



RIAZISARA

www.riazisara.ir سایت ویژه ریاضیات

**درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات**

و...

[@riazisara](https://t.me/riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

[@riazisara.ir](https://www.instagram.com/riazisara.ir)

ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

فصل سوم

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

Second Order Differential Equations

بخش ۳.۱ مفاهیم اصلی Basic Concepts

در این بخش، تنها در مورد یک معادله دیفرانسیل خطی درجه دوم صحبت می‌کنیم. کلی‌ترین شکل معادله خطی درجه دوم به صورت زیر است.

$$p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = g(t) \quad (1)$$

اما، در حقیقت ما کمتر به معادله دیفرانسیل به صورت فرمول (۱) برخورد می‌کنیم. در معادله بالا ضرایب های y'' , y' , y تابع هستند. معادله هایی که بیشتر به آنها می‌پردازیم، ضرایب های ثابت دارند به صورت زیر

$$ay'' + by' + cy = g(t) \quad (2)$$

در ابتدای کار، برای آسان تر شدن، با معادله هایی شروع می‌کنیم که $g(t) = 0$ است. هنگامی که $g(t) = 0$ است، به معادله دیفرانسیل می‌گوییم، همگن. اگر $g(t) \neq 0$ باشد، در این صورت به معادله دیفرانسیل می‌گوییم نا همگن Nonhomogeneous

اجازه دهید با حل معادله دیفرانسیل خطی، درجه دوم، ضرایب ثابت، همگن شروع کنیم. یعنی معادله دیفرانسیل به صورت زیر.

$$ay'' + by' + cy = 0$$

بهتر است با یک مثال شروع کنیم. این مثال ما را به یک حقیقت مهم هدایت می‌کند، بطوری که از این به بعد در هر مساله‌یی آنرا بکار خواهیم برد. این مثال، همچنین، یک کلید برای حل این معادلات بطور کلی به ما میدهد.

مثال ۱

چند جواب برای معادله زیر پیدا کنید.

$$y'' - 9y = 0$$

حل

می‌توانیم چند جواب، با امتحان کردن پیدا کنیم. به معادله نگاه کنید. ملاحظه می‌کنید که به یک تابع احتیاج داریم که مشتق مرتبه دوم آن ۹ برابر تابع اولیه باشد. اگر بخاطر داشته باشید، تابع نمایی e^t با توان مناسب، بعد از دو مرتبه مشتق به خودش باز می‌گردد. پس به نظر می‌رسد، دو تابع زیر، دو جواب باشند.

$$y(t) = e^{3t} \text{ و } y(t) = e^{-3t}$$

امتحان می‌کنیم.

$$y(t) = e^{3t}$$

$$y'(t) = 3e^{3t}$$

$$y''(t) = 3(3e^{3t}) = 9e^{3t}$$

آن دیگری هم به همین طریق.

این دو ، تنها جواب های معادله دیفرانسیل داده شده نیستند. هر یک از عبارات های زیر هم می توانند ، یک جواب باشند.

$$y(t) = -9e^{rt} \quad y(t) = 123e^{rt}$$

$$y(t) = 56e^{-rt} \quad y(t) = \frac{14}{9}e^{-rt}$$

$$y(t) = 7e^{rt} - 6e^{-rt} \quad y(t) = -92e^{rt} - 16e^{-rt}$$

در حقیقت هرتابعی به شکل زیر می تواند یک جواب معادله دیفرانسیل بالا باشد.

$$y(t) = C_1 e^{rt} + C_2 e^{-rt}$$

این مثال ، ما را به یک حقیقت مهم رهنمایی می کند ، که می توانیم عملاً برای هر مساله در این فصل استفاده کنیم.

اصل بر هم نهی Superposition

اگر $y_1(t)$ و $y_2(t)$ دو جواب یک معادله دیفرانسیل خطی ، همگن ، باشد ، پس معادله زیر هم هست.

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) \quad (3)$$

توجه داشته باشید که ، اصل بالا را محدود به معادلات دیفرانسیل با ضریب ثابت و درجه دوم نکردیم. این اصل برای هر معادله دیفرانسیل خطی همگن ، کار می کند.

مساله این است که اعداد ثابت C_1 و C_2 را چگونه پیدا کنیم.

یک راه این است که مقدار جواب در دو نقطه متمایز مشخص کنیم. یا

$$y(t_0) = y_0 \quad y(t_1) = y_1$$

اینها را مقادیر مرزی Boundary Values می گویند. در مورد مقادیر مرزی ، بعداً صحبت خواهیم کرد.

راه دیگر پیدا کردن مقادیر ثابت ، این است که مقدار جواب و مشتق آن در یک نقطه مخصوص ، مشخص کنیم. یا

$$y(t_0) = y_0 \quad y'(t_0) = y'_0$$

این دوشرابط را اینجا بر رسی می کنیم. همان طور که در مورد معادله های مرتبه اول گفتیم ، اینها شرط های اولیه هستند.

مثال ۲

مساله با شرط اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' - 9y = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = -1$$

حل

دو جواب زیر جوابهای دقیق و خوبی هستند.

$$y(t) = e^{rt} \quad \text{و} \quad y(t) = e^{-rt}$$

پس جواب کلی برای این معادله دیفرانسیل ، مطابق زیر است.

$$y(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{3t}$$

حالا شرایط اولیه را بکار می بریم. این یعنی ، به مشتق جواب احتیاج داریم.

$$y'(t) = -3C_1 e^{-3t} + 3C_2 e^{3t}$$

حالا مقادیر اولیه را جانشین می کنیم.

$$2 = y(0) = C_1 + C_2$$

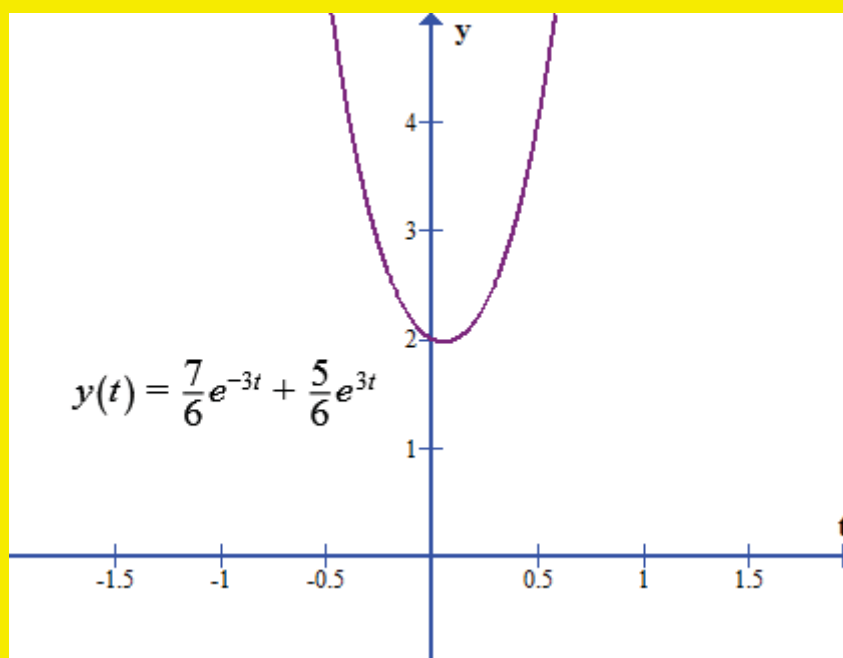
$$-1 = y'(0) = -3C_1 + 3C_2$$

یک سیستم دو معادله و دو مجهول داریم. با حل این سیستم داریم.

$$C_1 = \frac{7}{6} \quad C_2 = \frac{5}{6}$$

پس جواب مساله با شرایط اولیه مطابق زیر است.

$$y(t) = \frac{7}{6} e^{-3t} + \frac{5}{6} e^{3t}$$



تا اینجا ، جواب معادله دیفرانسیل ، با حدس و گمان بدست آوردیم. اما این روش همیشه کار ساز نیست.

جوابی که از مثال اول بدست آوریم ، به عنوان یک راهنمایی استفاده می کنیم. می گوییم ، تمام جواب های این مثال به صورت زیر هستند.

$$y(t) = e^{rt}$$

ملاحظه می کنید که عدد ثابت را در جلو جواب اضافه نکردیم ، زیرا عملاً می توانیم هر عدد ثابت که بخواهیم ، اضافه کنیم ، تا یک جواب بدست آوریم . هدف مهم این است که یک تابع نمایی بدست آوریم . هر گاه آنرا بدست آوردیم ، می توانیم عدد ثابت را اضافه کنیم .

پس فرض می کنیم تمام جوانهای معادله زیر

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (۴)$$

به صورت زیر باشند.

$$y(t) = e^{rt} \quad (۵)$$

برای این که ببینیم ، فرض صحیحی کرده ایم ، فقط لازم است آن را در معادله دیفرانسیل بگذاریم ، تا ببینیم ، چه اتفاقی می افتد .

$$y'(t) = re^{rt} \quad y''(t) = r^2 e^{rt}$$

$$a(r^2 e^{rt}) + b(re^{rt}) + c(e^{rt}) = 0$$

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0$$

پس اگر قرار است (۵) یک جواب (۴) باشد ، پس رابطه زیر باید صحیح باشد .

$$e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0$$

می دانیم که e^{rt} هرگز صفر نمی شود ، پس (۵) جواب (۴) است ، اگر

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (۶)$$

باشد . معمولاً ، به شماره (۶) می گویند **معادله مشخصه Characteristic Equation** برای

(۴) . به شماره (۶) **معادله کمکی Auxiliary Equation** هم می گویند .

خوب ، چگونه این را برای پیدا کردن جوابهای یک معادله دیفرانسیل خطی ، مرتبه دوم ، همگن ، با ضریب ثابت ، بکار می بریم ؟ ابتدا معادله مشخصه (۶) را برای معادله دیفرانسیل (۴) می نویسیم . این یک معادله درجه دوم است ، پس انتظار داریم دو ریشه r_1 و r_2 داشته باشیم . هنگامی که این دو ریشه را بدست آوردیم ، دو جواب برای معادله دیفرانسیل بدست آورده ایم .

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \quad y_2(t) = e^{r_2 t} \quad (۷)$$

اجازه دهید ، به یک مثال نگاهی کنیم .

مثال ۳

دو جواب برای معادله دیفرانسیل زیر پیدا کنید .

$$y'' - 9y = 0$$

حل

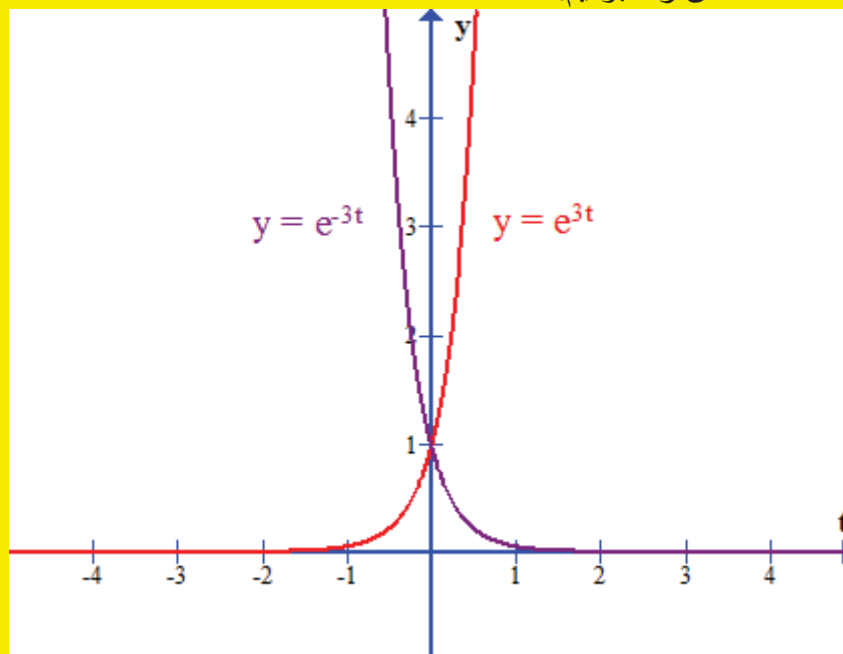
این همان معادله دیفرانسیل مثال اول است . اما ، این مرتبه حدس نمی زنیم . مراحل که در بالا گفتیم ، طی می کنیم ، تا ببینیم ، جوابهایی را که حدس زدیم ، همان است که در مراحل بالا گفته شد . ابتدا معادله مشخصه را برای این معادله دیفرانسیل می نویسیم .

$$r^2 - 9 = 0 \quad r = \pm 3$$

دو ریشه حقیقی ۳ و -۳ پس جوابها مطابق زیر هستند .

$$y_1(t) = e^{\tau t} \quad \text{و} \quad y_2(t) = e^{-\tau t}$$

همان دو جوابی هستند که حدس زده بودیم.



تمرینات

معادله های دیفرانسیل درجه دوم زیر را با استفاده از معادله کمکی یا معادله مشخصه حل کنید.

۱) $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - \tau y = 0$

۲) $\frac{d^2 y}{dx^2} - ۹ \frac{dy}{dx} + ۲۰ y = 0$

۳) $\tau \frac{d^2 y}{dx^2} + ۵ \frac{dy}{dx} - \tau y = 0$

۴) $۹ \frac{d^2 y}{dx^2} - \tau \frac{dy}{dx} - y = 0$

۵) $\frac{d^2 y}{dx^2} - ۱۰ \frac{dy}{dx} + ۲۵ y = 0$

۶) $\tau \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y = 0$

۷) $۴y'' + ۱۲y' + ۸y = 0$

۸) $y'' + y' - \tau y = 0$

۹) $y'' + ۲y' + y = 0$

$y(0) = ۱ \quad y'(0) = 0$

$y(0) = ۱ \quad y(۱) = ۳$

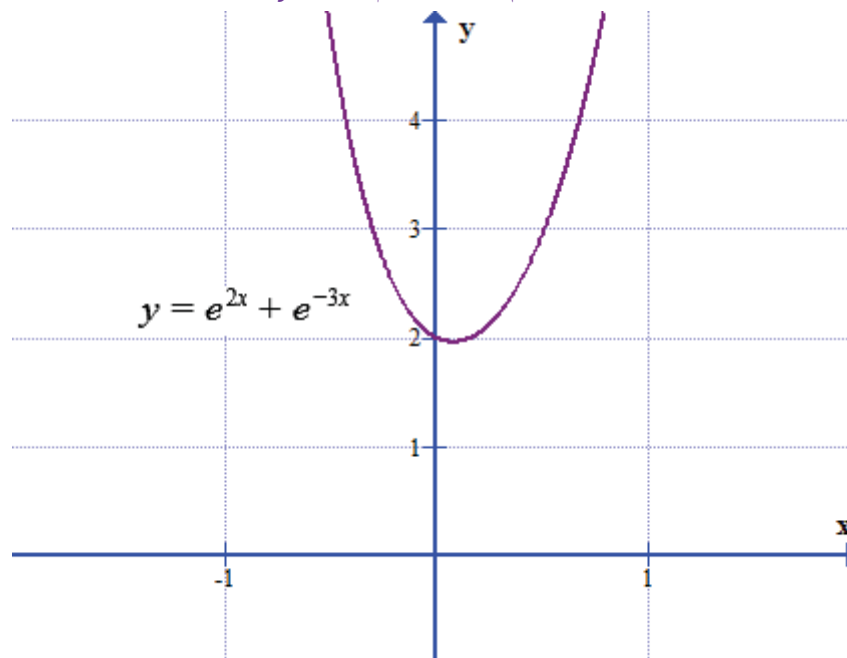
پاسخ تمرینات

$$۱) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - ۶y = 0$$

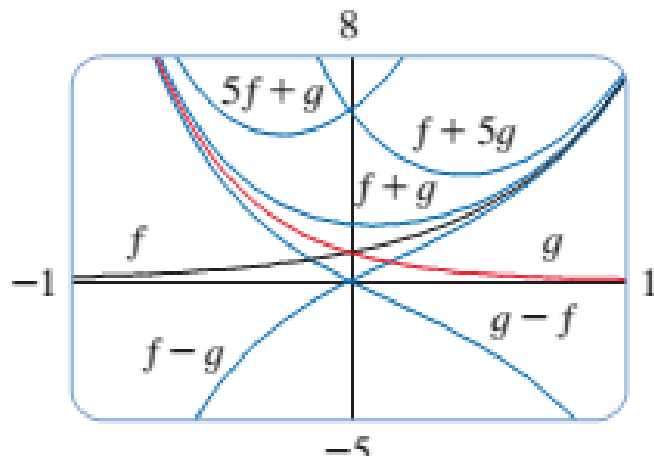
حل

معادله کمکی داریم.

$$\begin{aligned} r^2 + r - ۶ &= 0 \\ (r - ۲)(r + ۳) &= 0 \\ r = ۲ \quad \text{یا} \quad r = -۳ \\ y_1 &= e^{۲x} \quad y_2 = e^{-۳x} \\ y &= C_1 e^{۲x} + C_2 e^{-۳x} \end{aligned}$$



اگر فرض کنیم $f(x) = e^{۲x}$ و $g(x) = e^{-۳x}$ باشد، در زیر، نمودارهای مختلف این دو تابع نمایش داده می شود.



$$۲) \frac{d^2 y}{dx^2} - ۹ \frac{dy}{dx} + ۲۰ y = 0$$

حل

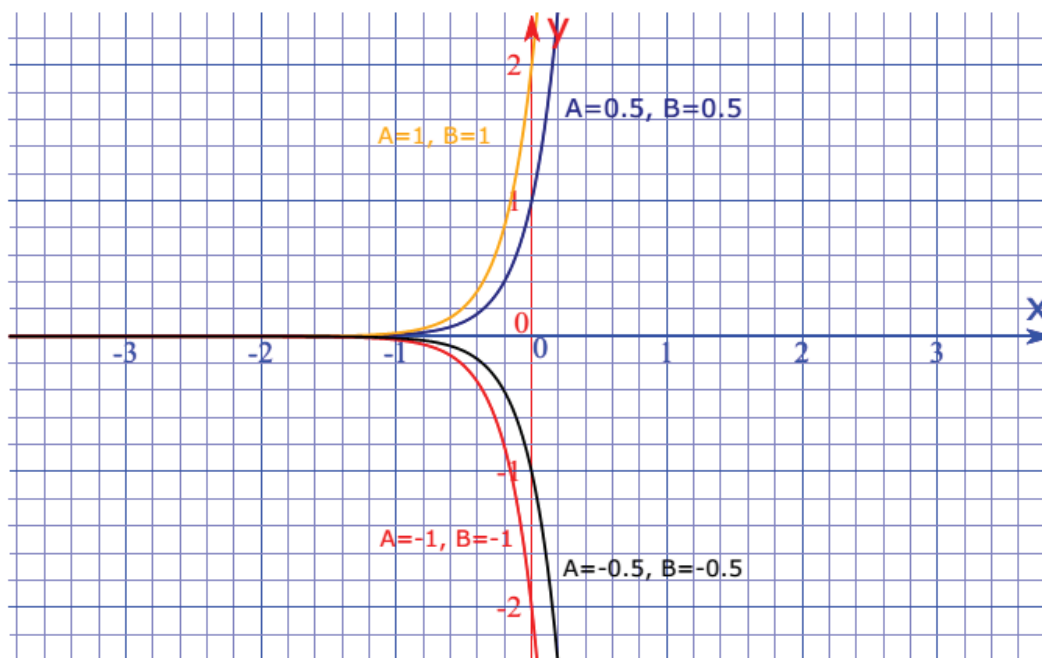
معادله مشخصه یا کمکی

$$\begin{aligned} r^2 - ۹r + ۲۰ &= 0 \\ (r - ۴)(r - ۵) &= 0 \\ r = ۴ \quad \text{یا} \quad r = ۵ \end{aligned}$$

پس جواب کلی مطابق زیر است.

$$y = Ae^{۴x} + Be^{۵x}$$

اینجا A و B اعداد دلخواه است.



$$۳) \quad ۶ \frac{d^2 y}{dx^2} + ۵ \frac{dy}{dx} - ۶y = 0$$

حل
معادله کمکی

$$\begin{aligned} ۶r^2 + ۵r - ۶ &= 0 \\ (۳r - ۲)(۲r + ۳) &= 0 \\ r = \frac{۲}{۳} \quad \text{یا} \quad r = -\frac{۳}{۲} \\ y &= Ae^{\frac{۲}{۳}x} + Be^{-\frac{۳}{۲}x} \end{aligned}$$

$$۴) \quad ۹ \frac{d^2 y}{dx^2} - ۶ \frac{dy}{dx} - y = 0$$

حل
معادله کمکی

$$\begin{aligned} ۹r^2 - ۶r - ۱ &= 0 \\ r &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ r &= \frac{-(-۶) \pm \sqrt{(-۶)^2 - 4 \times ۹ \times (-۱)}}{2 \times ۹} \\ r &= \frac{۶ \pm \sqrt{۳۶ + ۳۶}}{۱۸} = \frac{۶ \pm ۶\sqrt{۲}}{۱۸} = \frac{۱ \pm \sqrt{۲}}{۳} \\ v &= Ae^{(\frac{1+\sqrt{2}}{3})x} + Be^{(\frac{1-\sqrt{2}}{3})x} \end{aligned}$$

$$۵) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} - ۱ \circ \frac{dy}{dx} + ۲۵y = 0$$

حل
معادله مشخصه

$$\begin{aligned} r^2 - ۱ \circ r + ۲۵ &= 0 \\ (r - ۵)(r - ۵) &= 0 \\ r &= ۵ \\ y &= e^{۵x} \end{aligned}$$

هنگامی که $e^{۵x}$ یک جواب است، پس $xe^{۵x}$ هم یک جواب است. چرا؟ نشان می دهیم.

$$y = xe^{5x}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{5x} + 5xe^{5x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5e^{5x} + 5e^{5x} + 25xe^{5x}$$

پس

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 10\frac{dy}{dx} + 25y$$

$$= 5e^{5x} + 5e^{5x} + 25xe^{5x} - 10(e^{5x} + 5xe^{5x}) + 25xe^{5x}$$

$$= (5e^{5x} + 5e^{5x} - 10e^{5x}) + (25xe^{5x} - 50xe^{5x} + 25xe^{5x}) = 0$$

پس در این حالت داریم.

$$y = Ae^{5x} + Bxe^{5x}$$

$$۶) \quad ۳ \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y = 0$$

حل

$$۳r^2 + r - ۱ = 0$$

$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{۶}$$

$$y = c_1 e^{(-1+\sqrt{13})x/6} + c_2 e^{(-1-\sqrt{13})x/6}$$

$$۷) \quad ۴y'' + ۱۲y' + ۹y = 0$$

حل

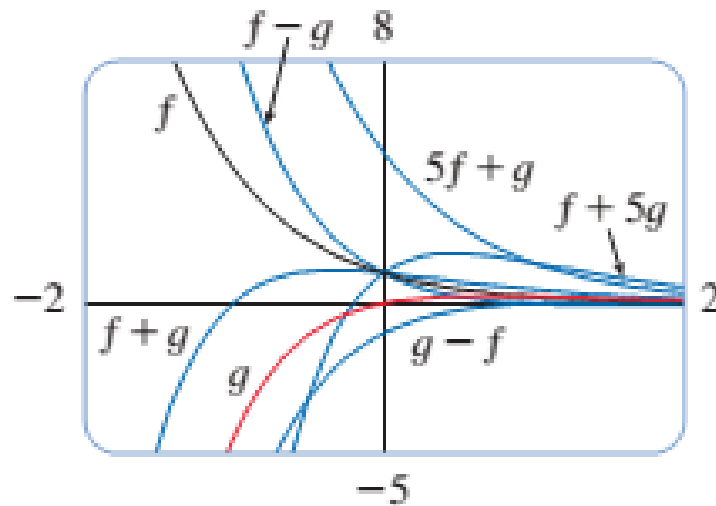
$$۴r^2 + ۱۲r + ۹ = 0$$

$$(۲r + ۳)^2 = 0$$

$$r = -\frac{۳}{۲}$$

$$y = C_1 e^{-\frac{۳x}{۲}} + C_2 x e^{-\frac{۳x}{۲}}$$

اگر فرض کنیم $f(x) = e^{-\frac{3x}{2}}$ و $g(x) = xe^{-\frac{3x}{2}}$ باشد، تصویر زیر نمایش مقادیر مختلف f و g است.



$$^{\wedge}) \quad y'' + y' - 6y = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

حل

این معادله را در تمرین شماره ۱ حل کردیم و جواب زیر را بدست آوردیم.

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$$

از معادله بالا مشتق می گیریم، پس داریم.

$$y'(x) = 2C_1 e^{2x} - 3C_2 e^{-3x}$$

برای این که مقادیر اولیه برقرار باشند، لازم است که

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1$$

$$y'(0) = 2C_1 - 3C_2 = 0$$

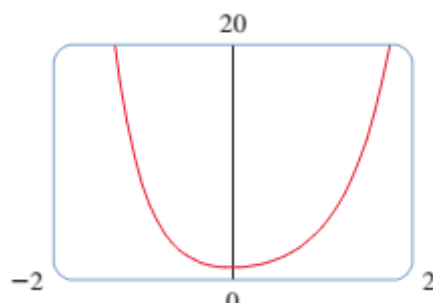
باشد. پس داریم.

$$C_1 = \frac{3}{5} \quad C_2 = \frac{2}{5}$$

پس جواب مطابق زیر است.

$$y = \frac{3}{5} e^{2x} + \frac{2}{5} e^{-3x}$$

این هم نمودار جواب.



$$9) \quad y'' + 2y' + y = 0$$

$$y(0) = 1 \quad y(1) = 3$$

حل

توجه

اینجا مساله مقدار مرزی **Boundary-Value problem** داریم. با مساله با مقدار اولیه اشتباه نشود.

معادله کمکی $r^2 + 2r + 1 = 0$ است پس $(r+1)^2 = 0$ و $r = -1$ پس جواب کلی، مطابق زیر است

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

شرایط مرزی برقرار می شود، اگر داشته باشیم.

$$y(0) = c_1 = 1$$

$$y(1) = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-1} = 3$$

شرط اول به ما $c_1 = 1$ می دهد، پس شرط دوم می شود

$$e^{-1} + c_2 e^{-1} = 3$$

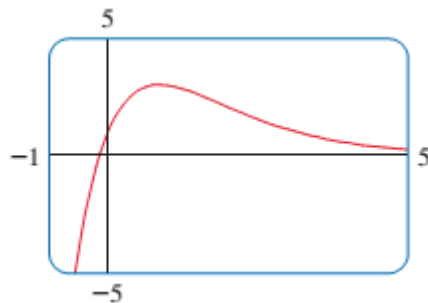
برای پیدا کردن c_2 ابتدا طرفین مدله بالا را در e ضرب می کنیم. پس داریم.

$$1 + c_2 = 3e \quad , \quad c_2 = 3e - 1$$

لذا جواب مساله مقدار مرزی مطابق زیر است.

$$y = e^{-x} + (3e - 1)xe^{-x}$$

توجه داشته باشید که مساله مقدار مرزی، همیشه جواب ندارد. این هم نمودار مساله مقدار مرزی



بخش ۳.۲ ریشه های حقیقی و متمایز Real and Distinct Roots

حالا می خواهیم شروع به حل معادلات دیفرانسیل درجه دوم خطی ، همگن با ضریب های ثابت کنیم. پس اجازه دهید ببینیم این کار را در بخش قبلی چگونه انجام دادیم. با معادله دیفرانسیل زیر شروع می کنیم.

$$ay'' + by' + c = 0$$

معادله شاخص یا کمکی را می نویسیم.

$$ar^2 + br + c = 0$$

معادله کمکی را برای دو ریشه های r_1 و r_2 حل می کنیم. این ، دو جواب به ما می دهد.

$$y_1(t) = r_1^{r_1 t} \quad \text{و} \quad y_2(t) = e^{r_2 t}$$

حالا ، اگر این دو ریشه ، حقیقی و متمایز باشند ، یعنی $r_1 \neq r_2$ ، پس این دو جواب به اندازه کافی

دقیق Nice Enough هستند که تشکیل جواب کلی زیر را بدهند

$$y(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

مثال ۱

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + 11y' + 24y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = -7$$

حل

معادله کمکی مطابق زیر است.

$$r^2 + 11r + 24 = 0$$

$$(x + 8)(x + 3) = 0$$

ریشه ها عبارتند از $r_1 = -8$ و $r_2 = -3$. پس جواب کلی و مشتق آن ، مطابق زیر است.

$$y(t) = C_1 e^{-8t} + C_2 e^{-3t}$$

$$y'(t) = -8C_1 e^{-8t} - 3C_2 e^{-3t}$$

حالا مقادیر اولیه را جانشین می کنیم.

$$0 = y(0) = C_1 + C_2$$

$$-7 = y'(0) = -8C_1 - 3C_2$$

با حل سیستم معادله های بالا ، مقادیر زیر را بدست می آوریم.

$$C_1 = \frac{7}{5} \quad , \quad C_2 = -\frac{7}{5}$$

پس جواب واقعی معادله دیفرانسیل مطابق زیر است

$$y(t) = \frac{7}{5} e^{-8t} - \frac{7}{5} e^{-3t}$$

مثال ۲

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + 3y' - 10y = 0 \quad y(0) = 4 \quad y'(0) = -2$$

حل

معادله کمکی داریم.

$$r^2 + 3r - 10 = 0$$

$$(r + 5)(r - 2) = 0$$

ریشه ها $r_1 = -5$ و $r_2 = 2$ هستند. پس جواب کلی و مشتق آن ، مطابق زیر است.

$$y(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{2t}$$

$$y'(t) = -5C_1 e^{-5t} + 2C_2 e^{2t}$$

حالا مقادیر اولیه را بکار می بریم.

$$4 = y(0) = C_1 + C_2$$

$$-2 = y'(0) = -5C_1 + 2C_2$$

با حل سیستم معادله های بالا داریم.

$$C_1 = \frac{10}{7}, \quad C_2 = \frac{18}{7}$$

پس جواب واقعی معادله دیفرانسیل مطابق زیر است.

$$y(t) = \frac{10}{7} e^{-5t} + \frac{18}{7} e^{2t}$$

مثال ۳

مساله با مقدار کلی زیر را حل کنید.

$$3y'' + 2y' - 8y = 0 \quad y(0) = -6 \quad y'(0) = -18$$

حل

معادله کمکی مطابق زیر است.

$$3r^2 + 2r - 8 = 0$$

$$(3r - 4)(r + 2) = 0$$

ریشه ها مطابق زیر هستند.

$$r_1 = \frac{4}{3}, \quad r_2 = -2$$

پس جواب کلی و مشتق آن ، مطابق زیر است.

$$y(t) = C_1 e^{\frac{4}{3}t} + C_2 e^{-2t}$$

$$y'(t) = \frac{4}{3}C_1 e^{\frac{4}{3}t} - 2C_2 e^{-2t}$$

حالا مقادیر اولیه را جانشین می کنیم.

$$-6 = y(0) = C_1 + C_2$$

$$-18 = y'(0) = \frac{4}{3}C_1 - 2C_2$$

با حل سیستم بالا داریم $C_1 = -9$ و $C_2 = 3$ ، لذا جواب واقعی معادله دیفرانسیل مطابق زیر است.

$$y(t) = -9e^{\frac{4}{3}t} + 3e^{-2t}$$

مثال ۴

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$4y'' - 5y' = 0 \quad y(-2) = 0 \quad y'(-2) = 7$$

حل

معادله کمکی مطابق زیر است.

$$4r^2 - 5r = 0$$

$$r(4r - 5) = 0$$

ریشه های این معادله عبارتند از $r_1 = 0$ و $r_2 = \frac{5}{4}$ پس جواب کلی و مشتق آن مطابق زیر است.

$$y(t) = C_1 e^0 + C_2 e^{\frac{5}{4}t} = C_1 + C_2 e^{\frac{5}{4}t}$$

$$y_1(t) = \frac{5}{4} e^{\frac{5}{4}t}$$

تا کنون، مقادیر اولیه در $t = 0$ بوده اند. اما همیشه چنین نیست.

حالا مقادیر اولیه را بکار می بریم.

$$0 = y(-2) = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}}$$

$$7 = y'(-2) = \frac{5}{4} C_2 e^{-\frac{5}{2}}$$

سیستم را حل می کنیم. پس داریم.

$$C_1 = -\frac{28}{5}, \quad C_2 = \frac{28}{5} e^{-\frac{5}{2}}$$

و در نهایت، جواب واقعی معادله دیفرانسیل مطابق زیر است.

$$y(t) = -\frac{28}{5} + \frac{28}{5} e^{\frac{5}{2}t} e^{\frac{5}{4}t} = -\frac{28}{5} + \frac{28}{5} e^{\frac{5}{4}t + \frac{5}{2}t}$$

مثال ۵

جواب کلی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$y'' - 6y' - 2y = 0$$

حل

معادله کمکی مطابق زیر است.

$$r^2 - 6r - 2 = 0$$

ریشه های این معادله عبارتند از

$$r_{1,2} = 3 \pm \sqrt{11}$$

اینها دو عدد حقیقی زیر هستند. اما اعداد قشنگ و خوش نظر نیستند. یا به عبارتی به اندازه کافی دقیق نیستند، آن گونه که تا کنون دیده ایم. همیشه هم انتظار نداشته باشید، که ریشه های خوش منظر مانند مثال های قبل داشته باشیم.

$$r_1 = 3 + \sqrt{11}, \quad r_2 = 3 - \sqrt{11}$$

پس جواب کلی مطابق زیر است.

$$y(t) = c_1 e^{(3+\sqrt{11})t} + c_2 e^{(3-\sqrt{11})t}$$

بخش ۳.۳ ریشه های مختلط Complex Roots

در این بخش به حل معادلات دیفرانسیل

$$ay'' + by' + cy = 0$$

می پردازیم ، که معادله کمکی آنها

$$ar^2 + br + c = 0$$

دارای ریشه های مختلط به شکل زیر دارند.

$$r_{1,2} = \lambda \pm \mu i$$

این قسمت داخل جعبه سبز رنگ را می توانید نا خوانده رها کنید و به بعد از جعبه سبز رنگ مراجعه کنید.

بخاطر بیاورید هنگامی به این معادله کمکی رسیدیم ، که فرض کردیم تمام جوابهای معادله دیفرانسیل به صورت زیر خواهند بود.

$$y(t) = e^{rt}$$

با جانشین کردن این دو ریشه مختلط در جواب کلی ، جواب های زیر بدست می آوریم.

$$y_1(t) = e^{(\lambda + \mu i)t} \quad y_2(t) = e^{(\lambda - \mu i)t}$$

اما ، اینجا به یک مساله بر خورد می کنیم. چون ، در معادله دیفرانسیل ، ما با اعداد حقیقی شروع کردیم و انتظار داریم جواب ما هم شامل اعداد حقیقی باشد. دو جواب بالا شامل اعداد مختلف هستند. برای حل این مشکل ، به فرمول اویلر احتیاج داریم.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

نمونه دیگر فرمول اویلر مطابق زیر است.

$$e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos \theta - i \sin \theta$$

حالا ، جواب های خود را به دو تابع نمایی تقسیم می کنیم. یکی که فقط نمای حقیقی دارد و دیگری که فقط نمای اعداد مختلط. سپس فرمول اویلر را بکار می بریم و یا نمونه دیگر آنرا ، برای نوشتن نمای دوم.

$$y_1(t) = e^{\lambda t} e^{i\mu t} = e^{\lambda t} (\cos(\mu t) + i \sin(\mu t))$$

$$y_2(t) = e^{\lambda t} e^{-i\mu t} = e^{\lambda t} (\cos(\mu t) - i \sin(\mu t))$$

این ، مختلط بودن جواب را از بین نمی برد. اما دو جواب را به صورتی می نویسد ، که می توانیم قسمت های مختلط را حذف کنیم.

