quad b_n = \frac{8k}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

پس بسط نیم دامنه دیگر $f(x)$ به صورت زیر است.

$$f(x) = \frac{8k}{\pi^2} \left(\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi}{L} x - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{L} x + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi}{L} x - + \dots \right).$$

تصویر زیر.



این سری فوریه سینوسی ، نشان گر بسط متناوب فرد تابع داده شده $f(x)$ با دوره تناوب $2L$

بخش ۱.۴ صورت مختلط سری فوریه Complex Fourier Series

در این بخش نشان می دهیم که سری فوریه

$$(1) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

می تواند به صورت مختلط نوشته شود ، که گاهی محاسبه را آسان می کند. این صورت مختلط را می توان بدست آورد ، زیرا در سیستم مختلط ، تابع نمایی e^{it} و $\cos t$ و $\sin t$ توسط فرمول اویلر با هم در ارتباط هستند.

$$(2) \quad e^{it} = \cos t + i \sin t. \quad e^{-it} = \cos t - i \sin t.$$

صورت مختلط سری فوریه به صورت زیر است.

$$(6) \quad \begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \\ c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

در فرمول بالا c_n ها ، ضریب های مختلط فوریه $f(x)$ هستند.

برای یک تابع با دوره تناوب $2L$ صورت مختلط سری فوریه به صورت زیر است.

$$(7) \quad \begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}, \\ c_n &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\pi x/L} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

مثال ۱

مطلوب است صورت مختلط سری فوریه $f(x) = e^x$ اگر $-\pi < x < \pi$ و

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

باشد ، و از آن صورت معمولی سری فوریه را بدست آورید.

حل

چون $\sin(n\pi) = 0$ است برای هر عدد صحیح n ، پس داریم.

$$e^{\pm in\pi} = \cos n\pi \pm i \sin n\pi = \cos n\pi = (-1)^n.$$

پس ، از فرمول (6)

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-in} e^{x-inx} \Big|_{x=-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-in} (e^{\pi} - e^{-\pi})(-1)^n.$$

سمت راست

$$\frac{1}{1-in} = \frac{1+in}{(1-in)(1+in)} = \frac{1+in}{1+n^2} \quad e^{\pi} - e^{-\pi} = 2 \sinh \pi.$$

لذا صورت مختلط سری فوریه به صورت زیر است.

$$(8) \quad e^x = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx} \quad (-\pi < x < \pi).$$

حالا ، اجازه دهید سری فوریه در سیستم حقیقی بدست آوریم.

با استفاده از (2) و $t = nx$ و $i^2 = -1$ در فرمول (8) داریم.

$$(1+in)e^{inx} = (1+in)(\cos nx + i \sin nx) = (\cos nx - n \sin nx) + i(n \cos nx + \sin nx).$$

همچنین در فرمول (8) اگر بجای n بگذاریم $-n$ و چون $\cos(-nx) = \cos(nx)$ است و $\sin(-nx) = -\sin(nx)$ است ، پس داریم.

$$(1-in)e^{-inx} = (1-in)(\cos nx - i \sin nx) = (\cos nx - n \sin nx) - i(n \cos nx + \sin nx).$$

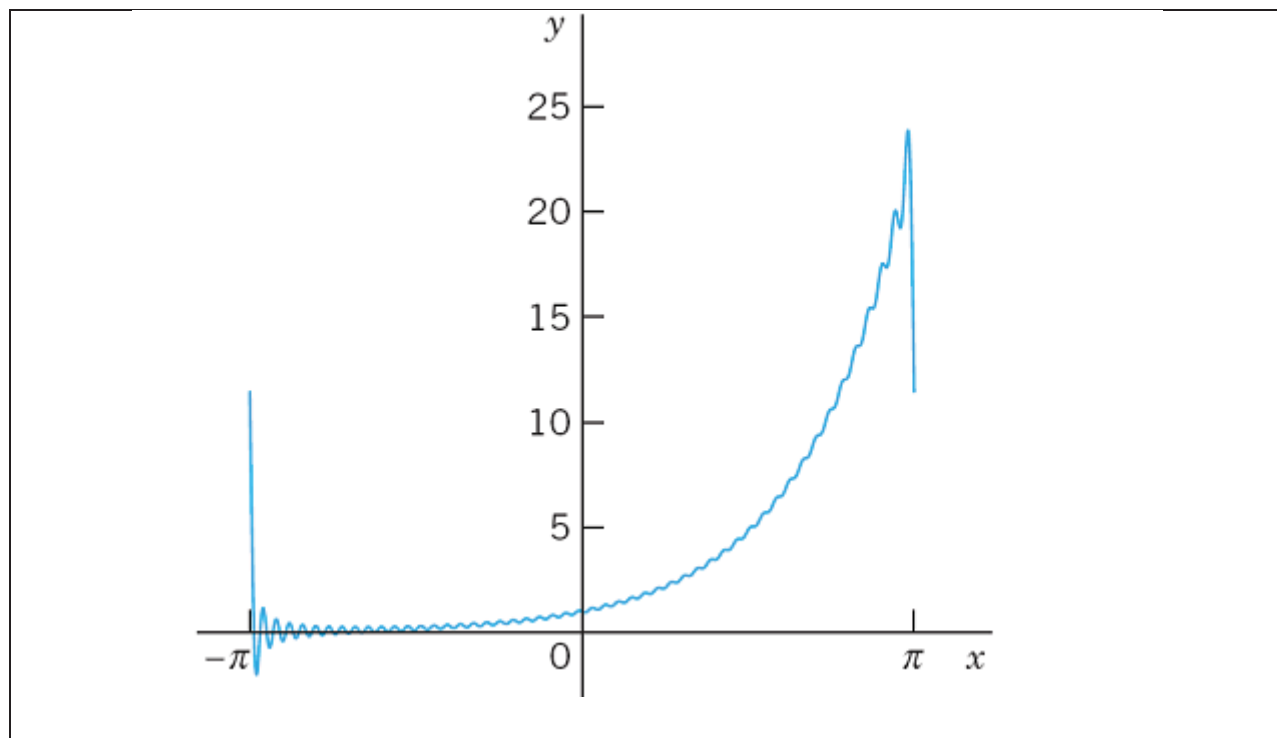
اگر این دو عبارت را با هم جمع کنیم ، قسمت های مجازی ، حذف می شوند. پس جمع آنها به صورت زیر است.

$$2(\cos nx - n \sin nx), \quad n = 1, 2, \dots$$

برای $n = 0$ از عبارت بالا 1 بدست می آوریم ، و نه 2 زیرا فقط یک جمله باقی می ماند. لذا سری فوریه در سیستم حقیقی ، به صورت زیر است.

$$(9) \quad e^x = \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1+1^2} (\cos x - \sin x) + \frac{1}{1+2^2} (\cos 2x - 2 \sin 2x) - + \dots \right].$$

در تصویر زیر ، جمع پاره ای (9) را ملاحظه می کنید.



مثال ۲

صورت مختلط سری فوریه تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(x) = \sin x = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

حل

برای $n \neq 0$ ضریب های c_n و c_0 را محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) dx + \int_0^{\pi} dx \right] = \frac{1}{2\pi} \left[(-x) \Big|_{-\pi}^0 + x \Big|_0^{\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} (-x + x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^0 (-1) e^{-inx} + \int_0^{\pi} e^{-inx} dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{(e^{-inx})}{-in} \Big|_{-\pi}^0 + \frac{(e^{-inx})}{-in} \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{i}{2\pi n} [-(1 - e^{-in\pi}) + e^{-in\pi} - 1] \\ &= \frac{i}{2\pi n} [e^{in\pi} + e^{-in\pi} - 2] = \frac{i}{\pi n} \left[\frac{e^{in\pi} + e^{-in\pi}}{2} - 1 \right] = \frac{i}{n\pi} [\cos n\pi - 1] \\ &= \frac{i}{\pi n} [(-1)^n - 1] \end{aligned}$$

اگر $n = 2k$ باشد پس $c_{2k} = 0$ است. اگر $n = 2k - 1$ باشد، پس $c_{2k-1} = -\frac{2i}{(2k-1)\pi}$

است.

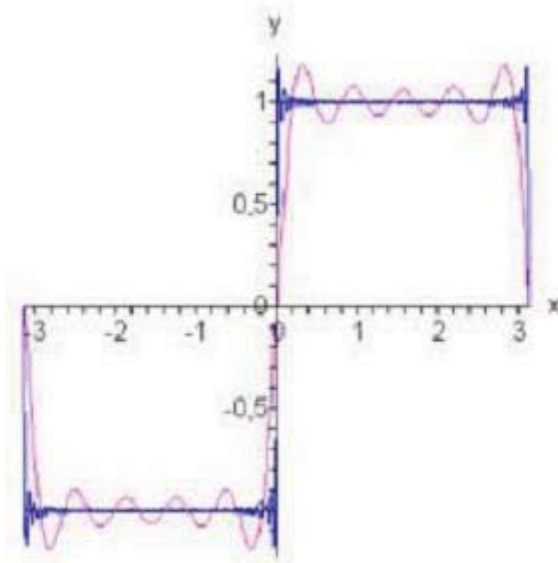
لذا، صورت مختلط سری فوریه تابع، مطابق زیر است.

$$f(x) = \sin x = -\frac{2i}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k-1} e^{i(2k-1)x}$$

می توانیم این سری را تبدیل کنیم و به صورت حقیقی بنویسیم. نام گذاری می کنیم. $n = 2k - 1$ و $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ پس داریم.

$$\begin{aligned} f(x) = \sin x &= -\frac{2i}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k-1} e^{i(2k-1)x} = -\frac{2i}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n} \\ &= -\frac{2i}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-inx}}{-n} + \frac{e^{inx}}{n} \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2in} \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} \end{aligned}$$

نمودار تابع و تقریب فوریه آن برای $n = 5$ و $n = 50$



مثال ۳

با استفاده از صورت مختلط، سری فوریه تابع $f(x) = x^2$ تعریف شده در بازه $[-1, 1]$ را پیدا کنید.

حل

نیم دوره تناوب $L = 1$ است، پس ضریب c_0 به صورت زیر بدست می آید.

$$c_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 \right] = \frac{1}{6} [1^3 - (-1)^3] = \frac{1}{3}$$

برای $n \neq 0$ داریم.

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-\frac{in\pi x}{L}} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^2 e^{-in\pi x} dx$$

با انجام دو مرتبه انتگرال گیری پاره ای، داریم.

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x^2 e^{-in\pi x}}{-in\pi} \right) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{2x e^{-in\pi x}}{-in\pi} dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x^2 e^{-in\pi x}}{-in\pi} \right) \Big|_{-1}^1 + \frac{2}{in\pi} \int_{-1}^1 x e^{-in\pi x} dx \right] \\ &= -\frac{1}{2in\pi} \left[e^{-in\pi} + \frac{2}{in\pi} e^{-in\pi} + \frac{2}{(in\pi)^2} e^{-in\pi} + \frac{2}{in\pi} e^{in\pi} - \frac{2}{(in\pi)^2} e^{in\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2in\pi} \left[e^{in\pi} - e^{-in\pi} - \frac{2}{in\pi} (e^{-n\pi} + e^{-in\pi}) + \frac{2}{(in\pi)^2} (e^{-n\pi} - e^{-in\pi}) \right] \\ &= \frac{1}{n\pi} * \frac{e^{-n\pi} - e^{-in\pi}}{2i} + \frac{2}{n^2 \pi^2} * \frac{e^{in\pi} + e^{-in\pi}}{2} - \frac{2}{n^3 \pi^3} * \frac{e^{in\pi} - e^{-in\pi}}{2i} \\ &= \frac{1}{n\pi} \sin n\pi + \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos n\pi - \frac{2}{n^3 \pi^3} \sin n\pi \end{aligned}$$

با جانشین کردن $\sin n\pi = 0$ و $\cos n\pi = (-1)^n$ داریم.

$$c_n = \frac{2}{n^2 \pi^2} (-1)^n$$

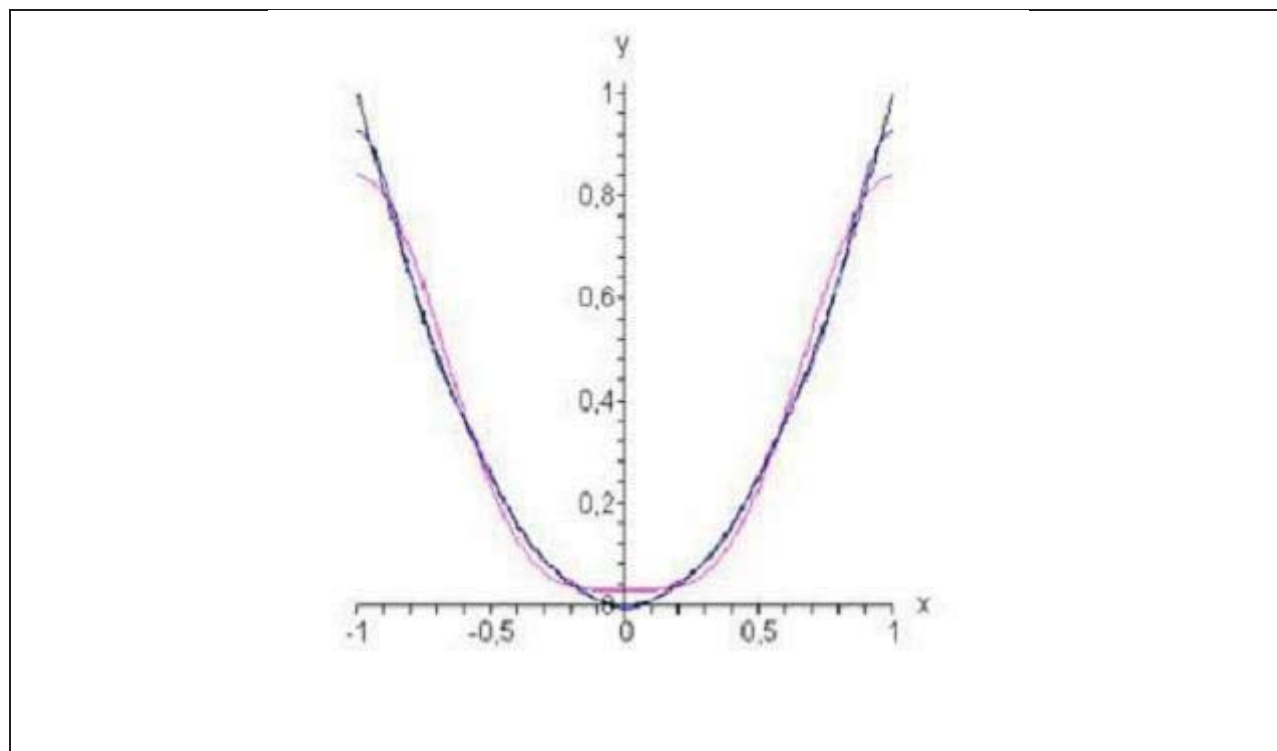
لذا، بسط فوریه به صورت مختلط، مطابق زیر نوشته می شود.

$$f(x) = x^2 = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} (-1)^n e^{in\pi x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \pi^2} (-1)^{-n} e^{-in\pi x}$$

با توجه به $(-1)^{-n} = (-1)^n$ داریم.

$$f(x) = x^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{e^{in\pi x} + e^{-in\pi x}}{2} = \frac{1}{3} + \frac{4}{n^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x$$

نمودار تابع و بسط سری فوریه در زیر ملاحظه می کنید.