بخاطر بیاورید که در بخش مفاهیم اصلی گفتیم ، می توانیم هر جواب را به صورت مجموع دو جواب بنویسیم. یعنی

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

اگر دو جواب را با هم جمع کنیم به عبارت زیر می رسیم.

$$y_1(t) + y_2(t) = 2e^{\lambda t} \cos(\mu t)$$

این یک جواب حقیقی است. حالا همه را بر ۲ تقسیم می کنیم. در نتیجه همان جواب حقیقی که بدنبال آن هستیم می رسیم.

$$u(t) = \frac{1}{2} y_1(t) + \frac{1}{2} y_2(t) = e^{\lambda t} \cos(\mu t)$$

توجه دارید که می توان نوشت

$$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$$

به همین طریق به جواب دوم می رسیم. یعنی

$$y_1(t) - y_2(t) = 2ie^{\lambda t} \sin(\mu t)$$

به نظر می رسد که هنوز مشکل بر طرف نشده است. و هنوز عدد مختلط داریم. اما، چون دو اعداد ثابت C_1 و C_2 می توانند اعداد مختلط باشند، پس آنها را بر $2i$ تقسیم می کنیم، پس داریم.

$$C_1 = \frac{1}{2i} \quad \text{و} \quad C_2 = -\frac{1}{2i}$$

پس دومین جواب ما به صورت زیر است.

$$v(t) = \frac{1}{2i} y_1(t) - \frac{1}{2i} y_2(t) = e^{\lambda t} \sin(\mu t)$$

حالا دو جواب داریم.

$$v(t) = e^{\lambda t} \sin(\mu t) \quad u(t) = e^{\lambda t} \cos(\mu t)$$

پس اگر ریشه های معادله کمکی $r_{1,2} = \lambda \pm \mu i$ باشد، جواب کلی معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$y(t) = C_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + C_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t)$$

مثال ۱

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنیم.

$$y'' - 4y' + 9y = 0 \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = -8$$

حل

معادله کمکی به صورت زیر است.

$$r^2 - 4r + 9 = 0$$

ریشه های این معادله $r_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5} i$ است. پس جواب کلی این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$y(t) = C_1 e^{\sqrt{5} t} \cos\left(\sqrt{5} t\right) + C_2 e^{\sqrt{5} t} \sin\left(\sqrt{5} t\right)$$

ملاحظه می کنید که برعکس معمول، از جواب بالا مشتق نگرفتیم. علت خیلی ساده است. مشتق گرفتن از این جواب خیلی مشکل نیست اما در هم و بر هم است. پس با نگاه به شرایط اولیه می بینیم که اگر شرط اول را بکار ببریم، پس داریم.

$$0 = y(0) = C_1$$

به عبارت دیگر ، برای برقرار شدن شرط اول ، جمله اول حذف می شود. پس جواب ، همراه با مشتق آن ، مطابق زیر است.

$$y(t) = C_1 e^{\sqrt{5}t} \sin(\sqrt{5}t)$$

$$y'(t) = \sqrt{5} C_1 e^{\sqrt{5}t} \sin(\sqrt{5}t) + \sqrt{5} C_1 e^{\sqrt{5}t} \cos(\sqrt{5}t)$$

یک مشتق تمیز تر ، اگر می خواستیم مشتق جواب اصلی را بگیریم. حالا شرط دوم را بکار می بریم.

$$-8 = y'(0) = \sqrt{5} C_1 \Rightarrow C_1 = -\frac{8}{\sqrt{5}}$$

پس جواب واقعی ، مطابق زیر است.

$$y(t) = -\frac{8}{\sqrt{5}} e^{\sqrt{5}t} \sin(\sqrt{5}t)$$

مثال ۲

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' - 8y' + 17y = 0 \quad y(0) = 4 \quad y'(0) = -1$$

حل

معادله کمکی مطابق زیر است.

$$r^2 - 8r + 17 = 0$$

ریشه های این مسادله $r_{1,2} = 4 \pm i$ است. پس جواب کلی و مشتق آن مطابق زیر است.

$$y(t) = C_1 e^{4t} \cos(t) + C_2 e^{4t} \sin(t)$$

$$y'(t) = 4C_1 e^{4t} \cos(t) - C_1 e^{4t} \sin(t) + 4C_2 e^{4t} \sin(t) + C_2 e^{4t} \cos(t)$$

ملاحظه می کنید که اینجا لازم است همین ابتدا مشتق بگیریم، زیرا هیچ یک از جملات حذف نمی شوند. مقادیر اولیه را بکار می بریم.

$$-4 = y(0) = C_1$$

$$-1 = y'(0) = 4C_1 + C_2$$

سیستم را که حل کنیم ، داریم $C_1 = -4$ و $C_2 = 15$ ، پس جواب واقعی مطابق زیر است.

$$y(t) = -4e^{4t} \cos(t) + 15e^{4t} \sin(t)$$

مثال ۳

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$4y'' + 24y' + 37y = 0 \quad y(\pi) = 1 \quad y'(\pi) = 0$$

حل

معادله کمکی مطابق زیر است.

$$4r^2 + 24r + 37 = 0$$

ریشه های این معادله $r_{1,2} = -3 \pm \frac{1}{2}i$ است. پس جواب کلی و مشتق آن، مطابق زیر است.

$$y(t) = C_1 e^{-3t} \cos\left(\frac{t}{2}\right) + C_2 e^{-3t} \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$y'(t) = -3C_1 e^{-3t} \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{C_1}{2} e^{-3t} \sin\left(\frac{t}{2}\right) - 3C_2 e^{-3t} \sin\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{C_2}{2} e^{-3t} \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

مقادیر اولیه را بکار می بریم.

$$1 = y(\pi) = C_1 e^{-3\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C_2 e^{-3\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_2 e^{-3\pi}$$

$$0 = y'(\pi) = -\frac{C_1}{2} e^{-3\pi} - 3C_2 e^{-3\pi}$$

فراموش نشود، بجای t باید π بکار برید. با حل سیستم داریم.

$$C_1 = -6e^{3\pi} \quad C_2 = e^{3\pi}$$

پس جواب واقعی مطابق زیر است.

$$y(t) = -6e^{3\pi} e^{-3t} \cos\left(\frac{t}{2}\right) + e^{3\pi} e^{-3t} \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$y(t) = -6e^{-3(t-\pi)} \cos\left(\frac{t}{2}\right) + e^{-3(t-\pi)} \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

مثال ۴

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + 16y = 0 \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -10 \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$

معادله کمکی داریم.

$$r^2 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 4i$$

مواظب باشید، معادله کمکی را به صورت زیر ننویسید

$$r^2 + 16r = 0$$

. این اشتباه بیشتر دانشجویان می کنند.

پس جواب کلی و مشتق آن به صورت زیر است.

$$y(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t)$$

$$y'(t) = -4c_1 \sin(4t) + 4c_2 \cos(4t)$$

مقادیر اولیه را بکار می بریم.

$$-10 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 \quad c_1 = -10$$

$$3 = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4c_2 \quad c_2 = \frac{3}{4}$$

پس جواب واقعی مطابق زیر است.

$$y(t) = -10 \cos(4t) + \frac{3}{4} \sin(4t)$$

مثال ۵

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' - 10y' + 29 = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 3$$

حل

معادله کمکی مطابق زیر است.

$$r^2 - 10r + 29 = 0$$

ریشه ها مطابق زیر هستند.

$$r = 5 + 2i \quad r = 5 - 2i.$$

پس جواب کلی مطابق زیر است.

$$y = e^{5t} [c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)].$$

شرط اول را بکار می بریم.

$$1 = 1[c_1(1) + c_2(0)]$$

پس $c_1 = 1$ است.

مشتق جواب کلی داریم.

$$y' = 5e^{5t} [\cos(2t) + c_2 \sin(2t)] + e^{5t} [-2 \sin(2t) + 2c_2 \cos(2t)].$$

مقدار اولیه برای y' بکار می بریم

$$\begin{aligned} 3 &= 5[1 + 0] + 1[0 + 2c_2] \\ &= 5 + 2c_2. \end{aligned}$$

لذا $c_2 = -1$ است. و در نهایت، جواب نهایی مطابق زیر است.

$$y = e^{5t} [\cos(2t) - \sin(2t)].$$

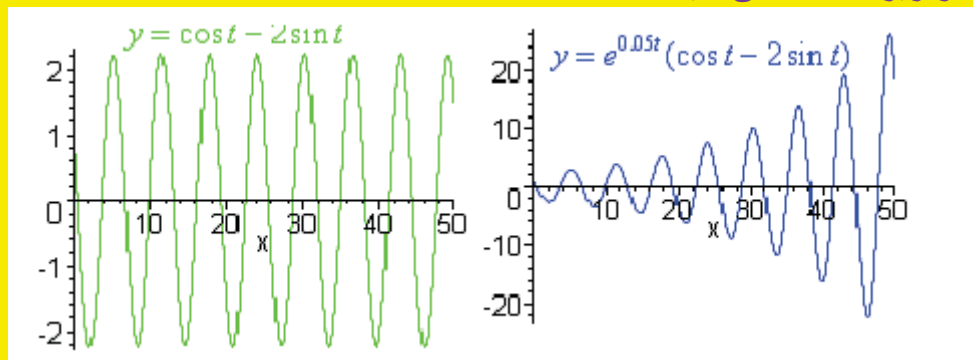
توضیح در مورد نمودار های جواب ها

اگر $\lambda = 0$ باشد، پس نمودار، متناوب است.

اگر $\lambda > 0$ باشد، پس دامنه نوسان بطور نمایی، افزایش می یابد.

اگر $\lambda < 0$ باشد، پس دامنه نوسان بطور نمایی، به صفر نزدیک می شود.

نمودار ها را در زیر ملاحظه می کنید.



بخش ۳.۴ ریشه های مکرر Repeated Roots

در این بخش به آخرین حالت معادله های دیفرانسیل درجه دوم ، خطی ، همگن ، با ضرایب های ثابت می پردازیم. یعنی می خواهیم معادله دیفرانسیل

$$ay'' + by' + cy = 0$$

که معادله کمکی آن

$$ar^2 + br + c = 0$$

است با ریشه های

$$r_1 = r_2 = r$$

است ، را حل کنیم.

می توانید مطالب داخل جعبه سبز رنگ را نا خوانده رها کنید. و به بعد از جعبه سبز رنگ بپردازید.

بخاطر بیاورید که جواب ها مطابق زیر هستند.

$$y_1(t) = e^{r_1 t} = e^{rt} \quad y_2(t) = e^{r_2 t} = e^{rt}$$

این دو جواب یکی هستند و مناسب یک جواب کلی نیستند.

می توانیم جواب اول را بکار ببریم. اما ، به جواب دوم هم احتیاج داریم. قبل از پیدا کردن جواب دوم ، اجازه دهید یک گریزی بزنیم. دلیل این گریز ، بعداً معلوم می شود. از فرمول درجه دوم می دانیم که ریشه های معادله کمکی مطابق زیر هستند.

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

در این حالت ، چون ریشه های دو گانه یا مضاعف داریم ، پس باید داشته باشیم.

$$b^2 - 4ac = 0$$

فقط در این صورت است که می توان ریشه های مضاعف داشت و لذا ریشه ها باید مطابق زیر باشند.

$$r_{1,2} = \frac{-b}{2a}$$

پس جواب اولی که بدست آورده ایم ، مطابق زیر است.

$$y_1(t) = e^{-\frac{bt}{2a}}$$

برای بدست آوردن یک جواب دوم ، از این حقیقت استفاده می کنیم که یک عدد ثابت ضرب در یک جواب برای یک معادله دیفرانسیل خطی ، همگن می تواند یک جواب باشد. اگر این درست باشد ، پس خوشحال هستیم که جواب دوم را به صورت زیر داشته باشیم.

$$y_2(t) = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-\frac{bt}{2a}} \quad (1)$$

البته با انتخاب صحیح $v(t)$ برای این که ببینیم این کار را می توانیم انجام دهیم ، اجازه دهید آنرا در

معادله دیفرانسیل جانشین کنیم تا ببینیم چه چیزی بدست می آید. ابتدا به دو مشتق احتیاج داریم.

$$\begin{aligned} y_2'(t) &= v' e^{-\frac{bt}{2a}} - \frac{b}{2a} v e^{-\frac{bt}{2a}} \\ y_2''(t) &= v'' e^{-\frac{bt}{2a}} - \frac{b}{2a} v' e^{-\frac{bt}{2a}} - \frac{b}{2a} v' e^{-\frac{bt}{2a}} + \frac{b^2}{4a^2} v e^{-\frac{bt}{2a}} \\ &= v'' e^{-\frac{bt}{2a}} - \frac{b}{a} v' e^{-\frac{bt}{2a}} + \frac{b^2}{4a^2} v e^{-\frac{bt}{2a}} \end{aligned}$$

برای آسان شدن کار، (t) را از $v(t)$ حذف کردیم. حالا این ها را در معادله دیفرانسیل جایگزین می کنیم.

$$a \left(v'' e^{-\frac{bt}{2a}} - \frac{b}{a} v' e^{-\frac{bt}{2a}} + \frac{b^2}{4a^2} v e^{-\frac{bt}{2a}} \right) + b \left(v' e^{-\frac{bt}{2a}} - \frac{b}{2a} v e^{-\frac{bt}{2a}} \right) + c \left(v e^{-\frac{bt}{2a}} \right) = 0$$

می توانیم جمله نمایی را فاکتور بگیریم. همچنین تمام ضریب های v و مشتق های آنرا با هم جمع می کنیم. پس داریم.

$$\begin{aligned} e^{-\frac{bt}{2a}} \left(av'' + (-b+b)v' + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \right) v \right) &= 0 \\ e^{-\frac{bt}{2a}} \left(av'' + \left(-\frac{b^2}{4a} + c \right) v \right) &= 0 \\ e^{-\frac{bt}{2a}} \left(av'' - \frac{1}{4a} (b^2 - 4ac) v \right) &= 0 \end{aligned}$$

حالا، چون با ریشه مضاعف کار می کنیم. می دانیم که جمله دوم، صفر است. همچنین جمله های نمایی هرگز صفر نیستند. لذا (۱) یک جواب معادله دیفرانسیل است، در صورتی که $v(t)$ تابعی باشد که معادله دیفرانسیل زیر را برقرار کند.

$$av'' = 0 \quad \text{یا} \quad v'' = 0$$

می توانیم a را حذف کنیم، زیرا می دانیم که نمی تواند صفر باشد. اگر صفر می بود، یک معادله دیفرانسیل درجه دوم نمی داشتیم. پس، حالا می توانیم کلی ترین شکل برای $v(t)$ را مشخص کنیم.

$$v' = \int v'' dt = c \qquad v(t) = \int v' dt = ct + k$$

اما این پیچیده تر از آنچه می خواستیم، می باشد. در حقیقت می توانیم اعداد ثابت را از هر دو، حذف کنیم. برای این که بدانیم چرا، اجازه دهید، این کار را انجام دهیم، تا جواب دوم را بدست آوریم. دو

جواب به صورت زیر خواهند بود.

$$y_1(t) = e^{-\frac{bt}{2a}} \quad y_2(t) = (ct + k)e^{-\frac{bt}{2a}}$$

پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{-\frac{bt}{2a}} + c_2 (ct + k) e^{-\frac{bt}{2a}} \\ &= c_1 e^{-\frac{bt}{2a}} + (c_2 ct + c_2 k) e^{-\frac{bt}{2a}} \\ &= (c_1 + c_2 k) e^{-\frac{bt}{2a}} + c_2 ct e^{-\frac{bt}{2a}} \end{aligned}$$

می دانیم که c, k, c_1, c_2 همه، اعداد ثابت ناشناخته هستند، پس هر شکل از آنها می تواند قابل قبول باشد. پس جواب را مطابق زیر باز نویسی می کنیم.

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{bt}{2a}} + c_2 t e^{-\frac{bt}{2a}}$$

در نهایت، اگر جواب های معادله کمکی $r_1 = r_2 = r$ باشد، جواب کلی به صورت زیر است.

$$y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$$

مثال ۱

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \quad y(0) = 12 \quad y'(0) = -3$$

حل

معادله کمکی و ریشه های آن مطابق زیر است.

$$r^2 - 4r + 4 = (r - 2)^2 = 0 \quad r_{1,2} = 2$$

جواب کلی و مشتق آن مطابق زیر است.

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t}$$

$$y'(t) = 2c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t} + 2c_2 t e^{2t}$$

برای جمله دوم قاعده حاصلضرب را فراموش نکنید. شرایط اولیه را جایگزین می کنیم.

$$12 = y(0) = c_1$$

$$-3 = y'(0) = 2c_1 + c_2$$

سیستم به آسانی حل می شود، و $c_1 = 12$ و $c_2 = -27$ بدست می آید. پس جواب واقعی مطابق زیر است.

$$y(t) = 12e^{2t} - 27te^{2t}$$

مثال ۲

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$16y'' - 40y' + 25y = 0 \quad y(0) = 3 \quad y'(0) = -\frac{9}{4}$$

حل

معادله کمکی و ریشه های آن مطابق زیر است.

$$16r^2 - 40r + 25 = (4r - 5)^2 = 0 \quad r_{1,2} = \frac{5}{4}$$

جواب کلی و مشتق آن مطابق زیر است.

$$y(t) = c_1 e^{\frac{5t}{4}} + c_2 t e^{\frac{5t}{4}}$$

$$y'(t) = \frac{5}{4} c_1 e^{\frac{5t}{4}} + c_2 e^{\frac{5t}{4}} + \frac{5}{4} c_2 t e^{\frac{5t}{4}}$$

شرایط اولیه را جایگزین می کنیم.

$$3 = y(0) = c_1$$

$$-\frac{9}{4} = y'(0) = \frac{5}{4} c_1 + c_2$$

با حل سیستم داریم. $c_1 = 3$ و $c_2 = -6$ پس جواب واقعی مساله با مقدار اولیه مطابق زیر است.

$$y(t) = 3e^{\frac{5t}{4}} - 6te^{\frac{5t}{4}}$$

مثال ۳

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنیم.

$$y'' + 14y' + 49y = 0 \quad y(-4) = -1 \quad y'(-4) = 5$$

حل

چون توضیحات همان تکرار های بالا است ، از گفتن آنها صرفنظر می کنیم.

$$r^2 + 14r + 49 = (r + 7)^2 = 0 \quad r_{1,2} = -7$$

$$y(t) = c_1 e^{-7t} + c_2 t e^{-7t}$$

$$y'(t) = -7c_1 e^{-7t} + c_2 e^{-7t} - 7c_2 t e^{-7t}$$

$$-1 = y(-4) = c_1 e^{28} - 4c_2 e^{28}$$

$$5 = y'(-4) = -7c_1 e^{28} + c_2 e^{28} + 28c_2 e^{28} = -7c_1 e^{28} + 29c_2 e^{28}$$

$$c_1 = -9e^{-28}$$

$$c_2 = -2e^{-28}$$

$$y(t) = -9e^{-28}e^{-7t} - 2te^{-28}e^{-7t}$$

$$y(t) = -9e^{-7(t+4)} - 2te^{-7(t+4)}$$

بخش ۳.۵ کاهش دادن مرتبه معادله دیفرانسیل Reduction of Order

حالا ، نظری به حل معادلات دیفرانسیل درجه دوم با ضرایب های غیر ثابت ، می اندازیم. یعنی معادلات درجه دوم به صورت زیر.

$$p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = 0$$

بطور کلی ، پیدا کردن جواب این نوع معادلات دیفرانسیل ، خیلی مشکل تر از پیدا کردن جواب معادلات دیفرانسیل با ضرایب های ثابت است. اما اگر یک جواب معادله دیفرانسیل را بدانیم ، می توانیم با بکار بردن این جواب ، جواب دوم را پیدا کنیم. یعنی همان روشی که در بخش قبل یعنی ریشه های مکرر ، بکار بردیم. به این روش می گویند روش کاهش درجه Reduction of Order

اجازه دهید به یک مثال نگاهی کنیم و ببینیم چگونه این روش کار می کند.

مثال ۱

جواب کلی معادله زیر را پیدا کنید.

$$2t^2 y'' + ty' - 3y = 0, \quad t > 0$$

اگر

$$y_1(t) = t^{-1}$$

یک جواب باشد.

حل

برای استفاده از کاهش درجه ، باید قبلا یک جواب را بدانیم. بدون آن ، نمی توان از روش کاهش درجه استفاده کرد. اگر این جواب اول را داشته باشیم ، پس فرض می کنیم جواب دوم به صورت زیر است.

$$y_2(t) = v(t)y_1(t) \quad (1)$$

برای یک انتخاب مناسب $v(t)$ ، برای پیدا کردن ، انتخاب مناسب ، آن فرضی که کرده ایم در معادله دیفرانسیل می گذاریم ، تا یک معادله دیفرانسیل جدید بدست آوریم ، بطوری که بتوانیم آنرا برای $v(t)$ حل کنیم.

پس اجازه دهید ، این کار را برای این مثال انجام دهیم. در زیر شکل جواب دوم همراه با مشتق های آن را ملاحظه می کنید.

$$y_2(t) = t^{-1}v \quad y_2'(t) = -t^{-2}v + t^{-1}v' \quad y_2''(t) = 2t^{-3}v - 2t^{-2}v' + t^{-1}v''$$

حالا در معادله دیفرانسیل می گذاریم.

$$2t^2(2t^{-3}v - 2t^{-2}v' + t^{-1}v'') + t(-t^{-2}v + t^{-1}v') - 3(t^{-1}v) = 0$$

باز نویسی و سپس ساده می کنیم.

$$2tv'' + (-4+1)v' + (4t^{-1} - t^{-1} - 3t^{-1})v = 0$$

$$2tv'' - 3v' = 0$$

ملاحظه می کنید که پس ساده کردن ، تنها جمله های باقیمانده ، فقط شامل مشتق های v است. جمله v حذف شده است. اگر تمام کار ها را درست انجام داده باشید ، همیشه فقط مشتق های v را خواهید داشت و نه خود v . گاهی مشتق اول هم حذف می شود. پس ، برای این که فرمول شماره (۱) یک جواب باشد ، v باید معادله زیر را برقرار کند.

$$2tv'' - 3v' = 0 \quad (2)$$

باز هم به مشکلی برخورد کردیم. زیرا شماره (۲) هم یک معادله درجه دوم با ضریب غیر ثابت است ، که باید آنرا حل کنیم. برای رفع این مشکل ، **تغییر متغیر Change of Variable** انجام می دهیم.

$$w = v' \quad \Rightarrow \quad w' = v''$$

با این تغییر شماره (۲) به صورت زیر تغییر می کند.

$$2tw' - 3w = 0$$

ملاحظه می کنید که یک معادله دیفرانسیل خطی درجه اول است که می توانیم آنرا حل کنیم. این همان نامی که به این بخش داده ایم. یعنی **کاهش مرتبه Reduction of Order** یعنی سعی کردیم معادله دیفرانسیل درجه دوم را به یک معادله دیفرانسیل درجه اول تبدیل کنیم. معادله بدست آمده را می توان به آسانی حل کرد. جواب این معادله

$$w(t) = ct^{\frac{3}{2}}$$

است. حل آنرا به عهده خودتان می گذاریم. سعی کنید آنرا حل کنید. اگر فراموش کرده اید ، بعداً آنرا برای شما حل می کنیم. اما برای یاد آوری ، سعی کنید آنرا بدون کمک ما ، حل کنید. اما این ، آن چیزی نیست که می خواستیم. ما در جستجوی یک جواب برای شماره (۲) هستیم. می توانیم با تغییر متغیر این کار را انجام دهیم.

$$v' = w$$

با این کار می توانیم $v(t)$ را پیدا کنیم.

$$v(t) = \int w dt = \int ct^{\frac{3}{2}} dt = \frac{2}{5} ct^{\frac{5}{2}} + k$$

پس همان کاری که در بخش ریشه های مکرر انجام دادیم ، تکرار کنیم. در این حالت می توان گفت

$$c = \frac{5}{2} \quad k = 0$$

با این کار داریم.

$$v(t) = t^{\frac{5}{2}} \Rightarrow y_2(t) = t^{-1} \left(t^{\frac{5}{2}} \right) = t^{\frac{3}{2}}$$

پس جواب کلی می تواند مطابق زیر باشد.

$$y(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^{\frac{3}{2}}$$

در هر حال برای استفاده از این روش ، باید یک جواب قبلا داشته باشیم،

مثال ۲

جواب کلی معادله زیر را پیدا کنید.

$$t^2 y'' + 2ty' - 2y = 0$$

اگر یک جواب ، مطابق زیر باشد.

$$y_1(t) = t$$

حل

شکل جواب دوم همراه با مشتق های آن مطابق زیر است.

$$y_2(t) = tv \quad y_2'(t) = v + tv' \quad y_2''(t) = 2v' + tv''$$

در معادله دیفرانسیل می گذاریم. , پس داریم.

$$t^2 (2v' + tv'') + 2t(v + tv') - 2(tv) = 0 = 0$$

باز نویسی و ساده می کنیم ، پس داریم.

$$t^3 v'' + 4t^2 v' = 0$$

حالا تغییر متغیر انجام می دهیم.

$$w = v' \quad \Rightarrow \quad w' = v''$$

با این تغییر ، معادله دیفرانسیل زیر را داریم.

$$t^3 w' + 4t^2 w = 0$$

این یک معادله خطی درجه اول است که می توان حل کرد ، و جواب آن مطابق زیر است. باز هم حل آن به عهده خودتان واگذار می کنیم.

$$w(t) = ct^{-4}$$

حالا برای $v(t)$ حل می کنیم.

$$v(t) = \int w dt = \int ct^{-4} dt = -\frac{1}{3}ct^{-3} + k$$

مطابق مثال بالا ، اعداد ثابت را حذف می کنیم ، پس داریم.

$$v(t) = t^{-3} \quad \Rightarrow \quad y_2(t) = t(t^{-3}) = t^{-2}$$

و جواب کلی ، مطابق زیر است.

$$y(t) = c_1 t + \frac{c_2}{t^2}$$

اگر نتوانسته اید ، دو معادله خطی مثال های ۱ و ۲ را حل کنید ، این هم حل آنها.

$$2tw' - 3w = 0$$

برای راحتی شما ، معادله را به صورت زیر با نویسی می کنیم. تا به صورت آشنا در آید.

$$2xy' - 3y = 0$$

$$y' = \frac{3y}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{2x}$$

$$dy = \frac{y^3 dx}{x^2}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{y^3 dx}{x^2}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{y^3}{x^2} dx$$

$$\ln(y) = \frac{y^4}{4} \ln(x) + c$$

با استفاده از $e^{\ln(x)} = x$ داریم.

$$y = e^c x^{\frac{y^4}{4}}$$

بجای e^c می نویسیم c و متغیرها را تغییر می دهیم پس داریم.

$$w(t) = ct^{\frac{y^4}{4}}$$

معادله دوم.

$$t^2 w' + 4t^2 w = 0$$

باز نویسی می کنیم یا به عبارتی متغیرها را عوض می کنیم.

$$x^2 y' + 4x^2 y = 0$$

بر x^2 تقسیم می کنیم.

$$xy' + 4y = 0$$

$$xy' = -4y$$

بر x تقسیم می کنیم.

$$y' = -\frac{4y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4y}{x}$$

در dx ضرب می کنیم.

$$dy = \frac{-4y dx}{x}$$

بر y تقسیم می کنیم.

$$\frac{dy}{y} = \frac{-4 dx}{x}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int -\frac{4}{x} dx$$

$$\ln(y) = c - 4 \ln(x)$$

طرفین را نمایی می کنیم. و با استفاده از $e^{\ln(x)} = x$ داریم.

$$y = \frac{e^c}{x^6} = cx^{-6} \quad \text{یا} \quad w(t) = ct^{-6}$$

تمرینات

توجه

لازم است که بدانید سه نوع معادله مرتبه دوم داریم، که می توان با کاهش مرتبه، آنها را حل کرد. نوع سوم آنها در قسمت درس بالا گفته شد، دو نوع دیگر را به صورت تمرین می آوریم. نوع اول معادله های دیفرانسیل مرتبه دوم که متغیر مستقل وجود ندارد. معادله های دیفرانسیل زیر استفاده از روش کاهش مرتبه، حل کنید.

$$۱) \quad y' + y'' = x$$

پاسخ

اینجا متغیر وابسته وجود ندارد. پس فرض می کنیم $y' = w$ باشد. لذا داریم.

$$w' + w = x$$

این یک معادله درجه اول به صورت استاندارد است. عامل انتگرال گیری

$$\mu = e^{\int p \, dx} = e^{\int 1 \, dx} = e^x$$

طرفین را در μ ضرب می کنیم، پس داریم.

$$e^x w' + e^x w = x e^x$$

$$\frac{d}{dx}(e^x w) = x e^x$$

طرفین را در dx ضرب و سپس انتگرال می گیریم.

$$e^x w = \int x e^x \, dx$$

$$= x e^x - \int e^x \, dx$$

$$= x e^x - (e^x + c_1)$$

پس

$$w = x - 1 - c_1 e^{-x}$$

حالا، چون فرض کردیم $y' = w$ پس داریم.

$$y' = w \Rightarrow y = \int w = \int (x - 1 - c_1 e^x) \, dx$$

$$y = \frac{1}{2} x^2 - x + c_1 e^{-x} + c_2$$

$$۲) \quad xy'' - 2y' = 1 \circ x^6$$

پاسخ

اینجا هم متغیر وابسته وجود ندارد. پس فرض می کنیم $y' = w$ باشد، لذا $y'' = w'$ و معادله به صورت زیر باز نویسی می شود.

$$xw' - 2w = 1 \circ x^4$$

طرفین را بر x تقسیم می کنیم و لذا معادله به صورت استاندارد زیر است.

$$w' - \frac{2}{x}w = 1 \circ x^3$$

عامل انتگرال گیری مطابق زیر است.

$$\mu = e^{\int p dx} = e^{\int -\frac{2}{x} dx} = e^{-2 \ln(x)} = e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2}$$

طرفین در μ ضرب می کنیم.

$$x^{-2}w' - 2x^{-3}w = 1 \circ x$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-2}w) = 1 \circ x$$

طرفین را در dx ضرب و سپس انتگرال می گیریم.

$$x^{-2}w = \int 1 \circ x dx$$

$$x^{-2}w = 5x^2 + c_1'$$

$$w = 5x^4 + c_1'x^2$$

چون فرض کردیم $y' = w$ باشد، پس داریم.

$$\begin{aligned} y' = w & \Rightarrow y = \int w \\ &= \int (5x^4 + c_1'x^2) dx \\ &= x^5 + \frac{1}{3}c_1'x^3 + c_2 \end{aligned}$$

با فرض $c_1 = \frac{1}{3}c_1'$ جواب کلی می تواند مطابق زیر باشد.

$$y = x^5 + c_1x^3 + c_2$$

نمودار مساله با مقدار اولیه زیر را رسم کنید.

$$3) \quad y'' + (y')^2 = 0 \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 1$$

پاسخ

این نوع دوم معادله های مرتبه دوم است که متغیر مستقل نداریم و معادله غیر خطی است.

گرچه معادله خطی نیست زیرا داریم $(y')^2$ و می دانیم که در معادله های خطی نه y و نه مشتق های آن نباید به توان غیر از ۱ برسند، در غیر این صورت معادله خط نیست، اما با جانشین کردن $y' = w$ نتیجه می شود که معادله به خطی تبدیل شود. پس داریم.

$$w' + w^2 = 0$$

این معادله تفکیک پذیر است. پس داریم.

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dx} &= -w^2 \\ -\frac{dw}{w^2} &= dx \\ \int -\frac{dw}{w^2} &= \int dx \\ \frac{1}{w} &= x + c_1 \\ w &= \frac{1}{x + c_1}\end{aligned}$$

چون فرض کردیم $y' = w$ باشد، پس داریم.

$$y = \int w = \int \frac{1}{x + c_1} dx = \ln(x + c_1) + c_2$$

حالا، مقادیر اولیه را بکار می‌بریم.

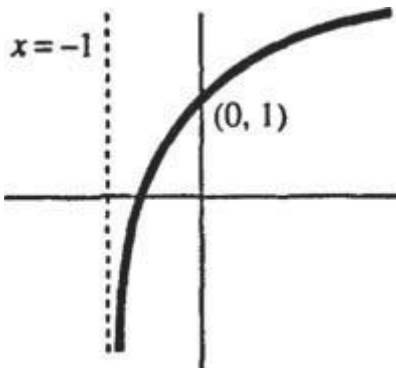
$$y(0) = 1 \Rightarrow \ln(0 + c_1) + c_2 = 1 \Rightarrow \ln c_1 + c_2 = 1$$

$$y'(0) = 1 \Rightarrow (0 + c_1)^{-1} = 1 \Rightarrow c_1 = 1$$

چون $c_1 = 1$ پس $c_2 = 1$ است. لذا جواب این مساله با مقادیر اولیه مطابق است، حد اقل برای $x > -1$

$$y = \ln(x + 1) + 1$$

این هم نمودار



$$4) \quad y^2 y'' - (y')^2 = 0$$

این معادله، نوع دوم است که در آن متغیر مستقل وجود ندارد و معادله خطی نیست. فرض می‌کنیم $y' = w$ باشد پس داریم

$$y'' = w \left(\frac{dw}{dy} \right)$$

با این جانشینی، معادله مرتبه دوم y به معادله مرتبه اول w تبدیل می‌شود.

$$y^2 w \frac{dw}{dy} - w^2 = 0$$

$$w \left(y^2 \frac{dw}{dy} - w^2 \right) = 0$$

پس

$$w = 0 \quad \text{یا} \quad y^2 \frac{dw}{dy} - w^2 = 0$$

جمله $w = 0$ یعنی $y' = 0$ و لذا $y = c$ یک جواب است. اینجا c هر عددی می تواند باشد. جمله دوم یک معادله تفکیک پذیر است که مطابق زیر حل می کنیم.

$$y^2 \frac{dw}{dy} = w^2$$

$$\frac{dw}{w^2} = \frac{dy}{y^2}$$

$$\int \frac{dw}{w^2} = \int \frac{dy}{y^2}$$

$$-\frac{1}{w} = -\frac{1}{y} + c_1$$

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{y} + c_1$$

چون $w = \frac{dy}{dx}$ است، پس آخرین نتیجه می شود

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} + c_1$$

$$(y^{-1} + c_1) dy = dx$$

$$\int (y^{-1} + c_1) dy = \int dx$$

که جواب کلی به صورت تلویحی به صورت زیر است.

$$\ln|y| + c_1 y = x + c_2$$

و در نتیجه جواب کامل معادله دیفرانسیل مطابق زیر است.

$$y = c \quad \text{یا} \quad \ln|y| + c_1 y = x + c_2$$

نوع سوم معادله های مرتبه دوم خطی همگن که یک جواب غیر صفر آن داشته باشیم.

$$5) \quad x^2 y'' - xy' + y = 0$$

پاسخ

می توان با سعی و امتحان حدس زد یک جواب $y = x$ است. این را به عنوان یک جواب در نظر می گیریم. یعنی $y_1 = x$ پس فرض می کنیم $y = y_1 v = vx$ باشد. این را در معادله دیفرانسیل می گذاریم و آنرا برای v حل می کنیم. پس اگر $y = xv$ باشد، پس مشتق های آن مطابق زیر هستند.

$$y' = xv' + v$$

$$y'' = xv'' + v' + v' = xv'' + 2v'$$

حالا این ها را در معادله دیفرانسیل می گذاریم.

$$x^2(xv'' + 2v') - x(xv' + v) + xv = 0$$

$$x^3v'' + x^2v' = 0$$

$$v'' + \frac{1}{x}v' = 0$$

حالا، مثل تمرینات بالا فرض می کنیم $v' = w$ باشد، پس داریم $v'' = w'$ و لذا یک معادله مرتبه اول داریم.

$$w' + \frac{1}{x}w = 0$$

عامل انتگرال گیری داریم.

$$\mu = e^{\int p dx} = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

طرفین را در μ ضرب می کنیم.

$$xw' + w = 0$$

$$\frac{d}{dx}(xw) = 0$$

$$xw = c$$

$$w = cx^{-1}$$

عدد c را نادیده می گیریم، و انتگرال می گیریم.

$$v' = w \Rightarrow v = \int w = \int x^{-1} dx = \ln|x|$$

در y_1 ضرب می کنیم.

$$y_2 = y_1 v = x \ln|x|$$

جواب کلی معادله دیفرانسیل اصلی مطابق زیر است.

$$y = c_1 x + c_2 \ln|x|$$

$$6) \quad xy'' - (x+1)y' + y = 0 \quad \text{اگر} \quad y_1 = e^x$$

پاسخ

اگر یک جواب $y_1 = e^x$ باشد، پس فرض می‌کنیم $y = y_1 v = e^x v$ باشد، و مشتق‌های آن مطابق زیر است.

$$y' = e^x v' + e^x v$$

$$y'' = e^x v'' + 2e^x v' + e^x v$$

اینها را در معادله دیفرانسیل داده شده می‌گذاریم.

$$x(e^x v'' + 2e^x v' + e^x v) - (x+1)(e^x v' + e^x v)e^x v = 0$$

ساده می‌کنیم.

$$xv'' + (x-1)v' = 0$$

حالا، فرض می‌کنیم $v' = w$ باشد، پس داریم.

$$w' + \frac{x-1}{x}w = 0 \quad (*)$$

عامل انتگرال‌گیری را پیدا می‌کنیم.

$$\mu = e^{\int p dx} = e^{\left(\frac{x-1}{x}\right)dx} = e^{x-\ln x} = e^x e^{-\ln x} = \frac{e^x}{x}$$

طرفین (*) را در μ ضرب می‌کنیم.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{e^x}{x} w \right) = 0$$

$$\frac{e^x}{x} w = c$$

$$w = cxe^{-x}$$

عدد ثابت c را نادیده می‌انگاریم. و انتگرال می‌گیریم.

$$v = \int w = \int xe^{-x} dx = -xe^{-x} - \int -e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

$$= -e^{-x}(x+1)$$

در y_1 ضرب می‌کنیم.

$$y_2 = y_1 v = e^x * [-e^{-x}(x+1)] = -(x+1)$$

پس جواب کلی

$$y = c_1 e^x + c_2 (x+1)$$

است.

بخش ۳.۶ مجموعه اساسی جوابها Fundamental Sets of Solutions

یادآوری - در جبر خوانده ایم، اگر یک ماتریس 2×2 زیر داشته باشیم

$$Matrix = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

پس دیترمینان Determinant آن به صورت زیر بدست می آید.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

حالا، بر می گردیم به بحث پیش رو، یعنی مجموعه اساسی جوابهای معادلات دیفرانسیل. ابتدا، باید در نظر داشته باشید، که اینجا در مورد معادله های دیفرانسیل مرتبه دوم همگن با ضریب های غیر ثابت بحث می کنیم. یعنی معادله های به صورت زیر.

$$\begin{aligned} p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y &= 0 \\ y(t_0) &= y_0 \quad y'(t_0) = y'_0 \end{aligned} \quad (1)$$

همچنین، فرض می کنیم قبلا دو جواب $y_1(t)$ و $y_2(t)$ ، برای معادله (۱) پیدا کرده ایم. پس بر

اساس اصل بر هم نهی Principle of Superposition

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad (2)$$

هم یک جواب معادله دیفرانسیل (۱) است. می خواهیم بدانیم آیا شماره (۲) یک جواب کلی است یا نه. برای این که (۲) یک جواب کلی برای معادله دیفرانسیل باشد، باید شرایط اولیه در شماره (۱) را بر قرار کند. یعنی شرایط زیر

$$y(t_0) = y_0 \quad y'(t_0) = y'_0$$

این یعنی هر جواب معادله دیفرانسیل می تواند به این صورت نوشته شود. یعنی به صورت (۲) پس، اجازه دهید ببینیم آیا می توانیم اعداد ثابتی پیدا کنیم که این شرایط را بر قرار کنند. ابتدا از شماره (۲) مشتق می گیریم و در شرایط اولیه می گذاریم.

$$\begin{aligned} y_0 = y(t_0) &= c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) \\ y'_0 = y'(t_0) &= c_1 y'_1(t_0) + c_2 y'_2(t_0) \end{aligned} \quad (3)$$

چون فرض ما بر این است که قبلا این دو جواب را پیدا کرده ایم، همه چیز در این سیستم بالا برای ما شناخته شده است، پس می توانیم سیستم بالا را حل کنیم و c_1 و c_2 را پیدا کنیم. این کار را می توانیم با استفاده قانون کرامر Cramer's Rule انجام دهیم. با استفاده از قانون کرامر جواب زیر را بدست می آوریم.

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y'_0 & y'_2(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix}} \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y'_1(t_0) & y'_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix}} \quad (4)$$

همان طور که در ابتدای این بخش گفتیم. دیترمینان یک ماتریس **Matrix**

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

است.

در حقیقت، ما برای حل سیستم‌ها از قانون کرامر استفاده نمی‌کنیم، بلکه همان روش جبری که می‌دانیم برای حل سیستم‌ها بکار می‌بریم. پس چرا اینجا از قانون کرامر استفاده کردیم؟
قانون کرامر بکار بردیم، زیرا می‌توانیم (۴) را برای ایجاد یک شرط بکار ببریم که به ما اجازه می‌دهد تصمیم بگیریم چه زمانی می‌توانیم برای اعداد ثابت سیستم را حل کنیم. اگر به شماره (۴) توجه کنید، ملاحظه می‌کنید که مخرج‌های (۴) که همه اعداد هستند و یکی می‌باشند اگر دیترمینان صفر شود، نمی‌توانیم سیستم را حل کنیم.
کمیت در مخرج، **رانسکین Wronskian** نامیده می‌شود. و به صورت زیر تعریف می‌شود. حرف W حرف اول *Wronskian* است.

$$W(f, g)(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix} = f(t)g'(t) - g(t)f'(t)$$

رانسکین را با W نشان می‌دهیم.

پس این همه طول و تفصیل برای چیست؟ تاکنون بدنبال چه بوده ایم؟

می‌خواسته ایم مشخص کنیم دو جواب‌های معادله (۱) به اندازه کافی قانع‌کننده هستند که تشکیل یک جواب کلی بدهند؟ دو جواب تشکیل یک جواب کلی برای شماره (۱) می‌دهند اگر شرایط اولیه داده شده معادله شماره (۱) را برقرار کنند. و از قانون کرامر نتیجه می‌گیریم که شرایط اولیه برقرار می‌شوند اگر رانسکین صفر نباشد، یعنی

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y'_2(t_0) - y_2(t_0)y'_1(t_0) \neq 0$$

پس، فرض می‌کنیم $y_1(t)$ و $y_2(t)$ دو جواب‌های شماره (۱) باشند، و $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ باشند. پس دو جواب، مجموعه اساسی جوابها **Fundamental Set of Solutions** نامیده می‌شوند و جواب کلی شماره (۱) مطابق زیر است.

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

پس اجازه دهید یکی از ادعا های قبلی را چک کنیم.

مثال ۱

به بخش ۳.۳ ریشه های مکرر می رویم. ادعا کردیم که

$$y_2(t) = e^{\lambda t} \sin(\mu t) \quad \text{و} \quad y_1(t) = e^{\lambda t} \cos(\mu t)$$

یک مجموعه اساسی جواب ها هستند. ثابت کنید که حقیقتا چنین است.

حل

برای اثبات، باید رانسکین این دو جواب را پیدا کنیم و نشان دهیم، صفر نیست.

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} e^{\lambda t} \cos(\mu t) & e^{\lambda t} \sin(\mu t) \\ \lambda e^{\lambda t} \cos(\mu t) - \mu e^{\lambda t} \sin(\mu t) & \lambda e^{\lambda t} \sin(\mu t) + \mu e^{\lambda t} \cos(\mu t) \end{vmatrix} \\ &= e^{\lambda t} \cos(\mu t) (\lambda e^{\lambda t} \sin(\mu t) + \mu e^{\lambda t} \cos(\mu t)) - \\ &\quad e^{\lambda t} \sin(\mu t) (\lambda e^{\lambda t} \cos(\mu t) - \mu e^{\lambda t} \sin(\mu t)) \\ &= \mu e^{2\lambda t} \cos^2(\mu t) + \mu e^{2\lambda t} \sin^2(\mu t) \\ &= \mu e^{2\lambda t} (\cos^2(\mu t) + \sin^2(\mu t)) \\ &= \mu e^{2\lambda t} \end{aligned}$$

خوب، می دانیم که جمله نمایی بدست آمده صفر نیست، از طرف دیگر $\mu \neq 0$ زیرا اگر صفر بود، ریشه مختلط نداشتیم. و لذا $W \neq 0$ است و در نتیجه این دو جواب ها، در حقیقت مجموعه اساسی جواب ها هستند و در نهایت جواب کلی مطابق زیر است.

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos(\mu t) + c_2 e^{\lambda t} \sin(\mu t)$$

مثال ۲

در بخش ۳.۵ بخش کاهش دادن مرتبه معادله دیفرانسیل معادله زیر را حل کردیم.

$$2t^2 y'' + ty' - 3y = 0$$

نشان دهید که دو جواب، تشکیل مجموعه اساسی جواب های معادله دیفرانسیل بالا می دهند.

حل

دو جواب آن مثال مطابق زیر هستند.

$$y_1(t) = t^{-1} \quad y_2(t) = t^{\frac{3}{2}}$$

رانسکین این دو جواب را محاسبه می کنیم.

$$W = \begin{vmatrix} t^{-1} & t^{\frac{3}{2}} \\ -t^{-2} & \frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{3}{2}t^{-\frac{1}{2}} - (-t^{-\frac{1}{2}}) = \frac{5}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \frac{5}{2\sqrt{t}}$$

پس رانسکین هرگز صفر نمی شود. توجه داشته باشید که نمی توانیم $t = 0$ را در رانسکین بگذاریم. زیرا این برای پیدا کردن ضریب های ثابت در جواب کلی، مشکل ساز می شود. همچنین نمی توانیم $t = 0$ را در جواب بگذاریم.

پس چون رانسکین صفر نیست، نتیجه می گیریم که این دو جواب، تشکیل مجموعه اساسی جواب ها می دهند. یعنی جواب کلی مطابق زیر است.

$$y(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^{\frac{3}{2}}$$

قضیه

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

اینجا $p(t)$ و $q(t)$ تابع های پیوسته در یک بازه I هستند. t_0 را که هر عددی در بازه I می تواند باشد، انتخاب کنید. فرض کنید $y_1(t)$ یک جواب معادله دیفرانسیل باشد، بطوری که شرایط اولیه زیر را بر قرار کند

$$y(t_0) = 1 \quad y'(t_0) = 0$$

فرض کنید $y_2(t)$ یک جواب معادله دیفرانسیل باشد که شرایط اولیه زیر را بر قرار کند.

$$y(t_0) = 0 \quad y'(t_0) = 1$$

پس $y_1(t)$ و $y_2(t)$ تشکیل مجموعه اساسی جواب های معادله دیفرانسیل را می دهند.

اثبات این قضیه آسان است. کافی است رانسکین را محاسبه کنیم.

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

پس مجموعه اساسی جواب ها وجود دارند ، در صورتی که بتوانیم دو مساله با مقادیر اولیه داده شده در قضیه را حل کنیم.

مثال ۳

با استفاده از قضیه ، جوابهای اساسی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

فرض کنید $t_0 = 0$ است.

حل

این معادله را می توان به اسانی حل کرد. زیرا داریم $r^2 + 4r + 3 = 0$ پس $r_1 = -3$ و $r_2 = -1$ لذا داریم.

$$y(t) = e^{-3t} \quad y(t) = e^{-t}$$

این دو جواب ، تشکیل مجموعه اساسی جوابهای معادله دیفرانسیل را می دهند و می توانیم به اسانی نشان دهیم.

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2) &= \begin{vmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -3e^{-3t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = [(e^{-3t})(-e^{-t})] - [(e^{-t})(-3e^{-3t})] \\ &= (-e^{-4t}) - (-3e^{-4t}) = -e^{-4t} + 3e^{-4t} = 2e^{-4t} \end{aligned}$$

ملاحظه می شود که رانسکین هرگز صفر نمی شود ، پس این دو جواب تشکیل جوابهای اساسی می دهند. اما ، آنها ، آن مجموعه ای که در قضیه گفته شده ، نیستند. هیچ کدام از این جوابها ، هیچ یک از دو شرایط اولیه داده شده در قضیه را بر قرار نمی کنند. باید این شرایط اولیه را بکار بریم تا جوابهای اساسی که در قضیه گفته شده است ، پیدا کنیم. می دانیم که معادله زیر هم یک جواب معادله دیفرانسیل است.

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t}$$

اجازه دهید ، اولین شرایط اولیه را بکار بریم و ببینیم آیا می توانیم ضریب هایی پیدا کنیم که کار کنند.

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

باید c_1 و c_2 را پیدا کنیم. به صورت زیر عمل می کنیم.

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t} \quad y(0) = 1 \quad y'(0) = 0$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow c_1 e^{-3(0)} + c_2 e^{-(0)} = c_1 + c_2 = 1 \quad (1)$$

$$y'(0) = 0 \Rightarrow -3c_1 e^{-3(0)} - c_2 e^{-(0)} = -3c_1 - c_2 = 0 \quad (2)$$

یک سیستم معادلات بدست آوردیم. آنرا حل می کنیم.

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3c_1 - c_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

از معادله (۱) داریم $c_1 = 1 - c_2$ این را در معادله دوم می گذاریم.

$$-3(1 - c_2) - c_2 = 0 \Rightarrow -3 + 3c_2 - c_2 = 0 \Rightarrow 2c_2 = 3 \Rightarrow c_2 = \frac{3}{2}$$

پس $c_2 = \frac{3}{2}$ است این را در $c_1 = 1 - c_2$ می گذاریم. پس داریم.

$$c_1 = 1 - c_2 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

پس یک جواب کلی زیر بدست آوردیم.

$$y_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t}$$

به همین طریق اگر دومین شرط اولیه را بکار ببریم ، یعنی

$$y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

جواب زیر را بدست می آوریم.

$$y_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t}$$

بر اساس قضیه بالا ، این ها باید یک سری جوابهای اساسی را تشکیل دهند. چک کردن آسان است.

$$\begin{aligned}
 W &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-t} & \frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t} \end{vmatrix} \\
 &= \left(-\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t}\right)\left(\frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-t}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t}\right)\left(\frac{3}{2}e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-t}\right) \\
 &= e^{-4t} \neq 0
 \end{aligned}$$

پس یک سری جوابهای اساسی کاملاً متفاوت با استفاده از قضیه بدست آوردیم. خوب، این مساله ای نیست. تعداد بی شماری از جوابها وجود دارند. پس کدام را باید بکار ببریم؟ اگر آن جوابی که ابتدا پیدا کردیم، جواب کلی مطابق زیر است.

$$y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-t}$$

اگر از قضیه بالا استفاده کنیم، جواب کلی مطابق زیر است.

$$y(t) = c_1 \left(-\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{3}{2}e^{-t}\right) + c_2 \left(-\frac{1}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{-t}\right)$$

پس کدام را به عنوان جوابهای اساسی بکار ببریم؟ آنها که آسان تر بدست می آیند.

بخش ۳.۷ کار برد دیگر رانسکین More on the Wronskian

در بخش ۳.۶ رانسکین را معرفی کردیم و گفتیم که رانسکین به ما کمک می کند تا مشخص کنیم آیا دو جوابهای بدست آمده، یک مجموعه اساسی جوابها بودند یا خیر. در این بخش، به یک کاربرد دیگر رانسکین نگاه می کنیم. همچنین روش دیگری برای محاسبه رانسکین به شما معرفی می کنیم. اجازه دهید ابتدا به کاربرد آن بپردازیم. برای این کار، لازم است مفاهیم جدیدی به شما معرفی کنیم. دو تابع غیر صفر $f(x)$ و $g(x)$ به صورت زیر را در نظر بگیرید.

$$cf(x) + kg(x) = 0 \quad (1)$$

ملاحظه می کنید که اگر $c = 0$ و $k = 0$ باشند، معادله (۱) را برقرار می کنند، بدون توجه به تابع های بکار برده شده.

حالا، اگر بتوانیم اعداد ثابت غیر صفر c و k را پیدا کنیم، بطوری که معادله (۱) برای تمام x ها برقرار باشد، پس این دو تابع را وابسته خطی **Linearly Dependent** می نامند. از طرف دیگر اگر فقط یکی از $c = 0$ یا $k = 0$ صحت داشته باشد و معادله (۱) برقرار باشد، آنوقت آن دو تابع را مستقل خطی **Linearly Independent** می نامند.

مثال ۱

مشخص کنید آیا مجموعه تابع های زیر، وابسته خطی هستند یا مستقل خطی.

$$(a) \quad f(x) = 9\cos(2x) \quad g(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)$$

$$(b) \quad f(t) = 2t^2 \quad g(t) = t^4$$

حل

$$(a) \quad f(x) = 9\cos(2x) \quad g(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)$$

ابتدا دو تابع را به صورت معادله (۱) می نویسیم.

$$c(9\cos(2x)) + k(2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)) = 0$$

لازم است مشخص کنیم آیا می توانیم دو عدد ثابت غیر صفر c و k پیدا کنیم که معادله بالا برای تمام x ها برقرار باشد؟

و یا، اگر $c = 0$ و $k = 0$ باشد، این ها تنها اعداد ثابتی هستند که معادله را برای تمام x ها برقرار می کنند؟

این کار سختی است. اما اگر ساده کنیم، کار ما آسان تر خواهد بود. به خاطر آورید که

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$$

با استفاده از حقیقت بالا داریم.

$$9c \cos(2x) + 2k \cos(2x) = 0$$

$$(9c + 2k) \cos(2x) = 0$$

با این ساده کردن می بینیم که معادله بالا صفر خواهد بود برای هر اعداد ثابت c و k اگر معادله زیر برقرار باشد.

$$9c + 2k = 0$$

می توانیم زوج های زیر را پیدا کنیم.

$$c = 1, \quad k = -\frac{9}{2}$$

$$c = \frac{2}{9}, \quad k = -1$$

$$c = -2, \quad k = 9$$

$$c = -\frac{7}{6}, \quad k = \frac{21}{4}$$

ملاحظه می کنید که این زوج ها بی شمار هستند.

پس توانستیم یک سری زوج های غیر صفر پیدا کنیم که معادله داده شده را برای تمام x ها برقرار می کنند. پس این دو تابع وابسته خطی هستند. حالا به دو زوج دیگر می پردازیم.

$$(b) \quad f(t) = 2t^2 \quad g(t) = t^4$$

این دو تابع را هم مطابق شماره (۱) می نویسیم.

$$2ct^2 + kt^4 = 0$$

اینجا بر خلاف دو تابع های قبلی ، نمی توانیم فوراً یکی را بر حسب دیگری بنویسیم. پس ، سعی می کنیم ببینیم آیا می توانیم اعداد ثابت را پیدا کنیم. خوب ، اگر معادله اصلی برقرار است ، پس اگر از تمام جمله ها مشتق بگیریم ، باز هم معادله برقرار است ، لذا یک سیستم با دو معادله و دو مجهول بدست می آوریم.

$$2ct^2 + kt^4 = 0$$

$$4ct + 4kt^3 = 0$$

این سیستم را حل می کنیم ، تا ببینیم چه بدست می آوریم. معادله دوم را برای c حل می کنیم ، پس داریم.

$$c = -kt^2$$

حالا ، این را در معادله اول می گذاریم.

$$2(-kt^2)t^2 + kt^4 = 0$$

$$-kt^4 = 0$$

بخاطر بیاورید ، بدنبال اعداد ثابتی هستیم که معادله را برای تمام t ها برقرار می کنند. تنها در صورتی چنین اتفاقی می افتد که $k = 0$ باشد ، پس اگر $k = 0$ باشد ، c هم باید صفر باشد. پس نشان دادیم ، تنها زمانی

$$2ct^2 + kt^4 = 0$$

برای تمام t ها برقرار است که $c = 0$ و $k = 0$ باشد. لذا دو تابع مستقل خطی هستند.

ملاحظه می کنید که برای بتوانیم مشخص کنیم دو تابع ، مستقل خطی یا وابسته خطی هستند ، مراحل زیادی باید طی کنیم. اینجا است که رانسکین می تواند کمک کند.

حقیقت Fact

فرض کنید تابع های $f(x)$ و $g(x)$ در یک بازه l مشتق پذیر باشند.

۱ - اگر $W(f, g)(x_0) \neq 0$ باشد برای یک x_0 در l پس $f(x)$ و $g(x)$ در آن بازه l مستقل خطی هستند.

۲ - اگر $f(x)$ و $g(x)$ در بازه l وابسته خطی باشند ، پس $W(f, g)(x) = 0$ است برای تمام x ها در l

دقت کنید : این حقیقت نمی گوید اگر $W(f, g)(x) = 0$ باشد ، پس $f(x)$ و $g(x)$ وابسته خطی هستند. در حقیقت ، امکان دارد دو تابع مستقل خطی دارای یک رانسکین صفر باشند.

مثال ۲

با استفاده از تابع های مثال قبل ، درستی حقیقت بالا را نشان دهید.

$$(a) \quad f(x) = 9\cos(2x) \quad g(x) = 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x)$$

حل

اگر رانسکین این دو تابع را محاسبه کنیم ، باید صفر بدست آوریم. زیرا قبلا نشان دادیم که این دو تابع ، وابسته خطی هستند.

$$\begin{aligned}
 W &= \begin{vmatrix} 9\cos(2x) & 2\cos^2(x) - 2\sin^2(x) \\ -18\sin(2x) & -4\cos(x)\sin(x) - 4\sin(x)\cos(x) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 9\cos(2x) & 2\cos(2x) \\ -18\sin(2x) & -2\sin(2x) - 2\sin(2x) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 9\cos(2x) & 2\cos(2x) \\ -18\sin(2x) & -4\sin(2x) \end{vmatrix} \\
 &= -36\cos(2x)\sin(2x) - (-36\cos(2x)\sin(2x)) = 0
 \end{aligned}$$

پس صفر بدست آوردیم. ملاحظه می کنید کار ما آسان تر بود.

$$(b) \quad f(t) = 2t^2 \quad g(t) = t^4$$

اینجا ، ما میدانیم که این دو تابع ، مستقل خطی هستند ، پس باید رانسکین غیر صفر بدست آوریم.

$$W = \begin{vmatrix} 2t^2 & t^4 \\ 4t & 4t^3 \end{vmatrix} = 8t^5 - 4t^5 = 4t^5$$

ملاحظه می کنید که رانسکین غیر صفر است ، همان طور که انتظار داشتیم. , البته در صورتی که $t \neq 0$ باشد. این مساله ای نیست. تا زمانی که رانسکین به ظاهر صفر نیست .

مثال ۳

مشخص کنید آیا تابع های زیر وابسته خطی یا مستقل خطی هستند.

$$(a) \quad f(t) = \cos t \quad g(t) = \sin t$$

$$(b) \quad f(x) = 6^x \quad g(x) = 6^{x+2}$$

حل

ابتدا در مورد دو تابع (a) بحث می کنیم. رانسکین را محاسبه می کنیم ، اگر رانسکین غیر صفر بود ، می دانیم که دو تابع مستقل خطی هستند. اگر صفر باشد ، کاملاً مطمئن هستیم که وابسته خطی هستند.

$$W = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \neq 0$$

پس ، بر اساس حقیقت بالا ، این دو تابع ، مستقل خطی هستند.
حالا در مورد (b) اقدام می کنیم. اینجا همان کاری را انجام می دهیم که در قسمت اول انجام دادیم. بخاطر بیاورید که

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

حالا رانسکین را محاسبه می کنیم.

$$W = \begin{vmatrix} 6^x & 6^{x+2} \\ 6^x \ln 6 & 6^{x+2} \ln 6 \end{vmatrix} = 6^x 6^{x+2} \ln 6 - 6^{x+2} 6^x \ln 6 = 0$$

نمی توانیم به راحتی بگوییم این دو تابع وابسته خطی هستند. اما می توانیم حدس بزنیم که احتمالا وابسته خطی هستند. برای این که ثابت کنیم که در حقیقت اینها وابسته خطی هستند ، لازم است آنرا به صورت (۱) بنویسیم و ببینیم آیا می توانیم اعداد غیر صفر c و k پیدا کنیم که آنرا برای تمام x ها برقرار کنند.

$$c 6^x + k 6^{x+2} = 0$$

$$c 6^x + k 6^x 6^2 = 0$$

$$c 6^x + 36k 6^x = 0$$

$$(c + 36k) 6^x = 0$$

به نظر می رسد که می توانیم هر عدد ثابتی بکار ببریم که معادله زیر را برقرار کند.

$$c + 36k = 0$$

برای این که برای تمام x این معادله صفر بشود ، می توانیم اعداد زیر را بکار ببریم.

$$c = 36 \quad k = -1$$

$$c = -36 \quad k = 1$$

$$c = 9 \quad k = -\frac{1}{4}$$

ملاحظه می شود که اعداد ثابت غیر صفر پیدا کردیم که معادله را برای تمام x ها برقرار می کنند. پس تابع ها وابسته خطی هستند.

اجازه دهید این ادعا را ثابت کنیم. دو عدد آخر را امتحان می کنیم.

$$9(6^x) - \frac{1}{4}(6^{x+2}) = 9(6^x) - \frac{1}{4}(6^x \times 6^2) = 6^x \left(9 - \frac{1}{4} \times 6^2 \right) = 6^x (9 - 9) = 0$$

قبل از این که به موضوع بعدی بپردازیم ، اجازه دهید بیشتر در مورد تابع های مستقل خطی و وابسته خطی صحبت کنیم. اجازه دهید فرض کنیم $f(x)$ و $g(x)$ وابسته خطی هستند ، پس این یعنی دو عدد غیر صفر c و k وجود دارند ، بطوری که برای تمام x ها داریم.

$$c f(x) + k g(x) = 0$$

حالا ، می توانیم این را به یکی از دو طریق زیر ، حل کنیم.

$$g(x) = -\frac{c}{k}f(x) \quad \text{یا} \quad f(x) = -\frac{k}{c}g(x)$$

توجه داشته باشید که این کار را می توانیم انجام دهیم ، زیرا می دانیم که c و k غیر صفر هستند. پس تقسیم را بدون ترس از تقسیم بر صفر می توانیم ، انجام دهیم.

پس ، این یعنی این دو تابع وابسته خطی را می توان به طریقی نوشت ، بطوری که یکی مساوی است با حاصلضرب دیگری در اعداد ثابت. بر گردید و نگاه کنید به هر دو مجموعه تابع های وابسته خطی. ملاحظه می کنید که این موضوع برای هر دو مجموعه صادق است. دو تابع که مستقل خطی هستند ، یکی را نمی توان به صورت حاصلضرب دیگری در یک عدد ثابت نوشت.

تصور نکنید که مستقل خطی و وابسته خطی منحصر به دو تابع است. این موضوع برای n تابع هم صدق می کند. فرض کنید n تابع غیر صفر داشته باشیم ، پس می توان معادله زیر را نوشت.

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 \quad (2)$$

اگر بتوانیم اعداد ثابت $c_1, c_2, \dots, c_n$ را پیدا کنیم که حد اقل دو تا از آنها غیر صفر باشد و (۲) بر قرار باشد ، تابع ها را وابسته خطی می نامیم. از طرف دیگر ، اگر تنها اعداد ثابتی که می توانند برای تمام x ها ، شماره (۲) صفر کند $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots, c_n = 0$ باشند ، پس آن تابع ها را مستقل خطی می نامیم.

توجه داشته باشید ، که بر خلاف حالت دو تابعی ، می توانیم بعضی از اعداد ثابت صفر داشته باشیم و باز هم تابع ها وابسته خطی باشند.

در این حالت ، تابع ها وابسته خطی باشند، یعنی چه؟ خوب ، فرض می کنیم آن تابع ها وابسته خطی باشند. این یعنی می توانیم اعداد ثابتی پیدا کنیم ، با حد اقل دو تا غیر صفر بطوری که (۲) بر قرار باشد برای تمام x ها. برای توضیح بیشتر ، فرض کنید c_1 یکی از این اعداد غیر صفر باشد. این یعنی می توانیم اعمال زیر را انجام دهیم.

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

$$c_1 f_1(x) = -(c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x))$$

$$f_1(x) = -\frac{1}{c_1}(c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x))$$

به عبارت دیگر ، اگر تابع ها وابسته خطی باشند ، پس می توانیم حد اقل یکی از آنها را بر حسب تابع های دیگر بنویسیم.

حالا ، به موضوع دیگر می پردازیم.

توجه: Abel نام یک ریاضی دان سوئدی است و تلفظ می شود ای پِل مانند ای دل

قضیه ای بل Abel's Theorem

اگر $y_1(t)$ و $y_2(t)$ دو جواب مدله دیفرانسیل زیر باشد ،

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

پس رانسکین این دو جواب ها مطابق زیر است.

$$W(y_1, y_2)(t) = W(y_1, y_2)(t_0) e^{-\int_{t_0}^t p(x) dx}$$

برای یک t_0

چون رانسکین و t_0 را نمی شناسیم ، رانسکین قضیه بالا را مطابق زیر باز نویسی می کنیم.

$$W(y_1, y_2)(t) = c e^{-\int p(t) dt} \quad (3)$$

برای روشن شدن موضوع ، یک مثال می آوریم.

مثال ۴

بدون حل معادله ، رانسکین دو جواب معادله زیر را پیدا کنید.

$$t^4 y'' - 2t^3 y' - t^8 y = 0$$

حل

اولین کاری که باید انجام دهیم ، این است کتمام جملات را بر ضریب مشتق درجه دوم تقسیم کنیم.

$$y'' - \frac{2}{t} y' - t^4 y = 0$$

حالا با استفاده از شماره (۳) داریم.

$$W = c e^{-\int -\frac{2}{t} dt} = c e^{2 \ln t} = c e^{\ln t^2} = c t^2$$

بخش ۳.۸ معادلات دیفرانسیل نا همگن Nonhomogeneous Differential Equations
حالا وقت آن رسیده که در مورد حل معادلات دیفرانسیل نا همگن صحبت کنیم. یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، خطی نا همگن به صورت زیر است.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \quad (1)$$

اینجا $g(t)$ یک تابع غیر صفر است. ملاحظه می کنید ضرب ها هم، ثابت نیستند. همچنین ضریب مشتق مرتبه دوم هم ۱ است. این کار را برای آسان تر شدن مساله انجام می دهیم. البته لزومی ندارد که ضریب مشتق مرتبه دوم حتما ۱ باشد. قبل از ادامه چگونگی حل این نوع معادلات، چند موضوع ابتدایی را گوشزد کنیم. ابتدا، معادله زیر را در نظر بگیرید.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (2)$$

شماره (۲) را معادله دیفرانسیل همگن مربوطه شماره (۱) می نامند. حالا به قضیه زیر توجه کنید.

قضیه

فرض کنید $Y_1(t)$ و $Y_2(t)$ دو جوابهای شماره (۱) باشند. و فرض کنید $y_1(t)$ و $y_2(t)$ یک مجموعه اساسی جوابهای معادله دیفرانسیل همگن شماره (۲) باشد، پس

$$Y_1(t) - Y_2(t)$$

یک جواب معادله شماره (۲) است و می توان آنرا به صورت زیر نوشت.

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

برای اثبات این که $Y_1(t) - Y_2(t)$ یک جواب شماره (۲) است، کافی است آنرا در معادله دیفرانسیل بگذاریم و آنرا چک کنیم.

$$\begin{aligned} (Y_1 - Y_2)'' + p(t)(Y_1 - Y_2)' + q(t)(Y_1 - Y_2) &= 0 \\ Y_1'' + p(t)Y_1' + q(t)Y_1 - (Y_2'' + p(t)Y_2' + q(t)Y_2) &= 0 \\ g(t) - g(t) &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

در مرحله سوم بالا، این حقیقت را بکار بردیم که $Y_1(t)$ و $Y_2(t)$ دو جوابهای شماره (۱) هستند. زیرا

$$\begin{aligned} Y_1'' + p(t)Y_1' + q(t)Y_1 &= g(t) \\ Y_2'' + p(t)Y_2' + q(t)Y_2 &= g(t) \end{aligned}$$

پس، ثابت کردیم تفاضل دو جوابهای شماره (۱) یک جواب شماره (۲) است.

حتی اثبات

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

هم آسان تر است. چون $y_1(t)$ و $y_2(t)$ یک مجموعه اساسی جوابهای شماره (۲) است، می دانیم که آنها تشکیل یک جواب کلی می دهند و لذا هر جواب شماره (۲) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

خوب، $Y_1(t) - Y_2(t)$ یک جواب شماره (۲) است. پس می توانیم بنویسیم

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

توجه داشته باشید که حروف بزرگ مربوط است به جوابهای شماره (۱) است و حروف کوچک مربوط به جوابهای شماره (۲) است.

پس این قضیه برای ما چه کاری انجام می دهد؟ با استفاده از این قضیه، می توانیم شکل جواب کلی شماره (۱) بنویسیم. فرض می کنیم $y(t)$ جواب کلی شماره (۱) باشد و $Y_p(t)$ هر جوابی باشد که می تواند برای (۱) بدست ما برسد. پس با استفاده از قسمت دوم قضیه، می دانیم که

$$y(t) - Y_p(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

اینجا $y_1(t)$ و $y_2(t)$ یک مجموعه اساسی جوابهای (۲) هستند. برای $y(t)$ حل می کنیم، پس داریم.

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y_p(t)$$

و

$$y_c(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

را جواب عمومی یا مکمل **Complementary Solution** می نامند، و $Y_p(t)$ را جواب خصوصی **Particular Solution** می نامند.

پس جواب کلی معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$y(t) = y_c(t) + Y_p(t)$$

پس برای حل یک معادله دیفرانسیل نا همگن، لازم است معادله همگن (۲) را حل کنیم

این که گیج کننده است. برای پیدا کردن یک جواب برای شماره (۱) احتیاج به یک جواب داریم. خوب این جواب را از کجا پیدا کنیم؟

دو روش متداول است یکی روش ضریب های نا معین و دیگری روش تغییر متغیر. این دو روش را در دو بخش بعدی مورد بحث قرار می هدیم.

بخش ۳.۹ روش ضریب های نامعین Undetermined Coefficients

در این بخش نگاهی خواهیم داشت به اولین روش حل معادلات دیفرانسیل نامعین زیر.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

فایده این روش این است که مساله دیفرانسیل را به یک مساله جبری تبدیل می کند. گاهی جبر می تواند پیچیده و در هم بر هم باشد، اما در بیشتر مورد خیلی مشکل ساز نیست. فایده دیگر این روش این است که جواب مکمل یا عمومی بطور صریح لازم نیست. اما، خواهیم دید که دانستن روش پیدا کردن جواب عمومی در بعضی موارد لازم است، پس در باره آن هم صحبت خواهیم کرد.

بهتر است بجای توضیح چگونگی این روش، با مثال هایی شروع کنیم.

مثال ۱

یک جواب خصوصی Particular Solution معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$y'' - 4y' - 12y = 3e^{5t}$$

حل

اینجا می خواهیم یک جواب خصوصی پیدا کنیم، اما اولین کاری که باید انجام دهیم، این است که یک جواب عمومی Complementary Solution برای این معادله دیفرانسیل پیدا کنیم. بخاطر بیاورید که جواب عمومی از حل معادله زیر بدست می آید.

$$y'' - 4y' - 12y = 0$$

معادله کمکی این معادله دیفرانسیل و ریشه های آن مطابق زیر است.

$$r^2 - 4r - 12 = (r - 6)(r + 2) = 0 \Rightarrow r_1 = -2, r_2 = 6$$

پس جواب عمومی مطابق زیر است.

$$y_c(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{6t}$$

فعلا دلیل این کار، آشکار نیست، اما می خواهیم شما عادت کنید که این کار را قبل از پیدا کردن جواب خصوصی انجام دهید. در نهایت خواهیم دید که در دست داشتن جواب عمومی، کمک خواهد کرد. پس بهتر است که عادت کنید، در ابتدای کار کردن با روش ضریب های نامعین، اول جواب عمومی را پیدا کنید،

حالا، اجازه دهید شروع کنیم به پیدا کردن یک جواب خصوصی. همان طور که قبلا گفته شد، ابتدا با حدس و گمان، یک جواب خصوصی برای این معادله دیفرانسیل پیدا می کنیم. چون $g(t)$ یک تابع نمایی است، و می دانیم تابع های نمایی به خودی خود ظاهر یا نا پدید نمی شوند. به نظر می رسد که احتمالا یک شکل جواب خصوصی باید مطابق زیر باشد.

$$Y_p(t) = Ae^{5t}$$

حالا باید چند مشتق بگیریم. آنها را در معادله دیفرانسیل بگذاریم و ببینیم چه پیش می آید.

$$25Ae^{5t} - 4(5Ae^{5t}) - 12(Ae^{5t}) = 3e^{5t}$$

$$-7Ae^{5t} = 3e^{5t}$$

پس، برای این که حدس ما، یک جواب باشد، باید A را طوری انتخاب کنیم که ضریب های تابع های نمایی دو طرف نماد = یکی باشند. به عبارت دیگر

$$-7A = 3 \Rightarrow A = -\frac{3}{7}$$

خوب ، مقدار ضریب را پیدا کردیم. این یعنی حدس ما صحیح بوده است. یک جواب خصوصی برای این معادله دیفرانسیل مطابق زیر است.

$$Y_p(t) = -\frac{3}{7}e^{5t}$$

باز هم تکرار می کنیم ، در مثال بالا برای پیدا کردن یک جواب خصوصی ، ابتدا یک جواب عمومی پیدا کردیم ، اما این کار ، جزئی از روش ضریب های نا معین نیست. اما خواهیم دید که در دست داشتن یک جواب عمومی ، قبل از حدس و گمان یک جواب خصوصی ، سبب می شود که وقت زیادی صرفه جوئی کنیم. پیدا کردن یک جواب عمومی در ابتدای کار ، عادت خوبی است. حالا ، بر می گردیم به کاری که در دست داریم. توجه کند که گفته ایم یک جواب خصوصی و نگفته ایم جواب خصوصی. زیرا امکان دارد جواب های خصوصی دیگری هم وجود داشته باشند ، و ما یکی از آنها را پیدا می کنیم. هنگام نوشتن جواب کلی ، هر کدام از آنها کار می کند. کدام را باید انتخاب کرد ، این بستگی به مساله در دست اقدام دارد.