بخش ۱.۵ نوسانات اجباری

سری فوریه کار برد های مهمی در رابطه با معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دفرانسیل پاره ای دارد.

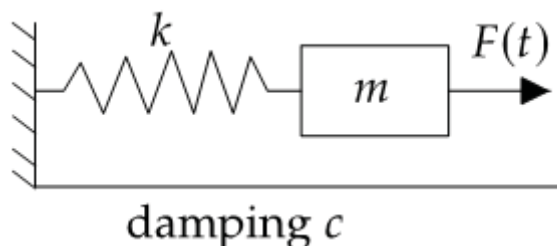
یکی از این کار برد ها ، حل مسائل مربوط به نوسانات اجباری است. نوسانات اجباری هنگامی اتفاق می افتد که یک سیستم نوسانی توسط یک نیروی خارجی متاثر می شود.



در تصویر بالا ، اگر یک نیروی خارجی روی تاب اثر نکند ، تاب بعد از چند نوسان ، از حرکت می افتد ، اما اگر یک نفر ، در هر نوسان آنرا به طرف جلو فشار دهد ، تاب به نوسان ادامه می دهد.

نوسان متناوب اجباری

یک سیستم شامل یک جسم به جرم m و یک فنر ، با ضریب ثابت k و میرایی c و یک نیروی خارجی $F(t)$ که بر جسم اثر می گذارد را در نظر بگیرید. تصویر زیر.



در این تصویر *Damping* یعنی میرایی.

فرض کنید تابع $F(t)$ دارای دوره تناوب $2L$ باشد ، با $L > 0$. این را در معادلات دیفرانسیل دیده ایم. با $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$. معادله ای که بیان گر تصویر و توضیحات داده شده بالا است ، به صورت زیر می باشد.

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = F(t). \quad (1)$$

در معادلات دیفرانسیل دیدیم که جواب کلی معادله (1) شامل جواب عمومی x_c که این x_c , جواب معادله همگن $mx'' + cx' + kx = 0$ است. و جواب خصوصی است که ما آنرا x_p می نامیم.

برای یاد آوری حرف c حرف اول *Complementay* است به معنی , تکمیلی و حرف p حرف اول *Particular* است به معنی , مخصوص .

برای $c > 0$, جواب عمومی x_c به مرور زمان از بین می رود. لذا ، ما بیشتر به جواب خصوصی x_p علاقمند هستیم ، زیرا از بین نمی رود و متناوب است با همان تناوب $F(t)$. ما این جواب را جواب متناوب پایدار می نامیم. و آنرا به صورت x_{sp} می نویسیم. حرف s که اضافه شده است ، حرف اول *State* است به معنی پایدار. اینجا بر خلاف آنچه در معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم نا همگن که یک تابع کسینوسی بکار می بردیم ، یک تابع نیروی اجباری ، بکار می بریم.

برای سادگی کار ، فرض می کنیم $C = 0$ باشد. اگر $C > 0$ باشد باز فرقی ندارد. پس معادله $mx'' + kx = 0$ دارای جواب کلی زیر است.

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t),$$

اینجا $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ است. هر جواب معادله (1) به صورت زیر است.

$$A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_{sp}.$$

جواب متناوب پایدار x_{sp} دارای همان دوره تناوب $F(t)$ است.

پس بر اساس ایده ضریب های نا معین ، می نویسیم.

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + d_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right).$$

و سپس جواب متناوب پایدار x را به صورت زیر می نویسیم.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right),$$

اینجا a_n و b_n مجهول هستند. x را در معادله دیفرانسیل می گذاریم و برای a_n و b_n بر حسب c_n و d_n حل می کنیم. این مراحل را بوسیله مثال بهتر خواهیم فهمید.

مثال ۱

فرض کنید $k = 2$ و $m = 1$ باشد. ، واحد ها بر حسب متر ، کیلو گرم ، ثانیه هستند. یک دستگاه پرتاب به طرف بالا بنام جت پک به جسم متصل شده است. تصویر جت پک را خارج از مستطیل ملاحظه می کنید. هگامی که این دستگاه روشن می شود ، آب با فشار از آن خارج می شود و سبب می شود شئی یا انسان به طرف بالا ، پرتاب شود. یعنی کار جت را انجام می دهد. این جت پک با فشار 1 نیوتن برای یک ثانیه روشن می شود و سپس برای یک ثانیه خاموش می شود ، باز به همین ترتیب روشن و خاموش می شود. پس شئی به طرف بالا و پایین در نوسان است. می خواهیم ، جواب متناوب پایدار را پیدا کنیم. پس معادله به صورت زیر است.

$$x'' + 2x = F(t),$$

اینجا $F(t)$ تابع دو ضابطه ای زیر است.

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } -1 < t < 0, \\ 1 & \text{if } 0 < t < 1, \end{cases}$$

اگر آنرا به صورت تناوبی بنویسیم ، داریم.

$$F(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\pi t) + d_n \sin(n\pi t).$$

ضریب ها را محاسبه می کنیم.

برای $n = 0$ داریم.

$$c_0 = \int_{-1}^1 F(t) dt = \int_0^1 dt = 1,$$

برای $n \geq 1$ داریم.

$$c_n = \int_{-1}^1 F(t) \cos(n\pi t) dt = \int_{-1}^1 \cos(n\pi t) dt = 0$$

$$d_n = \int_{-1}^1 F(t) \sin(n\pi t) dt$$

$$= \int_0^1 \sin(n\pi t) dt$$

$$= \left[\frac{-\cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_{t=0}^1$$

$$= \frac{1 - (-1)^n}{\pi n} = \begin{cases} \frac{2}{\pi n} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

پس اگر n فرد باشد، داریم.

$$F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin(n\pi t).$$

امتحان می کنیم.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t).$$

اگر x را در معادله دیفرانسیل $x'' + 2x = F(t)$ بگذاریم، واضح است که $a_n = 0$ است برای $n \geq 1$ زیرا جمله متناظری در سری $F(t)$ وجود ندارد. به همین طریق $b_n = 0$ است برای n زوج. لذا، اگر n فرد باشد، زیر را امتحان می کنیم

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t).$$

این را در معادله دیفرانسیل می گذاریم. ، اگر n فرد باشد، داریم.

$$x'' + 2x = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-b_n n^2 \pi^2 \sin(n\pi t) \right] + a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \sin(n\pi t) \right]$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (2 - n^2 \pi^2) \sin(n\pi t)$$

$$= F(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n} \sin(n\pi t).$$

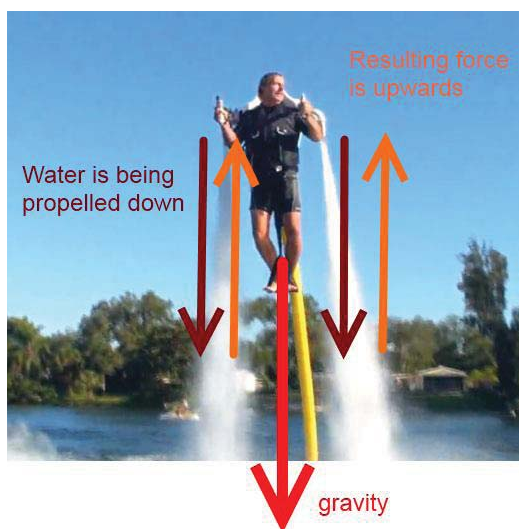
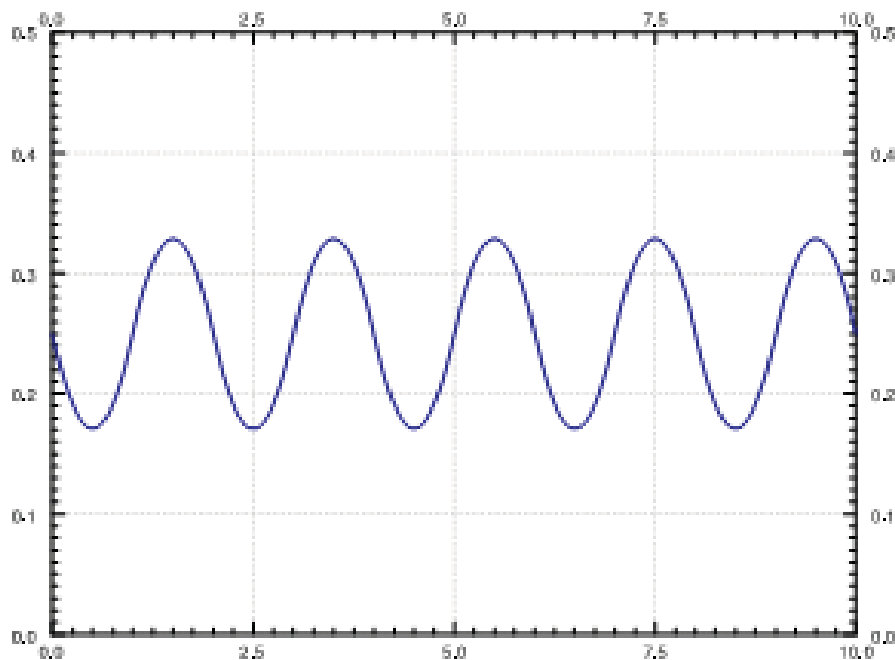
پس $a_n = \frac{1}{2}$ ، $b_n = 0$ است برای n زوج و برای n فرد داریم.

$$b_n = \frac{2}{\pi n(2 - n^2\pi^2)}.$$

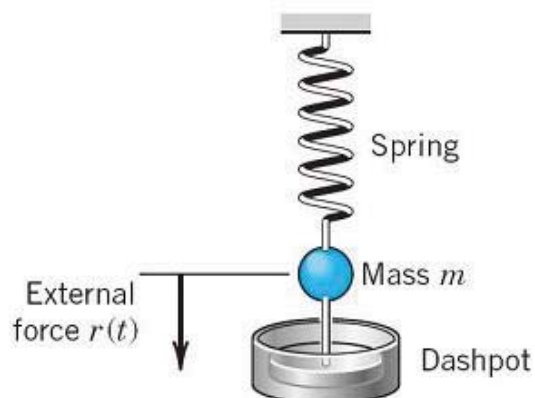
جواب متناوب پایدار برای n فرد، صورت سری فوریه زیر را دارد.

$$x_{sp}(t) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n(2 - n^2\pi^2)} \sin(n\pi t).$$

در این جواب، هیچ جمله‌ای از جواب عمومی وجود ندارد. این جواب هم مانند $F(t)$ متناوب است. تصویر زیر هم نمودار جواب است.



مثال دیگری برای فنر و جسم به صورت زیر است.
سیستم در حال نوسان



معنی کلمات در تصویر بالا

فنر Spring

جرم Mass

نیروی خارجی External Force

ظرف Pot

سیستم بالا را چنین تعریف می کنیم.

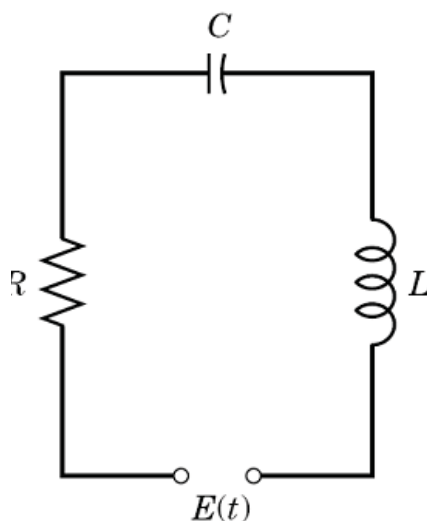
نوسانت اجباری یک شئی به جرم m روی یک فنر با ضریب k و عدد ثابت میرایی c با معادله دیفرانسیل زیر تعریف می شود.

$$my''(t) + cy'(t) + ky(t) = r(t) \quad (2)$$

مدار الکتریکی RLC مشابه فنر به صورت زیر تعریف می شود.

$$LI''(t) + RI'(t) + \frac{1}{C}I(t) = E'(t) \quad (3)$$

مدار RLC بر اساس معادله بالا



بخش ۱.۶ تقریب با چند جمله ای های مثلثاتی

همانطور که مکرراً گفتیم، سری فوریه نقش مهمی در معادلات دیفرانسیل بازی می کند. زمینه دیگری که سری فوریه، کار برد مهمتری دارد، قضیه محاسبه تقریبی **Approximation Theory** است. این ایده، همراه با سری فوریه چنین است.