مثال ۲

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' - 4y' - 12y = 3e^{5t} \quad y(0) = \frac{18}{7} \quad y'(0) = -\frac{1}{7}$$

حل

می دانیم که جواب کلی به صورت زیر خواهد بود.

$$y(t) = y_c(t) + Y_p(t)$$

یاد آوری می کنیم c در y_c حرف اول کلمه **Complementary** است که به معنی عمومی است. حرف p در Y_p حرف اول کلمه **Particular** است که به معنی خصوصی است. این به شما کمک می کند که y_c و Y_p را تشخیص دهید.

بر می گردیم به حل مساله. در مثال قبل هم جواب عمومی را پیدا کردیم و هم جواب خصوصی. پس اینجا ، کار زیادی نیست که باید انجام دهیم.

اشتباه متداول این است که چون جواب عمومی را پیدا کرده ایم ، پس مقادیر اولیه را در مورد جواب عمومی بکار ببریم ، و اعداد ثابت را پیدا کنیم. اما این کار ، اشتباه است. **جواب عمومی فقط جواب معادله دیفرانسیل همگن است.** ما به دنبال جواب معادله دیفرانسیل نا همگن هستیم. و لذا شرط های اولیه باید آن جواب را بر قرار کند و نه جواب عمومی را.

پس ، باید جواب کلی معادله دیفرانسیل نا همگن را پیدا کنیم. با استفاده از جواب عمومی و جواب خصوصی که در مثال قبل پیدا کردیم ، جواب کلی و مشتق آن ، به صورت زیر است.

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{6t} - \frac{3}{7} e^{5t}$$

$$y'(t) = -2c_1 e^{-2t} + 6c_2 e^{6t} - \frac{15}{7} e^{5t}$$

حالا مقادیر اولیه را بکار می‌بریم.

$$\frac{18}{7} = y(0) = c_1 + c_2 - \frac{3}{7}$$

$$-\frac{1}{7} = y'(0) = -2c_1 + 6c_2 - \frac{15}{7}$$

با حل سیستم بالا، $c_1 = 2$ و $c_2 = 1$ و لذا جواب واقعی مطابق زیر است.

$$y(t) = 2e^{-2t} + e^{6t} - \frac{3}{7}e^{5t}$$

مثال بالا تنها مثال مساله با مقدار اولیه در این بخش است، پس این مثال را خوب بخاطر بسپارید. به مثال دیگری می‌پردازیم که در آن، یک نوع دیگر $g(t)$ بکار رفته است.

مثال ۳

یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل زیر پیدا کنید.

$$y'' - 4y' - 12y = \sin(2t)$$

حل

قرار بود اول جواب عمومی را پیدا کنیم، اما اینجا معادله دیفرانسیل همگن مرتبط، همان است که در مثال اول دیدیم. پس لزومی ندارد که جواب عمومی را پیدا کنیم. حالا می‌رسیم به جواب خصوصی. مثال اول، $g(t)$ یک تابع نمایی بود. و حدس ما هم برای جواب خصوصی، یک تابع نمایی بود. اینجا $g(t)$ یک تابع سینوسی است. اجازه دهید جواب خصوصی را مطابق زیر حدس بزنیم.

$$Y_p(t) = A \sin(2t)$$

مشتق می‌گیریم و در معادله دیفرانسیل می‌گذاریم. پس داریم.

$$-4A \sin(2t) - 4(2A \cos(2t)) - 12(A \sin(2t)) = \sin(2t)$$

با جمع کردن جمله‌ها داریم.

$$-16A \sin(2t) - 8A \cos(2t) = \sin(2t)$$

باید A را طوری انتخاب کنیم که در طرفین معادله بالا، تابع‌های یکسان داشته باشیم. این یعنی ضریب‌های سینوس و کسینوس باید مساوی باشند. یا

$$\cos(2t): \quad -8A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$$

$$\sin(2t): \quad -16A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{16}$$

توجه کنید چرا ضریب کسینوس را مساوی صفر قرار دادیم ولی ضریب سینوس را مساوی یک قرار دادیم. زیرا در طرف راست کسینوس نداریم. این یعنی ضریب کسینوس در طرف چپ باید صفر باشد.

از همه مهم تر ، یک مساله جدی تری داریم. برای این که کسینوس حذف شود ، لازم است $A = 0$ قرار دهیم. اگر چنین کنیم ، سینوس هم حذف می شود. و نباید این اتفاق بیفتد. به همین طریق ، اگر A را انتخاب کنیم تا سینوس را نگاه داریم ، پس کسینوس را هم خواهیم داشت. این یعنی چه؟ این یعنی حدس ما غلط بوده است.

حالا که حدس ما غلط بوده ، پس باید اشکال را بر طرف کنیم. اینجا ، مشکل ما کسینوس است ، پس اجازه دهید یک کسینوس به جواب حدسی اضافه کنیم. پس حدس جدید ما چنین خواهد بود.

$$Y_p(t) = A \cos(2t) + B \sin(2t)$$

در معادله دیفرانسیل می گذاریم و جمله های مشابه را جمع می کنیم ، پس داریم.

$$\begin{aligned} & -4A \cos(2t) - 4B \sin(2t) - 4(-2A \sin(2t) + 2B \cos(2t)) - \\ & 12(A \cos(2t) + B \sin(2t)) = \sin(2t) \\ & (-4A - 8B - 12A) \cos(2t) + (-4B + 8A - 12B) \sin(2t) = \sin(2t) \\ & (-16A - 8B) \cos(2t) + (8A - 16B) \sin(2t) = \sin(2t) \end{aligned}$$

حالا ، ضریب ها را مساوی قرار می دهیم.

$$\cos(2t): \quad -16A - 8B = 0$$

$$\sin(2t): \quad 8A - 16B = 1$$

سیستم را حل می کنیم ، پس داریم.

$$A = \frac{1}{40} \quad B = -\frac{1}{20}$$

اعداد ثابت را پیدا کردیم. پس حدس ما صحیح بود. یک جواب مخصوص برای معادله دیفرانسیل مطابق زیر است.

$$Y_p(t) = \frac{1}{40} \cos(2t) - \frac{1}{20} \sin(2t)$$

مثال ۴

یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل زیر پیدا کنید.

$$y'' - 4y' - 12y = 2t^3 - t + 3$$

حل

اینجا هم باز با همان معادله دیفرانسیل همگن قبلی سر و کار داریم. پس لزومی ندارد مجدداً جواب عمومی را پیدا کنیم. پس به مثال ۱ مراجعه کنید. در این مثال $g(t)$ یک تابع چند جمله ای درجه سوم است. جواب خصوصی را مطابق زیر حدس می زنیم.

$$Y_p(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D$$

ملاحظه می کنید ، اگر چه $g(t)$ جمله t^2 ندارد ، با وجود این در جواب حدس ، لازم داریم . پس از این جواب حدس ، مشتق می گیریم و در معادله دیفرانسیل می گذاریم.

$$6At + 2B - 4(3At^2 + 2Bt + C) - 12(At^3 + Bt^2 + Ct + D) = 2t^3 - t + 3$$

$$-12At^3 + (-12A - 12B)t^2 + (6A - 8B - 12C)t + 2B - 4C - 12D = 2t^3 - t + 3$$

حالا مانند مثال قبل ، لازم است ضریب های جمله های دو طرف ، مساوی باشند. پس داریم.

$$\begin{aligned} t^3: \quad -12A &= 2 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{6} \\ t^2: \quad -12A - 12B &= 0 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{6} \\ t^1: \quad 6A - 8B - 12C &= -1 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{9} \\ t^0: \quad 2B - 4C - 12D &= 3 \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{5}{27} \end{aligned}$$

پس جواب خصوصی این معادله دیفرانسیل ، مطابق زیر است.

$$Y_p(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{9}t - \frac{5}{27}$$

پس بر اساس آنچه تا کنون در این بخش آموخته ایم ، برای پیدا کردن یک جواب خصوصی می توان از جدول زیر استفاده کرد.

$g(t)$	حدس $Y_p(t)$
$ae^{\beta t}$	$Ae^{\beta t}$
$a \cos(\beta t)$	$A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)$
$b \sin(\beta t)$	$A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)$
$a \cos(\beta t) + b \sin(\beta t)$	$A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)$
چند جمله ای درجه n	$A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A$

مثال ۵

یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل زیر پیدا کنید.

$$y'' - 4y' - 12y = te^{4t}$$

حل

باز هم تکرار می کنیم که پیدا کردن یک جواب عمومی در ابتدای کار لازم است. اما ممکن است بگویید

چون همان معادله همگن را داریم و قبلاً هم جواب عمومی را پیدا کرده ایم ، پس دیگر لزومی ندارد که مجدداً این کار را انجام دهیم. در هر حال این عادت را فراموش نکنید.

می دانید $g(t) = te^{4t}$ است ، پس آنرا به دو قسمت تقسیم می کنیم و برای هر قسمت یک حدس می زنیم. برای قسمت t حدس زیر را داریم.

$$At + B$$

و برای قسمت تابع نمایی ، حدس زیر را داریم.

$$Ce^{4t}$$

چون حاصلضرب دو تابع داریم ، پس حاصلضرب حدس های ما مطابق زیر است.

$$Ce^{4t}(At + B)$$

اما به یک مشکل بر خورد می کنیم. هنگامی که حدس خود را در معادله دیفرانسیل می گذاریم ، فقط دو معادله و سه اعداد ثابت مجهول ، پس نمی توانیم هر سه اعداد را پیدا کنیم. اما ، بر طرف کردن این مشکل آسان است. می توانیم مشکل را به صورت زیر حل کنیم.

$$Ce^{4t}(At + B) = e^{4t}(ACt + BC)$$

اگر طرفین را بر C تقسیم کنیم ، پس حدس ما به صورت زیر می شود.

$$Y_p(t) = e^{4t}(At + B)$$

حالا ، حدس خود را بدست آورده ایم. می توانیم در معادله بگذاریم.

$$\begin{aligned} e^{4t}(16At + 16B + 8A) - 4(e^{4t}(4At + 4B + A)) - 12(e^{4t}(At + B)) &= te^{4t} \\ (16A - 16A - 12A)te^{4t} + (16B + 8A - 16B - 4A - 12B)e^{4t} &= te^{4t} \\ -12Ate^{4t} + (4A - 12B)e^{4t} &= te^{4t} \end{aligned}$$

حالا اعداد ثابت را پیدا می کنیم.

$$\begin{array}{lll} te^{4t}: & -12A = 1 & \Rightarrow A = -\frac{1}{12} \\ e^{4t}: & 4A - 12B = 0 & \Rightarrow B = -\frac{1}{36} \end{array}$$

پس جواب خصوصی مطابق زیر است.

$$Y_p(t) = e^{4t}\left(-\frac{t}{12} - \frac{1}{36}\right) = -\frac{1}{36}(3t + 1)e^{4t}$$

مثال آخر ، نشان می دهد چگونه با حاصلضرب نمایی کار کنیم.

مثال ۶

جواب مخصوص معادله زیر را پیدا کنید.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

برای $g(t)$ های زیر.

$$(a) \quad g(t) = 16e^{7t} \sin(10t)$$

$$(b) \quad g(t) = (9t^2 - 103t) \cos t$$

$$(c) \quad g(t) = -e^{-2t} (3 - 5t) \cos(9t)$$

حل

$$(a) \quad g(t) = 16e^{7t} \sin(10t)$$

ملاحظه می کنید که تابع نمایی داریم. ابتدا تابع نمایی را نا دیده می گیریم و برای $16 \sin(10t)$ حدس می زنیم. سپس نمایی را اضافه می کنیم. حدس برای سینوس مطابق زیر است.

$$A \cos(10t) + B \sin(10t)$$

حالا تابع نمایی را می آوریم. پس حدس ما مطابق زیر می شود.

$$Y_p(t) = e^{7t} (A \cos(10t) + B \sin(10t))$$

قبل از ادامه ، باید خاطر نشان کنیم که عدد ۱۶ جلو تابع مطلقا در حدس ما نقشی ندارد. هر عدد ثابت که در تمام تابع ضرب می شود ، نا دیده می گیریم.

$$(b) \quad g(t) = (9t^2 - 103t) \cos t$$

همان کاری که در مورد مثال قبل انجام دادیم ، تکرار می کنیم. حدس ما برای چند جمله ای داخل پرانتز مطابق زیر است.

$$At^2 + Bt + C$$

حدس ما برای کسینوس مطابق زیر است.

$$D \cos t + E \sin t$$

اگر این دو را در هم ضرب کنیم ، خواهیم داشت.

$$(At^2 + Bt + C)(D \cos t + E \sin t)$$

اجازه دهید ساده کنیم. ابتدا چند جمله ای را در تابع های سینوس و کسینوس ضرب می کنیم.

$$\begin{aligned} & (At^2 + Bt + C)(D \cos t) + (At^2 + Bt + C)(E \sin t) \\ & (ADt^2 + BDt + CD) \cos t + (AEt^2 + BEt + CE) \sin t \end{aligned}$$

ملاحظه می کنید که هر کجا ، یک عدد ثابت مجهول وجود دارد ، در یک عدد مجهول ضرب شده است. مثلاً D

در A, B, C ضرب شده و E در A, B, C ضرب شده است. هنگامی که می خواهیم سیستم را برای پیدا کردن مجهول ها حل کنیم ، به مشکل بر خورد می کنیم. حل این نوع سیستم ها خیلی مشکل است. همان کاری را که قبلاً انجام دادیم ، تکرار می کنیم. هر جا که حاصل ضرب دو عدد ثابت می بینیم ، آنرا به یک نام می نامیم. پس حدس ما به صورت زیر خواهد بود.

$$Y_p(t) = (At^2 + Bt + C) \cos t + (Dt^2 + Et + F) \sin t$$

این کاری که در این مثال انجام دادیم ، یک قانون کلی است. هر گاه یک چند جمله ای در یک تابع مثلثاتی ضرب شده باشد.

$$(c) \quad g(t) = -e^{-2t} (3 - 5t) \cos(9t)$$

این یکی ، تمام مورد بالا را در بر دارد. ابتدا ، تابع نمایی را نادیده می انگاریم. و حدس را مطابق زیر می نویسیم.

$$-(3 - 5t) \cos(9t)$$

علامت منفی را هم می توانیم نادیده بگیریم. پس حدس ما به صورت زیر می شود.

$$(At + B) \cos(9t) + (Ct + D) \sin(9t)$$

حالا تابع نمایی را می آوریم.

$$Y_p(t) = e^{-2t} (At + B) \cos(9t) + e^{-2t} (Ct + D) \sin(9t)$$

ملاحظه می کنید که تابع نمایی را در هر دو جمله آورده ایم.

چند قاعده کلی است که باید بخاطر بسپارید.

۱- اگر $g(t)$ شامل یک تابع نمایی باشد ، آنرا نادیده انگارید ، حدس را برای بقیه بنویسید. سپس تابع نمایی را اضافه کنید بدون ضریب آن.

۲ - برای حاصلضرب تابع های مثلثاتی و چند جمله ای ها ، ابتدا حدس را برای چند جمله ای بنویسید و سپس آنرا در کسینوس مناسب ، ضرب کنید. سپس یک حدس جدید برای چند جمله ای ضرب در سینوس مناسب ، اضافه کنید. حالا ، به چند مورد دیگر توجه کنید.

حقیقت Fact

اگر $Y_{P1}(t)$ یک جواب خصوصی معادله زیر باشد

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g_1(t)$$

و اگر $Y_{P2}(t)$ یک جواب خصوصی معادله زیر باشد

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g_2(t)$$

پس $Y_{P1}(t) + Y_{P2}(t)$ یک جواب خصوصی معادله زیر خواهد بود.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g_1(t) + g_2(t)$$

مثال ۷

یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل زیر پیدا کنید.

$$y'' - 4y' - 12y = 3e^{5t} + \sin(2t) + te^{4t}$$

حل

اینجا ، باز همان معادله همگن داریم ، پس جواب عمومی همان است که قبلا بدست آوریم. کار زیادی لازم نیست برای این مساله انجام دهیم. کافی است به مثال های قبل مراجعه کنیم. جواب های خصوصی مثال های قبل را بگیریم و باهم جمع کنیم ، پس داریم.

$$Y_p(t) = -\frac{3}{7}e^{5t} + \frac{1}{40}\cos(2t) - \frac{1}{20}\sin(2t) - \frac{1}{36}(3t+1)e^{4t}$$

مثال (۸)

جواب خصوصی معادله زیر

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

برای $g(t)$ های زیر بنویسید.

- (a) $g(t) = 4\cos(6t) - 9\sin(6t)$
 (b) $g(t) = -2\sin t + \sin(14t) - 5\cos(14t)$
 (c) $g(t) = e^{7t} + 6$
 (d) $g(t) = 6t^2 - 7\sin(3t) + 9$
 (e) $g(t) = 10e^t - 5te^{-8t} + 2e^{-8t}$
 (f) $g(t) = t^2 \cos t - 5t \sin t$
 (g) $g(t) = 5e^{-3t} + e^{-3t} \cos(6t) - \sin(6t)$

حل

(a) $g(t) = 4\cos(6t) - 9\sin(6t)$

اینجا ، می توانیم به راهنمایی که در جدول کلی آوردیم ، مراجعه کنیم و انجام دهیم .

$$A\cos(6t) + B\sin(6t) + C\cos(6t) + D\sin(6t)$$

حدس برای کسینوس مطابق زیر است.

$$A\cos(6t) + B\sin(6t)$$

حدس برای سینوس مطابق زیر است.

$$C\cos(6t) + D\sin(6t)$$

پس برای هر حدسی یک کسینوس بدست می آوریم و یک سینوس. مشکل اینجا است ، هنگامی که این را در معادله دیفرانسیل می گذاریم و مشتق می گیریم ، فقط دو معادله داریم ، اما چهار مجهول. در این صورت ، هرگز نمی توانیم اعداد ثابت مجهول را پیدا کنیم. برای رفع این مشکل ، بعضی از جمله ها را ادغام می کنیم. مطابق زیر.

$$(A + C)\cos(6t) + (B + D)\sin(6t)$$

حالا ، یک سینوس و یک کسینوس داریم، پس می توان نوشت

$$Y_p(t) = A\cos(6t) + B\sin(6t)$$

پس قاعده کلی برای نوشتن حدس ها برای تابع هایی که شامل چند جمع هستند ، این است که جمله های مشابه یا هم نظیر را با یک ضریب

$$(b) \quad g(t) = -2 \sin t + \sin(14t) - 5 \cos(14t)$$

در این مثال، برای جواب خصوصی دو سینوس و دو کسینوس خواهیم داشت. دلیل آن هم این است دو شناسه مختلف در آنها داریم. یکی برای سینوس با شناسه t و یکی دیگر برای سینوس و کسینوس با شناسه $14t$ لذا حدس ما برای این تابع مطابق زیر است.

$$Y_p(t) = A \cos t + B \sin t + C \cos(14t) + D \sin(14t)$$

$$(c) \quad g(t) = e^{7t} + 6$$

نکته مهم در این مثال این است که با عدد ثابت ۶ باید چه کنیم. اگر بخاطر داشته باشید، در جبر گفته شده است یک عدد ثابت، فقط یک چند جمله ای با درجه صفر است. پس حدس ما مطابق زیر است.

$$Y_p(t) = Ae^{7t} + B$$

$$(d) \quad g(t) = 6t^2 - 7 \sin(3t) + 9$$

اینجا، لازم است خیلی مواظب باشیم. باید یک حقه جبری بکار ببریم. اجازه دهید تابع را مطابق زیر باز نویسی کنیم.

$$g(t) = 6t^2 + 9 - 7 \sin(3t)$$

می بینید که فقط جای عدد ۹ را عوض کردیم. با این حقه، تابع به یک چند جمله ای درجه دوم و یک سینوس تبدیل شد. پس حدس ما برای این مثال مطابق زیر است.

$$Y_p(t) = At^2 + Bt + C + D \cos(3t) + E \sin(3t)$$

اگر این حقه جبری را بکار نمی بردیم، تابع به صورت جمع سه جمله می بود و حدس ما مطابق زیر می شد.

$$At^2 + Bt + C + D \cos(3t) + E \sin(3t) + G$$

در این صورت مانند قسمت اول این مثال دو جمله در دست داشتیم که در حقیقت یکی هستند، یعنی C و D و لازم است آنها را ادغام کنیم. در این صورت کار ما طولانی تر می شد.

$$(e) \quad g(t) = 10e^t - 5te^{-8t} + 2e^{-8t}$$

اینجا مجموع سه جمله داریم. اجازه دهید، یک حدس بنویسیم.

$$Ae^t + (Bt + C)e^{-8t} + De^{-8t}$$

اگر تابع نمایی جمله دوم را در ضریب آن ضرب کنیم ، دو جمله بدست می آوریم که در حقیقت یکی هستند به عبارت زیر نگاه کنید.

$$Ae^t + Bte^{-8t} + Ce^{-8t} + De^{-8t}$$

آیا جمله های سوم و چهارم یکی نیستند؟ در حقیقت هستند ، پس باید آنها را ادغام کنیم ، پس مثل این است که دو عملیات انجام داده ایم و باز به همان نقطه اول رسیده ایم. پس در این نوع موارد این کار بیهوده را انجام نمی دهیم. هنگامی که چنین اتفاقی می افتد ، آن جمله را حذف می کنیم ، پس حدس صحیح به صورت زیر است.

$$Y_p(t) = Ae^t + (Bt + C)e^{-8t}$$

$$(f) \quad g(t) = t^2 \cos t - 5t \sin t$$

اینجا دو جمله داریم بطوری که حدس ما بدون چند جمله ای جلو آنها ، یکی هستند. پس آن چند جمله ای با درجه بزرگ تر را در نظر می گیریم و آن دو جمله ای دیگر را ندیده می گذاریم. پس $5t$ را در نظر نمی گیریم و t^2 در نظر می گیریم. حالا چون t^2 درجه دوم است ، پس حدس ما به صورت زیر است.

$$Y_p(t) = (At^2 + Bt + C)\cos t + (Dt^2 + Et + F)\sin t$$

$$(g) \quad g(t) = 5e^{-3t} + e^{-3t} \cos(6t) - \sin(6t)$$

این آخرین ، شامل سه جمله است که باید برای جواب آنها حدس بزنیم. حدس زیر را ملاحظه کنید.

$$Y_p(t) = Ae^{-3t} + e^{-3t} (B \cos(6t) + C \sin(6t)) + D \cos(6t) + E \sin(6t)$$

می دانید که تنها جمله های هم نظیر را می توانیم با هم تلفیق کنیم. مثلاً می توانیم $2x + 3x$ را با هم تلفیق کنیم و بگوییم $2x + 3x = 5x$ اما نمی توانیم $2x + 3y$ را با هم تلفیق کنیم. پس ، نمی توانیم جمله اول و دوم را با هم تلفیق کنیم ، زیرا هم نظیر نیستند. همچنین نمی توان دو سینوس و کسینوس آخر را با سینوس و کسینوس جمله وسط را با هم تلفیق کنیم. زیرا سینوس و کسینوس وسط ، در یک تابع نمایی ضرب شده اند.

مثال ۹

یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل زیر پیدا کنید.

$$y'' - 4y' - 12y = e^{6t}$$

حل

می‌گویید این مثال خیلی ساده و پیش پا افتاده است، و بعد از حل این همه مثال، به راحتی می‌توانیم جواب خصوصی را پیدا کنیم. مثلاً می‌گویید $g(t)$ یک تابع توانی است. این مثال را به این علت آوردیم، تا نشان دهیم چرا تا کنون اصرار داشته ایم که اول جواب عمومی را پیدا کنید و بعد جواب خصوصی را پیدا کنید. پس اجازه دهید اول یک جواب عمومی پیدا کنیم. آن جواب عمومی می‌تواند مطابق زیر باشد.

$$y_c(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{6t}$$

حالا، بدون این که نگران جواب عمومی باشیم، اجازه دهید یک جواب خصوصی پیدا کنیم. مشکلی نداریم. به راحتی می‌گوییم جواب خصوصی مطابق زیر است.

$$Y_p(t) = Ae^{6t}$$

این را در معادله دیفرانسیل می‌گذاریم.

$$36Ae^{6t} - 24Ae^{6t} - 12Ae^{6t} = e^{6t}$$

$$0 = e^{6t}$$

وای! چه شد؟ مثل این که یک جایی اشتباه شده. $e^{6t} = 0$ می‌دانیم که تابع نمایی هرگز صفر نمی‌شود. پس اشتباه در کجا است؟ به جواب عمومی که در بالا بدست آوردیم، نگاه کنید. جمله دوم، عیناً مانند جواب خصوصی ما است. بخاطر بیاورید که گفتیم، هر دو قسمت جواب عمومی، جواب‌های معادله دیفرانسیل همگن زیر هستند.

$$y'' - 4y' - 12y = 0$$

این یعنی، جواب خصوصی که بدست آوردیم، در حقیقت جواب معادله دیفرانسیل همگن است. پس باید جواب خصوصی را به صورت زیر باز نویسی کنیم.

$$Y_p(t) = Ate^{6t}$$

حالا، این حدس را در معادله دیفرانسیل می‌گذاریم، پس داریم.

$$(12Ae^{6t} + 36Ate^{6t}) - 4(Ae^{6t} + 6Ate^{6t}) - 12Ate^{6t} = e^{6t}$$

$$(36A - 24A - 12A)te^{6t} + (12A - 4A)e^{6t} = e^{6t}$$

$$8Ae^{6t} = e^{6t}$$

حالا، می‌توانیم A را پیدا کنیم.

$$8A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{8}$$

و در نهایت ، جواب خصوصی به صورت زیر است.

$$Y_p(t) = \frac{t}{8} e^{6t}$$

حالا ، متوجه شدید که چرا اصرار داشتیم ، اول جواب عمومی را پیدا کنید . و بعد به پیدا کردن جواب خصوصی بپردازید .

مثال ۱۰

جواب خصوصی معادله های زیر را بنویسید . لازم نیست ضریب ها را پیدا کنید.

(a) $y'' + 3y' - 28y = 7t + e^{-7t} - 1$

(b) $y'' - 100y = 9t^2 e^{10t} + \cos t - t \sin t$

(c) $4y'' + y = e^{-2t} \sin\left(\frac{t}{2}\right) + 6t \cos\left(\frac{t}{2}\right)$

(d) $4y'' + 16y' + 17y = e^{-2t} \sin\left(\frac{t}{2}\right) + 6t \cos\left(\frac{t}{2}\right)$

(e) $y'' + 8y' + 16y = e^{-4t} + (t^2 + 5)e^{-4t}$

حل

توضیح و چک کردن جواب عمومی را به عهده خود شما می گذاریم . امید است بتوانید این کار را انجام دهید . کافی است جواب عمومی و خصوصی را با هم مقایسه کنید و ببینید آیا جمله های هم نظیر در هر دو یافت می شود یا خیر.

(a) $y'' + 3y' - 28y = 7t + e^{-7t} - 1$

جمله عمومی به صورت زیر است.

$$y_c(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-7t}$$

بخاطر بیاورید که در یکی از مثال های بالا یک عدد ثابت را کنار چند جمله ای قرار دادیم . این جا هم ۱- را کنار $7t$ می گذاریم . به این طریق یک دو جمله ای $7t - 1$ بدست می آوریم . پس جواب خصوصی به صورت زیر حدس می زنیم.

$$Y_p(t) = At + B + Ce^{-7t}$$

ملاحظه می کنید که آخرین جمله جواب خصوصی مانند آخرین جمله عمومی است ، اما دو جمله دیگر مشکلی ایجاد نمی کنند . پس یک t به آخرین جمله خصوصی که حدس زده بودیم ، اضافه می کنیم . لذا جواب خصوصی اصلاح شده به صورت زیر است.

$$Y_p(t) = At + B + Cte^{-7t}$$

$$(b) \quad y'' - 100y = 9t^2 e^{10t} + \cos t - t \sin t$$

جواب عمومی به صورت زیر است

$$y_c(t) = c_1 e^{10t} + c_2 e^{-10t}$$

حدس ما برای جواب خصوصی به صورت زیر است.

$$Y_p(t) = (At^2 + Bt + C)e^{10t} + (Et + F)\cos t + (Gt + H)\sin t$$

ملاحظه می کنید ، اگر تابع نمایی را در پیرانتز ضرب کنیم ، یکی از جمله هایی که بدست می آید Ce^{10t} بدست می آید که مانند آن در جواب عمومی داریم. پس تمام جمله را در t ضرب می کنیم. لذا حدس صحیح به صورت زیر است.

$$Y_p(t) = t(At^2 + Bt + C)e^{10t} + (Et + F)\cos t + (Gt + H)\sin t$$

$$(c) \quad 4y'' + y = e^{-2t} \sin\left(\frac{t}{2}\right) + 6t \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

جواب عمومی به صورت زیر است.

$$y_c(t) = c_1 \cos\left(\frac{t}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

اولین حدس ما برای جواب خصوصی به صورت زیر است.

$$Y_p(t) = e^{-2t} \left(A \cos\left(\frac{t}{2}\right) + B \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right) + (Ct + D) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + (Et + F) \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

در این حالت ، جمله دوم و سوم ، شبیه جواب عمومی است. پس جمله دوم و سوم را در t ضرب می کنیم. لذا حدس صحیح برای جواب خصوصی به صورت زیر است.

$$Y_p(t) = e^{-2t} \left(A \cos\left(\frac{t}{2}\right) + B \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right) + t(Ct + D) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + t(Et + F) \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$(d) \quad 4y'' + 16y' + 17y = e^{-2t} \sin\left(\frac{t}{2}\right) + 6t \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

ملاحظه می کنید که در این مثال $g(t)$ همان $g(t)$ در قسمت c است. سمت چپ معادله را تغییر دادیم. اینجا ، جواب عمومی به صورت زیر است.

$$y_c(t) = c_1 e^{-2t} \cos\left(\frac{t}{2}\right) + c_2 e^{-2t} \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

اولین حدس ما برای جواب خصوصی به صورت زیر است.

$$Y_p(t) = e^{-2t} \left(A \cos\left(\frac{t}{2}\right) + B \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right) + (Ct + D) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + (Et + F) \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

در این حالت جمله اول مشکل ساز است. در حقیقت جمله اول جواب خصوصی، عینا مانند جواب عمومی است. پس t را در جمله اول ضرب می کنیم. لذا حدس صحیح به صورت زیر است.

$$Y_p(t) = te^{-2t} \left(A \cos\left(\frac{t}{2}\right) + B \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right) + (Ct + D) \cos\left(\frac{t}{2}\right) + (Et + F) \sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$(e) \quad y'' + 8y' + 16y = e^{-4t} + (t^2 + 5)e^{-4t}$$

جواب عمومی به صورت زیر است.

$$y_c(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t}$$

ملاحظه می کنید هر دو جمله یکی هستند، بجز، جمله دوم یک t دارد. پس این یعنی، باید به جمله ای نگاه کنیم که درجه چند جمله ای آن بیشتر است. اولین حدس ما برای جواب خصوصی به صورت زیر است.

$$Y_p(t) = (At^2 + Bt + C)e^{-4t}$$

حالا، اگر تابع نمایی را در پرانتز ضرب کنیم، دو جمله آخر، همان جواب عمومی خواهد بود. پس همه را در t ضرب می کنیم. حدس دوم ما به صورت زیر است.

$$Y_p(t) = t(At^2 + Bt + C)e^{-4t}$$

باز هم به مشکل با خورد می کنیم. اگر تابع نمایی را در بقیه ضرب کنیم، جمله آخر در جواب عمومی هم هست. پس یک t دیگر هم اضافه می کنیم.

$$Y_p(t) = t^2(At^2 + Bt + C)e^{-4t}$$

حالا اگر ضرب کنیم، هیچ کدام از جمله ها در جواب عمومی نیستند.

بخش ۳.۱۰ روش تغییر پارامترها Variation of Parameters

در بخش قبل، در مورد روش ضریب های نا معین، جهت پیدا کردن یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر صحبت کردیم.

$$p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = g(t) \quad (1)$$

و دیدیم که این روش، معادله را به یک مساله جبری تبدیل کرد، اما گاهی جبر می تواند پیچیده و درد سر ساز بشود. علاوه بر این، روش ضریب های نا معین، فقط در مورد یک گروه کوچکی از تابع ها، کار می کرد.

روش تغییر پارامترها، خیلی جامع تر است و می تواند در حالت های مختلفی بکار برده شود. اما این روش، دو نقطه ضعف دارد. یکی این که، جواب عمومی، برای استفاده از این روش، کاملاً ضروری است. می دانید که در روش ضریب های نا معین، جواب عمومی کاملاً ضروری نبود، بلکه توصیه می شد که آنرا پیدا کنیم. دومین نقطه ضعف روش تغییر پارامترها این است که، لازم می شود، چندین مرتبه انتگرال بگیریم و گاهی پیش می آید که انتگرال گرفتن ممکن نیست. ابتدا باید قبول کنیم که جواب عمومی معادله (۱) به صورت زیر است.

$$y_c(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

همچنین بخاطر بیاورید که y_c جواب کلی معادله دیفرانسیل همگن زیر است.

$$p(t)y'' + q(t)y' + r(t)y = 0 \quad (2)$$

همچنین بخاطر بیاورید که $y_1(t)$ و $y_2(t)$ یک مجموعه اساسی جواب ها هستند. کاری که می خواهیم انجام دهیم، این است که ببینیم آیا می توانیم دو تابع $u_1(t)$ و $u_2(t)$ پیدا کنیم، بطوری که

$$Y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

یک جواب (۱) باشد. اینجا دو مجهول داریم و در نهایت به دو معادله احتیاج داریم. یک معادله آسان است. جواب پیشنهادی ما باید معادله دیفرانسیل را برقرار کند، پس اولین جواب را با جانشین کردن جواب پیشنهادی خود در معادله دیفرانسیل، بدست می آوریم. جواب دوم به طرق مختلف می توان بدست آورد. دومین جواب را با حدس و گمان بدست می آوریم. این، کار ما را آسان تر می کند. در این مورد، بیشتر صحبت خواهیم کرد. پس، اجازه دهید شروع کنیم. اگر می خواهیم جواب پیشنهادی خود را در معادله دیفرانسیل بگذاریم، به چند مشتق احتیاج داریم. پس چه بهتر که این کار را حالا انجام دهیم. اولین مشتق به صورت زیر است.

$$Y_p'(t) = u_1' y_1 + u_1 y_1' + u_2' y_2 + u_2 y_2'$$

برای این که کار با مشتق اول آسان تر باشد، فرض می کنیم، $u_1(t)$ و $u_2(t)$ هر چه باشند، معادله زیر را برقرار می کنند.

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0 \quad (3)$$

دلیلی وجود ندارد که تصور کنیم، چنین باشد. اما، خواهیم دید که کار می کند. تنها فرض می کنیم که انشا الله مشکلی پیش نیاید. با این فرض، اولین مشتق به صورت زیر است.

$$Y'_p(t) = u_1 y'_1 + u_2 y'_2$$

دومین مشتق هم به صورت زیر است.

$$Y''_p(t) = u'_1 y'_1 + u_1 y''_1 + u'_2 y'_2 + u_2 y''_2$$

جواب و مشتق های آن را ، در شماره (۱) می گذاریم.

$$p(t)(u'_1 y'_1 + u_1 y''_1 + u'_2 y'_2 + u_2 y''_2) + q(t)(u_1 y'_1 + u_2 y'_2) + r(t)(u_1 y_1 + u_2 y_2) = g(t)$$

کمی باز نویسی انجام می دهیم ، پس داریم.

$$p(t)(u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2) + u_1(t)(p(t)y''_1 + q(t)y'_1 + r(t)y_1) +$$

$$u_2(t)(p(t)y''_2 + q(t)y'_2 + r(t)y_2) = g(t)$$

حالا ، هم $y_1(t)$ و هم $y_2(t)$ جوابهای (۲) هستند ، پس جمله دوم و سوم صفر هستند. پس باز نویسی مجدد ، رابطه زیر را بدست می آوریم.

$$p(t)(u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2) + u_1(t)(0) + u_2(t)(0) = g(t)$$

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = \frac{g(t)}{p(t)} \quad (4)$$

دو سؤال پیش می آید که باید جواب دهیم. قبل از ادامه دادن ، بر می گردیم و یک فرض دیگر می کنیم. معادله آخر یعنی (۴) همان است که می خواهیم. اما برای این که کار ما آسان تر باشد ، فرض می کنیم $p(t) = 1$ باشد.

به عبارت دیگر می خواهیم به عقب برگردیم و با معادله دیفرانسیل شروع به کار کنیم.

$$y'' + q(t)y' + r(t)y = g(t)$$

اگر ضریب مشتق دوم یک نیست ، آنرا تقسیم می کنیم ، تا یک بشود. فرمولی که می خواهیم بدست آوریم ، این فرض را لازم دارد. با این فرض ، دو معادله ای که می خواهیم برای مجهول ها ، حل کنیم ، به صورت زیر هستند.

$$u'_1 y_1 + u'_2 y_2 = 0 \quad (5)$$

$$u'_1 y'_1 + u'_2 y'_2 = g(t) \quad (6)$$

ملاحظه می کنید که در این سیستم ، دو جواب ها را می دانیم ، پس تنها دو مجهول ما u'_1 و u'_2 هستند. حل این سیستم کاملاً آسان است. اول (۵) را برای u'_1 حل می کنیم و در (۶) قرار می دهیم و سپس ساده می کنیم.

$$u'_1 = -\frac{u'_2 y_2}{y_1} \quad (7)$$

$$\left(-\frac{u'_2 y_2}{y_1}\right)y'_1 + u'_2 y'_2 = g(t)$$

$$u_2' \left(y_2' - \frac{y_2 y_1'}{y_1} \right) = g(t)$$

$$u_2' \left(\frac{y_1 y_2' - y_2 y_1'}{y_1} \right) = g(t)$$

$$u_2' = \frac{y_1 g(t)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \quad (8)$$

پس حالا یک عبارت برای u_2' داریم. در شماره (۷) می گذاریم. تا عبارتی برای u_1' پیدا کنیم.

$$u_1' = -\frac{y_2 g(t)}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \quad (9)$$

حالا ، توجه کنید که

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' \neq 0$$

بخاطر بیاورید که $y_1(t)$ و $y_2(t)$ مجموعه جوابهای اساسی هستند و می دانیم که رانسکین صفر نخواهد بود.

در نهایت آنچه که باید انجام دهیم ، این است که از (۸) و (۹) انتگرال بگیریم تا مشخص کنیم $u_1(t)$ و $u_2(t)$ چه هستند.

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt \quad u_2(t) = \int \frac{y_1 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt$$

پس ، در صورتی که بتوانیم این انتگرال ها را انجام دهیم ، یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$Y_p(t) = y_1 u_1 + y_2 u_2$$

$$= -y_1 \int \frac{y_2 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt + y_2 \int \frac{y_1 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt$$

پس اجازه دهید ، مطالب بالا را خلاصه کنیم.

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$y'' + q(t)y' + r(t)y = g(t)$$

فرض کنید $y_1(t)$ و $y_2(t)$ مجموعه اساسی جوابهای معادله زیر باشند.

$$y'' + q(t)y' + r(t)y = 0$$

پس یک جواب خصوصی برای معادله دیفرانسیل نا همگن به صورت زیر است.

$$Y_p(t) = -y_1 \int \frac{y_2 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt + y_2 \int \frac{y_1 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt$$

قبل از پرداختن به چند مثال، اجازه دهید ابتدا به موضوع اعداد ثابت انتگرال بپردازیم که هنگام انتگرال گیری بدست می آید. به انتگرال زیر و اعداد ثابت که بوجود می آید توجه کنید.

$$Y_p(t) = -y_1 \left(\int \frac{y_2 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt + c \right) + y_2 \left(\int \frac{y_1 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt + k \right) \\ = -y_1 \int \frac{y_2 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt + y_2 \int \frac{y_1 g(t)}{W(y_1, y_2)} dt + (-cy_1 + ky_2)$$

آخرین کمیت داخل پرانتزها، همان جواب عمومی هستند، با $c_1 = c$ و $c_2 = k$ و می دانید که اگر آنها را در معادله دیفرانسیل بگذاریم، پس از ساده کردن، صفر بدست می آوریم. زیرا جواب عمومی همان جواب معادله دیفرانسیل همگن است. به عبارت دیگر، این جمله ها چیزی به جواب خصوصی اضافه نمی کنند، پس آنها را نادیده می انگاریم. پس فرض می کنیم $c = 0$ و $k = 0$ است. آخرین توصیه ما این است که نگران دو جواب در جواب عمومی نباشید، که کدام $y_1(t)$ است و کدام $y_2(t)$ مهم نیست.

مثال ۱

یک جواب کلی برای معادله دیفرانسیل زیر پیدا کنید.

$$2y'' + 18y = 6 \tan(3t)$$

حل

چون برای استفاده از روش تغییر پارامترها، لازم است ضریب مشتق دوم، یک باشد، پس طرفین را بر ۲ تقسیم می کنیم. پس معادله دیفرانسیلی که باید حل کنیم، به صورت زیر است.

$$y'' + 9y = 3 \tan(3t)$$

جواب عمومی معادله بالا به طریق زیر بدست می آوریم. به بخش حل معادله همگن مراجعه کنید.

$$r^2 + 9 = 0$$

$$r^2 = -9$$

$$r = \pm 3i$$

$$y(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)$$

پس داریم

$$y_1(t) = \cos(3t)$$

$$y_2(t) = \sin(3t)$$

رانسکین این دو تابع به صورت زیر است.

$$W = \begin{vmatrix} \cos(3t) & \sin(3t) \\ -3\sin(3t) & 3\cos(3t) \end{vmatrix} = 3\cos^2(3t) + 3\sin^2(3t) = 3$$

پس جواب خصوصی مطابق زیر است.

$$\begin{aligned}
 Y_p(t) &= -\cos(3t) \int \frac{3 \sin(3t) \tan(3t)}{3} dt + \sin(3t) \int \frac{3 \cos(3t) \tan(3t)}{3} dt \\
 &= -\cos(3t) \int \frac{\sin^2(3t)}{\cos(3t)} dt + \sin(3t) \int \sin(3t) dt \\
 &= -\cos(3t) \int \frac{1 - \cos^2(3t)}{\cos(3t)} dt + \sin(3t) \int \sin(3t) dt \\
 &= -\cos(3t) \int \sec(3t) - \cos(3t) dt + \sin(3t) \int \sin(3t) dt \\
 &= -\frac{\cos(3t)}{3} (\ln |\sec(3t) + \tan(3t)| - \sin(3t)) + \frac{\sin(3t)}{3} (-\cos(3t)) \\
 &= -\frac{\cos(3t)}{3} \ln |\sec(3t) + \tan(3t)|
 \end{aligned}$$

و در نهایت ، جوان کلی به صورت زیر است.

$$y(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t) - \frac{\cos(3t)}{3} \ln |\sec(3t) + \tan(3t)|$$

مثال ۲

یک جواب کلی برای معادله دیفرانسیل زیر پیدا کنید.

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2 + 1}$$

حل

ابتدا ، به جواب عمومی احتیاج داریم.

$$\begin{aligned}
 r^2 - 2r + 1 &= 0 \\
 (r - 1)^2 &= 0 \\
 r_1, r_2 &= 1
 \end{aligned}$$

ملاحظه می کنید که ریشه های مکرر داریم. پس بر اساس آنچه در بخش ۳.۴ دیدیم ، جواب عمومی مطابق زیر است.

$$y_c(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

پس داریم

$$y_1(t) = e^t \quad y_2(t) = t e^t$$

رانسکین این دو تابع مطابق زیر است.

$$W = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & e^t + te^t \end{vmatrix} = e^t(e^t + te^t) - e^t(te^t) = e^{2t}$$

پس جواب خصوصی مطابق زیر است.

$$\begin{aligned} Y_p(t) &= -e^t \int \frac{te^t e^t}{e^{2t}(t^2+1)} dt + te^t \int \frac{e^t e^t}{e^{2t}(t^2+1)} dt \\ &= -e^t \int \frac{t}{t^2+1} dt + te^t \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= -\frac{1}{2}e^t \ln(1+t^2) + te^t \tan^{-1}(t) \end{aligned}$$

و در نهایت جواب کلی مطابق زیر است.

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t - \frac{1}{2} e^t \ln(1+t^2) + te^t \tan^{-1}(t)$$

این روش را می توان برای معادله های دیفرانسیل با ضریب های غیر ثابت بکار برد ، در صورتی که مجموعه اساسی جوابهای معادله دیفرانسیل همگن مرتبط را بدانیم.

مثال ۳

جواب کلی معادله زیر را پیدا کنید.

$$ty'' - (t+1)y' + y = t^2$$

در صورتی که داشته باشیم.

$$y_1(t) = e^t \quad y_2(t) = t+1$$

حل

مانند مثال اول ، باید طرفین را بر t تقسیم کنیم تا ضریب مشتق درجه دوم ، یک بشود.

$$y'' - \left(1 + \frac{1}{t}\right)y' + \frac{1}{t}y = t$$

رانسکین برای مجموعه اساسی جوابها مطابق زیر است.

$$W = \begin{vmatrix} e^t & t+1 \\ e^t & 1 \end{vmatrix} = e^t - e^t(t+1) = -te^t$$

جواب خصوصی مطابق زیر است.

$$\begin{aligned}
 Y_p(t) &= -e^t \int \frac{(t+1)t}{-te^t} dt + (t+1) \int \frac{e^t(t)}{-te^t} dt \\
 &= e^t \int (t+1)e^{-t} dt - (t+1) \int dt \\
 &= e^t (-e^{-t}(t+2)) - (t+1)t \\
 &= -t^2 - 2t - 2
 \end{aligned}$$

و در نهایت جواب کلی این معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 (t+1) - t^2 - 2t - 2$$

جواب مثال ۳ را می توان به طریق زیر ساده کرد.

$$\begin{aligned}
 y(t) &= c_1 e^t + c_2 (t+1) - t^2 - 2t - 2 \\
 &= c_1 e^t + c_2 (t+1) - t^2 - 2(t+1) \\
 &= c_1 e^t + (c_2 - 2)(t+1) - t^2
 \end{aligned}$$

می دانید که چون c_2 یک عدد ثابت ناشناخته است، پس اگر ۲ را از آن کم کنیم، باز تغییری حاصل نمی شود. پس می توانیم بجای $c_2 - 2$ بنویسیم c_2 ، پس شکل ساده شده جواب مثال ۳ به صورت زیر است.

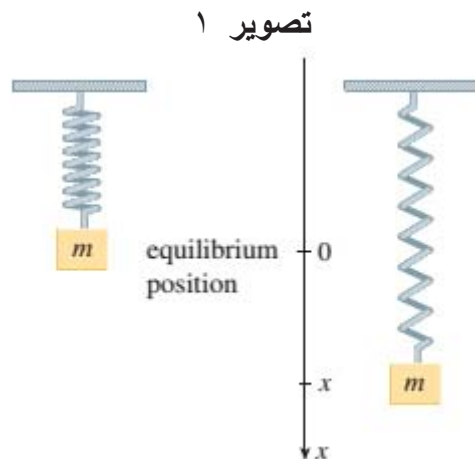
$$y(t) = c_1 e^t + c_2 (t+1) - t^2$$

بخش ۳.۱۱ ارتعاش های مکانیکی Mechanical Vibrations

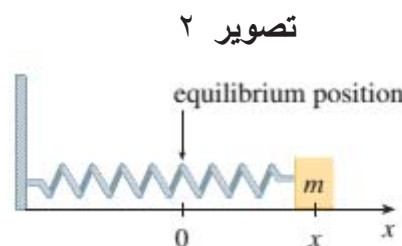
معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم، کار برد های زیادی در علم و مهندسی دارد. در این بخش به دو مورد آن می پردازیم.

ارتعاش فنر ها Vibrating Springs

ابتدا در مورد حرکت یک شئی با جرم m در انتهای یک فنر صحبت می کنیم. این فنر می تواند عمودی باشد، مانند تصویر ۱



و یا روی یک سطح افقی باشد، مانند تصویر ۲



بر اساس قانون هوک Hooke's Law اگر یک فنر به اندازه x واحد از طول طبیعی آن، کشیده یا فشرده شود، پس نیرویی اعمال می کند که متناسب است با x .

$$-kx = \text{نیروی برگشت دهنده}$$

$$F = -kx$$

در فرمول بالا $k > 0$ ضریب ثابت فنر Spring Constant نامیده می شود. اگر نیرو های خارجی را نادیده انگاریم، پس بر اساس قانون دوم حرکت نیوتن داریم.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{یا} \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0 \quad (1)$$

فرمول شماره (۱) یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم است. معادله کمکی آن $mr^2 + k = 0$

است. و ریشه آن $r = \pm \omega i$ است. اینجا $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ است. پس، جواب کلی مطابق زیر است.

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)$$

توجه دارید که اینجا t متغیر مستقل و x متغیر وابسته. همچنین در بخش ۳.۳ بجای ω نماد μ

بکار بردیم. مهم نیست که یک متغیر را با چه نمادی بنویسیم. معادله بالا را می توان به صورت زیر هم نوشت.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \delta)$$

اینجا $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ فرکانس یا نوسان است و $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ دامنه نوسان یا میدان نوسان است.

$$\cos \delta = \frac{c_1}{A} \quad \sin \delta = -\frac{c_2}{A}$$

و δ زاویه گام Phase Angle است.

این نوع حرکت، حرکت هارمونیکی ساده Simple Harmonic Motion نامیده می شود.

مثال ۱

یک فنر با یک جسم به جرم ۲ کیلو گرم، دارای طول طبیعی ۵/۰ متر است. یک نیروی ۲۵/۶ نیوتن لازم است تا فنر را به طول ۷/۰ متر برساند. اگر فنر تا طول ۷/۰ متر کشیده شده باشد و سپس با سرعت اولیه صفر رها شود، مکان جرم در هر زمان t را پیدا کنید.

حل

بر اساس قانون هوک، نیروی لازم برای کشیدن فنر

$$k(0.2) = 25.6$$

$$k = \frac{25.6}{0.2} = 128$$

با استفاده از این مقدار ضریب ثابت فنر، همراه با $m = 2$ در معادله (۱) داریم.

$$2 \frac{d^2 x}{dt^2} + 128x = 0$$

چون داریم

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{128}{2}} = 8$$

پس جواب این معادله مطابق زیر است.

$$x(t) = c_1 \cos 8t + c_2 \sin 8t \quad (2)$$

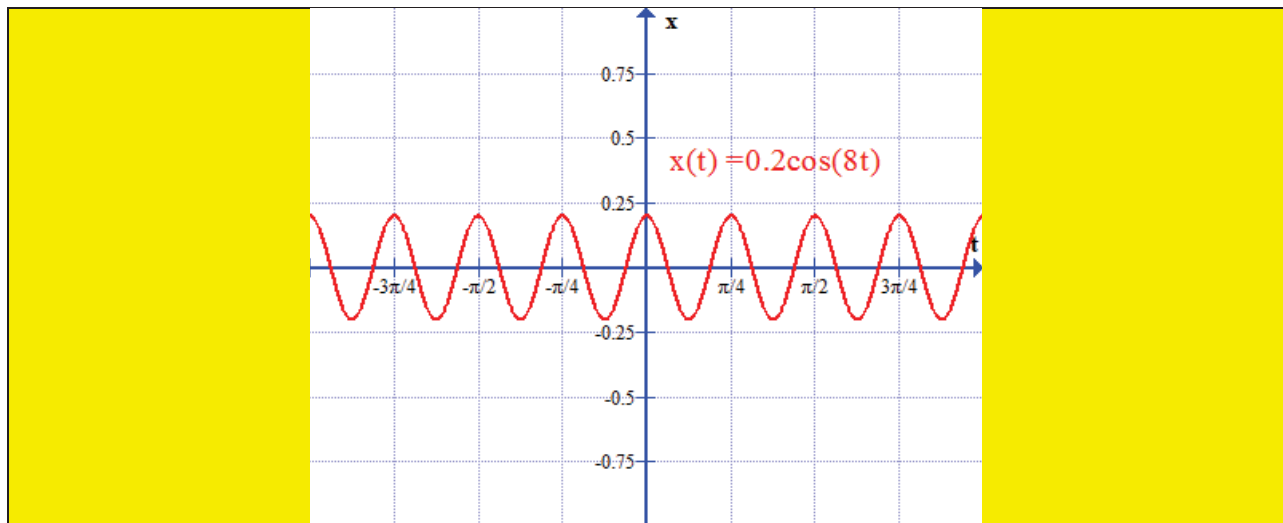
چون شرط اولیه داریم $x(0) = 0.2$ اما بر اساس معادله (۲) داریم $x(0) = c_1$ پس $c_1 = 0.2$ است. از معادله دوم، مشتق می گیریم. پس داریم.

$$x'(t) = -8c_1 \sin 8t + 8c_2 \cos 8t$$

چون سرعت اولیه صفر است، یعنی $x'(0) = 0$ پس $c_2 = 0$ است و در نهایت جواب مطابق زیر است.

$$x(t) = \frac{1}{5} \cos 8t$$

این هم نمودار



ارتعاش های میرایی Damped Vibrations

بحث بعدی ، حرکت یک فنر که در معرض یک نیروی اصطکاک است ، مانند تصویر ۲ بالا ، یا در معرض یک نیروی مرطوب ، مانند تصویر ۳ که یک فنر در یک مایع حرکت می کند.

تصویر ۳



کمک فنر اتومبیل یا دو چرخه مثال خوبی است برای نیروی میرایی، تصویر ۴

تصویر ۴



توضیح: نیروی میرایی *Damping Force* در فیزیک خاصیتی که باعث کاهش دامنه نوسان در سیستم های نوسانی می شود.

فرض می کنیم نیروی میرایی متناسب است با سرعت جرم ، و در جهت مخالف حرکت ، عمل می کند.

$$\text{نیروی میرایی} = -c \frac{dx}{dt}$$

در فرمول بالا $c > 0$ ضریب ثابت میرایی **Damping Constant** نامیده می شود. پس در این حالت قانون دوم حرکت نیوتن می شود.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - c \frac{dx}{dt} \quad \text{نیروی برگشت دهنده} + \text{نیروی میرایی}$$

یا

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (3)$$

توجه: نیروی برگشت دهنده *Restoring Force* نیرویی است که یک جسم کشسانی ، سعی می کند به حالت اولیه برگردد .

معادله (۳) یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم است و معادله کمکی آن $mr^2 + cr + k = 0$ است. و ریشه های آن

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad (4)$$

است. لازم است سه حالت را بررسی کنیم.

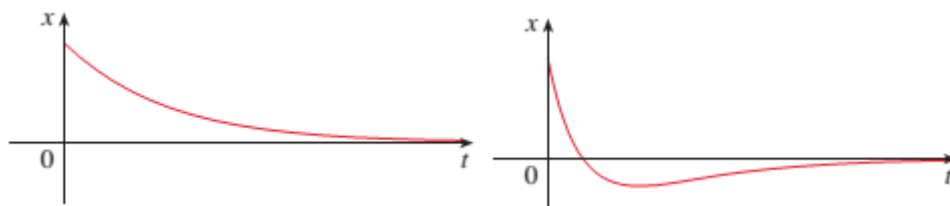
حالت اول: $c^2 - 4mk > 0$ فوق میرایی **Overdamping**

در این حالت r_1 و r_2 دارای ریشه های حقیقی متمایز هستند، و

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

چون c, m, k همه ، مثبت هستند ، پس داریم $\sqrt{c^2 - 4mk} < c$ لذا ریشه های r_1, r_2 در شماره (۴) هر دو باید منفی باشند. این نشان می دهد $x \rightarrow 0$ هنگامی که $t \rightarrow \infty$ نمونه نمودار این حالت در تصویر ۵ ملاحظه می کنید.

تصویر ۵



ملاحظه می کنید در این حالت ، نوسان اتفاق نمی افتد. علت این است که $c^2 > 4mk$ است ، یعنی نیروی میرایی زیادی وجود دارد. به عبارت دیگر روغن زیاد چسبنده است و یا گریس وجود دارد ، در مقابل فنر ضعیف است یا جرم کوچک است .

حالت دوم: $c^2 - 4mk = 0$ میرایی بحرانی در این حالت ریشه های مساوی وجود دارد.

$$r_1 = r_2 = -\frac{c}{2m}$$

این هم مانند حالت اول است. نمودار هم شبیه تصویر ۵ است. اما نیروی میرایی فقط به اندازه ای است که نوسان را از بین ببرد. کوچک ترین پایین آمدن چسبندگی، سبب ارتعاش بعدی می شود.

حالت سوم $c^2 - 4mk < 0$: زیر میرایی اینجا، ریشه ها مختلط هستند.

$$\left. \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{c}{2m} \pm \omega i$$

اینجا

$$\omega = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}$$

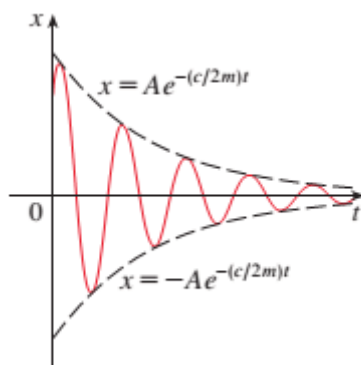
است. جواب مطابق زیر است.

$$x = e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$$

ملاحظه می شود که نوسان وجود دارد و با فاکتور $e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}$ میرا می شود. چون $c > 0$ و $m > 0$

است، پس $-\left(\frac{c}{2m}\right) < 0$ است و لذا $e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} \rightarrow 0$ هنگامی که $t \rightarrow \infty$ این یعنی $x \rightarrow 0$ هنگامی که $t \rightarrow \infty$ یعنی حرکت از بین می رود و صفر می شود، هنگامی که زمان افزایش پیدا می کند. نمونه نمودار در تصویر ۶

تصویر ۶



مثال ۲

فرض کنید فنر مثال ۱ در یک مایع با ضریب ثابت $c = 4$ کاملاً فرو رفته است. مطلوب است مکان جرم در زمان t اگر از حالت تعادل شروع کند و به آن فشاری وارد شود که با یک سرعت اولیه $6/0$ متر در ثانیه شروع به حرکت کند.

حل

بر اساس مثال ۱ جرم $m = ۲$ است و ضریب ثابت فنر $k = ۱۲۸$ است، پس معادله ۳ به صورت زیر است.

$$۲ \frac{d^2 x}{dt^2} + ۴۰ \frac{dx}{dt} + ۱۲۸x = 0$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + ۲۰ \frac{dx}{dt} + ۶۴x = 0$$

معادله کمکی داریم.

$$r^2 + ۲۰r + ۶۴ = (r + ۴)(r + ۱۶) = 0$$

$$r_1 = -۴, \quad r_2 = -۱۶$$

پس حرکت فوق میرایی Overdamped است. و جواب به صورت زیر است.

$$x(t) = c_1 e^{-۴t} + c_2 e^{-۱۶t}$$

داده شده است که $x(0) = 0$ پس $c_1 + c_2 = 0$ است. از جواب بالا مشتق می گیریم.

$$x'(t) = -۴c_1 e^{-۴t} - ۱۶c_2 e^{-۱۶t}$$

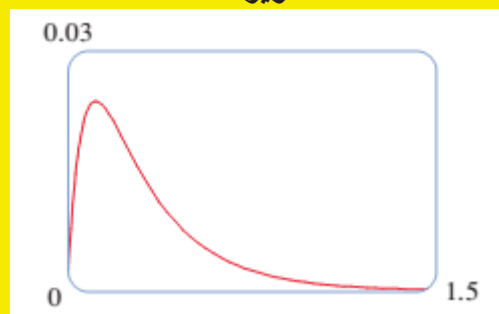
$$x'(0) = -۴c_1 - ۱۶c_2 = ۰/۶$$

چون $c_1 = c_2$ است، پس داریم $۱۲c_1 = ۰/۶$ و یا $c_1 = ۰/۰۵$ لذا

$$x = ۰/۰۵ (e^{-۴t} - e^{-۱۶t})$$

تصویر ۷

تصویر ۷



ارتعاش های اجباری Forced Vibrations

فرض کنید علاوه بر نیروی برگشت دهنده Restoring Force و نیروی میرا، یک نیروی خارجی $F(t)$ هم روی فنر، عمل می کند. پس قانون دوم حرکت نیوتن می شود.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \text{نیروی خارجی} + \text{نیروی میرایی} + \text{نیروی برگشت دهنده}$$

$$= -kx - c \frac{dx}{dt} + F(t)$$

پس ، بجای معادله همگن ۳ ، حرکت فنر از معادله دیفرانسیل نا همگن زیر پیروی می کند.

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad (5)$$

یک نوع متداول نیروی خارجی ، یک تابع نیروی متناوب است.

$$F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$$

است ، اینجا

$$\omega_0 \neq \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

است. در این حالت ، و در غیاب یک نیروی میرا ($c = 0$) داریم.

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega_0 t \quad (6)$$

اثبات فرمول ۶

چون گفته شده است نیروی میرا یعنی $c = 0$ است ، پس جمله دوم معادله (۵) صفر است. و اگر همان طور که در بالا گفته شد

$$F(t) = F_0 \cos \omega_0 t$$

باشد

پس معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$mx'' + kx = F_0 \cos \omega_0 t \quad , \quad \omega_0 \neq \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

پس ، معادله کمکی $mr^2 + k = 0$ است. و ریشه ها به صورت زیر هستند.

$$\text{ریشه ها} = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i = \pm \omega i$$

پس $x_c(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$ است. و چون $\omega_0 \neq \omega$ است ، فرض می کنیم

$$x_p(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$$

باشد. پس لازم است

$$(m)(-\omega_0^2)(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) + k(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) = F_0 \cos \omega_0 t$$

یا

$$A(k - m\omega_0^2) = F_0 \quad \text{و} \quad B(k - m\omega_0^2) = 0$$

لذا

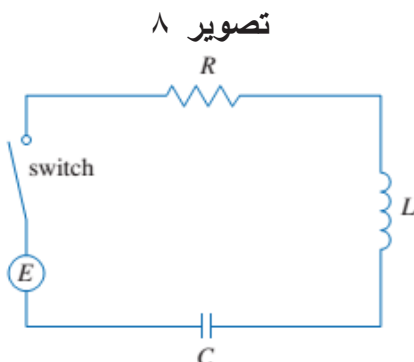
$$B = 0 \quad \text{و} \quad A = \frac{F_0}{k - m\omega_0^2} = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad \text{زیرا} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

پس ، حرکت جرم بر اساس فرمول زیر است.

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \cos \omega_0 t$$

مدارهای برقی Electric Circuits

مدار در تصویر ۸ را ملاحظه کنید.



این مدار شامل یک نیروی الکترو موتور E که ممکن است یک باتری و یا یک جنراتور باشد، یک مقاوم یا رئوستا R

یک القاگر L و یک خازن C به صورت سری. اگر $Q = Q(t)$ بار خازن در زمان t باشد، پس جریان، میزان تغییر Q نسبت به t است، یعنی $I = \frac{dQ}{dt}$ بر اساس آنچه در فیزیک خوانده ایم، افت ولتاژ در مقاوم، القاگر و خازن، به ترتیب به صورت زیر است.

$$RI \quad L \frac{dI}{dt} \quad \frac{Q}{C}$$

قانون ولتاژ کرش هف Kirchhoff's Voltage Law می گوید

مجموع افت این ولتاژ ها مساوی ولتاژ منبع است. یا به عبارت دیگر جمع جبری جریان هایی که به یک مدار وارد می شود یا از آن خارج می شود، برابر صفر است. یعنی

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t)$$

چون $I = \frac{dQ}{dt}$ است، پس داریم.

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t) \quad (۷)$$

معادله (۷) یک معادله خطی مرتبه دوم است با ضرایب های ثابت. اگر شارژ Q_0 و جریان I_0 را در زمان $t = 0$ بدانیم، پس شرایط اولیه زیر را داریم.

$$Q(0) = Q_0 \quad Q'(0) = I(0) = I_0$$

و مساله با مقدار اولیه، با روش هایی که در همین فصل دیده ایم، حل می کنیم.

باتوجه به این حقیقت که $I = \frac{dQ}{dt}$ است، پس با مشتق گرفتن از معادله (۷) داریم.

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = E'(t)$$

مثال ۳

با توجه به تصویر ۸، مطلوب است شارژ و جریان در زمان t اگر $R = 4 \Omega$ و $L = 1 H$ و $C = 16 \times 10^{-4} F$ و $E(t) = 100 \cos 10t$ و شارژ اولیه و جریان اولیه هر دو صفر باشند.

حل

با مقادیر داده شده معادله (۷) به صورت زیر تبدیل می شود.

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + 40 \frac{dQ}{dt} + 625Q = 100 \cos 10t \quad (۸)$$

معادله کمکی $r^2 + 40r + 625 = 0$ است و ریشه ها به صورت زیر هستند.

$$r = \frac{-40 \pm \sqrt{-900}}{2} = -20 \pm 15i$$

پس جواب عمومی مطابق زیر است.

$$Q_c(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 15t + c_2 \sin 15t)$$

جواب خصوصی هم به صورت زیر حدس می زنیم.

$$Q_p = A \cos 10t + B \sin 10t$$

پس

$$Q'_p = -10A \sin 10t + 10B \cos 10t$$

$$Q''_p(t) = -100A \cos 10t - 100B \sin 10t$$

در معادله (۸) می گذاریم.

$$(-100A \cos 10t - 100B \sin 10t) + 40(-10A \sin 10t + 10B \cos 10t) + 625(A \cos 10t + B \sin 10t) = 100 \cos 10t$$

یا

$$(525A + 400B) \cos 10t + (-400A + 525B) \sin 10t = 100 \cos 10t$$

با مساوی قرار دادن ضرایب ها داریم.

$$\begin{array}{rcl} 525A + 400B & = & 100 \\ -400A + 525B & = & 0 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 21A + 16B & = & 4 \\ -16A + 21B & = & 0 \end{array}$$

جواب سیستم

$$A = \frac{84}{697} \quad B = \frac{64}{697}$$

پس جواب خصوصی می شود.

$$Q_p(t) = \frac{1}{697}(84 \cos 10t + 64 \sin 10t)$$

جواب کلی می شود.

$$Q(t) = Q_c(t) + Q_p(t) = e^{-20t}(c_1 \cos 15t + c_2 \sin 15t) + \frac{4}{697}(21 \cos 10t + 16 \sin 10t)$$

با استفاده از شرط اولیه $Q(0) = 0$ داریم.

$$Q(0) = c_1 + \frac{84}{697} = 0 \quad c_1 = -\frac{84}{697}$$

برای استفاده از شرط اولیه دیگر، ابتدا مشتق می‌گیریم تا جریان I را پیدا کنیم.

$$I = \frac{dQ}{dt} = e^{-20t} [(-20c_1 + 15c_2) \cos 15t + (-15c_1 - 20c_2) \sin 15t] \\ + \frac{40}{697} (-21 \sin 10t + 16 \cos 10t)$$

$$I(0) = -20c_1 + 15c_2 + \frac{640}{697} = 0 \quad c_2 = -\frac{464}{2091}$$

پس فرمول شارژ می‌شود.

$$Q(t) = \frac{4}{697} \left[\frac{e^{-20t}}{3} (-63 \cos 15t - 116 \sin 15t) + (21 \cos 10t + 16 \sin 10t) \right]$$

و برای جریان داریم.

$$I(t) = \frac{1}{2091} [e^{-20t} (-1920 \cos 15t + 13,060 \sin 15t) + 120(-21 \sin 10t + 16 \cos 10t)]$$

بخش ۱۲. ۳. تمرینات دوره ای ۱

توضیح برای سهولت مراجعه به فرمول ها و معادله ها ، آنها را شماره گذاری کرده ایم. هر شماره مخصوص همان تمرین است و به تمرین های دیگر ربطی ندارد.

۱ - نشان دهید که $\phi(x) = x^2 - x^{-1}$ یک جواب صریح معادله دیفرانسیل زیر است

$$(3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{x^2}y = 0,$$

اما $\psi(x) = x^3$ یک جواب صریح معادله بالا نیست.

پاسخ
تابع های

$$\phi(x) = x^2 - x^{-1}$$

$$\phi'(x) = 2x + x^{-2}$$

$$\phi''(x) = 2 - 2x^{-3}$$

برای تمام $x \neq 0$ ها تعریف شده هستند. $\phi(x)$ را در معادله 3 بجای y می گذاریم. پس داریم.

$$(2 - 2x^{-3}) - \frac{2}{x^2}(x^2 - x^{-1}) = (2 - 2x^{-3}) - (2 - 2x^{-3}) = 0.$$

چون این برای تمام $x \neq 0$ ها ، صادق است ، پس $\phi(x) = x^2 - x^{-1}$ یک جواب صریح برای معادله (3) در $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ است.

برای $\psi(x) = x^3$ داریم.

$$\psi'(x) = 3x^2$$

$$\psi''(x) = 6x$$

این ها را در معادله (3) می گذاریم. پس داریم.

$$6x - \frac{2}{x^2}x^3 = 4x = 0$$

رابطه بالا فقط برای $x = 0$ صادق است اما برای یک بازه صادق نیست.

۲ - نشان دهید برای هر عدد ثابت c_1 و c_2 تابع

$$\phi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$$

یک جواب صریح برای معادله دیفرانسیل خطی زیر است.

$$(4) \quad y'' - y' - 2y = 0.$$

پاسخ

مشتق ها را محاسبه می کنیم.

$$\phi'(x) = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x}$$

$$\phi''(x) = c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x}$$

با جانشین کردن ϕ, ϕ', ϕ'' بجای y, y', y'' معادله (4) می شود.

$$\begin{aligned}
 & (c_1 e^{-x} + 4c_2 e^{2x}) - (-c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x}) - 2(c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}) \\
 & = (c_1 + c_1 - 2c_1)e^{-x} + (4c_2 - 2c_2 - 2c_2)e^{2x} = 0. \\
 \phi(x) &= c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \text{ پس } (-\infty, \infty) \text{ صادق است،} \\
 & \text{یک جواب صریح است برای معادله (4) در بازه } (-\infty, \infty) \text{ برای هر عدد ثابت } c_1 \\
 & \text{و } c_2
 \end{aligned}$$

۳ - نشان دهید که رابطه زیر

$$(5) \quad y^2 - x^3 + 8 = 0$$

بطور تلویحی، یک جواب معادله غیر خطی زیر است در بازه $(2, \infty)$.

$$(6) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$$

پاسخ

رابطه (5) را برای y حل می کنیم. پس داریم.

$$y = \pm \sqrt{x^3 - 8}.$$

رابطه $\phi(x) = \sqrt{x^3 - 8}$ را امتحان می کنیم تا ببینیم یک جواب صریح است یا خیر.

چون $d\phi/dx = 3x^2/(2\sqrt{x^3 - 8})$ است، پس هم ϕ و هم $d\phi/dx$ در $(2, \infty)$ تعریف شده هستند، با جایگزین کردن آنها در معادله (6) داریم.

$$\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 - 8}} = \frac{3x^2}{2(\sqrt{x^3 - 8})},$$

که مسلماً، برای تمام x ها در $(2, \infty)$ معتبر است.

برای $\psi(x) = -\sqrt{x^3 - 8}$ هم، به همینین.