فرض می کنیم $f(x)$ یک تابع در بازه $-\pi \leq x \leq \pi$ باشد، بطوری که بتوان آنرا با یک سری فوریه در این بازه نشان داد. پس جمع پاره ای n ام سری زیر

$$(1) \quad f(x) \approx a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

محاسبه تقریبی تابع داده شده $f(x)$ است. طبیعی است سؤال کنیم آیا فرمول (1) بهترین تقریب f است بوسیله یک چند جمله ای مثلثاتی با درجه N است؟ یعنی توسط یک تابع به صورت زیر.

$$(2) \quad F(x) = A_0 + \sum_{n=1}^N (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

اینجا N ثابت است. این که می گوئیم، بهترین تقریب است، یعنی خطای تقریب تا آنجا که ممکن باشد، کوچک است.

ابتدا باید خطای E را تعریف کنیم. E را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$(3) \quad E = \int_{-\pi}^{\pi} (f - F)^2 dx.$$

شماره (3) را مربع خطای **Square Error** نسبت به f در بازه $-\pi \leq x \leq \pi$ می نامند.

مسلم است که $E \geq 0$ می باشد.

مربع خطا را E^* می نامیم و چنین تعریف می شود.

$$(6) \quad E^* = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 dx - \pi \left[2a_0^2 + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \right].$$

اینجا a_n, b_n ضریب های سری فوریه f است.

قضیه ۱

مینیم مربع خطا **Minimum Square Error**

مربع خطای F در فرمول (2) نسبت به f در بازه $-\pi \leq x \leq \pi$ مینیمم است اگر و فقط اگر ضریب های F در فرمول (2) ضریب های فوریه f باشند. این مقدار مینیمم E^* در شماره (6) داده شده است.

چون $E^* \geq 0$ و شماره (6) برای هر N برقرار است، پس از (6) نا معادله بسل را برای

ضریب های فوریه هر تابع f بدست می آوریم در صورتی که انتگرال سمت راست وجود داشته باشد.

Bessel's Inequality

$$(7) \quad 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx$$

اگر $f(x)$ یک تابع مربع انتگرال پذیر در بازه $[-\pi, \pi]$ باشد، بطوری که

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx \leq \infty$$

باشد، پس نا مساوی بسل تبدیل به تساوی می شود. در این حالت فرمول پارسوال داریم. یعنی

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$$

یا

$$(8) \quad 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx.$$

مثال ۱

مینیم مربع خطا برای موج دندانه اره

یا

کمترین مربعات خطا برای موج دندانه اره

Minimum Square Error for the Sawtooth Wave

کمترین مربع خطای E^* نسبت به $F(x)$ با 1000 و $N = 1, 2, \dots, 10, 20, \dots, 100$ مربوط به

$$f(x) = x + \pi \quad (-\pi < x < \pi)$$

در بازه $-\pi \leq x \leq \pi$ محاسبه کنید.

حل

$$F(x) = \pi + 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2 + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots + \frac{(-1)^{N+1}}{N} \sin Nx \right)$$

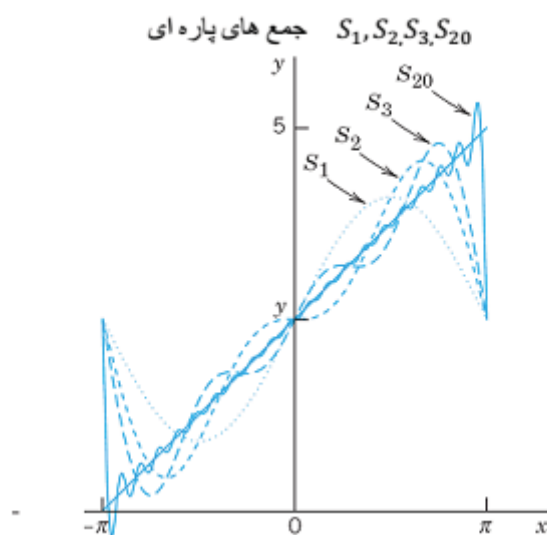
بر اساس مثال 3 بخش 11.3 و فرمول (6) داریم.

$$E^* = \int_{-\pi}^{\pi} (x + \pi)^2 dx - \pi \left(2\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \right).$$

مقادیر عددی به صورت زیر است.

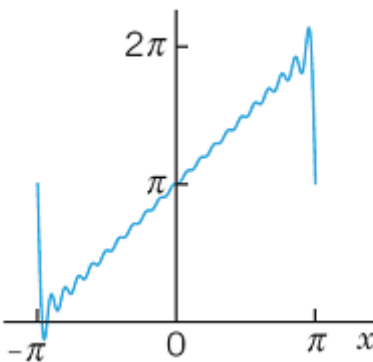
N	E^*	N	E^*	N	E^*	N	E^*
1	8.1045	6	1.9295	20	0.6129	70	0.1782
2	4.9629	7	1.6730	30	0.4120	80	0.1561
3	3.5666	8	1.4767	40	0.3103	90	0.1389
4	2.7812	9	1.3216	50	0.2488	100	0.1250
5	2.2786	10	1.1959	60	0.2077	1000	0.0126

در بخش ۱.۳ مثال ۳ جمع های پاره ای $F = S_1, S_2, S_3$ را رسم کردیم و در زیر مجدداً ملاحظه می کنید.



و جمع پاره ای S_{20} را در زیر ملاحظه می کنید.

S_{20}



اما مقدار $|f(x) - F(x)|$ در $\pm\pi$ بزرگ است. در این دو نقطه f ناپیوسته است. محاسبه تقریبی در بازه گفته شده کاملاً خوب و به حقیقت نزدی است، بجز در $\pm\pi$

1.7 انتگرال فوریه Fourier Integral

سری فوریه یک وسیله قدرتمندی است برای مسائلی که شامل تابع های متناوب هستند و یا فقط شامل بازه های با کران هستند.

چون بسیاری از مسائل شامل تابع های غیر متناوب و یا بیشتر روی محور x ، متمرکز هستند، پس این سؤال پیش می آید که چگونه می توانیم سری فوریه را برای حل این چنین مسائل، بکار ببریم. این سؤال ما را به انتگرال های فوریه راهنمایی می کند.

در مثال 1 با یک تابع مخصوص f_L با دور تناوب $2L$ شروع می کنیم تا ببینیم چه اتفاقی برای سری فوریه می افتد اگر $L \rightarrow \infty$.

مثال 1**موج مستطیلی**

موج مستطیلی متناوب f_L با دور تناوب $2L > 2$ زیر را در نظر بگیرید.

$$f_L = \begin{cases} 0 & \text{اگر } -L < x < -1 \\ 1 & \text{اگر } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{اگر } 1 < x < L \end{cases}$$

سمت چپ تصویر 1 نمایش تابع f_L است برای $2L = 4, 8, 16$ همراه با تابع غیر متناوب $f(x)$ که از f_L بدست می آوریم، هنگامی که $L \rightarrow \infty$ یعنی

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

توجه: نمودار $f(x)$ در تصویر 1 سمت چپ، آخرین نمودار

حالا، بررسی می کنیم که چه اتفاقی برای ضریب های فوریه f_L می افتد، هنگامی که L افزایش می یابد. چون f_L زوج است، پس $b_n = 0$ است برای تمام n ها. برای a_n ، بر اساس فرمول های اوایلر، بخش 1.2 داریم.

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-1}^1 dx = \frac{1}{L}, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-1}^1 \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^1 \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \frac{\sin(n\pi/L)}{n\pi/L}.$$

این سلسله ضریب های فوریه، طیف دامنه نوسان Amplitude Spectrum

f_L نامیده می شود. زیرا $|a_n|$ ماکسیم دامنه نوسان موج $a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ است. تصویر 1 این طیف را برای دور تناوب $2L = 4, 8, 16$ را نشان می دهد. ملاحظه می شود که برای افزایش L ، این دامنه نوسان ها روی قسمت مثبت محور w_n متراکم تر می شود. اینجا

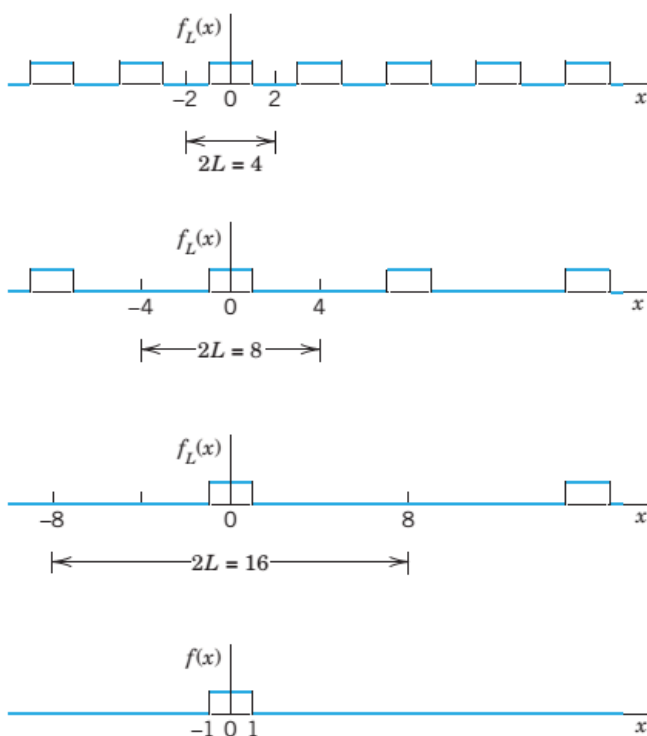
$$w_n = \frac{n\pi}{L}$$

است. در حقیقت برای $2L = 4, 8, 16$ داریم $1, 3, 7$ دامنه نوسان در هر نیم موج تابع

$$\frac{2 \sin w_n}{L w_n}$$

که با خط تیره (— — —) در تصویر نشان داده می شود. لذا برای $2L = 2^k$ داریم $2^{k-1} - 1$ دامنه نوسان برای هر نیم موج. بطوری که این دامنه نوسان ها در نهایت روی قسمت مثبت محور w_n ، متراکم می شود. و به طرف صفر، تراکم کم می شود.

تصویر ۱

امواج f_L طیف دامنه نوسان $a_n(w_n)$ 

امواج و دامنه نوسانات در مثال ۱

از سری فوری به انتگرال فوریه
حالا هر تابع متناوب $f_L(x)$ با دور تناوب $2L$ را که بتوان با یک سری فوریه نشان داد، در نظر می گیریم.

$$f_L(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x), \quad w_n = \frac{n\pi}{L}$$

و سعی می کنیم در یابیم هنگامی که $L \rightarrow \infty$ ، چه اتفاقی می افتد.

با توجه به مثال 1 باید بجای یک سری، انتظار یک انتگرال داشته باشیم، که شامل $\cos wx$ و $\sin wx$ باشد و w محدود به یک عدد صحیح مضرب $w = w_n = \frac{n\pi}{L}$ از $\frac{\pi}{L}$ نباشد، بلکه هر مقداری باشد. همچنین خواهیم دید که چنین انتگرالی چه شکلی ممکن است داشته باشد.

اگر a_n و b_n از فرمول های اوپلر از بخش 1.2 جانشین کنیم و متغیر انتگرال را v بنامیم، سری فوریه $f_L(x)$ به صورت زیر در می آید.

$$f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) dv + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\cos w_n x \int_{-L}^L f_L(v) \cos w_n v dv + \sin w_n x \int_{-L}^L f_L(v) \sin w_n v dv \right].$$

حالا، Δw را مطابق زیر قرار می دهیم.

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}.$$

پس

$$\frac{1}{L} = \frac{\Delta w}{\pi}$$

است. و می توانیم سری فوریه را به صورت زیر بنویسیم.

$$(1) \quad f_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(v) dv + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(\cos w_n x) \Delta w \int_{-L}^L f_L(v) \cos w_n v dv + (\sin w_n x) \Delta w \int_{-L}^L f_L(v) \sin w_n v dv \right].$$

این نمایش، برای هر L ثابتی، هر قدر که بزرگ اما کران دار باشد، معتبر است. حالا، $L \rightarrow \infty$ قرار می دهیم. و فرض می کنیم تابع غیر متناوب بدست آمده

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x)$$

مطلقا انتگرال پذیر روی محور x باشد، یعنی حد کران دار زیر وجود داشته باشد.

$$(2) \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 |f(x)| dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b |f(x)| dx \quad \left(\text{written } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \right).$$

پس، $\frac{1}{L} \rightarrow 0$ و مقدار اولین جمله سمت راست (1) بطرف صفر میل می کند. همچنین

$$\Delta w = \frac{\pi}{L} \rightarrow 0$$

و محتمل به نظر می رسد که سری بی کران (1) می شود انتگرال از 0 تا ∞ ، که نمایش $f(x)$ است ، یعنی

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\cos wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv \, dv + \sin wx \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv \, dv \right] dw.$$

اگر نماد های زیر را معرفی کنیم

$$(4) \quad A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv \, dv, \quad B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \sin wv \, dv$$

می توان این شماره (3) را به صورت زیر نوشت.

$$(5) \quad f(x) = \int_0^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx] \, dw.$$

شماره (5) نمایش $f(x)$ توسط یک انتگرال فوریه ، نامید.