۴ - نشان دهید برای تمام اعداد ثابت C ، رابطه $4x^2 - y^2 = C$ یک جواب تلویحی برای معادله دیفرانسیل زیر است.

$$(9) \quad y \frac{dy}{dx} - 4x = 0.$$

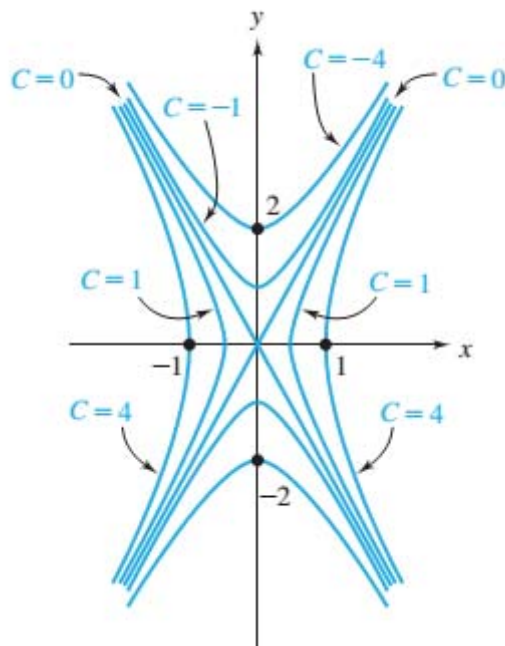
نمودار جواب را برای $C = 0, \pm 1, \pm 4$ رسم کنید.

پاسخ

اگر بطور تلویحی از معادله $4x^2 - y^2 = C$ نسبت به x مشتق بگیریم، خواهیم داشت.

$$8x - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

که معادل (9) است. در تصویر زیر نمودار جوابهای تلویحی برای $C = 0, \pm 1, \pm 4$ رسم کرده ایم. منحنی ها هذلولی هستند با خطوط مجانب مشترک $y = \pm 2x$ جواب های تلویحی، دو جواب صریح $y = 2x$ و $y = -2x$ به ما میدهند، که هر دو از مبدا مختصات عبور می کنند.



۵ - نشان دهید که $\phi(x) = \sin x - \cos x$ یک جواب مساله با مقدار اولیه زیر است.

$$(10) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + y = 0; \quad y(0) = -1, \quad \frac{dy}{dx}(0) = 1.$$

پاسخ

ملاحظه می کنید که $\phi(x) = \sin x - \cos x$, $d\phi/dx = \cos x + \sin x$ و $d^2\phi/dx^2 = -\sin x + \cos x$ همه در $(-\infty, \infty)$ تعریف شده هستند. در معادله دیفرانسیل می گذاریم. پس داریم.

$$(-\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x) = 0$$

که برای تمام $x \in (-\infty, \infty)$ برقرار است. لذا، $\phi(x)$ یک جواب معادله (10) است در $(-\infty, \infty)$. هنگامی که مقادیر اولیه را چک می کنیم، ملاحظه می کنیم که داریم.

$$\phi(0) = \sin 0 - \cos 0 = -1,$$

$$\frac{d\phi}{dx}(0) = \cos 0 + \sin 0 = 1,$$

این شرایط لازم در معادله (10) را دارند. پس $\phi(x)$ یک جواب مساله با مقدار اولیه است.

۶ - همانطور که در تمرین شماره ۲ نشان دادیم، تابع $\phi(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$ یک جواب معادله دیفرانسیل زیر است.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

برای هر اعداد ثابت c_1, c_2 این دو اعداد ثابت را طوری معین کنید که شرایط اولیه زیر برقرار باشند.

$$y(0) = 2 \quad \text{and} \quad \frac{dy}{dx}(0) = -3$$

پاسخ

ابتدا، $d\phi/dx$ را محاسبه می‌کنیم. پس داریم $d\phi/dx = -c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{2x}$. شرایط اولیه را جایگزین می‌کنیم، پس سیستم معادله‌های زیر بدست می‌آوریم.

$$\begin{cases} \phi(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = 2, \\ \frac{d\phi}{dx}(0) = -c_1 e^0 + 2c_2 e^0 = -3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 2, \\ -c_1 + 2c_2 = -3. \end{cases}$$

دومعادله آخر را با هم جمع می‌کنیم، پس داریم.

$$3c_2 = -1,$$

$$c_2 = -1/3$$

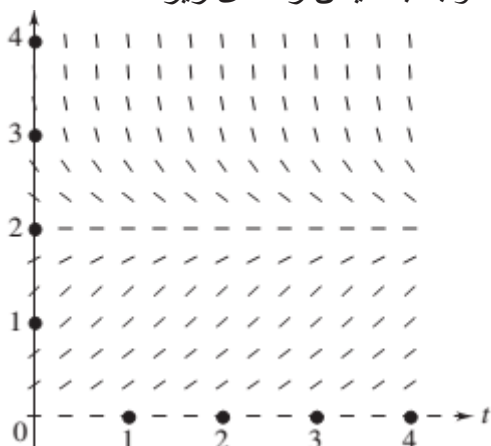
چون $c_1 + c_2 = 2$ است، پس $c_1 = 7/3$ است. لذا، جواب مساله با شرایط اولیه به صورت زیر است.

$$\phi(x) = (7/3)e^{-x} - (1/3)e^{2x}.$$

۷- معادله تعادل جمعیت برای جمعیت p بر حسب هزار، در زمان t برای یک گونه باکتری به صورت زیر است.

$$(2) \quad \frac{dp}{dt} = p(2-p).$$

مسلّم است که p مثبت است. با توجه به میدان راستای زیر



به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف - اگر جمعیت اولیه 3000 باشد، یعنی $p(0) = 3$ ، در مورد محدود کردن جمعیت

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t)$$

چه می‌گویید؟

- ب - آیا جمعیت 1000 هرگز می تواند به 500 برسد؟
ج - آیا جمعیت 1000 هرگز می تواند به 3000 برسد؟

پاسخ

الف - میدان راستا نشان می دهد که تمام منحنی های جواب بجز $p(t) = 0$ به خط افقی $p = 2$ نزدیک می شوند هنگامی که $t \rightarrow \infty$ یعنی این خط، یک خط مجانب است برای تمام جوابهای مثبت. پس

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = 2.$$

توجه دارید که محور عمودی p است و برحسب هزار. ب - میدان راستا نشان می دهد که جمعیت بیش از 2000 بطور پیوسته نقصان پیدا می کند. در صورتی که کمتر از 2000 افزایش پیدا می کند. مخصوصا، جمعیت 1000 هرگز به 500 نقصان نمی کند.

ج - همان طور که در قسمت ب گفته شد، جمعیت 1000 در طول زمان، افزایش پیدا می کند. اما میدان راستا نشان می دهد که هرگز به 2000 یا بیشتر نمی رسد، به عبارت دیگر منحنی جواب نمی تواند خط $p = 2$ را قطع کند. در حقیقت تابع ثابت $p = 2$ یک جواب معادله دیفرانسیل داده شده است.

یاد آوری فرمول باز گشتی اوایلر به صورت زیر است.

$$(2) \quad x_{n+1} = x_n + h,$$

$$(3) \quad y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

۸ - با استفاده از روش اوایلر، با گام $h = 0.1$ جواب تقریبی مساله با مقدار اولیه زیر را بدست آورید.

$$y' = x\sqrt{y}, \quad y(1) = 4$$

در نقاط $x = 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5$

پاسخ

اینجا $f(x, y) = x\sqrt{y}$ ، $x_0 = 1, y_0 = 4, h = 0.1$ است. پس فرمول باز گشتی برای y_n به صورت زیر است.

$$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) = y_n + (0.1) x_n \sqrt{y_n}.$$

با جانشین کردن $n = 0$ داریم.

$$x_1 = x_0 + 0.1 = 1 + 0.1 = 1.1,$$

$$y_1 = y_0 + (0.1) x_0 \sqrt{y_0} = 4 + (0.1)(1)\sqrt{4} = 4.2.$$

برای $n = 1$ داریم.

$$x_2 = x_1 + 0.1 = 1.1 + 0.1 = 1.2,$$

$$y_2 = y_1 + (0.1) x_1 \sqrt{y_1} = 4.2 + (0.1)(1.1)\sqrt{4.2} \approx 4.42543.$$

به همین ترتیب ادامه می دهیم، پس جدول زیر را بدست می آوریم.

n	x_n	Euler's Method	Exact Value
0	1	4	4
1	1.1	4.2	4.21276
2	1.2	4.42543	4.45210
3	1.3	4.67787	4.71976
4	1.4	4.95904	5.01760
5	1.5	5.27081	5.34766

ملاحظه می کنید که مقدار دقیق $Exact Value$ و مقدار اویلر $Euler's Value$ به هم نزدیک هستند.

۹ - معادله غیر خطی زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-5}{y^2}$$

پاسخ

متغیر ها را جدا می کنیم و معادله را به صورت زیر باز نویسی می کنیم.

$$y^2 dy = (x-5) dx .$$

انتگرال می گیریم ، پس داریم.

$$\int y^2 dy = \int (x-5) dx$$

$$\frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + C ,$$

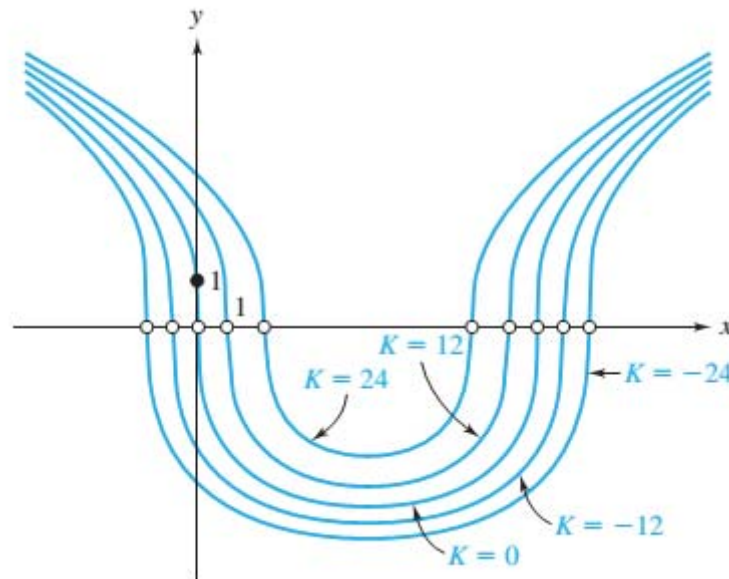
معادله آخر را برای y حل می کنیم.

$$y = \left(\frac{3x^2}{2} - 15x + 3C \right)^{1/3} .$$

چون C عدد ثابت انتگرال گیری است ، پس می تواند هر عدد حقیقی باشد. پس بجای آن می توانیم K بکار ببریم.

$$y = \left(\frac{3x^2}{2} - 15x + K \right)^{1/3} .$$

در ذیل نمودار خانواده جوابها را ملاحظه می کنید.



۱۰ - مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x+3}, \quad y(-1) = 0.$$

پاسخ

باز نویسی می کنیم و انتگرال می گیریم.

$$\frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x+3},$$

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x+3},$$

$$(5) \quad \ln |y-1| = \ln |x+3| + C.$$

اینجا می توانیم معادله آخر را برای y صریحا حل کنیم و C بجای خود باشد، و یا مقدار اولیه را بکار می بریم تا C پیدا شود. و سپس صریحا برای y حل کنیم.

اجازه دهید روش اول را بکار ببریم. برای این کار، معادله (5) را به صورت نمایی می نویسیم.

$$e^{\ln |y-1|} = e^{\ln |x+3| + C} = e^C e^{\ln |x+3|},$$

$$(6) \quad |y-1| = e^C |x+3| = C_1 |x+3|,$$

اینجا $C_1 := e^C$ است. حالا، بستگی به مقدار y داریم $|y-1| = \pm(y-1)$ و به همین

طریق $|x+3| = \pm(x+3)$ پس معادله (6) را می توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$y-1 = \pm C_1(x+3)$$

یا

$$y = 1 \pm C_1(x+3),$$

اینجا انتخاب علامت، بستگی به مقادیر x و y دارد. چون $C_1 = e^C > 0$ است می توانیم بجای $\pm C$ بنویسیم K ، اینجا K یک عدد ثابت غیر صفر است. پس داریم.

$$(7) \quad y = 1 + K(x + 3).$$

در نهایت K را طوری انتخاب می کنیم که شرط اولیه $y(-1) = 0$ برقرار باشد. با قرار دادن $x = -1$ و $y = 0$ در معادله (7)، داریم.

$$0 = 1 + K(-1 + 3) = 1 + 2K,$$

پس $K = -1/2$ است. لذا جواب مساله با شرط اولیه به صورت زیر است.

$$(8) \quad y = 1 - \frac{1}{2}(x + 3) = -\frac{1}{2}(x + 1).$$

روش دوم

ابتدا $x = -1, y = 0$ را در معادله (5) می گذاریم و برای C حل می کنیم. پس داریم.

$$\ln |0 - 1| = \ln |-1 + 3| + C,$$

$$0 = \ln 1 = \ln 2 + C,$$

پس $C = -\ln 2$ است و لذا بر اساس شماره (5) جواب تلویحی به صورت زیر است.

$$\ln(1 - y) = \ln(x + 3) - \ln 2.$$

اینجا، بجای $|y - 1|$ گذاشته ایم $(y - 1)$ و بجای $|x + 3|$ گذاشته ایم $(x + 3)$ ، زیرا می خواهیم x و y را نزدیک مقادیر اولیه $x = -1, y = 0$ پیدا کنیم. برای چنین مقادیری، داریم $y - 1 < 0$ و $x + 3 > 0$. برای y حل می کنیم.

$$\ln(1 - y) = \ln(x + 3) - \ln 2 = \ln\left(\frac{x + 3}{2}\right),$$

$$1 - y = \frac{x + 3}{2},$$

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x + 3) = -\frac{1}{2}(x + 1),$$

این همان جواب (8) است که با روش اول پیدا کردیم.

۱۱- معادله غیر خطی زیر را حل کنید.

$$(9) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{6x^5 - 2x + 1}{\cos y + e^y}.$$

حل

متغیرها را تفکیک می کنیم و انتگرال می گیریم.

$$(\cos y + e^y) dy = (6x^5 - 2x + 1) dx,$$

$$\int (\cos y + e^y) dy = \int (6x^5 - 2x + 1) dx.$$

$$\sin y + e^y = x^6 - x^2 + x + C.$$

اینجا به مشکلی بر خورد کردیم. می خواهیم معادله را برای y بطور صریح، حل کنیم، اما نمی توانیم. اغلب هنگام حل معادلات غیر خطی، اتفاق می افتد. در نتیجه، هنگام حل معادلات غیر خطی، باید به پیدا کردن جواب تلویحی هم راضی باشیم.

۱۲ - جواب کلی معادله زیر را پیدا کنید.

$$(9) \quad \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x^2} = x \cos x, \quad x > 0.$$

حل

معادله را به صورت استاندارد می نویسیم. برای این کار طرفین را در x ضرب می کنیم.

$$(10) \quad \frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = x^2 \cos x.$$

اینجا $p = -\frac{2}{x}$ است. پس داریم.

$$\int P(x) dx = \int \frac{-2}{x} dx = -2 \ln |x|$$

لذا، عامل انتگرال گیری، به صورت زیر است.

$$\mu(x) = e^{-2 \ln |x|} = e^{\ln(x^{-2})} = x^{-2}.$$

طرفین معادله (10) را در $\mu(x)$ ضرب می کنیم. پس داریم.

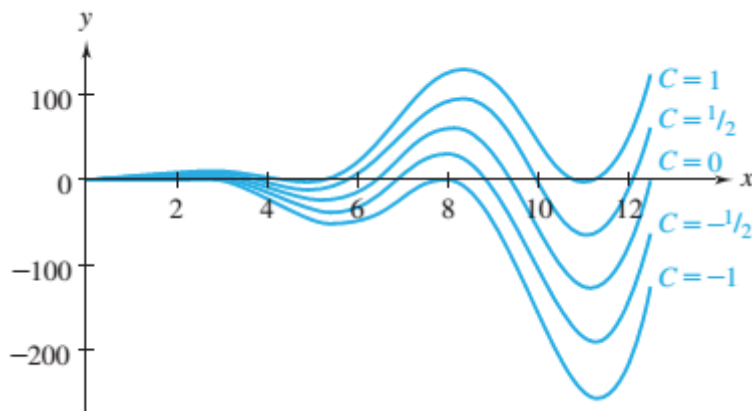
$$\underbrace{x^{-2} \frac{dy}{dx} - 2x^{-3}y}_{\frac{d}{dx}(x^{-2}y)} = \cos x,$$

از طرفین انتگرال می گیریم و برای y حل می کنیم.

$$x^{-2}y = \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$(11) \quad y = x^2 \sin x + Cx^2.$$

می توان، چک کرد که شماره (11) جواب معادله دیفرانسیل (10) است برای تمام $x > 0$ ها. در تصویر زیر جواب های مختلفی برای مقادیر مختلف C را ملاحظه می کنید.



۱۳ - یک تخته سنگ ، دارای دو ایزتوپ رادیو اکتیو RA_1, RA_2 است ، که متعلق به یک سری رادیو اکتیو هستند. یعنی RA_1 هنگام فرو کاست به RA_2 تبدیل می شود و سپس این هم هنگام فرو کاست به اتم های پایدار تبدیل می شود. فرض کنید نرخ تبدیل RA_1 به RA_2 مساوی $50e^{-10t} \frac{kg}{sec}$ باشد. چون نرخ فروکاست RA_2 متناسب است با جرم RA_2 موجود ، پس نرخ فرو کاست RA_2 به صورت زیر است.

$$\frac{dy}{dt} = \text{نرخ فروکاست} - \text{نرخ ایجاد}$$

$$(12) \quad \frac{dy}{dt} = 50e^{-10t} - ky ,$$

اینجا $k > 0$ عدد ثابت فرو کاست است. اگر $k = \frac{2}{sec}$ و $y(0) = 40 kg$ باشد ، مطلوب است مقدار RA_2 برای $t \geq 0$

حل

معادله (12) یک معادله خطی است. آنرا به صورت استاندارد باز نویسی می کنیم.

$$(13) \quad \frac{dy}{dt} + 2y = 50e^{-10t} , \quad y(0) = 40 ,$$

ملاحظه می کنید که در معادله (12) بجای k عدد 2 قرار دادیم و همچنین شرط اولیه را هم اضافه کردیم. ، پس

$$\int p(t)dt = \int 2dt = 2t$$

لذا عامل انتگرال گیری $\mu(t) = e^{2t}$ است. طرفین معادله (13) را در $\mu(t)$ ضرب می کنیم. ، پس داریم.

$$\underbrace{e^{2t} \frac{dy}{dt} + 2e^{2t}y}_{\frac{d}{dt}(e^{2t}y)} = 50e^{-10t+2t} = 50e^{-8t} ,$$

از طرفین انتگرال می گیریم ، داریم.

$$e^{2t}y = -\frac{25}{4}e^{-8t} + C,$$

$$y = -\frac{25}{4}e^{-10t} + Ce^{-2t}.$$

مقادیر $t = 0, y(0) = 40$ جانشین می‌کنیم، پس داریم.

$$40 = -\frac{25}{4}e^0 + Ce^0 = -\frac{25}{4} + C,$$

لذا

$$C = 40 + \frac{25}{4} = \frac{185}{4}$$

پس، جرم RA_2 در زمان t به صورت زیر است.

$$(14) \quad y(t) = \left(\frac{185}{4}\right)e^{-2t} - \left(\frac{25}{4}\right)e^{-10t}, \quad t \geq 0.$$

۱۴ - جواب کلی معادله زیر را پیدا کنید.

$$y(2) \quad y' + y = \sqrt{1 + \cos^2 x},$$

حل

عامل انتگرال‌گیری به صورت زیر است.

$$\mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^x.$$

در صورتی که معادله دیفرانسیل به صورت

$$y' + y = Q(x)$$

باشد

جواب کلی این نوع معادلات را بهتر است از فرمول زیر استفاده کنیم، چون کار با عبارت زیر رادیکال کمی وقت گیر است. این فرمول کلی برای حل معادلات مرتبه اول خطی را بخاطر بسپارید.

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

$$(5) \quad \mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x)$$

$$(8) \quad y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int \mu(x)Q(x) dx + C \right].$$

بر اساس (8) جواب کلی به صورت زیر است.

$$y(x) = e^{-x} \left(\int e^x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx + C \right).$$

۱۵- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2 + 1}{2x^2y}.$$

حل

معادله دیفرانسیل داده شده را می توان به صورت های زیر باز نویسی کرد.

$$(2xy^2 + 1) dx + 2x^2y dy = 0 ,$$

$$\frac{2xy^2 + 1}{2x^2y} dx + dy = 0 ,$$

$$dx + \frac{2x^2y}{2xy^2 + 1} dy = 0 ,$$

اما از همه بهتر ، معادله اول است. زیرا به صورت کلی زیر است.

$$F(x, y) = x^2y^2 + x:$$

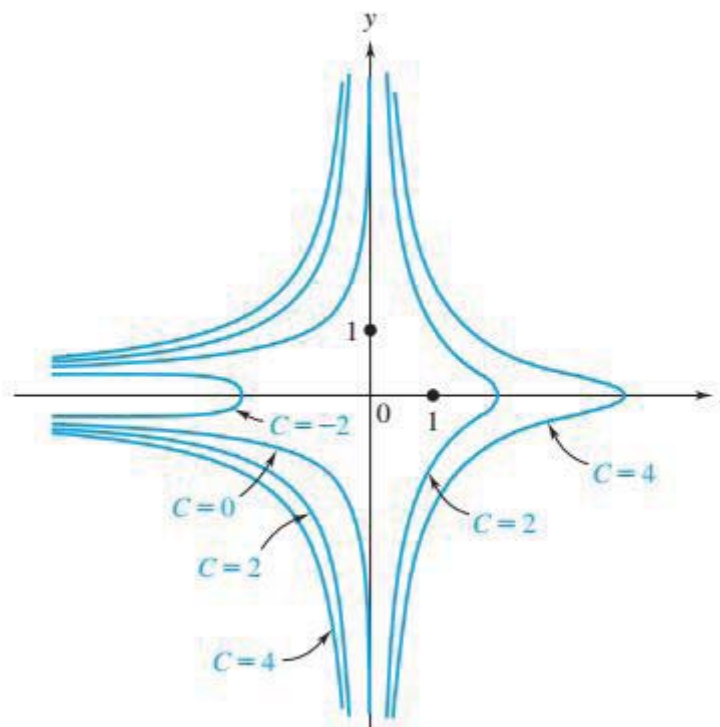
$$(2xy^2 + 1) dx + 2x^2y dy = d[x^2y^2 + x]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2 + x) dx + \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2 + x) dy .$$

پس جواب تلویحی به صورت زیر است.

$$x^2y^2 + x = C.$$

تصویر زیر.



۱۶- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(12) \quad (2xy - \sec^2 x) dx + (x^2 + 2y) dy = 0.$$

حل

اینجا $M(x, y) = 2xy - \sec^2 x$ و $N(x, y) = x^2 + 2y$ است. حالا، چون

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x},$$

است، پس معادله (12) کامل است. برای پیدا کردن $F(x, y)$ با انتگرال گرفتن از M نسبت به x داریم.

$$(13) \quad F(x, y) = \int (2xy - \sec^2 x) dx + g(y) \\ = x^2 y - \tan x + g(y).$$

حالا، مشتق پاره ای از (13) نسبت به y می گیریم و بجای N می گذاریم $x^2 + 2y$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y),$$

$$x^2 + g'(y) = x^2 + 2y.$$

پس $g' = 2y$ است. و چون انتخاب عدد ثابت انتگرال مهم نیست، می توانیم $g(y) = y^2$ بگیریم. لذا، بر اساس (13) داریم

$$F(x, y) = x^2 y - \tan x + y^2,$$

و جواب شماره (12) بطور تلویحی به صورت زیر است.

$$x^2 y - \tan x + y^2 = C.$$

۱۷- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(15) \quad (1 + e^x y + x e^x y) dx + (x e^x + 2) dy = 0.$$

حل

$$M = 1 + e^x y + x e^x y \quad N = x e^x + 2.$$

چون

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x + x e^x = \frac{\partial N}{\partial x},$$

است، پس (15) کامل است. حالا اگر $N(x, y)$ نسبت به y انتگرال بگیریم، پس داریم.

$$F(x, y) = \int (x e^x + 2) dy + h(x) = x e^x y + 2y + h(x).$$

حالا، اگر عبارت بدست آمده را بر حسب x مشتق پاره ای بگیریم و بجای M بگذاریم، خواهیم داشت.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$$

$$e^x v + x e^x v + h'(x) = 1 + e^x v + x e^x v.$$

پس $h'(x) = 1$ است. پس $h(x) = x$ است. لذا $F(x, y) = x e^x y + 2y + x$ است. و جواب معادله (15) به صورت تلویحی $x e^x y + 2y + x = C$ است. می‌توانیم، بطور صریح برای y حل کنیم و

$$y = \frac{C - x}{2 + x e^x}$$

بدست آوریم.

۱۸ - نشان دهید

$$(16) \quad (x + 3x^3 \sin y) dx + (x^4 \cos y) dy = 0$$

کامل نیست، اما اگر در x^{-1} ضرب کنیم، یک معادله کامل بدست می‌آوریم. سپس از این حقیقت استفاده کنید و (16) را حل کنید.

حل

در معادله (16)

$$M = x + 3x^3 \sin y \quad \text{و} \quad N = x^4 \cos y$$

و، چون

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^3 \cos y \neq 4x^3 \cos y = \frac{\partial N}{\partial x},$$

پس (16) کامل نیست. حالا اگر (16) در x^{-1} ضرب کنیم، خواهیم داشت.

$$(17) \quad (1 + 3x^2 \sin y) dx + (x^3 \cos y) dy = 0.$$

حالا برای این معادله جدید داریم.

$$M = 1 + 3x^2 \sin y \quad N = x^3 \cos y.$$

امتحان می‌کنیم.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \cos y = \frac{\partial N}{\partial x},$$

پس (17) کامل است. معادله را حل می‌کنیم، جواب تلویحی به صورت زیر است.

$$x + x^3 \sin y = C.$$

چون اختلاف (16) و (17) فقط عامل x است، پس هر جواب یکی، جواب دیگری هم است به شرطی که $x \neq 0$ باشد. لذا جواب شماره (16) بطور تلویحی

$$x + x^3 \sin y = C.$$

است.

۱۹ - نشان دهید $\mu(x, y) = xy^2$ یک عامل انتگرال گیری برای

$$(3) \quad (2y - 6x) dx + (3x - 4x^2 y^{-1}) dy = 0.$$

است. این حقیقت را برای حل معادله (3) بکار ببرید.

حل

ابتدا نشان می دهیم (3) کامل نیست.

$$M = 2y - 6x \quad N = 3x - 4x^2y^{-1}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 3 - 8xy^{-1}$$

پس معادله (3) کامل نیست. معادله (3) را در $\mu(x, y) = xy^2$ ضرب می کنیم. پس داریم.

$$(4) \quad (2xy^3 - 6x^2y^2) dx + (3x^2y^2 - 4x^3y) dy = 0.$$

حالا

$$M = 2xy^3 - 6x^2y^2 \quad N = 3x^2y^2 - 4x^3y.$$

است ، و چون داریم

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = 6xy^2 - 12x^2y = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y),$$

پس معادله (4) کامل است. پس $\mu(x, y) = xy^2$ در حقیقت یک عامل انتگرال گیری برای (3) است.حالا معادله (4) را حل می کنیم. ابتدا M را نسبت به x انتگرال می گیریم.

$$F(x, y) = \int (2xy^3 - 6x^2y^2) dx + g(y) = x^2y^3 - 2x^3y^2 + g(y).$$

مشتق پاره ای نسبت به y می گیریم و جانشین N می کنیم.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

$$3x^2y^2 - 4x^3y + g'(y) = 3x^2y^2 - 4x^3y.$$

پس $g'(x) = 0$ است. پس $g(y) \equiv 0$ می گیریم. لذا $F(x, y) = x^2y^3 - 2x^3y^2$ و جواب (4) بطور تلویحی به صورت زیر است.

$$x^2y^3 - 2x^3y^2 = C.$$

۲۰ - معادله زیر را حل کنید.

$$(12) \quad (2x^2 + y) dx + (x^2y - x) dy = 0.$$

راهنمایی: اگر

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

پیوسته و فقط وابسته به x باشد ، پس

$$(8) \quad \mu(x) = \exp \left[\int \left(\frac{\partial M / \partial y - \partial N / \partial x}{N} \right) dx \right]$$

حل

معادله (12) نه تفکیک پذیر است و نه خطی.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq (2xy - 1) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

چون (12) کامل نیست، محاسبه زیر را داریم.

$$\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N} = \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2y - x} = \frac{2(1 - xy)}{-x(1 - xy)} = \frac{-2}{x}.$$

پس یک تابع وابسته به x بدست آوردیم. پس عامل انتگرال گیری (12) توسط فرمول (8) بدست می آید. یعنی

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{-2}{x} dx\right) = x^{-2}.$$

هنگامی که (12) را در μ ضرب می کنیم، معادله کامل زیر را بدست می آوریم.

$$(2 + yx^{-2}) dx + (y - x^{-1}) dy = 0.$$

با حل این معادله، جواب تلویحی زیر را بدست می آوریم.

$$(13) \quad 2x - yx^{-1} + \frac{y^2}{2} = C.$$

توجه دارید که هنگام ضرب کردن μ در معادله، $x \equiv 0$ را از دست دادیم. لذا (13) و $x \equiv 0$ جوابهای (12) هستند.

۲۱- معادله زیر را حل کنید.

$$(6) \quad (xy + y^2 + x^2) dx - x^2 dy = 0.$$

حل

این معادله نه تفکیک پذیر است، نه کامل است و نه خطی است. اگر شماره (6) را به صورت مشتق بنویسیم، داریم.

$$(7) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 + x^2}{x^2} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1,$$

ملاحظه می کنیم که سمت راست (7) تابعی است به صورت $\frac{y}{x}$ پس این معادله، همگن است.

حالا، فرض می کنیم $v = \frac{y}{x}$ باشد، بخاطر بیاورید که

$$\frac{dy}{dx} = x + x \left(\frac{dv}{dx}\right)$$

با این جانشین کردن ها، معادله (7) می شود.

$$v + x \frac{dv}{dx} = v + v^2 + 1.$$

معادله بالا تفکیک پذیر است، با تفکیک کردن متغیر ها داریم.

$$\int \frac{1}{v^2 + 1} dv = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\arctan v = \ln|x| + C.$$

پس

$$v = \tan(\ln|x| + C).$$

در نهایت $\frac{y}{x}$ بجای v و حل کردن برای y داریم.

$$y = x \tan(\ln|x| + C)$$

این یک جواب صریح است برای (6) همچنین $x \equiv 0$ هم یک جواب است.

۲۲- معادله زیر را حل کنید.

$$(8) \quad \frac{dy}{dx} = y - x - 1 + (x - y + 2)^{-1}.$$

حل

طرف راست را می توان به صورت یک تابع $x - y$ نوشت. یعنی

$$y - x - 1 + (x - y + 2)^{-1} = -(x - y) - 1 + [(x - y) + 2]^{-1},$$

پس فرض می کنیم $z = x - y$ باشد. برای این که برای $\frac{dy}{dx}$ حل کنیم، $z = x - y$ را بر حسب x مشتق می گیریم. پس $\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$ و $\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}$ در (8) جانشین می کنیم، پس داریم.

$$1 - \frac{dz}{dx} = -z - 1 + (z + 2)^{-1},$$

یا

$$\frac{dz}{dx} = (z + 2) - (z + 2)^{-1}.$$

این معادله تفکیک پذیر را حل می کنیم. داریم.

$$\int \frac{z + 2}{(z + 2)^2 - 1} dz = \int dx,$$

$$\frac{1}{2} \ln|(z + 2)^2 - 1| = x + C_1,$$

از این داریم.

$$(z + 2)^2 = Ce^{2x} + 1.$$

و در نهایت $x - y$ را جانشین z می کنیم.

$$(x - y + 2)^2 = Ce^{2x} + 1$$

۲۳- معادله زیر را حل کنید.

$$(11) \quad \frac{dy}{dx} - 5y = -\frac{5}{2}xy^3.$$

حل

این یک معادله برنولی است با $n = 3, P(x) = -5, Q(x) = -5x/2$ برای نوشتن معادله (11) به صورت یک معادله خطی، ابتدا طرفین را بر y^3 تقسیم می‌کنیم. پس داریم.

$$y^{-3} \frac{dy}{dx} - 5y^{-2} = -\frac{5}{2}x.$$

حالا $v = y^{-2}$ را جانشین می‌کنیم. چون داریم $dv/dx = -2y^{-3} dy/dx$ پس معادله تغییر یافته به صورت زیر است.

$$-\frac{1}{2} \frac{dv}{dx} - 5v = -\frac{5}{2}x,$$

$$(12) \quad \frac{dv}{dx} + 10v = 5x.$$

معادله (12) یک معادله خطی است، پس می‌توانیم برای v حل کنیم. همان طور که در بخش‌های قبل گفته شد. داریم.

$$v = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}.$$

حالا جانشینی را بر می‌گردانیم. پس داریم.

$$y^{-2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x}.$$

$$y = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{20} + Ce^{-10x} \right)^{-2}$$

۲۴ - دو جواب برای معادله زیر پیدا کنید.

$$(4) \quad y'' + 5y' - 6y = 0.$$

حل

معادله کمکی (4) مطابق زیر است.

$$r^2 + 5r - 6 = (r - 1)(r + 6) = 0,$$

که ریشه‌های آن $r_1 = 1, r_2 = -6$ است. پس $y_1 = e^1, y_2 = e^{-6}$ است.

۲۵ - مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$(6) \quad y'' + 2y' - y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

حل

ابتدا دو جواب پیدا می‌کنیم. معادله کمکی به صورت زیر است.

$$r^2 + 2r - 1 = 0.$$

پس ریشه‌ها به صورت زیر هستند.

$$r_1 = -1 + \sqrt{2} \quad \text{و} \quad r_2 = -1 - \sqrt{2}.$$

در نتیجه جواب به صورت زیر است.

$$(7) \quad y(t) = c_1 e^{(-1+\sqrt{2})t} + c_2 e^{(-1-\sqrt{2})t}.$$

برای پیدا کردن ضریب ها ، شرط اولیه را بکار می بریم.

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0,$$

$$y'(0) = (-1 + \sqrt{2})c_1 e^0 + (-1 - \sqrt{2})c_2 e^0,$$

یا

$$0 = c_1 + c_2,$$

$$-1 = (-1 + \sqrt{2})c_1 + (-1 - \sqrt{2})c_2$$

سیستم را حل می کنیم ، پس داریم.

$$c_1 = -\frac{\sqrt{2}}{4} \quad c_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

لذا

$$y(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} e^{(-1+\sqrt{2})t} + \frac{\sqrt{2}}{4} e^{(-1-\sqrt{2})t}$$

۲۶ - مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$(12) \quad y'' + 4y' + 4y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

معادله کمکی به صورت زیر است.