واضح است که این روشی که در بالا بکار بردیم ، فقط یک پیشنهاد برای (5) است ، و به هیچ وجه محقق و استوار نیست. در حقیقت حد سری (1) هنگامی که Δw به طرف صفر میل می کند ، تعریف انتگرال (3) نیست. شرایط لازم برای صحت شماره (5) بر اساس قضیه زیر است.

قضیه 1

انتگرال فوریه

اگر $f(x)$ یک تابع تکه ای پیوسته در هر بازه کران دار باشد و یک حد سمت راست و یک حد سمت چپ در هر نقطه داشته باشد و اگر انتگرال (2) وجود داشته باشد ، پس $f(x)$ می تواند توسط یک انتگرال شماره (5) نشان داده شود با A و B که در شماره (4) داده شده است. در یک نقطه که $f(x)$ نا پیوسته است ، مقدار انتگرال فوریه مساوی است با میانگین حد های سمت راست و سمت چپ $f(x)$ در آن نقطه.

اثبات قضیه بالا را فعلا کنار می گذاریم.

کار برد های انتگرال های فوریه

کار برد مهم انتگرال های فوریه برای حل معادلات معمولی و معادلات دیفرانسیل پاره ای است. کار برد آن در معادلات دیفرانسیل پاره ای را در بخش های بعدی خواهیم دید. به هر حال ، انتگرال های فوریه در انتگرال گیری و بحث تابع های یی که توسط انتگرال تعریف شده اند ، می توانیم بکار ببریم. ماند مثال بعدی

مثال 2

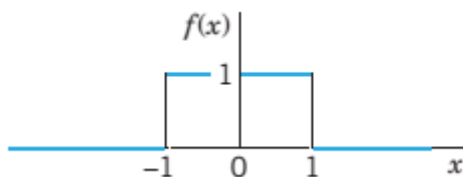
ضربان تکی ، انتگرال سینوسی ، عامل نا پیوسته دیریشلت ، پدیده گیبس

Single Pulse, Sine Integral, Dirichlet's Discontinuous Factor, Gibbs Phenomenon

نمایش انتگرال فوریه تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| < 1 \\ 0 & \text{if } |x| > 1 \end{cases}$$

تصویر 2 برای مثال 2



پاسخ

بر اساس فرمول 4 داریم.

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \cos wv \, dv = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos wv \, dv = \frac{\sin wv}{\pi w} \Big|_{-1}^1 = \frac{2 \sin w}{\pi w}$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sin wv \, dv = 0$$

و بر اساس فرمول 5 جواب زیر بدست می آید.

$$(6) \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} \, dw.$$

میانگین حد های سمت چپ و سمت راست $f(x)$ در $x = 1$ مطابق زیر است.

$$\frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

علاوه بر این ، بر اساس فرمول (6) و قضیه 1 داریم ، “در $\frac{\pi}{2}$ ضرب می کنیم.”

$$(7) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos wx \sin w}{w} \, dw = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{اگر } 0 \leq x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & \text{اگر } x = 1 \\ 0 & \text{اگر } x > 1 \end{cases}$$

این را عامل نا پیوستگی دیرشلت می نامیم. حالت $x = 0$ اهمیت خاصی دارد. اگر $x = 0$ باشد ، شماره (7) می شود

(8*)

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin w}{w} \, dw = \frac{\pi}{2}.$$

ملاحظه می شود که این انتگرال ، حد انتگرال سینوس

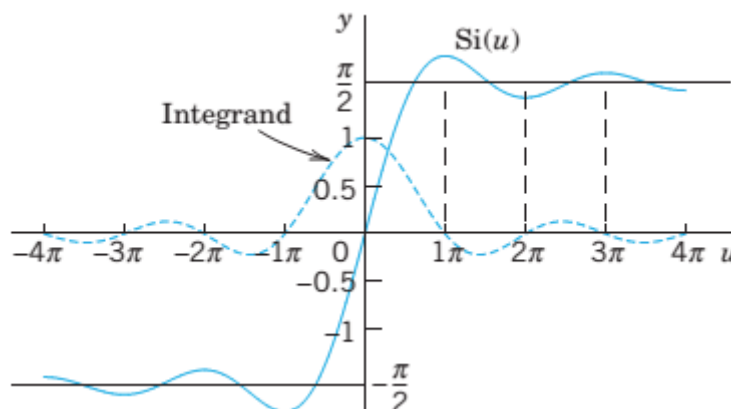
(8)

$$\text{Si}(u) = \int_0^u \frac{\sin w}{w} \, dw$$

است.

هنگامی که $u \rightarrow \infty$ نمودار $\text{Si}(u)$ و انتگرال در تصویر شماره 3 ملاحظه می کنید.

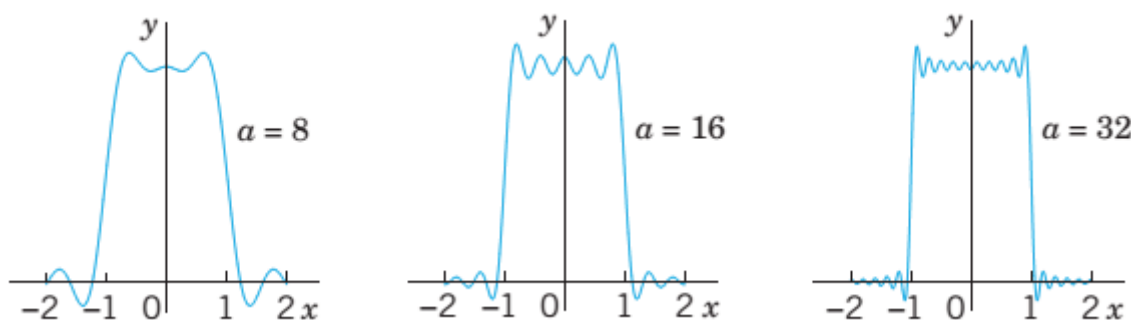
تصویر 3 انتگرال سینوس $Si(u)$ و انتگرال



چنانچه یک سری فوری داشته باشیم ، نمودار های جمع های پاره ای ، عبارت است از منحنی های تقریبی منحنی تابع متناوبی است که بوسیله سری بیان می شود. به همین طریق ، اگر انتگرال فوری شماره (5) را داشته باشیم ، تقریب ها با جانشین کردن عدد a بجای ∞ بدست می آیند. پس انتگرال زیر

$$(9) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\cos wx \sin w}{w} dw$$

تقریب سمت راست فرمول (6) و در نتیجه $f(x)$ است. تصویر 4 تقریب 4 انتگرال (9) برای $a = 8, 16, 32$ یا پدیده گیبس



تصویر شماره 4 بالا ، نوسانات نزدیک نقاط ناپیوستگی $f(x)$ را نشان می دهد. ممکن است انتظار داشته باشیم این نوسانات محو شوند هنگامی که a به بی نهایت نزدیک می شود. اما این چنین نیست. با افزایش a ، این نوسانات به نقاط $x \pm 1$ نزدیک می شوند. این رفتار خارج از انتظار که در رابطه با سری فوری اتفاق می افتد ، به پدیده گیبس موسوم است.

انتگرال کسینوسی فوریه و انتگرال سینوسی فوریه

همان طور که سری فوریه ساده می شود اگر تابع زوج یا فرد باشد، انتگرال های فوریه هم ساده می شوند. پس در وقت صرفه جویی می شود. در حقیقت، اگر f یک نمایش انتگرال فوریه و زوج باشد، پس در فرمول (4) داریم $B(w) = 0$. این صحیح است زیرا انتگراند $B(w)$ فرد است. پس فرمول (5) به انتگرال کسینوسی فوریه تبدیل می شود.

$$(10) \quad f(x) = \int_0^{\infty} A(w) \cos wx \, dw$$

اگر

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \cos wv \, dv.$$

به تغییر در $A(w)$ توجه کنید.

برای f زوج، انتگراند زوج است. پس انتگرال از $-\infty$ تا ∞ مساوی است با دو برابر انتگرال از 0 تا ∞

به همین طریق اگر f یک نمایش انتگرال فوریه و فرد باشد، پس در فرمول (4) داریم $A(w) = 0$. این صحیح است زیرا انتگراند $A(w)$ فرد است. پس فرمول (5) می شود انتگرال سینوسی فوریه

$$(11) \quad f(x) = \int_0^{\infty} B(w) \sin wx \, dw$$

اگر

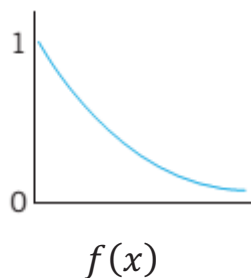
$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \sin wv \, dv.$$

مثال 3

انتگرال های لاپلاس

از $f(x) = e^{-kx}$ ، انتگرال های سینوسی و کسینوسی فوریه استنتاج می کنیم. اینجا $x > 0$ و $k > 0$ است. تصویر 5. نتیجه برای محاسبه به اصطلاح انتگرال های لاپلاس بکار برده خواهد شد.

تصویر 5



پاسخ

الف - از فرمول (10) داریم

$$A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kv} \cos wv \, dv$$

حالا، از طریق انتگرال گیری جزء به جزء داریم.

$$\int e^{-kv} \cos wv \, dv = -\frac{k}{k^2 + w^2} e^{-kv} \left(-\frac{w}{k} \sin wv + \cos wv \right).$$

اگر $v = 0$ باشد، عبارت سمت راست، مساوی است با $\frac{-k}{k^2 + w^2}$. اگر v به بی نهایت نزدیک شود، آن عبارت به صفر نزدیک می شود، به علت عامل نمایی. پس $\frac{2}{\pi}$ ضرب در انتگرال از 0 تا ∞ داریم.

$$(12) \quad A(w) = \frac{2k/\pi}{k^2 + w^2}.$$

با جانشین کردن این، در انتگرال اول در شماره (10)، نمایش انتگرال کسینوسی فوری را بدست می آوریم.

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{k^2 + w^2} dw \quad (x > 0, \quad k > 0).$$

از این نمایش، ملاحظه می کنیم که

$$(13) \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos wx}{k^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2k} e^{-kx} \quad (x > 0, \quad k > 0).$$

ب - به همین طریق از شماره (11) داریم

$$B(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-kv} \sin wv \, dv$$

حالا، از طریق انتگرال گیری جزء به جزء داریم.

$$\int e^{-kv} \sin wv \, dv = -\frac{w}{k^2 + w^2} e^{-kv} \left(\frac{k}{w} \sin wv + \cos wv \right).$$

این مساوی است با

$$\frac{-w}{k^2 + w^2}$$

اگر $v = 0$ باشد، و به صفر نزدیک می شود هنگامی که $v \rightarrow \infty$. پس

$$(14) \quad B(w) = \frac{2w/\pi}{k^2 + w^2}.$$

از شماره (14) نمایش انتگرال سینوسی فوری بدست می آوریم.

$$f(x) = e^{-kx} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{w \sin wx}{k^2 + w^2} dw.$$

از این می بینیم که

(15)

$$\int_0^{\infty} \frac{w \sin wx}{k^2 + w^2} dw = \frac{\pi}{2} e^{-kx} \quad (x > 0, k > 0).$$

انتگرال های (13) و (15) انتگرال های لاپلاس می نامند.

Fourier Cosine and Sine Transforms**1.8 تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوری**

تبدیل اینتگرال Integral Transform عبارت است از یک تبدیل به شکل انتگرال بطوری که از یک تابع داده شده، یک تابع جدید می سازد که وابسته به یک متغیر متفاوت است. این نوع تبدیلات جالب است زیرا می توان آنها را در حل معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل پاره ای و معادلات انتگرال بکار برد.

تبدیل کسینوسی فوری Fourier Cosine Transform

تبدیل کسینوسی فوری مربوط به تابع های زوج $f(x)$ است. این را از انتگرال کسینوسی فوری فرمول (10) بخش 1.7 بدست می آوریم.

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(w) \cos wx \, dw \quad \text{اگر} \quad A(w) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(v) \cos wv \, dv$$

به عبارت دیگر، فرض می کنیم

$$A(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \hat{f}_c(w)$$

باشد.

اینجا c برای کسینوس است. سپس در فرمول $A(w)$ می نویسیم $v = x$ پس داریم.

$$(1a) \quad \hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx \, dx$$

و

$$(1b) \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_c(w) \cos wx \, dw.$$

فرمول (1a) از $f(x)$ یک تابع جدید $\hat{f}_c(w)$ به ما می دهد بنام تبدیل کسینوسی فوری $f(x)$ فرمول (1b) از $\hat{f}_c(w)$ تابع $f(x)$ را به ما بر می گرداند. لذا $f(x)$ وارون یا معکوس تبدیل کسینوسی فوری $\hat{f}_c(w)$ می نامیم. مرحله بدست آوردن تبدیل $\hat{f}_c$ از f را تبدیل کسینوسی فوری می نامند. و یاروش تبدیل کسینوسی فوری.

تبدیل سینوسی فوری Fourier Sine Transform

به همین طریق در فرمول (11) بخش 1.7 فرض می کنیم

$$B(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \hat{f}_s(w)$$

باشد. اینجا s برای سینوس است. سپس می نویسیم $v = x$ پس از فرمول (11) بخش 1.7 تبدیل سینوسی فوری $f(x)$ به طریق زیر بدست می آید.

(2a)

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin wx \, dx,$$

و وارون تبدیل سینوسی فوری $\hat{f}_s(w)$ مطابق زیر است.

(2b)

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}_s(w) \sin wx \, dw.$$

مرحله بدست آوردن $f_s(w)$ از $f(x)$ تبدیل سینوسی فوری نامیده می شود. یا روش تبدیل سینوسی فوری نماد های دیگر مطابق زیر است.

$$\mathcal{F}_c(f) = \hat{f}_c, \quad \mathcal{F}_s(f) = \hat{f}_s$$

و $\mathcal{F}_c^{-1}$ و $\mathcal{F}_s^{-1}$ برای وارن های $\mathcal{F}_c$ و $\mathcal{F}_s$.

تمرین 1

تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوری

تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوری تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(x) = \begin{cases} k & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{if } x > a \end{cases}$$

نمودار این تابع در تصویر شماره 1 ملاحظه می کنید.

تصویر 1 نمودار $f(x)$



پاسخ

بر اساس تعریف های (1a) و (2a) با انتگرال گیری داریم.

$$\hat{f}_c(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \int_0^a \cos wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \left(\frac{\sin aw}{w} \right)$$

$$\hat{f}_s(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \int_0^a \sin wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} k \left(\frac{1 - \cos aw}{w} \right).$$

این، با فرمول های 1، در دو جدول اول که در آخر این فصل ملاحظه خواهید کرد، مطابقت دارد.

تمرین 2

تبدیل کسینوسی فوریه تابع نمائی

مطلوب است. $\mathcal{F}_c(e^{-x})$

پاسخ

با انتگرال گیری جزء به جزء و باز گشت داریم.

$$\mathcal{F}_c(e^{-x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-x} \cos wx \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{e^{-x}}{1+w^2} (-\cos wx + w \sin wx) \Big|_0^{\infty} = \frac{\sqrt{2/\pi}}{1+w^2}.$$

این، با فرمول های 3 در جدول 1 که در آخر این فصل خواهید دید، مطابقت دارد.

در این دو مثال چه کردیم؟ در حقیقت کار زیادی انجام ندادیم. نماد های A و B را تغییر دادیم تا یک توزیع متناسب برای $\frac{2}{\pi}$ در فرمول های اصلی (1) و (2) بدست آوریم. این توزیع برای راحتی کار است، اما ضروری نیست. بدون این هم می توانستیم مساله را حل کنیم.

چه بدست آوردیم؟ نشان خواهیم داد که این تبدیلات، خواص کار بردی دارند که اجازه می دهند مشتق گیری را به عملیات جبری تغییر دهیم. این کلید کار بردی است برای حل معادلات دیفرانسیلی.

خطی بودن، تبدیلات مشتق ها **Linearity, Transform of Derivatives**

اگر $f(x)$ روی قسمت مثبت محور x مطلقا انتگرال پذیر باشد و در هر بازه کران دار، تکه ای پیوسته باشد، پس تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه f وجود دارد.

علاوه بر این، اگر f و g دارای تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه داشته باشند، $af + bg$ هم تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه دارند. اینجا a و b اعداد ثابت هستند. و بر اساس (1a) داریم.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c(af + bg) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [af(x) + bg(x)] \cos wx \, dx \\ &= a \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos wx \, dx + b \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} g(x) \cos wx \, dx. \end{aligned}$$

سمت راست $a\mathcal{F}_c(f) + b\mathcal{F}_c(g)$ است. به همین طریق برای $\mathcal{F}_s$ بر اساس (2) • این نشان می دهد که تبدیلات کسینوسی و سینوسی فوریه، عملیات خطی هستند.

$$\begin{aligned} (a) \quad \mathcal{F}_c(af + bg) &= a\mathcal{F}_c(f) + b\mathcal{F}_c(g), \\ (b) \quad \mathcal{F}_s(af + bg) &= a\mathcal{F}_s(f) + b\mathcal{F}_s(g). \end{aligned}$$

(3)

قضیه 1

مشتق های تبدیلات کسینوسی و سینوسی

فرض می کنیم $f(x)$ پیوسته و روی محور x مطلقا انتگرال پذیر باشد، فرض می کنیم $f'(x)$ در هر بازه کران دار، تکه ای پیوسته باشد، و فرض می کنیم $f(x) \rightarrow 0$ هنگامی که $x \rightarrow \infty$ پس

$$(4) \quad \begin{aligned} (a) \quad \mathcal{F}_c\{f'(x)\} &= w\mathcal{F}_s\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0), \\ (b) \quad \mathcal{F}_s\{f'(x)\} &= -w\mathcal{F}_c\{f(x)\}. \end{aligned}$$

اثبات

بر اساس تعریف ها و از طریق انتگرال گیری جزء به جزء داریم.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_c\{f'(x)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f'(x) \cos wx \, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[f(x) \cos wx \Big|_0^{\infty} + w \int_0^{\infty} f(x) \sin wx \, dx \right] \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} f(0) + w\mathcal{F}_s\{f(x)\}; \end{aligned}$$

به همین طریق

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_s\{f'(x)\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f'(x) \sin wx \, dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[f(x) \sin wx \Big|_0^{\infty} - w \int_0^{\infty} f(x) \cos wx \, dx \right] \\ &= 0 - w\mathcal{F}_c\{f(x)\}. \end{aligned}$$

فرمول (4a) با f' بجای f

$$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = w\mathcal{F}_s\{f'(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0);$$

به ما می دهد.

لذا بر اساس (4b) داریم.

(5a)

$$\mathcal{F}_c\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_c\{f(x)\} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}f'(0).$$

به همین طریق

(5b)

$$\mathcal{F}_s\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}_s\{f(x)\} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}wf(0).$$

یک کاربرد اساسی (5) برای معادلات دیفرانسیل پاره ای در فصل های بعد خواهیم دید. فعلا ، نشان می دهیم چگونه (5) می تواند برای بدست آوردن تبدیلات ، بکار رود.

مثال 3

یک کار برد عملی فرمول (5)

از $f(x) = e^{-ax}$ تبدیل کسینوسی فوریه

$$\mathcal{F}_c(e^{-ax})$$

برای $a > 0$ بدست آورید.

پاسخ

با مشتق گرفتن

$$(e^{-ax})'' = a^2 e^{-ax}$$

پس

$$a^2 f(x) = f''(x).$$

از این ، (5a) و خطی بودن (3a) داریم.

$$a^2 \mathcal{F}_c(f) = \mathcal{F}_c(f'')$$

$$= -w^2 \mathcal{F}_c(f) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} f'(0)$$

$$= -w^2 \mathcal{F}_c(f) + a \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

لذا

$$(a^2 + w^2) \mathcal{F}_c(f) = a \sqrt{2/\pi}.$$

بر اساس جدول 1 بخش آخر این فصل ، جواب مطابق زیر است.

$$\mathcal{F}_c(e^{-ax}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{a}{a^2 + w^2} \right) \quad (a > 0).$$

1.9 صورت مختلط انتگرال فوریه Complex Form of the Fourier Integral

صورت مختلط انتگرال فوریه مطابق زیر است،

$$(4) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{i v(x-v)} dv dw \quad (i = \sqrt{-1}).$$

تبدیل فوریه و وارون آن

با نوشتن تابع نمائی (4) به صورت حاصلضرب تابع های نمائی، داریم.

$$(5) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-i w v} dv \right] e^{i w x} dw.$$

عبارت داخل کروشه یک تابع w است، که با نماد $\hat{f}(w)$ نشان داده می شود و تبدیل فوریه f نامیده می شود، و با نوشتن x بجای v داریم.

$$(6) \quad \hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i w x} dx.$$

پس شماره (5) به صورت زیر خواهد بود.

$$(7) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{i w x} dw$$

شماره (7) وارون تبدیل فوریه $\hat{f}(w)$ نامیده می شود. نماد دیگر برای تبدیل فوریه مطابق زیر است.

$$\hat{f} = \mathcal{F}(f),$$

پس، داریم.

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\hat{f}).$$

مرحله بدست آوردن تبدیل فوریه $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ از یک f ، تبدیل فوریه و یا روش تبدیل فوریه نامیده می شود.

قضیه 1

وجود داشتن تبدیل فوریه Existence of the Fourier Transform

اگر f مطلقا انتگرال پذیر باشد روی محور x و تکه ای پیوسته باشد در هر بازه کران دار، پس تبدیل فوریه $\hat{f}(w)$ از $f(x)$ که با فرمول (6) نشان داده شده است، وجود دارد.

مثال 1

تبدیل فوریه

تبدیل فوریه تابع زیر را پیدا کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } |x| < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

پاسخ

با استفاده از (6) و انتگرال گیری داریم.

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-iwx}}{-iw} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{-iw\sqrt{2\pi}} (e^{-iw} - e^{iw}).$$

مثل شماره (1b) بخش 1.8 داریم.

$$e^{iw} = \cos w + i \sin w, e^{-iw} = \cos w - i \sin w$$

و با جانشین کردن

$$e^{iw} - e^{-iw} = 2i \sin w.$$

تساوی بالا، در فرمول قبلی سمت راست، i حذف می شود و پاسخ زیر بدست می آوریم.

$$\hat{f}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin w}{w}.$$

مثال 2 تبدیل فوریه

مطلوب است تبدیل فوریه $\mathcal{F}(e^{-ax})$ تابع زیر.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{اگر } x > 0 \\ 0 & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

اینجا $a > 0$ است.

پاسخ

بنا به تعریف (6) با انتگرال گرفتن داریم.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-ax}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-iwx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(a+iw)x}}{-(a+iw)} \Big|_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} (a+iw)}. \end{aligned}$$

این جدول III آخرین بخش را ثابت می کند.

بخش 1.10 خلاصه فصل اول همراه با تمرینات دوره ای

یاد آوری

یک تابع متناوب ، یک تابع است بطوری که $f(x+p) = f(x)$ باشد. اینجا p یک دوره تناوب است.

کوچک ترین دوره تناوب را یک دوره تناوب اساسی می نامند.

فرض می کنیم $f(x)$ یک تابع متناوب باشد ، با دوره تناوب 2π ، و در یک دوره تناوب ، انتگرال پذیر باشد. پس $f(x)$ را می توان بوسیله یک سری مثلثاتی زیر نشان داد.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

سری بالا همگرا است و دارای جمع $f(x)$ است. سری بالا را سری فوریه می نامند. ضریب های a_0, a_n, b_n را ضریب های فوریه می نامند که از فرمول های اویلر گرفته شده اند. فرمول های اویلر به قرار زیر هستند.

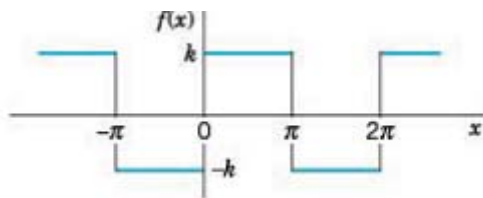
$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx$$

مثال 1 : موج مستطیلی

$$f(x) = \begin{cases} -k, & -\pi < x < 0 \\ k, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

تصویر ۱ نمودار $f(x)$ موج مستطیلی متناوب

ضریب های فوریه را بدست می آوریم.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 -k \, dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} k \, dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} [0] = 0$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-k) \sin nx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} k \sin nx \, dx \\ &= \frac{k}{\pi} \left(\left[\frac{\cos nx}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} \right) \end{aligned}$$

اگر n فرد باشد ، پس داریم.

$$= \frac{k}{\pi n} (1 + 1 + 1 + 1) = \frac{4k}{n\pi} \quad \text{for odd } n$$

پس $a_0 = a_n = 0$ است. و اگر n زوج باشد ، باز هم $b_n = 0$ است. و در نهایت اگر n فرد باشد ، یعنی $2n + 1$ داشته باشیم ، سری فوریه برای تابع داده شده به صورت زیر است.

متعامد بودن تابع های سینوس و کسینوس

دو تابع f_m و f_n را متعامد می گویند ، اگر داشته باشیم.

$$\int f_m(x) \times f_n(x) dx = 0$$

برای تمام $m \neq n$ ها و برای تمام $m = n$ ها داریم

$$\int f_m(x) \times f_n(x) dx = a$$

اینجا a یک عدد است. پس برای تمام $m \neq \pm n$ داریم.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0$$

و برای تمام $m = n$ ها داریم.

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\cos nx)^2 \, dx \neq 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin nx)^2 \, dx \neq 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0$$

تابع های با هر دوره تناوب $p = 2L$

در بالا گفتیم اگر دوره تناوب یک تابع 2π باشد ، پس $f(x)$ می تواند بوسیله یک سری مثلثاتی نمایش داد. یعنی

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

و این سری ، همگرا است و دارای جمع $f(x)$ است. و گفتیم ضریب های سری فوریه از فرمول های اوایلر گرفته می شوند.

حال اگر تابع $f(x)$ دارای دوره تناوب $2L$ باشد ، پس سری فوریه این تابع مطابق زیر است.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

با ضریب های فوریه که از فرمول های اوایلر بدست می آیند.

$$(a) \quad a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx$$

$$(b) \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(c) \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad n = 1, 2, \dots$$

مساله ۱ - سری برای $1 + \sin^2 t$ را پیدا کنید.