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0.$$

چون $r_1 = r_2 = -2$ است ، پس ریشه مضاعف داریم. لذا $y_1 = e^{-2t}$ ، $y_2 = te^{-2t}$ اجازه دهید نشان دهیم که y_2 یک جواب است.

$$y_2(t) = te^{-2t},$$

$$y_2'(t) = e^{-2t} - 2te^{-2t},$$

$$y_2''(t) = -2e^{-2t} - 2e^{-2t} + 4te^{-2t} = -4e^{-2t} + 4te^{-2t},$$

$$y_2'' + 4y_2' + 4y_2 = -4e^{-2t} + 4te^{-2t} + 4(e^{-2t} - 2te^{-2t}) + 4te^{-2t} = 0.$$

علاوه بر این te^{-2t} و e^{-2t} مستقل خطی هستند. چون هیچ کدام یک ضریب ثابت دیگری نیست. شرط های اولیه را بکار می بریم.

$$y(0) = c_1 e^0 + c_2(0)e^0 = 1,$$

$$y'(0) = -2c_1 e^0 + c_2 e^0 - 2c_2(0)e^0 = 3,$$

سیستم را حل می کنیم. $c_1 = 1$, $c_2 = 5$ پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = e^{-2t} + 5te^{-2t}$$

۲۷ جواب کلی معادله زیر را پیدا کنید.

$$(14) \quad y''' + 3y'' - y' - 3y = 0.$$

حل

اگر بخواهیم جوابهای به صورت $y = e^{rt}$ پیدا کنیم، آن طور که در مورد معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم عمل می کردیم، باید معادله کمکی را بنویسیم، که به صورت زیر است.

$$(15) \quad r^3 + 3r^2 - r - 3 = 0.$$

اما، این یک چند جمله ای درجه سه است. مشکل به نظر می رسد بتوان آنرا حل کرد. با کمی دقت متوجه می شویم که $r = 1$ یک ریشه است. پس طرف چپ (15) را بر $r - 1$ تقسیم می کنیم. لذا به عبارت فکتور شده زیر می رسیم.

$$(r - 1)(r^2 + 4r + 3) = (r - 1)(r + 1)(r + 3) = 0.$$

لذا، ریشه ها $r = 1, -1, -3$

هستند. پس جواب (14) به صورت زیر است.

$$(16) \quad y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{-3t}.$$

۲۸ - مساله با شرط اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + 2y' + 2y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

حل

یاد آوری: اگر معادله کمکی، ریشه مختلط داشته باشد، از فرمول زیر استفاده می کنیم.

$$(8) \quad y(t) = c_1 e^{(\alpha + i\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)t}$$

$$= c_1 e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) + c_2 e^{\alpha t} (\cos \beta t - i \sin \beta t).$$

معادله کمکی به صورت زیر است.

$$r^2 + 2r + 2 = 0,$$

و ریشه ها به صورت زیر هستند.

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = -1 \pm i.$$

پس $\alpha = -1$, $\beta = 1$ است. پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$y(t) = c_1 e^{-t} (\cos t + i \sin t) + c_2 e^{-t} (\cos t - i \sin t).$$

شرط اولیه را بکار می بریم. داریم.

$$y(0) = c_1 e^0 (\cos 0 + i \sin 0) + c_2 e^0 (\cos 0 - i \sin 0) = c_1 + c_2 = 0,$$

$$y'(0) = -c_1 e^0 (\cos 0 + i \sin 0) + c_1 e^0 (-\sin 0 + i \cos 0)$$

$$-c_2 e^0 (\cos 0 - i \sin 0) + c_2 e^0 (-\sin 0 - i \cos 0)$$

$$= (-1 + i)c_1 + (-1 - i)c_2$$

$$= 2.$$

در نتیجه $c_1 = -i$, $c_2 = i$ و

$$y(t) = -ie^{-t}(\cos t + i \sin t) + ie^{-t}(\cos t - i \sin t),$$

اگر ساده کنیم.

$$y(t) = 2e^{-t} \sin t$$

۲۹ - جواب کلی معادله زیر را پیدا کنید.

حل

$$(10) \quad y'' + 2y' + 4y = 0.$$

معادله کمکی به صورت زیر است.

$$r^2 + 2r + 4 = 0,$$

ریشه های آن هم به صورت زیر است.

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = -1 \pm i\sqrt{3}.$$

پس

$$\alpha = -1, \beta = \sqrt{3},$$

و جواب کلی شماره (10) به صورت زیر است.

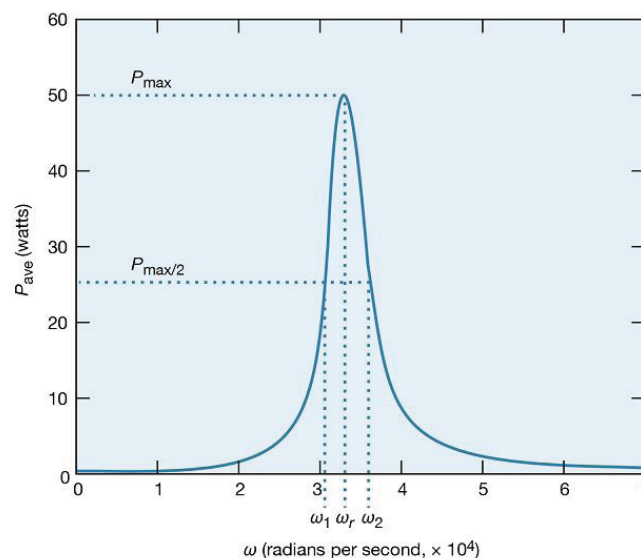
$$y(t) = c_1 e^{-t} \cos(\sqrt{3} t) + c_2 e^{-t} \sin(\sqrt{3} t).$$

هنگامی که معادله کمکی دارای ریشه های مختلط است، جوابهای حقیقی بین مقادیر مثبت و منفی نوسان می کند.

۳۰ - نشان دهید اگر $b = 0$ و $F_{ext} = 0$ باشد، معادله

$$(3) \quad my'' + by' + ky = F_{ext}(t).$$

یک جواب به شکل $y(t) = \cos \omega t$ دارد و این که فرکانس زاویه ای ω با k افزایش می یابد و با m نقصان پیدا می کند.



توضیح و یاد آوری

قانون نیوتن برای نوسان جرم و فنر ، مطابق فرمول (3) بیان می شود.
در فرمول (3) ضریب b مربوط است به اصطکاک ، F_{ext} یعنی نیروی خارجی.

حل

تحت شرایط گفته شده ، معادله (3) به صورت زیر ساده می شود.

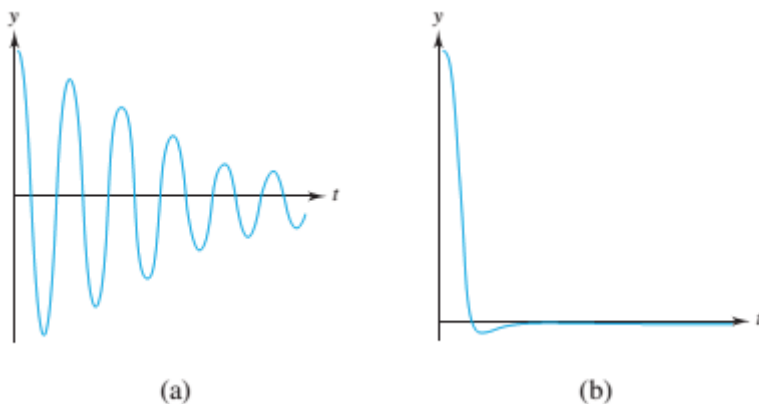
$$(4) \quad my'' + ky = 0 .$$

مشتق دوم $y(t) = \cos \omega t$ می شود $y''(t) = -\omega^2 \cos \omega t$ حالا ، اگر این را در معادله (4) بگذاریم ، خواهیم داشت.

$$my'' + ky = -m\omega^2 \cos \omega t + k \cos \omega t ,$$

که مسلماً صفر است ، اگر $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ باشد. فرمول را در بخش قبل یعنی 3.11 دیدیم.

این ω با k افزایش می یابد و با m نقصان پیدا می کند.



در تصویر بالا (a) میرایی پایین و (b) میرایی بالا.

۳۱- یک جواب خصوصی برای معادله زیر پیدا کنید.

$$(2) \quad y'' + 3y' + 2y = 3t .$$

حل

باید یک تابع $y(t)$ پیدا کنیم ، بطوری که $y'' + 3y' + 2y$ یک تابع خطی $3t$ باشد. خوب ، کدام تابع y است که در نهایت مشتق صفر م ، اول و دوم آن که با هم ترکیب کنیم ، یک تابع خطی باشد. اولین پاسخ مایک تابع خطی دیگر است. پس ممکن است $y_1(t) = At$ انتخاب کنیم. و سپس

$$y_1'' + 3y_1' + 2y_1$$

با $3t$ مقایسه و جور کنیم. ممکن است بگوییم ، این کار نمی کند. زیرا

$$y_1 = At , \quad y_1' = A , \quad y_1'' = 0$$

در این صورت داریم.

$$y_1'' + 3y_1' + 2y_1 = 3A + 2At ,$$

حالا ، برای این که مساوی $3t$ باشد ، باید هم $A = 0$ و هم $A = \frac{3}{2}$ اما اگر یک عدد ثابت به تابع که فرض کردیم ، اضافه کنیم ، شاید بهتر باشد. مثلا ، بگوییم

$$y_2(t) = At + B$$

در این صورت داریم.

$$y_2' = A , \quad y_2'' = 0$$

پس

$$y_2'' + 3y_2' + 2y_2 = 3A + 2(At + B) = 2At + (3A + 2B) ,$$

این با $3t$ جور می شود اگر $2A = 3$, $3A + 2B = 0$ باشد. این سیستم را حل می کنیم. در نتیجه داریم.

$$A = \frac{3}{2} , \quad B = -\frac{9}{4}$$

مثل این که درست شد. پس تابع به صورت زیر است.

$$y_2(t) = \frac{3}{2}t - \frac{9}{4}$$

این جوامع معادله (2) است.

این مثال به ما می گوید ، جواب خصوصی معادله زیر

$$ay'' + by' + cy = Ct^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots;$$

به صورت زیر است.

$$y_p(t) = A_m t^m + \dots + A_1 t + A_0 ,$$

۳۲- یک جواب خصوصی برای معادله زیر پیدا کنید.

$$(3) \quad y'' + 3y' + 2y = 10e^{3t} .$$

حل

حدس می زنیم $y_p(t) = Ae^{3t}$ باشد.

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = 9Ae^{3t} + 3(3Ae^{3t}) + 2(Ae^{3t}) = 20Ae^{3t} .$$

با قرار دادن

$$20Ae^{3t} = 10e^{3t}$$

برای A حل می کنیم. ، داریم. $A = 1/2$ پس

$$y_p(t) = \frac{e^{3t}}{2}$$

یک جواب خصوصی برای (3) است.

۳۳- یک جواب خصوصی برای معادله زیر پیدا کنید.

$$(4) \quad y'' + 3y' + 2y = \sin t .$$

حل

اولین حدس ما $y_1 = A \sin t$ است. اما این ، کار نمی کند. زیرا مشتق های کسینوس به صورت های زیر است.

$$y_1'' + 3y_1' + 2y_1 = -A \sin t + 3A \cos t + 2A \sin t = A \sin t + 3A \cos t ,$$

برای این که با $\sin t$ جور بیاید ، باید $A = 0$ و $A = 1$ باشد. پس در جواب حدس ، یک کسینوس هم اضافه می کنیم.

$$\begin{aligned} y_p(t) &= A \sin t + B \cos t , \\ y_p'(t) &= A \cos t - B \sin t , \\ y_p''(t) &= -A \sin t - B \cos t , \end{aligned}$$

حالا ، (4) می شود

$$\begin{aligned} y_p''(t) + 3y_p'(t) + 2y_p(t) &= -A \sin t - B \cos t + 3A \cos t - 3B \sin t \\ &\quad + 2A \sin t + 2B \cos t \\ &= (A - 3B) \sin t + (B + 3A) \cos t \\ &= \sin t . \end{aligned}$$

جواب معادله های $A - 3B = 1, B + 3A = 0$ می شود $A = 0.1, B = -0.3$ پس تابع $y_p(t) = 0.1 \sin t - 0.3 \cos t$

یک جواب خصوصی برای (4) است.

پس ، بطور کلی یک معادله به صورت

$$(5) \quad ay'' + by' + cy = C \sin \beta t \text{ (or } C \cos \beta t) ,$$

روش ضریب های نامشخص به ما می گوید ، حدس زیر را در نظر بگیریم

$$(6) \quad y_p(t) = A \cos \beta t + B \sin \beta t$$

و (5) را برای مجهول های A, B حل کنیم.

۳۴ - یک جواب خصوصی برای

$$(8) \quad y'' + 4y = 5t^2 e^t .$$

پیدا کنید.

حل

از تجربه ای که از تمرین 31 بدست آوردیم ، می توانیم حدس زیر را در نظر بگیریم.

$$y_p(t) = (At^2 + Bt + C)e^t$$

برای این که با معادله ناممکن (8) جور بشود ، حدس زیر را داریم.

$$y_p = (At^2 + Bt + C)e^t ,$$

$$y_p' = (2At + B)e^t + (At^2 + Bt + C)e^t ,$$

$$y_p'' = 2Ae^t + 2(2At + B)e^t + (At^2 + Bt + C)e^t ,$$

$$\begin{aligned} y_p'' + 4y_p &= e^t(2A + 2B + C + 4C) + te^t(4A + B + 4B) + t^2 e^t(A + 4A) \\ &= 5t^2 e^t . \end{aligned}$$

با جور کردن جمله های مشابه ، داریم. $A = 1, B = -\frac{4}{5}, C = -\frac{2}{25}$ پس جواب زیر را بدست می آوریم.

$$y_p(t) = \left(t^2 - \frac{4t}{5} - \frac{2}{25}\right)e^t.$$

در بخش های مختلف فصل سوم ، مفصلا روش های معادله های خطی مرتبه دوم بحث شده است و می توانید آن روش ها را بکار ببرید. هر روشی که برای شما آسان است بکار ببرید.

۳۵- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' - 5y' + 4y = e^{4x}.$$

حل

توجه : برای آشنا شدن با نماد های مختلف ، $y_c = y_0$ و $y_p = Y_p$ نام گذاری کرده ایم. تا اگر در کتب مختلف ، به آنها برخورد کنید ، دچار سردرگمی نشوید. معادله کمکی به صورت زیر است.

$$r^2 - 5r + 4 = 0$$

$$(r - 4)(r - 1) = 0 \quad r_1 = 4, \quad r_2 = 1$$

پس ، جواب عمومی معادله همگن به صورت زیر است.

$$y_0(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^x,$$

حالا ، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل نا همگن را پیدا می کنیم. ملاحظه می کنید که توان تابع نمایی در سمت راست با ریشه $r_1 = 4$ همسان است. پس فرض می کنیم جواب خصوصی به صورت زیر باشد.

$$y_1 = A x e^{4x}.$$

مشتق ها هم به صورت زیر هستند.

$$y_1' = (A x e^{4x})' = A e^{4x} + 4A x e^{4x} = (A + 4A x) e^{4x};$$

$$y_1'' = [(A + 4A x) e^{4x}]' = 4A e^{4x} + (4A + 16A x) e^{4x} = (8A + 16A x) e^{4x}.$$

با جانشین کردن y_1 و مشتق های آن در معادله دیفرانسیل ، داریم.

$$(8A + 16A x) e^{4x} - 5(A + 4A x) e^{4x} + 4A x e^{4x} = e^{4x}, \Rightarrow 8A + \cancel{16A x} - 5A - \cancel{20A x} + \cancel{4A x} = 1, \Rightarrow 3A = 1, \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

پس جواب کلی معادله نا همگن ، به صورت زیر است.

$$y = y_0 + y_1 = C_1 e^{4x} + C_2 e^x + \frac{x}{3} e^{4x}.$$

۳۶- جواب کلی معادله زیر را پیدا کنید.

$$y'' + 9y = 2x^2 - 5.$$

حل

معادله کمکی معادله همگن به صورت زیر است.

$$k^2 + 9 = 0, \Rightarrow k^2 = -9, \Rightarrow k_{1,2} = \pm 3i.$$

ملاحظه می کنید که ریشه ها مختلط هستند. اینجا بجای r از حرف k برای ریشه ها استفاده کرده ایم. پس جواب عمومی معادله همگن مربوطه به صورت زیر است.

$$y_0(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

حالا، جواب خصوصی را می سازیم. سمت راست معادله داده شده، یک تابع درجه دوم است، پس می توانیم جواب خصوصی را به صورت زیر حدس بزنیم.

$$y_1 = Ax^2 + Bx + C,$$

باید A, B, C را پیدا کنیم. ابتدا مشتق های جواب حدسی را پیدا می کنیم.

$$y_1' = 2Ax, \quad y_1'' = 2A.$$

حالا در معادله دیفرانسیل اصلی می گذاریم.

$$2A + 9(Ax^2 + Bx + C) = 2x^2 - 5, \Rightarrow 2A + 9Ax^2 + 9Bx + 9C = 2x^2 - 5.$$

ضریب های جمله های مشابه را مساوی قرار می دهیم.

$$\begin{cases} 9A = 2 \\ 9B = 0 \\ 2A + 9C = -5 \end{cases}, \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{9} \\ B = 0 \\ C = -\frac{49}{81} \end{cases}.$$

پس جواب خصوصی به صورت زیر است.

$$y_1 = \frac{2}{9}x^2 - \frac{49}{81}.$$

و در نهایت جواب کلی معادله دیفرانسیل نا همگن داده شده، به صورت زیر است.

$$y = y_0 + y_1 = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{49}{81}.$$

۳۷- معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + 16y = 2\cos^2 x.$$

حل

معادله کمکی مدله همگن مربوطه و ریشه های آن به صورت زیر است.

$$k^2 + 16 = 0, \Rightarrow k^2 = -16, \Rightarrow k_{1,2} = \pm 4i,$$

پس جواب عمومی به صورت زیر است.

$$y_0(x) = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x.$$

حالا، باید جواب خصوصی را حدس بزنیم. برای این کار ابتدا، سمت راست را باز نویسی می کنیم.

$$2\cos^2 x = \cos 2x + 1.$$

پس جواب خصوصی می تواند به صورت زیر باشد.

$$y_1 = A \cos 2x + B \sin 2x + C,$$

برای پیدا کردن ضریب های مجهول ، مشتق ها را پیدا می کنیم.

$$y_1' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x,$$

$$y_1'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

در معادله دیفرانسیل می گذاریم.

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 16(A \cos 2x + B \sin 2x + C) = \cos 2x + 1,$$

$$-4A \cos 2x - 4B \sin 2x + 16A \cos 2x + 16B \sin 2x + 16C = \cos 2x + 1,$$

$$12A \cos 2x + 12B \sin 2x + 16C = \cos 2x + 1.$$

ضریب های جمله های مشابه را مساوی قرار می دهیم.

$$\begin{cases} 12A = 1 \\ 12B = 0, \\ 16C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{12} \\ B = 0 \\ C = \frac{1}{16} \end{cases}.$$

پس جواب خصوصی به صورت زیر است.

$$y_1 = \frac{1}{12} \cos 2x + \frac{1}{16}.$$

و در نهایت ، جواب کلی معادله دیفرانسیل نا همگن به صورت زیر است.

$$y = y_0 + y_1 = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + \frac{1}{12} \cos 2x + \frac{1}{16}.$$

۳۸- معادله زیر را ملاحظه کنید.

$$\frac{dp}{dt} = 0.5p - 450, \quad (4)$$

معادله بالا ، معادله رشد جمعیت موش های صحرایی است که در جوار چند جغد زندگی می کنند ، و فرض بر این است که جغد ها ، روزانه ۱۵ موش را می خورند . در معادله شماره (۴) عدد ۴۵۰- تعداد موش هایی که در مدت یک ماه توسط جغد ها خورده می شوند. r هم نرخ رشد جمعیت است.

الف - تعادل جمعیت این موش ها را پیدا کنید.

ب - معادله دیفرانسیل را حل کنید.

حل

الف - برای این کار $\frac{dp}{dt} = 0$ قرار می دهیم.

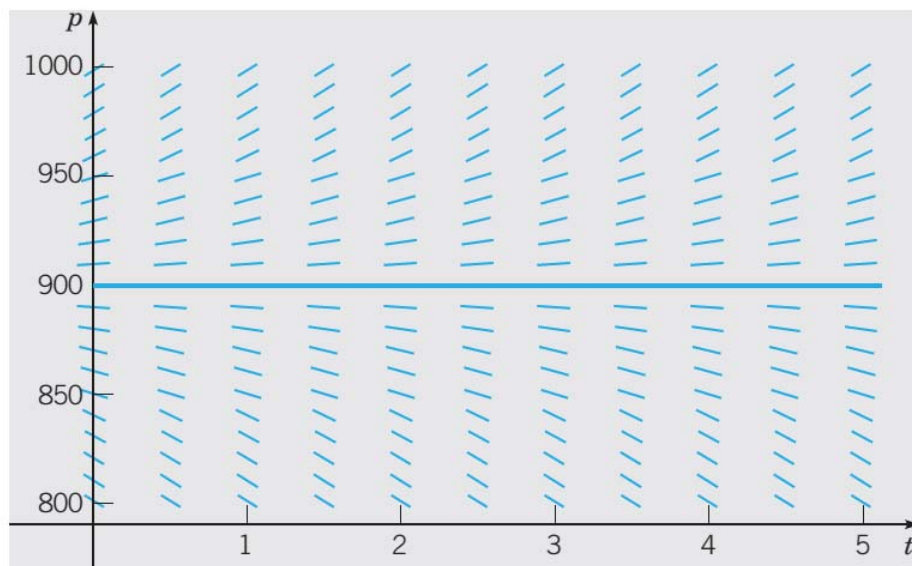
$$0 = 0.5p - 450$$

$$0.5p = 450$$

$$p = \frac{450}{0.5} = 900$$

پس تعادل جمعیت ۹۰۰ است.

میدان راستا هم به صورت زیر است ملاحظه می کنید که اگر تعداد موش ها کمتر از ۹۰۰ بشود ، جمعیت موش ها زوال پیدا می کند ، بر عکس اگر از ۹۰۰ تجاوز کند ، جمعیت افزایش پیدا می کند.



ب

معادله دیفرانسیل را باز نویسی می کنیم.

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p - 900}{2}, \quad (5)$$

یا اگر $p \neq 900$ باشد ، داریم.

$$\frac{dp/dt}{p - 900} = \frac{1}{2}. \quad (6)$$

بر اساس قاعده زنجیره ای ، سمت چپ معادله (6) مشتق $\ln|p - 900|$ است نسبت به t پس داریم.

$$\frac{d}{dt} \ln|p - 900| = \frac{1}{2}. \quad (7)$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\ln|p - 900| = \frac{t}{2} + C, \quad (8)$$

طرفین را به صورت نمایی می نویسیم.

$$|p - 900| = e^{(t/2)+C} = e^C e^{t/2}, \quad (9)$$

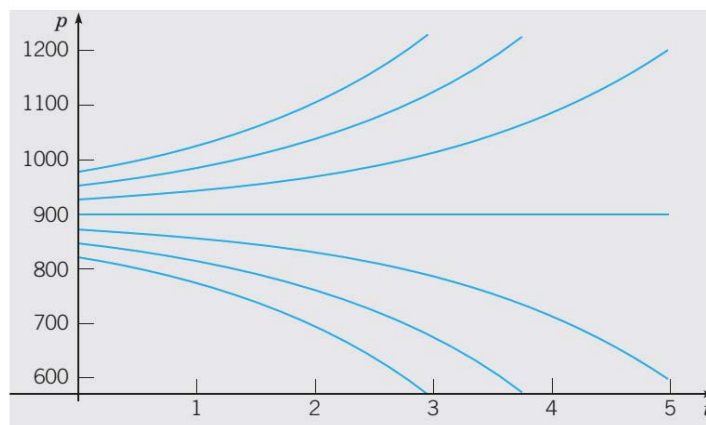
یا

$$p - 900 = \pm e^C e^{t/2}, \quad (10)$$

و در نهایت.

$$p = 900 + ce^{t/2}, \quad (11)$$

توجه دارید که $c = \pm e^C$ بکار بردیم. همچنین می دانید که تابع ثابت $p = 900$ هم یک جواب است. این هم نمودار برای مقادیر مختلف c



معادله (4) را به طریق زیر هم می توان حل کرد.

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= 0.5 - 450 \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{p - 900}{2} \\ 2 \frac{dp}{dt} &= p - 900 \\ 2dp &= (p - 900)dt \\ dp &= \frac{p - 900}{2} dt \\ \frac{1}{p - 900} dp &= \frac{1}{2} dt \\ \int \frac{1}{p - 900} dp &= \int \frac{1}{2} dt \\ \ln(p - 900) &= \frac{t}{2} + c \\ e^{\ln(p-900)} &= e^{\frac{t}{2} + c} \\ y - 900 &= e^{\frac{t}{2} + c} \\ y &= Ce^{\frac{t}{2}} + 900 \end{aligned}$$

۳۹- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}. \quad (6)$$

چند جواب را رسم کنید ، جواب مخصوص که نمودار آن از نقطه $(0, 1)$ می گذرد پیدا کنید.

حل

ابتدا $\mu(t)$ را پیدا می کنیم.

$$\mu(t) = e^{\int p dt} = e^{\int \frac{1}{2} dt} = e^{\frac{1}{2}t}$$

حالا ، طرفین معادله (۶) را در $\mu(t)$ ضرب می کنیم.

$$e^{t/2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}e^{t/2}y = \frac{1}{2}e^{5t/6}. \quad (14)$$

طرف چپ معادله (۱۴) مشتق $e^{\frac{t}{2}}y$ است. پس معادله (۱۴) به صورت زیر است.

$$\frac{d}{dt}(e^{t/2}y) = \frac{1}{2}e^{5t/6}. \quad (15)$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$e^{t/2}y = \frac{3}{5}e^{5t/6} + c, \quad (16)$$

و در نهایت معادله (۱۶) را برای y حل می کنیم. این جواب کلی معادله (۶) است.

$$y = \frac{3}{5}e^{t/3} + ce^{-t/2}. \quad (17)$$

برای پیدا کردن جوابی که از نقطه $(0, 1)$ می گذرد ، $t = 0$ و $y = 1$ را در معادله (۱۷) می گذاریم.

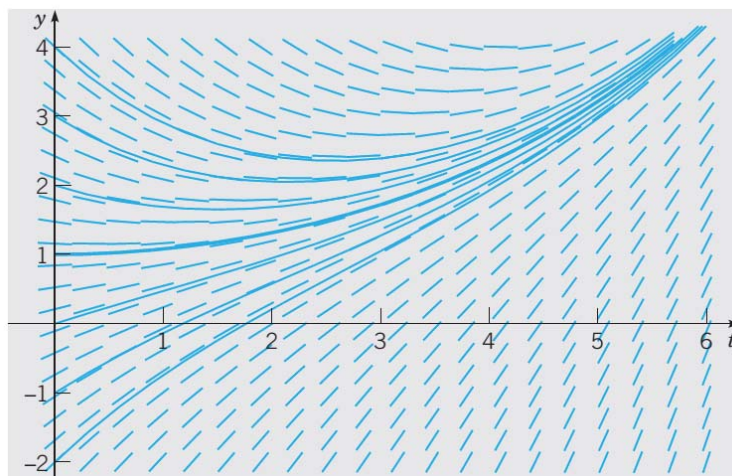
$$1 = (3/5) + c.$$

$$c = 2/5$$

پس جواب مورد نظر به صورت زیر است.

$$y = \frac{3}{5}e^{t/3} + \frac{2}{5}e^{-t/2}. \quad (18)$$

این هم نمودار ، جوابی که از $(0, 1)$ می گذرد ، ضخیم تر رسم شده است.



۴۰ - معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dt} - 2y = 4 - t \quad (24)$$

نمودار های چند جواب را رسم کنید. در مورد رفتار جوابها هنگامی که $t \rightarrow \infty$ بحث کنید.

حل

عامل انتگرال گیری $\mu(t) = e^{-2t}$ است. طرفین معادله دیفرانسیل داده شده را در $\mu(t)$ ضرب می کنیم. پس داریم.

$$e^{-2t} \frac{dy}{dt} - 2e^{-2t}y = 4e^{-2t} - te^{-2t}, \quad (25)$$

یا

$$\frac{d}{dt}(e^{-2t}y) = 4e^{-2t} - te^{-2t}. \quad (26)$$

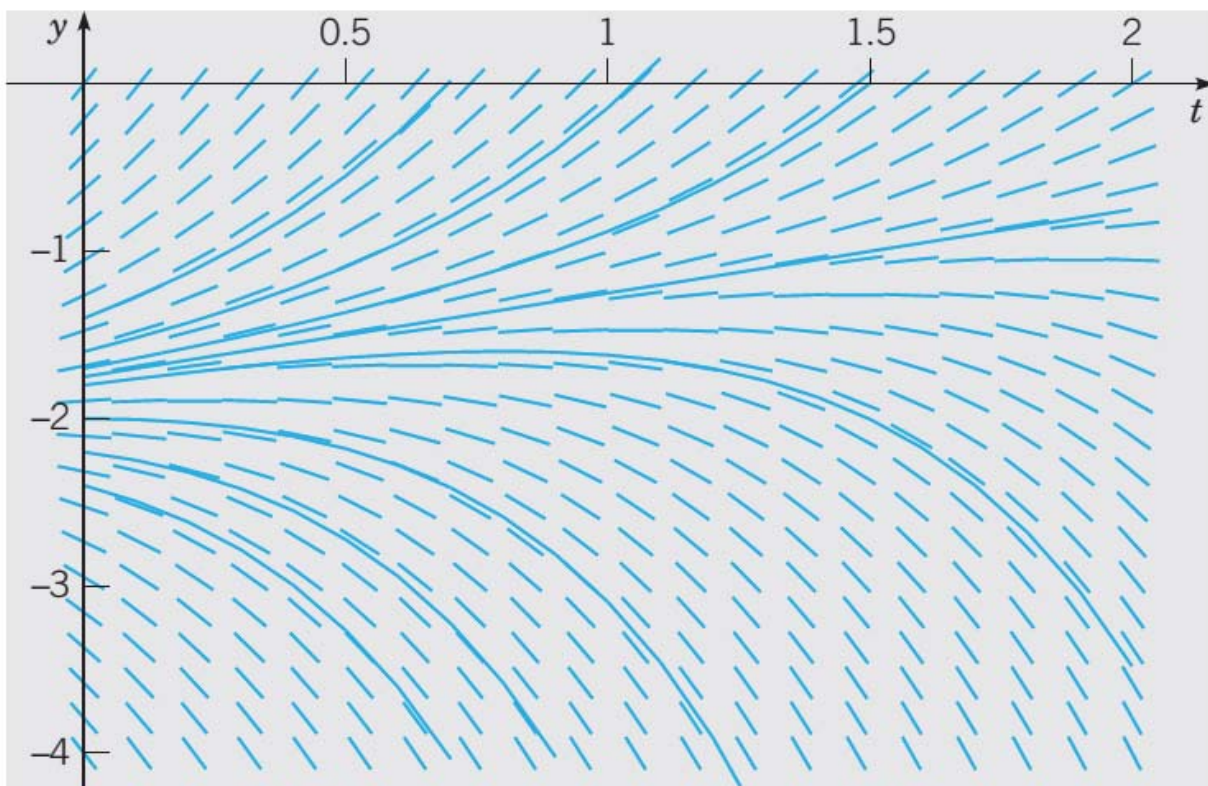
از طرفین انتگرال می گیریم. پس داریم.

$$e^{-2t}y = -2e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + c,$$

در آخرین جمله معادله (26) از طریق انتگرال گیری جزئی عمل کردیم. پس جواب کلی معادله (24) به صورت زیر است.

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + ce^{2t}. \quad (27)$$

میدان راستای معادله در زیر ملاحظه می کنید.



رفتار جواب برای مقادیر بزرگ t توسط جمله ce^{2t} مشخص می شود. اگر $c \neq 0$ باشد، پس جواب بصورت توانی رشد می کند، با همان علامت c . پس جواب واگرا است برای مقادیر بزرگ t

۴۱- مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$ty' + 2y = 4t^2, \quad (34)$$

$$y(1) = 2. \quad (35)$$

حل

معادله (34) را باز نویسی می کنیم تا $p(t)$ و $g(t)$ مشخص شود و به صورت استاندارد بشود.

$$y' + (2/t)y = 4t, \quad (36)$$

پس $p(t) = \frac{2}{t}$ و $g(t) = 4t$ است. حالا، بتد $\mu(t)$ را پیدا کنیم.

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2 \ln |t|} = t^2.$$

معادله (36) را در $\mu(t)$ ضرب می کنیم. پس داریم.

$$t^2 y' + 2ty = (t^2 y)' = 4t^3,$$

انتگرال می گیریم. پس داریم.

$$t^2 y = t^4 + c,$$

برای y حل می کنیم. ، پس جواب کلی معادله (34) به صورت زیر است.

$$y = t^2 + \frac{c}{t^2} \quad (37)$$

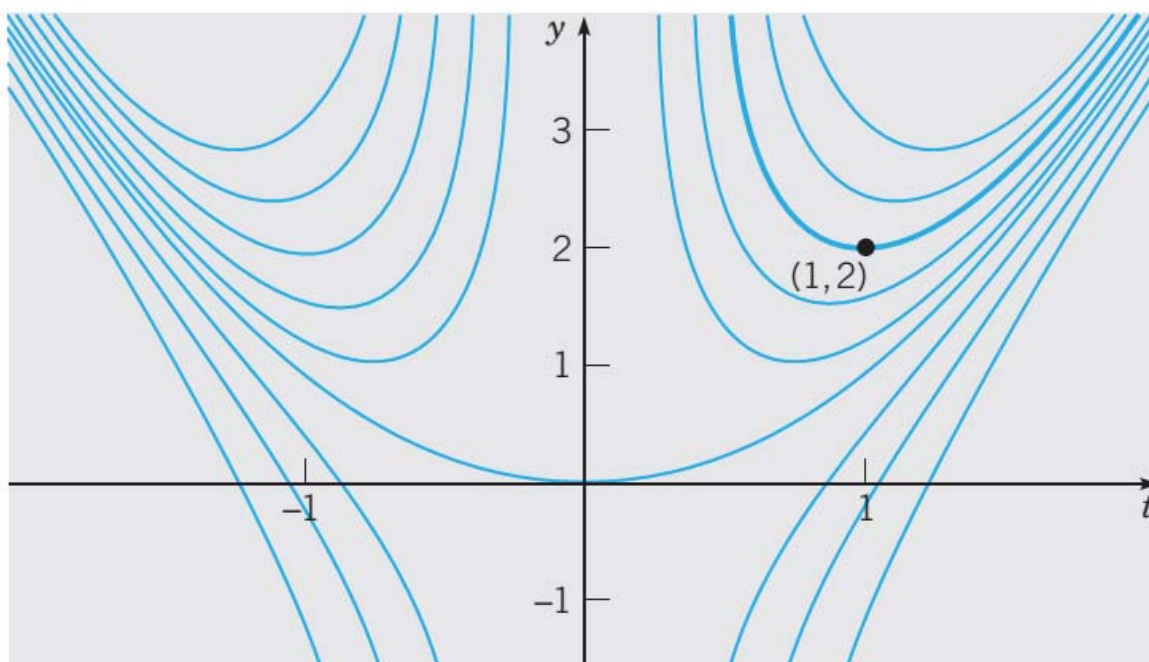
برای این که شرط اولیه (35) برقرار باشد، باید $c = 1$ انتخاب کنیم. زیرا

$$2 = 1^2 + \frac{c}{1}, \quad c = 1$$

پس داریم.

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \quad t > 0 \quad (38)$$

نمودار برای مقادیر مختلف c در ذیل ملاحظه می کنید. شرط اولیه (2,1) هم روی نمودار مشخص شده است.