پاسخ

این تابع ، یک تابع متناوب است با دوره تناوب 2π ، پس یک عبارت منحصر به فرد به عنوان یک سری فوریه دارد. با استفاده از فرمول زاویه مضاعف $\cos(2t) = 1 - \sin^2 t$ ، پس داریم.

$$1 + \sin^2 t = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos(2t).$$

سمت راست ، یک سری فوریه است.

مساله ۲ - مطلوب سری فوریه برای تابع زیر.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x \leq 0, \\ 2, & 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

پاسخ

داریم.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{2} + b_n \sin \frac{\pi n x}{2} \right),$$

حالا ، ضریب ها را پیدا می کنیم.

$$a_0 = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 (-1) dx + \int_0^2 2 dx \right) = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 (-1) \cos \frac{\pi n x}{2} dx + \int_0^2 2 \cos \frac{\pi n x}{2} dx \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left((-1) \left[\frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} \right]_{-2}^0 + 2 \left[\frac{2}{\pi n} \sin \frac{\pi n x}{2} \right]_0^2 \right) = 0, \quad n > 0,$$

$$b_n = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 (-1) \sin \frac{\pi n x}{2} dx + \int_0^2 2 \sin \frac{\pi n x}{2} dx \right) =$$

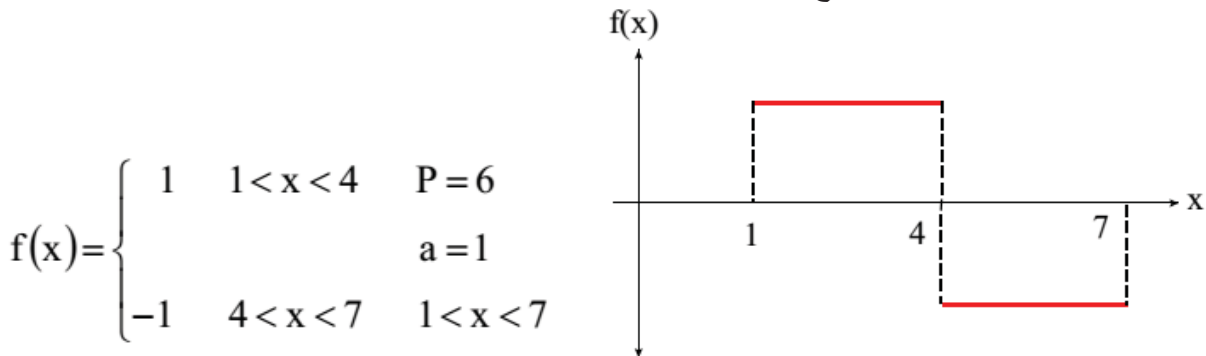
$$\frac{1}{2} \left(-(-1) \left[\frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2} \right]_{-2}^0 - 2 \left[\frac{2}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{2} \right]_0^2 \right) =$$

$$\frac{1}{\pi n} (1 - \cos \pi n) - 2 \frac{1}{\pi n} (\cos \pi n - 1) = \frac{3}{\pi n} (1 - (-1)^n).$$

پس داریم.

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\pi n} (1 - (-1)^n) \sin \frac{\pi n x}{2}.$$

مساله 3 - مطلوب است سری تابع زیر.



پاسخ

دوره تناوب $p = 6$ است. بازه انتگرال گیری $1 < x < 7$ است. پس داریم.

$$a_0 = \frac{1}{6} \int_1^7 f(x) dx = \frac{1}{6} \left[\int_1^4 1 dx + \int_4^7 (-1) dx \right] = 0$$

$$a_n = \frac{1}{3} \left[\int_1^4 \cos \frac{n\pi x}{3} dx - \int_4^7 \cos \frac{n\pi x}{3} dx \right] = \frac{1}{n\pi} \left[2 \sin \frac{4n\pi}{3} - \sin \frac{n\pi}{3} - \sin \frac{7n\pi}{3} \right] \quad n \neq 0$$

$$b_n = \frac{1}{3} \int_1^7 f(x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{3} \left[\int_1^4 \sin \frac{n\pi x}{3} dx - \int_4^7 \sin \frac{n\pi x}{3} dx \right] = -\frac{1}{n\pi} \left[2 \cos \frac{4n\pi}{3} - \cos \frac{n\pi}{3} - \cos \frac{7n\pi}{3} \right]$$

$$\sin \frac{4n\pi}{3} = \cos n\pi \sin \frac{n\pi}{3}$$

$$\sin \frac{7n\pi}{3} = \sin \frac{n\pi}{3}$$

$$\cos \frac{4n\pi}{3} = \cos n\pi \cos \frac{n\pi}{3}$$

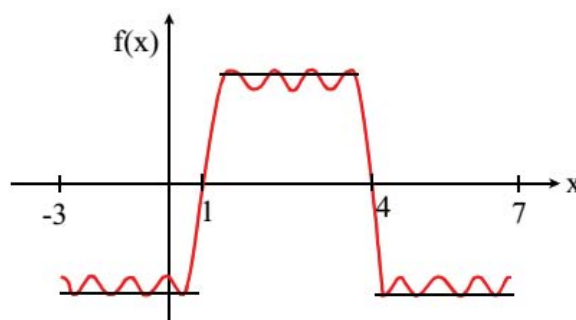
$$\cos \frac{7n\pi}{3} = \cos \frac{n\pi}{3}$$

پس

$$a_0 = 0$$

$$a_n = -2 \left(\frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} \right) \sin \frac{n\pi}{3}$$

$$b_n = 2 \left(\frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} \right) \cos \frac{n\pi}{3}$$



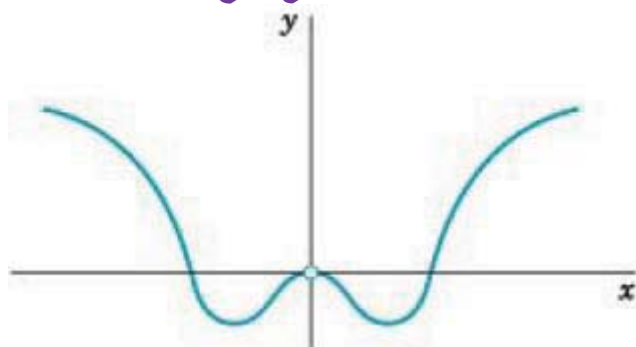
یاد آوری

$f(x)$ یک تابع زوج است اگر $f(-x) = f(x)$ باشد. مثلاً اگر داشته باشیم
 $f(x) = x \sin(x)$

پس

$$f(-x) = -x \sin(-x) = f(x)$$

و بنا بر این نتیجه می گیریم $x \sin(x)$ یک تابع زوج است.
 نمودار یک تابع زوج



اگر $g(x)$ یک تابع زوج باشد ، پس

$$\int_{-L}^L g(x) dx = 2 \int_0^L g(x) dx$$

اگر $h(x)$ یک تابع فرد باشد .پس داریم.

$$\int_{-L}^L h(x) dx = 0$$

حاصل ضرب یک تابع زوج و یک تابع فرد ، فرد است.

سری فوریه یک تابع زوج با دوره تناوب $2L$, سری کسینوس فوریه زیر است.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

با ضریب های زیر. توجه کنید انتگرال فقط از 0 تا L است.

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

سری فوریه یک تابع فرد با دوره تناوب $2L$, سری سینوس فوریه زیر است.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

با ضریب های زیر.

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

جمع و ضرب عددی

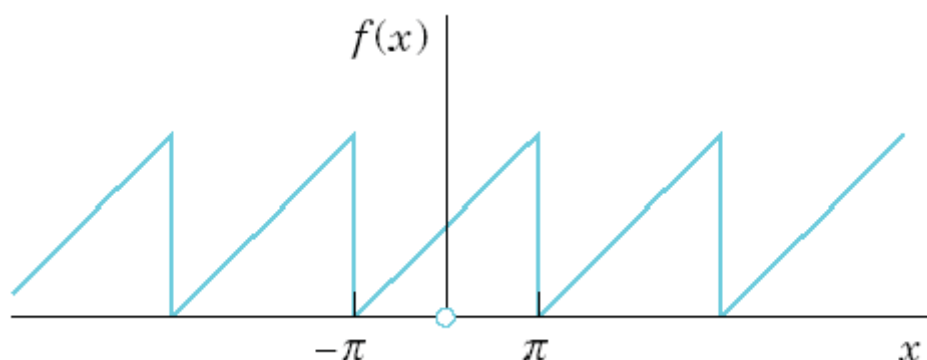
ضریب های فوریه یک مجموع $f_1 + f_2$ عبارت است از جمع های ضریب های سری فوریه متناظر f_1 و f_2 .

ضریب های فوریه cf عبارت است از c ضرب در ضرب های فوریه متناظر f .

موج دندانه اره Sawtooth Wave

مسئله ۴ - مطلوب است سری فوریه تابع زیر.

$$f(x) = x + \pi \quad \text{اگر} \quad -\pi < x < \pi \quad \text{و} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

**پاسخ**

داریم $f = f_1 + f_2$. اینجا $f_1 = x$ و $f_2 = \pi$. ضریب های فوریه f_2 صفر هستند بجز ضریب اول که یک جمله ثابت است، که π است. پس ضریب های فوریه a_n, b_n مربوط هستند به f_1 بجز برای a_0 که π است. چون f_1 فرد است، پس $a_n = 0$ است بای $n = 1, 2, 3, \dots$ و

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx.$$

با انتگرال گیری جزء بجزء داریم.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx \right] = -\frac{2}{n} \cos n\pi.$$

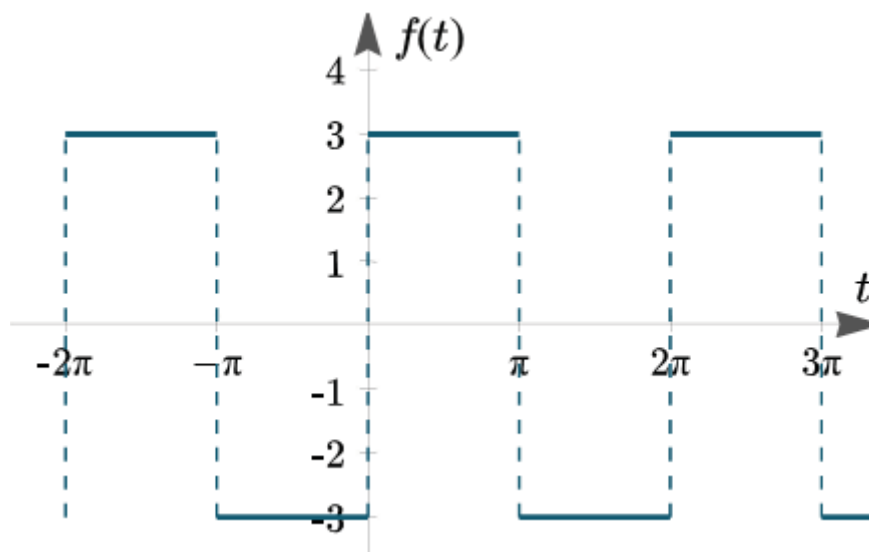
لذا

$$b_1 = 2, b_2 = -\frac{2}{2}, b_3 = \frac{2}{3}, b_4 = -\frac{2}{4}, \dots$$

و سری فوریه $f(x)$ مطابق زیر است.

$$f(x) = \pi + 2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - + \dots \right).$$

مساله 5 - سری فوریه نمودار زیر را پیدا کنید.



پاسخ

با توجه به نمودار داده شده ، تابع را مطابق زیر تعریف می کنیم.

$$f(t) = \begin{cases} -3 & -\pi \leq t < 0 \\ 3 & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

ملاحظه می کنیم که تابع ، یک تابع متناوب است با دوره تناوب 2π . پس داریم.

$$f(t) = f(t + 2\pi)$$

همچنین $L = \pi$ است، این تابع ، فرد است. پس $a_0 = 0$ و $a_n = 0$ است. لذا فقط لازم است b_n را پیدا کنیم. چون $L = \pi$ است ، فرمول های لازم مطابق زیر است.

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

حالا

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 -3 \sin nt \, dt + \int_0^{\pi} 3 \sin nt \, dt \right) \\
 &= \frac{3}{\pi} \left(\left[\frac{\cos nt}{n} \right]_{-\pi}^0 + \left[-\frac{\cos nt}{n} \right]_0^{\pi} \right) \\
 &= \frac{3}{\pi n} (\cos 0 - \cos(-\pi n) - \cos n\pi + \cos 0) \\
 &= \frac{3}{\pi n} (2 - \cos \pi n - \cos \pi n) \\
 &= \frac{6}{\pi n} (1 - \cos \pi n) \\
 &= \frac{12}{\pi n} \quad \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\
 &= 0 \quad \text{اگر } n \text{ زوج باشد}
 \end{aligned}$$

پس می توان نوشت

$$b_n = \frac{12}{\pi(2n-1)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

برای چند n امتحان می کنیم.

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{12}{\pi(2*1-1)} = \frac{12}{\pi} \\
 b_2 &= \frac{12}{\pi(2*2-1)} = \frac{12}{3\pi} = \frac{4}{\pi} \\
 b_3 &= \frac{12}{\pi(2*3-1)} = \frac{12}{5\pi}
 \end{aligned}$$

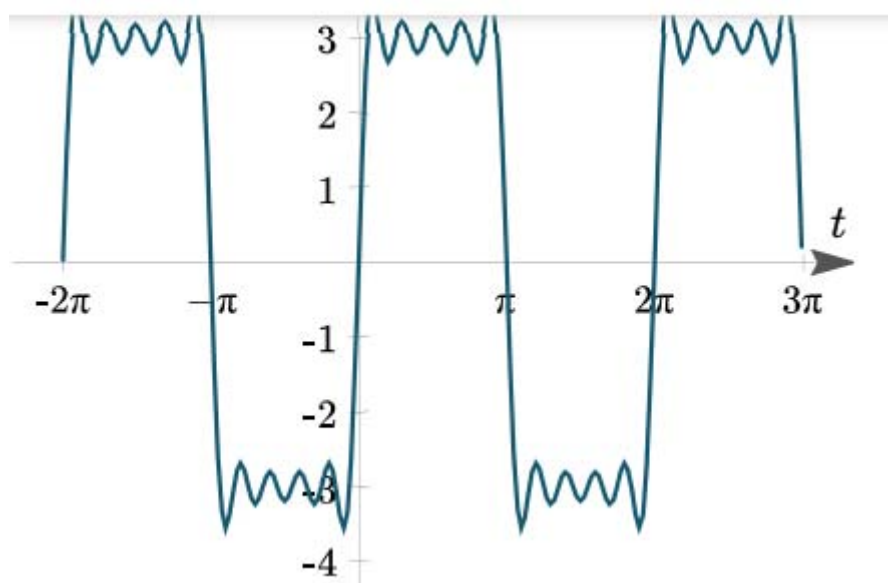
پس، سری فوریه برای این تابع فرد، مطابق زیر است.

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\pi(2n-1)} \sin(2n-1)t \\
 &= \frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)t}{(2n-1)}
 \end{aligned}$$

ملاحظه می شود که $b_n \neq 0$ است، اگر n فرد باشد، همچنین ضریب های فرد t داریم. ضریب های زوج، صفر هستند. پنج جمله اول نمودار را امتحان می کنیم. ملاحظه می کنیم که نمودار شبیه موج مربعی است که در ابتدا نشان دادیم.

$$\begin{aligned}
 &\frac{12}{\pi} \sum_{n=1}^5 \frac{\sin(2n-1)t}{(2n-1)} \\
 &= \frac{12}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \frac{1}{7} \sin 7t + \frac{1}{9} \sin 9t \right)
 \end{aligned}$$

نمودار تقریبی موج مربعی $f(t)$



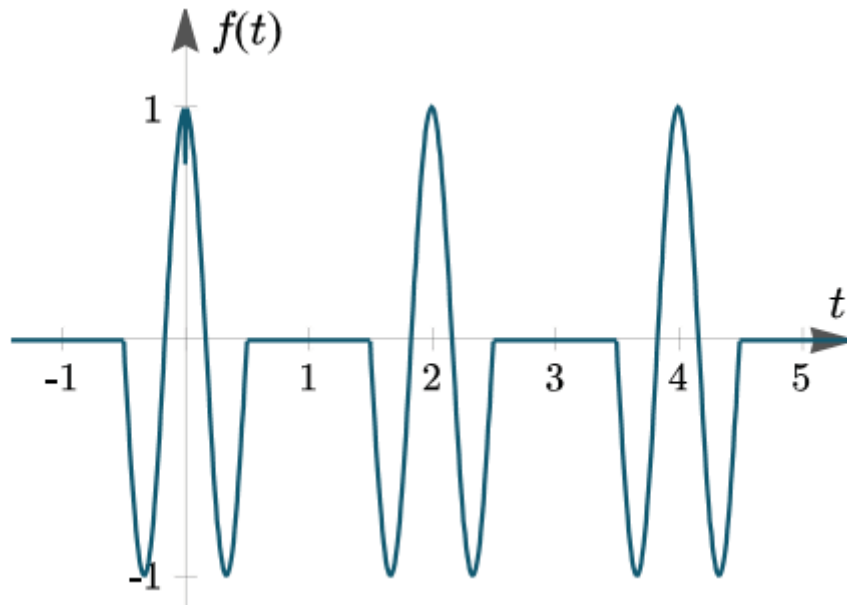
مساله 6 - سه چرخه یا دوره تناوب تابع زیر را رسم کنید.

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } -1 \leq t < -\frac{1}{2} \\ \cos 3\pi t & \text{اگر } -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{اگر } \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$

و $f(t) = f(t+2)$ است. سری فوریه برای این تابع پیدا کنید.

پاسخ

ابتدا نمودار را رسم می کنیم.



این تابع، زوج است. پس $b_n = 0$ است. فقط لازم است a_0 و a_n را پیدا کنم.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 f(t) dt \\ &= \left[\frac{\sin 3\pi t}{3\pi} \right]_{-0.5}^{0.5} \\ &= -\frac{2}{3\pi} \end{aligned}$$

حالا، a_n را پیدا می کنیم.

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt \\
 &= \int_{-1}^1 f(t) \cos n\pi t dt \\
 &= 0 + \int_{-0.5}^{0.5} \cos 3\pi t \cos n\pi t dt + 0 \\
 &= 6 \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{\pi(-9 + n^2)}
 \end{aligned}$$

بخاطر بیاورید که $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$ است برای n فرد و برای n زوج $+1$ یا -1 است. لذا انتظار داریم برای هر جمله فرد، صفر بدست آوریم. اما نمی‌توانیم $n = 3$ داشته باشیم، زیرا در این صورت مخرج صفر خواهد بود. در این حالت لازم است برای $n = 3$ بگیریم تا ببینیم آیا مقداری وجود دارد؟ برای $n = 1$ داریم.

$$\int_{-1/2}^{1/2} \cos 3\pi t \cos \pi t dt = 0$$

برای $n = 2$ داریم.

$$\int_{-1/2}^{1/2} \cos 3\pi t \cos 2\pi t dt = \frac{6}{5\pi}$$

برای $n = 3$ داریم.

$$\int_{-1/2}^{1/2} \cos 3\pi t \cos 3\pi t dt = \frac{1}{2}$$

برای $n = 4$ داریم.

$$\int_{-1/2}^{1/2} \cos 3\pi t \cos 4\pi t dt = \frac{6}{7\pi}$$

پس

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \\
 &= \frac{a_0}{2} + \frac{6}{5\pi} \cos 2\pi t + \frac{1}{2} \cos 3\pi t + \sum_{n=4}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} \\
 &= -\frac{1}{3\pi} + \frac{6 \cos 2\pi t}{5\pi} + \frac{\cos 3\pi t}{2} + \sum_{n=4}^{\infty} 6 \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{\pi(-9+n^2)} \cos n\pi t
 \end{aligned}$$

مساله 7 - مطلوب است سری فوریه $f(x) = L - x$ در $-L \leq x \leq L$

پاسخ

$$A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L L - x dx = L$$

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L (L - x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
 &= \frac{1}{L} \left(\frac{L}{n^2\pi^2} \right) \left(n\pi(L - x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \Big|_{-L}^L \\
 &= \frac{1}{L} \left(\frac{L}{n^2\pi^2} \right) (-2n\pi L \sin(-n\pi)) = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L (L - x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\
 &= \frac{1}{L} \left(-\frac{L}{n^2\pi^2} \right) \left[L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - n\pi(x - L) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right] \Big|_{-L}^L \\
 &= \frac{1}{L} \left[\frac{L^2}{n^2\pi^2} (2n\pi \cos(n\pi) - 2 \sin(n\pi)) \right] = \frac{2L(-1)^n}{n\pi} \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

پس سری فوریه به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= L + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L(-1)^n}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

مساله 8 - شرط همگرا بودن سری فوریه را بیان کنید.

پاسخ

الف - سری فوریه $f(x)$ همگرا است برای تمام نقاطی که $f(x)$ پیوسته است.
ب - در نقطه نا پیوستگی x_0 سری به میانگین حد سمت راست و چپ همگرا است. یعنی $f(x)$ در x_0

$$f(x_0) = \frac{1}{2} \left[\lim_{h \rightarrow 0} (x_0 + h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 - h) \right]$$

مساله 9 - جمع سری فوریه $f(x)$ در نقطه پیوستگی $x = a$ به کدام مقدار همگرا است؟

پاسخ

جمع سری فوریه $f(x)$ به مقدار $f(a)$ در نقطه پیوستگی، همگرا است.

مساله 10 - جمع سری فوریه $f(x)$ در نقطه نا پیوستگی $x = a$ به کدام مقدار همگرا است؟

پاسخ

در نقطه نا پیوستگی $x = a$ جمع سری فوریه بجه مقدار زیر همگرا است.

$$f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h)}{2} \right]$$

مساله 11 - اگر $f(x) = x^2 + x$ به صورت یک سری فوریه در $(-2, 2)$ بیان شده باشد، این سری در $x = 2$ به کدام مقدار، همگرا است؟

پاسخ

تابع به صورت زیر است.

$$f(x) = x^2 + x, -2 \leq x \leq 2$$

مقداری که سری فوریه $f(x)$ در $x = 2$ به آن همگرا است، یک نقطه پایانی است که به صورت زیر است.

$$= \frac{f(-2) + f(2)}{2} = \frac{(4-2) + (4+2)}{2} = 4$$

پس سری فوریه در $x = 2$ به مقدار 4 همگرا است.

مساله 12 - اگر داشته باشیم

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{اگر } 0 < x < \pi \\ 50 & \text{اگر } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

و $f(x) = f(x + 2\pi)$ باشد، برای تمام x ها، مطلوب است مجموع سری فوریه $f(x)$ در $x = \pi$

پاسخ

جمع سری فوریه تابع $f(x)$ در $x = \pi$ مطابق زیر است.

$$f(\pi) = \frac{f(\pi-) + f(\pi+)}{2} = \frac{\cos \pi + 50}{2} = \frac{-1 + 50}{2} = \frac{49}{2}$$

مساله 13 - اگر $f(x) = \sinh x$ در $-\pi < x < \pi$ تعریف شده باشد، مقدار a_0, a_n را بنویسید.

پاسخ

$$f(-x) = \sinh(-x) = -\sinh x = -f(x)$$

چون $\sinh x$ یک تابع فرد است، پس

$$a_0 = 0, a_n = 0$$

مساله 14 - فرمول های اعداد ثابت سری فوریه برای $f(x)$ در بازه $(-\pi, \pi)$ را بنویسید.

پاسخ

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

مساله 14 - مطلوب است a_0 سری فوریه برای $f(x) = x$ در $0 \leq x \leq 2\pi$.

پاسخ

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{4\pi^2}{2} - 0 \right] = 2\pi$$

مساله 15 - اگر $f(x) = |x|$ در $(-\pi, \pi)$ باشد، مطلوب است a_0 برای سری فوریه این تابع.

پاسخ

تابع $f(x) = |x|$ یک تابع زوج است. پس داریم.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\pi} = \pi$$

مساله 16 - مطلوب است ضریب فوریه a_0 تابع $f(x) = e^x$ در $-\pi < x < \pi$.

پاسخ

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{1}{\pi} [e^x]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} (e^{\pi} - e^{-\pi}) = \frac{2 \sinh \pi}{\pi}$$

مساله 17 - مطلوب است b_n سری فوریه تابع x^2 در $(-\pi, \pi)$.

پاسخ

چون $f(x) = x^2$ یک تابع زوج است، پس $b_n = 0$ است.

مساله 18 - مطلوب است عدد ثابت a_0 برای سری فوریه مربوط به $f(x) = x - x^3$ در $(-\pi, \pi)$.

پاسخ

$$f(-x) = -x + x^3 = -(x - x^3) = -f(x)$$

پس $f(x)$ در $(-\pi, \pi)$ یک تابع فرد است و لذا $a_0 = 0$ است.

مساله 19 - اگر $f(x) = x^2 - x^4$ در $(-l, l)$ باشد، مطلوب است مقدار b_n در بسط سری فوریه.

پاسخ

$$f(-x) = (-x)^2 + (-x)^4 = x^2 + x^4 = f(x)$$

پس $f(x)$ در $(-l, l)$ یک تابع زوج است. لذا $b_n = 0$ است.

مساله 20 - مطلوب است a_0 در بسط سری فوریه تابع $f(x) = x \cos x$.
پس $f(x) = x \cos x$ یک تابع فرد است. لذا $a_0 = 0$ است.

مساله 21 - سری سینوسی فوریه k در $(0, \pi)$ را بنویسید.

پاسخ

سری سینوسی فوریه مطابق زیر است.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

اینجا

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} k \sin nx \, dx \\ &= \frac{2k}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2k}{n\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

پس

$$b_n = \begin{cases} \frac{4k}{n\pi} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

و در نهایت

$$f(x) = \sum_{n \text{ فرد}} \frac{4k}{n\pi} \sin nx = \frac{4k}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin[(2n-1)x]$$

مساله 22- مطلوب است سری سینوسی فوری برای 1 در $(0, \pi)$.

پاسخ

اینجا $f(x) = 1$ است. پس

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

اینجا

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 1 * \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n] \end{aligned}$$

پس

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases}$$

و در نهایت

$$f(x) = \sum_{n \text{ فرد}} \frac{4}{n\pi} \sin nx = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin[(2n-1)x]$$

مساله 23- مطلوب است a_n در بسط سری کسینوسی فوری $f(x) = k$ در بازه $(0, 10)$.

پاسخ

$$a_n = \frac{2}{10} \int_0^{10} k \cos \frac{n\pi x}{10} dx = \frac{k}{5} \left[\frac{\sin \frac{n\pi x}{10}}{\frac{n\pi}{10}} \right]_0^{10} = \frac{k}{5} \left[\frac{10}{n\pi} (\sin n\pi - 0) \right] = 0$$

مساله 24- اگر $f(x)$ در $-3 \leq x \leq 3$ تعریف شده باشد، مطلوب است مقدار ضریب های فوريه

پاسخ

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx \quad a_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cos \frac{n\pi x}{3} dx \quad b_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \sin \frac{n\pi x}{3} dx$$

مساله 25 - مطلوب است شکل مختلط سری فوريه

$$f(x) = e^{-x} \quad \text{در} \quad -1 < x \leq 1$$

پاسخ

می دانیم که سری فوريه به صورت زیر است.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}}$$

اینجا

$$c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{l}} dx$$

اینجا $l = 1$ است.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x} \quad (1)$$

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-x} e^{-in\pi x} dx$$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-[1+in\pi]x} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-[1+in\pi]x}}{-1[1+in\pi]} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{-1}{2[1+in\pi]} [e^{-[1+in\pi]x}]_{-1}^1 \\ &= \frac{-1}{2[1+in\pi]} [e^{-[1+in\pi]} - e^{-[1+in\pi]}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_n &= -\frac{1}{2[1+in\pi]} [e^{-1}e^{-in\pi} - e^{-1}e^{in\pi}] \\
 &= -\frac{1}{2[1+in\pi]} [e^{-1}(-1)^n - e^{-1}(-1)^n] \\
 &= \frac{-(-1)^n}{2[1+in\pi]} [e^{-1} - e^1] \\
 &= \frac{(-1)^n}{[1+in\pi]} \left[\frac{e^1 - e^{-1}}{2} \right] \\
 C_n &= \frac{(-1)^n}{1+in\pi} [\sinh 1]
 \end{aligned}$$

از معادله (1) داریم.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{1+in\pi} \sinh 1 \right] e^{in\pi x} \\
 f(x) &= \sinh 1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n(1-in\pi)}{1+n^2\pi^2} \right] e^{in\pi x}
 \end{aligned}$$

مساله 26-

آیا می توان $y = \tan x$ را به صورت سری فوریه بیان کرد؟ توضیح دهید.

پاسخ

خیر، زیرا تابع تانژانت تعداد نا محدودی نقاط نا پیوستگی دارد.

یاد آوری: شرط های دیریشلت Dirichlet's Condition یا شرط لازم برای $f(x)$ به صورت سری فوریه بیان شود.

الف - تابع $f(x)$ باید محدود و تناوبی باشد.

ب - تابع $f(x)$ تعداد محدودی نقاط نا پیوسته داشته باشد.

مساله 27-

مطلوب است سری فوریه تابع زیر.

$$f(x) = \begin{cases} L & \text{اگر } -L \leq x \leq 0 \\ 2x & \text{اگر } 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

پاسخ

تابع داده شده دو ضابطه ای است،

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2L} \left[\int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx \right] \\
 &= \frac{1}{2L} \left[\int_{-L}^0 L dx + \int_0^L 2x dx \right] = \frac{1}{2L} [L^2 + L^2] = L \\
 A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \left[\int_{-L}^0 f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\
 &= \frac{1}{L} \left[\int_{-L}^0 L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_0^L 2x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right]
 \end{aligned}$$

حالا، یک به یک محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned}
 \int_{-L}^0 L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \left(\frac{L^2}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \Big|_{-L}^0 = \frac{L^2}{n\pi} \sin(n\pi) = 0 \\
 \int_0^L 2x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \left(\frac{2L}{n^2\pi^2} \right) \left(L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + n\pi x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) \Big|_0^L \\
 &= \left(\frac{2L}{n^2\pi^2} \right) (L \cos(n\pi) + n\pi L \sin(n\pi) - L \cos(0)) \\
 &= \left(\frac{2L^2}{n^2\pi^2} \right) ((-1)^n - 1)
 \end{aligned}$$

پس اگر همه را کنار هم بگذاریم، داریم.

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \left[0 + \left(\frac{2L^2}{n^2\pi^2} \right) ((-1)^n - 1) \right] \\
 &= \frac{2L}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1), \quad n = 1, 2, 3, \dots
 \end{aligned}$$

ضریب های کسینوس را پیدا کردیم. حالا ضریب های سینوس را پیدا می کنیم.

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \left[\int_{-L}^0 f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] \\
 &= \frac{1}{L} \left[\int_{-L}^0 L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_0^L 2x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right]
 \end{aligned}$$

همان طور که در مورد ضریب های کسینوس انجام دادیم، برای ضریب های سینوس هم جدا جدا عمل می کنیم.

$$\int_{-L}^0 L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \left(-\frac{L^2}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \Big|_{-L}^0 = \frac{L^2}{n\pi} (-1 + \cos(n\pi)) = \frac{L^2}{n\pi} ((-1)^n - 1)$$

$$\begin{aligned} \int_0^L 2x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= \left(\frac{2L}{n^2\pi^2}\right) \left(L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - n\pi x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \Big|_0^L \\ &= \left(\frac{2L}{n^2\pi^2}\right) (L \sin(n\pi) - n\pi L \cos(n\pi)) \\ &= \left(\frac{2L^2}{n^2\pi^2}\right) (-n\pi(-1)^n) = -\frac{2L^2}{n\pi} (-1)^n \end{aligned}$$

حالا، همه را با هم می نویسیم.

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \left[\frac{L^2}{n\pi} ((-1)^n - 1) - \frac{2L^2}{n\pi} (-1)^n \right] \\ &= \frac{L}{n\pi} [-1 - (-1)^n] = -\frac{L}{n\pi} (1 + (-1)^n) \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

و در نهایت داریم.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \\ &= L + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2L}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} (1 + (-1)^n) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \end{aligned}$$

مساله 28 - مطلوب است سری فوریه $f(x) = x$ در $-L \leq x \leq L$ ، پاسخ

ابتدا A_0 و A_n را پیدا می کنیم.

$$A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L x dx = 0$$

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0$$

می دانیم که $f(x) = x$ یک تابع فرد است و کسینوس یک تابع زوج، پس حاصلضرب آنها در $[-L, L]$ فرد است. و لذا انتگرال هر دو صفر است.

حالا، B_n را پیدا می کنیم. لذا داریم.

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \int_{-L}^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

چون هم x و هم سینوس فرد هستند، پس حاصلضرب آنها، زوج است، و با توجه به نتیجه قبل، داریم.

$$B_n = \frac{(-1)^{n+1} 2L}{n\pi} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

و در نهایت، داریم.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

مساله 29 - آیا تبدیلات فوریه تابع های زیر وجود دارد یا نه؟ دلیل بیاورید.

$$i) \sin \frac{1}{x} \quad ii) e^x \quad iii) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \text{ گویا باشد} \\ 0 & \text{اگر } x \text{ گنگ باشد} \end{cases}$$

پاسخ

i) نمودار $\sin \frac{1}{x}$ بطور بی کران در $x = n\pi$ نوسان دارد. اینجا $n \in \mathbb{Z}$ است. اما این تابع دارای تعداد نا محدود ماکسیمم و مینیمم در $(-\infty, \infty)$ دارد، لذا تبدیل فوریه $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ وجود ندارد.

ii) برای $f(x) = e^x$ انتگرال $\int_{-\infty}^{\infty} |e^x| dx$ همگرا نیست، لذا تبدیل فوریه e^x وجود ندارد.

iii) این تابع در $(-\infty, \infty)$ تعداد نا محدود، ماکسیمم و مینیمم دارد، لذا تبدیل فوریه این تابع وجود ندارد.

مساله 30 - نشان دهید

$$\left\{ \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{در} \quad -L \leq x \leq L$$

دو به دو متعامد هستند.

توجه دو تابع f_i و f_j دو به دو متعامد هستند اگر

$$\int_a^b f_i(x) f_j(x) dx = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ c > 0 & i = j \end{cases}$$

پاسخ

آنچه باید انجام دهیم این است انتگرال زیر را محاسبه کنیم.

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

ملاحظه می کنید که انتگرال شامل دو تابع زوج است که در نتیجه حاصلضرب آنها هم زوج است. و می دانیم اگر یک تابع $f(x)$ زوج باشد، پس

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx$$

لذا داریم.

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 2 \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

حالا، برای محاسبه این انتگرال باید سه حالت در نظر بگیریم.

$$\underline{n = m = 0}$$

در این حالت انتگرال خیلی ساده است، و داریم.

$$\int_{-L}^L dx = 2 \int_0^L dx = 2L$$

$$\underline{n = m \neq 0}$$

در این حالت، انتگرال کمی از حالت قبل، مشکل تر است. فقط لازم است یک فرمول ساده مثلثاتی را بخاطر بیاوریم. پس داریم.

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx &= 2 \int_0^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_0^L 1 + \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \left(x + \frac{L}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \right) \Big|_0^L = L + \frac{L}{2n\pi} \sin(2n\pi) \end{aligned}$$

حالا، باید بخاطر بیاوریم که n یک عدد صحیح است پس $\sin(2n\pi) = 0$ است و لذا مقدار نهایی انتگرال مطابق زیر است.

$$\int_{-L}^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 2 \int_0^L \cos^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = L$$

$$\underline{n \neq m}$$

این انتگرال خیلی در هم و بر هم است. اجازه دهید انتگرال را بنویسیم.

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 2 \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx$$

اینجا حاصلضرب دو کسینوس داریم با دو شناسه مختلف. پس یک فرمول مثلثاتی بکار می‌بریم تا حاصلضرب را به صورت زیر در آوریم.

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx &= 2 \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \int_0^L \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) dx \\ &= \left[\frac{L}{(n-m)\pi} \sin\left(\frac{(n-m)\pi x}{L}\right) + \frac{L}{(n+m)\pi} \sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{L}\right) \right]_0^L \\ &= \frac{L}{(n-m)\pi} \sin((n-m)\pi) + \frac{L}{(n+m)\pi} \sin((n+m)\pi)\end{aligned}$$

حالا، می‌دانیم که n و m هر دو اعداد صحیح هستند، پس $n-m$ و $n+m$ هم اعداد صحیح هستند. پس سینوس‌های بالا باید صفر باشند. پس داریم.

$$\int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 2 \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = 0$$

پس نشان دادیم اگر $n \neq m$ باشد، انتگرال صفر است. و اگر $n = m$ باشد، انتگرال یک عدد ثابت مثبت است. پس این مجموعه دو به دو متعامد است.

بخش 1.11 – جدول تبدیلات فوریه

جدول I تبدیلات کسینوسی فوریه

	$f(x)$	$\hat{f}_c(w) = \mathcal{F}_c(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin aw}{w}$
2	$x^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{w^a} \cos \frac{a\pi}{2} \quad (\text{I})$
3	$e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{a}{a^2 + w^2} \right)$
4	$e^{-x^2/2}$	$e^{-w^2/2}$
5	$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/(4a)}$
6	$x^n e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2 + w^2)^{n+1}} \text{Re}(a + iw)^{n+1}$
7	$\begin{cases} \cos x & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin a(1-w)}{1-w} + \frac{\sin a(1+w)}{1+w} \right]$
8	$\cos(ax^2) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{w^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
9	$\sin(ax^2) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{w^2}{4a} + \frac{\pi}{4}\right)$
10	$\frac{\sin ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 - u(w-a))$
11	$\frac{e^{-x} \sin x}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \arctan \frac{2}{w^2}$
12	$J_0(ax) \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - w^2}} (1 - u(w-a))$

جدول II تبدیلات سینوسی فوریه

	$f(x)$	$\hat{f}_s(w) = \mathcal{F}_s(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1 - \cos aw}{w} \right]$
2	$1/\sqrt{x}$	$1/\sqrt{w}$
3	$1/x^{3/2}$	$2\sqrt{w}$
4	$x^{a-1} \quad (0 < a < 1)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\Gamma(a)}{w^a} \sin \frac{a\pi}{2} \quad (\Gamma(a$
5	$e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{w}{a^2 + w^2} \right)$
6	$\frac{e^{-ax}}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \arctan \frac{w}{a}$
7	$x^n e^{-ax} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{n!}{(a^2 + w^2)^{n+1}} \operatorname{Im}(a + iw)^{n+1} \quad \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}$
8	$xe^{-x^2/2}$	$we^{-w^2/2}$
9	$xe^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{w}{(2a)^{3/2}} e^{-w^2/4a}$
10	$\begin{cases} \sin x & \text{if } 0 < x < a \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{\sin a(1-w)}{1-w} - \frac{\sin a(1+w)}{1+w} \right]$
11	$\frac{\cos ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} u(w-a)$
12	$\arctan \frac{2a}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{2\pi} \frac{\sin aw}{w} e^{-aw}$

جدول III
تبدیلات فوریه

	$f(x)$	$\hat{f}(w) = \mathcal{F}(f)$
1	$\begin{cases} 1 & \text{if } -b < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin bw}{w}$
2	$\begin{cases} 1 & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{e^{-ibw} - e^{-icw}}{iw\sqrt{2\pi}}$
3	$\frac{1}{x^2 + a^2} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-a w }}{a}$
4	$\begin{cases} x & \text{if } 0 < x < b \\ 2x - b & \text{if } b < x < 2b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{-1 + 2e^{ibw} - e^{2ibw}}{\sqrt{2\pi}w^2}$
5	$\begin{cases} e^{-ax} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}(a + iw)}$
6	$\begin{cases} e^{ax} & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{e^{(a-iw)c} - e^{(a-iw)b}}{\sqrt{2\pi}(a - iw)}$
7	$\begin{cases} e^{iax} & \text{if } -b < x < b \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin b(w - a)}{w - a}$
8	$\begin{cases} e^{iax} & \text{if } b < x < c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ib(a-w)} - e^{ic(a-w)}}{a - w}$
9	$e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-w^2/4a}$
10	$\frac{\sin ax}{x} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{if } w < a; \quad 0 \text{ if } w > a$