۴۲ - مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$2y' + ty = 2, \quad (41)$$

$$y(0) = 1. \quad (42)$$

حل

طرفین (41) را بر 2 تقسیم می کنیم تا به صورت استاندارد نوشته شود.

$$y' + (t/2)y = 1. \quad (43)$$

پس $p(t) = \frac{t}{2}$ است. و عامل انتگرال گیری $\mu(t) = e^{\frac{t^2}{4}}$ است. طرفین (43) را در $\mu(t)$ ضرب می کنیم. پس داریم.

$$e^{t^2/4}y' + \frac{t}{2}e^{t^2/4}y = e^{t^2/4}. \quad (44)$$

سمت چپ (44) مشتق $e^{\frac{t^2}{4}}y$ است. پس از طرفین انتگرال می گیریم. داریم.

$$e^{t^2/4}y = \int e^{t^2/4} dt + c. \quad (45)$$

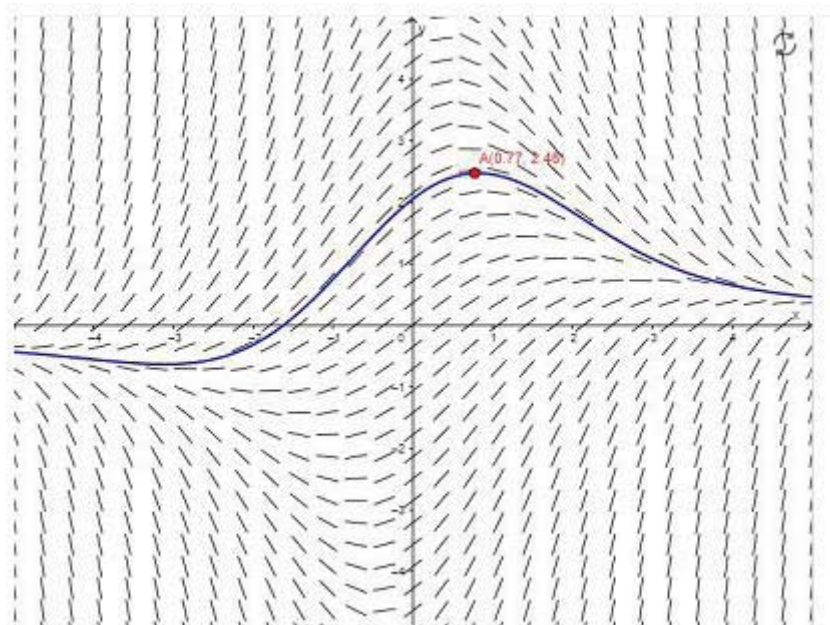
انتگرال سمت راست (45) را نمی توان به اسانی محاسبه کرد. پس آنرا بدون محاسبه رها می کنیم. اما با در نظر گرفتن مقدار اولیه $t = 0$ معادله (45) را به صورت زیر می نویسیم.

$$e^{t^2/4}y = \int_0^t e^{s^2/4} ds + c, \quad (46)$$

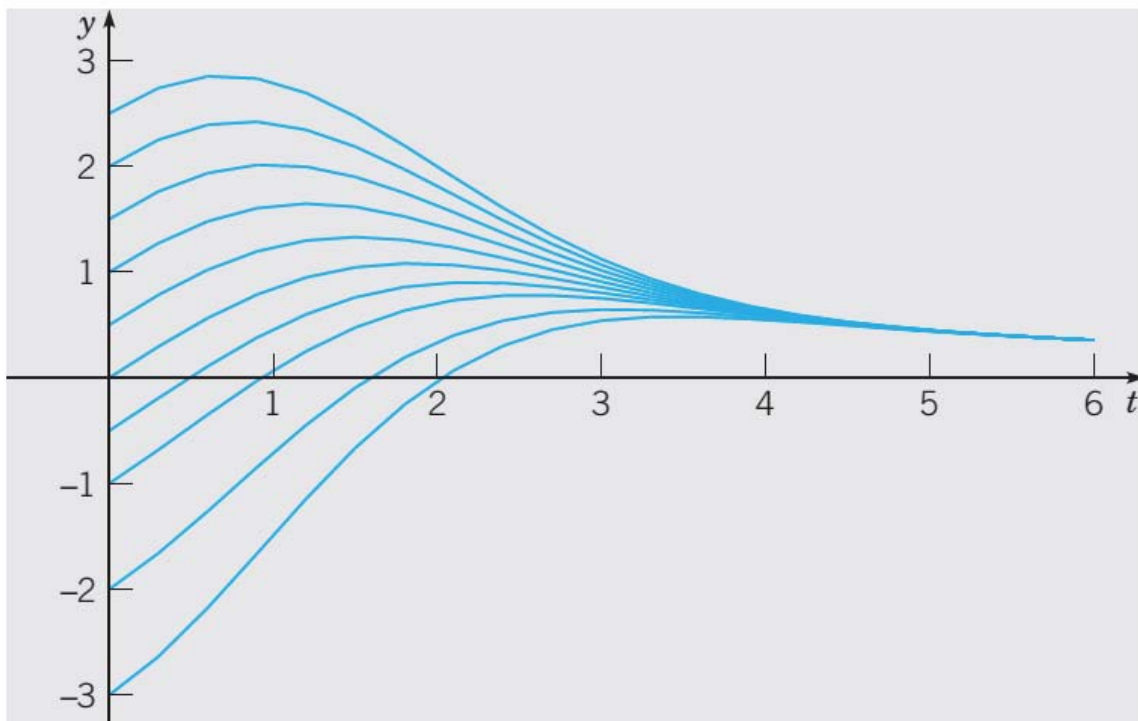
پس جواب کلی (41) به صورت زیر است.

$$y = e^{-t^2/4} \int_0^t e^{s^2/4} ds + ce^{-t^2/4}. \quad (47)$$

برای این که شرط اولیه برقرار باشد، باید $c = 1$ باشد. میدان راستا توسط نرم افزار به صورت زیر است. ملاحظه می کنید، اگرچه نتوانستیم معادله دیفرانسیل را حل کنیم، اما، از طریق رسم میدان راستا، می توانیم رفتار معادله دیفرانسیل را پیدا کنیم.



این هم منحنی انتگرال برای $2y' + ty = 2$



۴۳- نشان دهید که معادله زیر تفکیک پذیر است و یک معادله برای منحنی های انتگرال آن پیدا کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2} \quad (6)$$

حل

اگر (6) را به صورت زیر بنویسیم

$$-x^2 + (1-y^2) \frac{dy}{dx} = 0, \quad (7)$$

پس (7) به صورت زیر است.

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0.$$

و لذا (6) تفکیک پذیر است.

بر اساس آنچه در حسابان خوانده ایم ، اگر y یک تابع x باشد ، پس براساس قاعده زنجیره ای ، داریم.

$$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dy}f(y) \frac{dy}{dx} = f'(y) \frac{dy}{dx}.$$

مثلا اگر $f(y) = y - \frac{y^3}{3}$ پس داریم.

$$\frac{d}{dx}(y - y^3/3) = (1 - y^2) \frac{dy}{dx}.$$

پس جمله دوم معادله (7) مشتق $y - \frac{y^3}{3}$ است نسبت به x و جمله اول ، مشتق $-\frac{y^3}{3}$ است. لذا معادله (7) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{x^3}{3} \right) + \frac{d}{dx} \left(y - \frac{y^3}{3} \right) = 0,$$

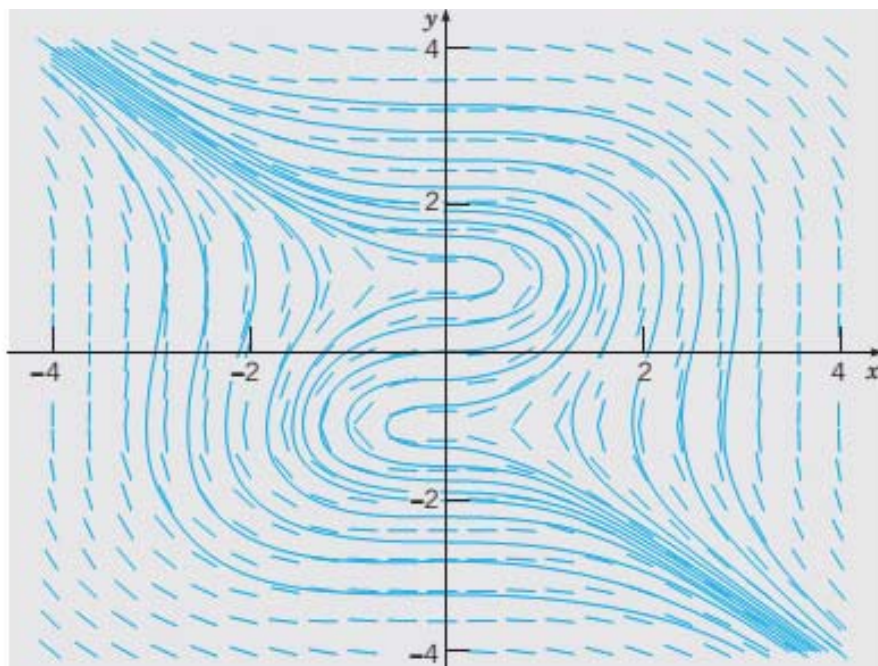
یا

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{x^3}{3} + y - \frac{y^3}{3} \right) = 0.$$

پس با انتگرال گرفتن ، داریم.

$$-x^3 + 3y - y^3 = c, \quad (8)$$

معادله (8) یک معادله برای منحنی ها انتگرال معادله (6) است. یک میدا راستا و چند منحنی انتگرال در زیر ملاحظه می کنید.



۴۴- مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1, \quad (17)$$

و بازه ای که در آن جواب وجود دارد ، مشخص کنید.

حل

معادله دیفرانسیل را می توان به صورت زیر نوشت.

$$2(y-1) dy = (3x^2 + 4x + 2) dx.$$

از طرفین انتگرال می گیریم. پس داریم.

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c, \quad (18)$$

شعرای اولیه را در (18) می گذاریم ، پس $c = 3$ است. لذا جواب مساله با مقدار اولیه به صورت تلویحی ، مطابق زیر است.

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3. \quad (19)$$

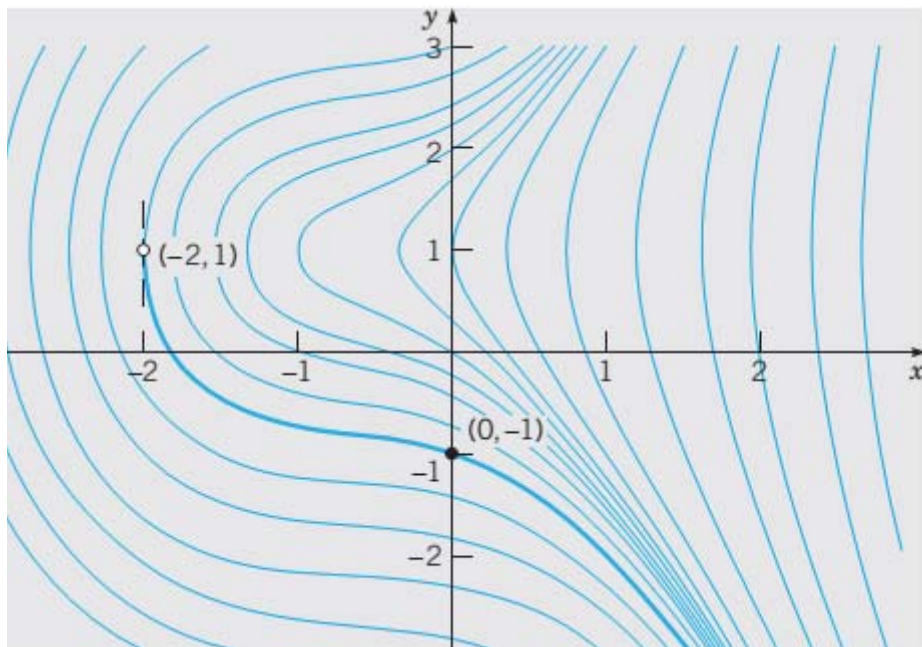
برای پیدا کردن جواب صریح ، باید معادله (19) را برای y حل کنیم. پس داریم.

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}. \quad (20)$$

معادله (20) دو جواب برای معادله دیفرانسیل داده شده به ما می دهد ، اما یکی از آنها ، شرط اولیه را بر قرار می کند. آن که علامت منفی دارد ، جواب معادله (17) است.

$$y = \phi(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \quad (21)$$

برای پیدا کردن بازه معتبر برای جواب (21) باید مقادیری برای x پیدا کنیم که مقدار زیر رادیکال منفی نشود. تنها صفر عبارت زیر رادیکال ، $x = -2$ است. پس بازه مورد نظر $x > -2$ است. جواب مساله با مقدار اولیه و منحنی های دیگر در ذیل می آید.



۴۵ - معادله زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - x^3}{4 + y^3} \quad (22)$$

و نمودار های چند منحنی انتگرال را رسم کنید. همچنین، جوابی که از نقطه $(0, 1)$ می گذرد پیدا کنید.

حل

معادله را به صورت زیر باز نویسی می کنیم.

$$(4 + y^3) dy = (4x - x^3) dx,$$

از طرفین انتگرال می گیریم، در ۴ ضرب می کنیم و باز نویسی می کنیم و در نهایت داریم.

$$\int (4 + y^3) dy = \int (4x - x^3) dx,$$

$$4y + \frac{1}{4}y^4 = 2x^2 - \frac{1}{4}x^4 + c$$

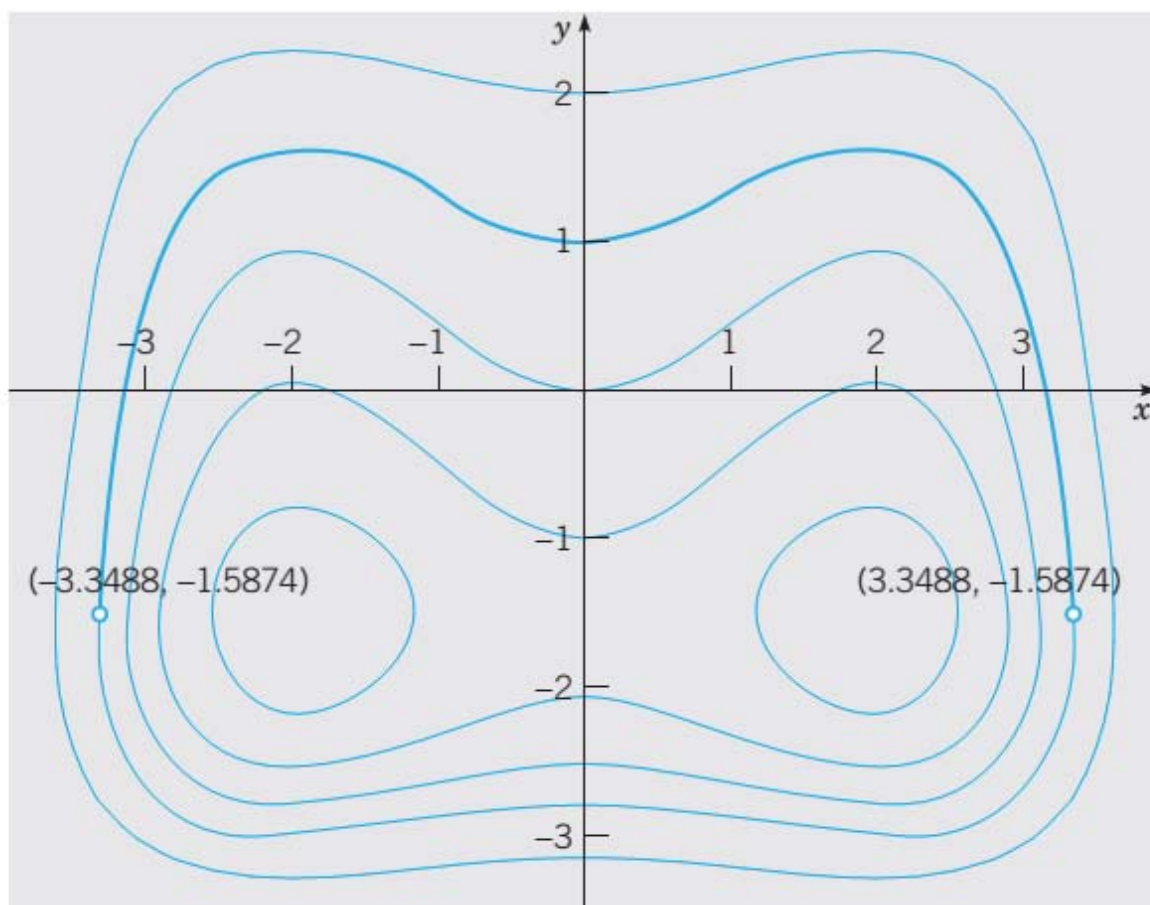
$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = c, \quad (23)$$

هر تابع مشتق پذیر $y = \phi(x)$ که معادله (23) را برقرار کند، یک جواب معادله (22) است. نمودار معادله (23) برای چند مقدار مختلف c در زیر می آید.

برای پیدا کردن جواب مخصوص که از $(0, 1)$ می گذرد، $x = 0$ و $y = 1$ در معادله (23) می گذاریم و نتیجه $c = 17$ بدست می آوریم. پس جواب معادله دیفرانسیل داده شده بطور تلویحی به صورت زیر است.

$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = 17. \quad (24)$$

این جواب، در تصویر، ضخیم تر رسم شده است.



۴۶- مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید و بازه ای که در آن ، جواب وجود دارد مشخص کنید.

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1, \quad (20)$$

حل

چون $f(t, y) = y^2$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ در همه جا پیوسته است ، پس این مساله یک جواب منحصر به فرد دارد. برای پیدا کردن جواب ، متغیر ها را تفکیک می کنیم و انتگرال می گیریم

$$y' = y^2$$

$$y'(t) = \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = y^2$$

$$dy = y^2 dt$$

$$y^{-2} dy = dt$$

(21)

$$\int y^{-2} dy = \int 1 dt$$

$$-y^{-1} = t + c.$$

$$y = -\frac{1}{t+c}. \quad (22)$$

برای این که شرط اولیه برقرار باشد، باید $c = -1$ باشد. پس

$$y = \frac{1}{1-t} \quad (23)$$

جواب مساله با مقدار اولیه داده شده است. پس جواب تنها در بازه $-\infty < t < 1$ وجود دارد.

۴۷- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y' = 0. \quad (16)$$

حل

معادله (16) را می توان به صورت زیر نوشت.

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2e^y - 1)dy = 0$$

مشتق های پاره ای را محاسبه می کنیم.

$$M_y(x, y) = \cos x + 2xe^y = N_x(x, y),$$

پس معادله داده شده، کامل است. پس داریم.

$$\psi_x(x, y) = y \cos x + 2xe^y,$$

$$\psi_y(x, y) = \sin x + x^2e^y - 1.$$

از معادله اول انتگرال می گزینیم.

$$\psi(x, y) = y \sin x + x^2e^y + h(y). \quad (17)$$

در معادله دوم می گذاریم.

$$\psi_y(x, y) = \sin x + x^2e^y + h'(y) = \sin x + x^2e^y - 1.$$

پس $h'(y) = -1$ و $h(y) = -y$ است. می توانیم اعداد ثابت را حذف کنیم. $h(y)$ در معادله (17) جانشین می کنیم.

$$\psi(x, y) = y \sin x + x^2e^y - y.$$

پس جواب تلویحی (16) به صورت زیر است.

$$y \sin x + x^2e^y - y = c. \quad (18)$$

۴۸- مساله به مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{dy}{dt} = 3 - 2t - \frac{1}{2}y, \quad y(0) = 1. \quad (11)$$

با استفاده از روش اوایلر و $h = 0.2$ مقادیر تقریبی جواب معادله (11) در

$$t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$$

پیدا کنید و آنها را با مقادیر جواب واقعی مساله با مقدار اولیه مقایسه کنید.

راهنمایی: $\mu(t) = e^{\frac{t}{2}}$ است. برای پیدا کردن خط مماس تقریبی از معادله زیر استفاده کنید.

$$y = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0). \quad (3)$$

حل

با استفاده از $\mu(t)$ جواب مساله با مقدار اولیه (11) به صورت زیر است.

$$y = \phi(t) = 14 - 4t - 13e^{-t/2}. \quad (12)$$

برای محاسبه تقریبی جواب از طریق روش اویلر، با مقادیر اولیه $t_0 = 0$ و $y_0 = 1$ داریم.

$$f_0 = f(t_0, y_0) = f(0, 1) = 3 - 0 - 0.5 = 2.5$$

پس با استفاده از معادله (3) خط مماس تقریبی در $t = 0$ به صورت زیر است.

$$y = 1 + 2.5(t - 0) = 1 + 2.5t. \quad (13)$$

با $t = 0.2$ معادله (13) داریم.

$$y_1 = 1 + (2.5)(0.2) = 1.5.$$

در قدم بعدی داریم.

$$f_1 = f(0.2, 1.5) = 3 - 2(0.2) - (0.5)(1.5) = 3 - 0.4 - 0.75 = 1.85.$$

پس خط مماس تقریبی نزدیک $t = 0.2$ به صورت زیر است.

$$y = 1.5 + 1.85(t - 0.2) = 1.13 + 1.85t. \quad (14)$$

محاسبه عبارت در معادله (14) برای $t = 0.4$ داریم.

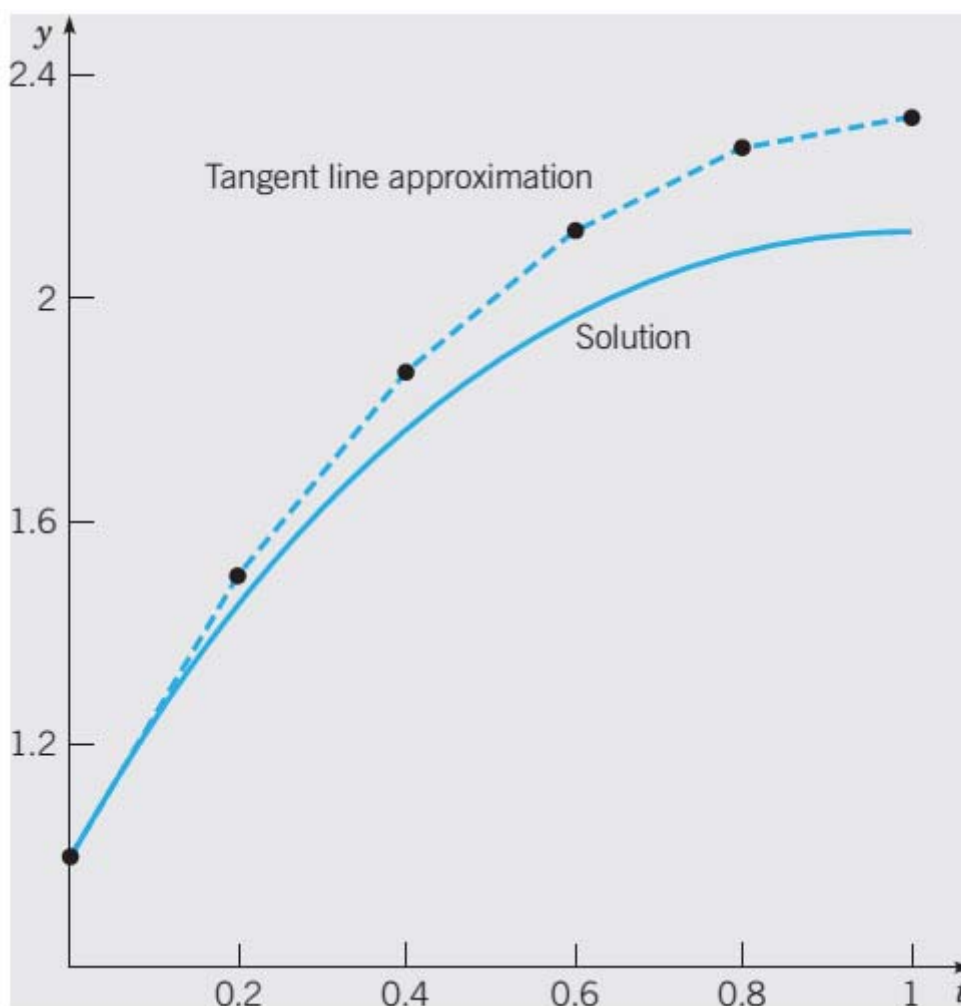
$$y_2 = 1.13 + 1.85(0.4) = 1.87.$$

به همین سیاق ادامه می دهیم. پس جدول زیر را داریم.

جدول اویلر

t	Exact	Euler with $h = 0.2$	Tangent line
0.0	1.00000	1.00000	$y = 1 + 2.5t$
0.2	1.43711	1.50000	$y = 1.13 + 1.85t$
0.4	1.75650	1.87000	$y = 1.364 + 1.265t$
0.6	1.96936	2.12300	$y = 1.6799 + 0.7385t$
0.8	2.08584	2.27070	$y = 2.05898 + 0.26465t$
1.0	2.11510	2.32363	

در جدول بالا $Tangent\ line$ یعنی خط مماس $Exact$ یعنی دقیق این هم نمودار



در تصویر بالا *Tangent line approximation* یعنی خط مماس تقریبی و *Solution* یعنی جواب.

بخش ۳.۱۳ تمرینات دوره ای ۲
۴۹ - مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} y'' - y &= 0, \\ y(0) &= 2, \quad y'(0) = -1. \end{aligned} \quad \begin{matrix} (9) \\ (10) \end{matrix}$$

حل

این ساده ترین مدله دیفرانسیل مرتبه دوم است. باید یک تابع پیدا کنیم که مشتق مرتبه دوم، مثل خود تابع باشد، این تابع $y_1 = e^t$ است. همچنین $y_2 = e^{-t}$ هم می تواند باشد. پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

اگر مشتق بگیریم، داریم.

$$y'(t) = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$$

مقادیر اولیه را بکار می بریم.

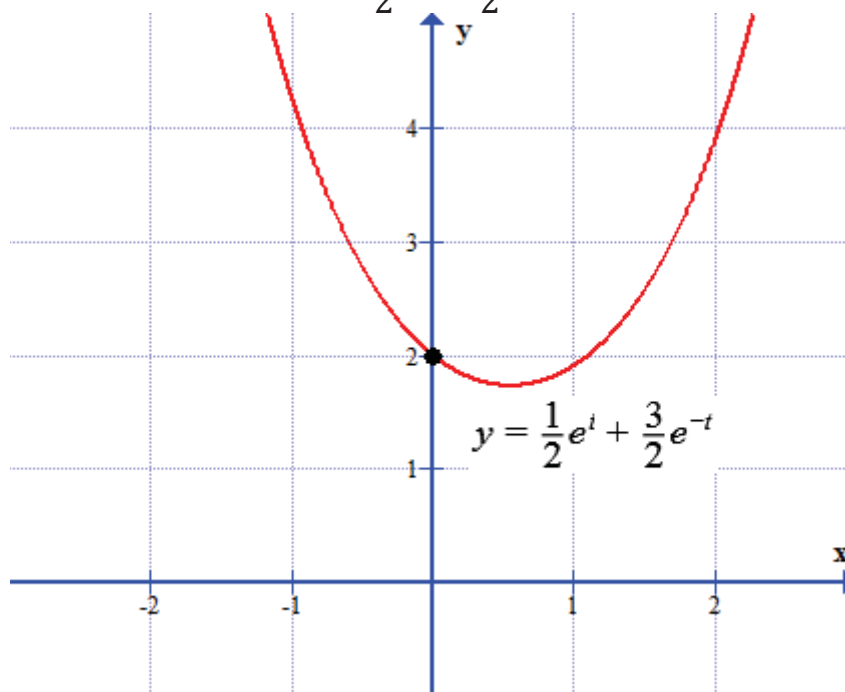
$$\begin{aligned} 2 &= c_1 + c_2 \\ -1 &= c_1 - c_2 \end{aligned}$$

این سیستم را حل می کنیم. پس داریم.

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{3}{2}$$

و در نهایت

$$y = \frac{1}{2} e^t + \frac{3}{2} e^{-t}$$



۵۰ - معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + 5y' + 6y = 0. \quad (25)$$

حل

$$r^2 + 5r + 6 = (r + 2)(r + 3) = 0.$$

$$r_1 = -2 \quad r_2 = -3$$

پس جواب کلی (25) به صورت زیر است.

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}. \quad (26)$$

۵۱- مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3. \quad (27)$$

حل

این معادله را در تمرین ۵۰ حل کردیم. حالا مقادیر اولیه را بکار می‌بریم.

در معادله (26) مقادیر $y = 2$ و $t = 0$ جانشین می‌کنیم پس داریم.

$$c_1 + c_2 = 2. \quad (28)$$

برای استفاده از شرط دوم، باید مشتق (26) بگیریم.

$$y' = -2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t}.$$

حالا، $t = 0$ و $y' = 3$ را در معادله بالا می‌گذاریم. پس داریم.

$$-2c_1 - 3c_2 = 3. \quad (29)$$

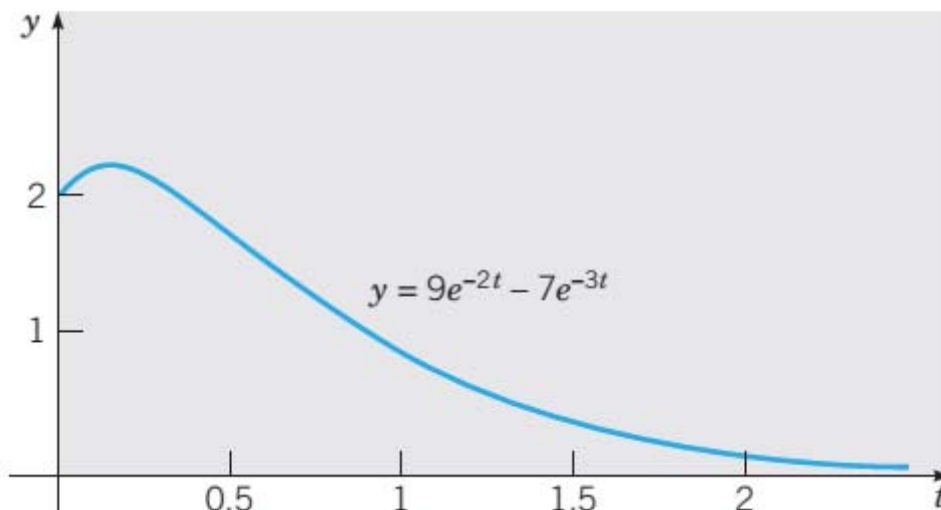
سیستم (28)، (29) را حل می‌کنیم. پس داریم.

$$c_1 = 9, \quad c_2 = -7$$

پس جواب معادله به صورت زیر است.

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t} \quad (30)$$

این هم نمودار



۵۲- مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$4y'' - 8y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{2}. \quad (31)$$

حل

معادله کمکی به صورت زیر است.

$$4r^2 - 8r + 3 = 0$$

ریشه ها هم به صورت زیر هستند.

$$r_1 = \frac{3}{2}, \quad r_2 = \frac{1}{2}$$

پس جواب کلی معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$y = c_1 e^{3t/2} + c_2 e^{t/2}. \quad (32)$$

با استفاده از مقادیر اولیه داریم.

$$c_1 + c_2 = 2, \quad \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2}.$$

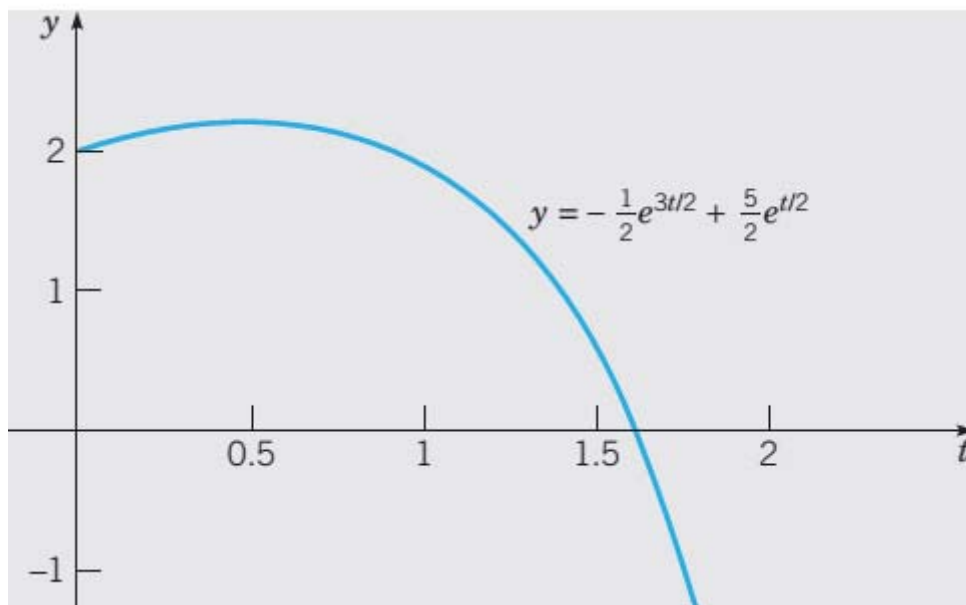
جواب معادله های بالا به صورت زیر است.

$$c_1 = -\frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{5}{2}$$

پس جواب مساله با مقادیر اولیه (31) به صورت زیر است.

$$y = -\frac{1}{2}e^{3t/2} + \frac{5}{2}e^{t/2}. \quad (33)$$

این هم نمودار جواب.



۵۳ - فرض کنید جواب معادله دیفرانسیل زیر

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

به صورت های زیر باشد.

$$y_1(t) = e^{-2t}, \quad y_2(t) = e^{-3t}$$

مطلوب است رانسکین y_1, y_2
حل

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -e^{-5t}.$$

۵۴ - نشان دهید که $y_1(t) = t^{\frac{1}{2}}$ و $y_2(t) = t^{-1}$ تشکیل مجموعه اساسی جوابهای معادله زیر را می دهند.

$$2t^2 y'' + 3ty' - y = 0, \quad t > 0. \quad (14)$$

حل

چون داریم

$$y_1'(t) = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}, \quad y_1''(t) = -\frac{1}{4} t^{-\frac{3}{2}}$$

پس داریم.

$$2t^2 \left(-\frac{1}{4} t^{-3/2}\right) + 3t \left(\frac{1}{2} t^{-1/2}\right) - t^{1/2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1\right) t^{1/2} = 0.$$

به همین طریق

$$y_2'(t) = -t^{-2}, \quad y_2''(t) = 2t^{-3}$$

پس داریم.

$$2t^2 (2t^{-3}) + 3t (-t^{-2}) - t^{-1} = (4 - 3 - 1) t^{-1} = 0.$$

حالا، رانسکین y_1, y_2 را محاسبه می کنیم.

$$W = \begin{vmatrix} t^{1/2} & t^{-1} \\ \frac{1}{2} t^{-1/2} & -t^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} t^{-3/2}. \quad (15)$$

پس $W \neq 0$ است برای $t > 0$ پس نتیجه می گیریم که y_1, y_2 تشکیل یک مجموعه جوابهای معادله را می دهند.

۵۵ - مطلوب است مجموعه اساسی جوابهای معادله دیفرانسیل زیر.

$$y'' - y = 0, \quad (16)$$

با استفاده از شرایط اولیه زیر برای $y_3(t)$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (17)$$

و شرایط اولیه زیر برای $y_4(t)$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad (19)$$

حل

جواب کلی (16) به صورت زیر است.

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad (18)$$

و شرایط اولیه (17) برقرار است اگر $c_1 = \frac{1}{2}$ و $c_2 = \frac{1}{2}$ باشد. پس

$$y_3(t) = \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} = \cosh t.$$

به همین طریق اگر $y_4(t)$ شرط اولیه (19) را برقرار کند، پس

$$y_4(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} = \sinh t.$$

چون رانسکین y_3 و y_4 به صورت زیر است

$$W(y_3, y_4)(t) = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1,$$

پس این تابع ها، تشکیل یک مجموعه اساسی جوابها ی معادله دیفرانسیل داده شده را می دهند. لذا جواب کلی معادله (16) به صورت زیر است.

$$y = k_1 \cosh t + k_2 \sinh t, \quad (20)$$

و همچنین شکل (18) هم جواب کلی معادله (16) است.

محاسبه رانسکین y_3 و y_4

$$\begin{vmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{vmatrix} = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

۵۶ - جواب کلی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$y'' + y' + 9.25y = 0, \quad (15)$$

همچنین جوابی که شرایط اولیه زیر را برقرار می کند، پیدا کنید. و نمودار آنرا رسم کنید.

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 8, \quad (16)$$

حل

معادله کمکی به صورت زیر است.

$$r^2 + r + 9.25 = 0$$

ریشه ها هم به صورت زیر هستند.

$$r_1 = -\frac{1}{2} + 3i, \quad r_2 = -\frac{1}{2} - 3i.$$

پس دو جواب های (15) به صورت زیر هستند.

$$y_1(t) = \exp\left[\left(-\frac{1}{2} + 3i\right)t\right] = e^{-t/2}(\cos 3t + i \sin 3t) \quad (17)$$

و

$$y_2(t) = \exp\left[\left(-\frac{1}{2} - 3i\right)t\right] = e^{-t/2}(\cos 3t - i \sin 3t). \quad (18)$$

می تونید رانسکین را هم محاسبه کنید، که به صورت زیر است.

$$W(y_1, y_2)(t) = -6ie^{-t},$$

مسلّم است که رانسکین، صفر نیست. پس، می توان جواب کلی معادله (15) را به صورت یک معادله خطی شامل $y_1(t)$ و $y_2(t)$ نوشت.

اما، بجای استفاده از مقادیر مختلط $y_1(t)$ و $y_2(t)$ اجازه دهید یک مجموعه اساسی جوابهای (15) را با مقادیر حقیقی بنویسیم. می دانیم که هر ترکیب خطی دو جواب، خود یک جواب است. پس

اجازه دهید ترکیب های خطی $y_1(t) + y_2(t)$ و $y_1(t) - y_2(t)$ تشکیل دهیم. به این طریق از معادله های (18) و (17) معادله های زیر را بدست می آوریم.

$$y_1(t) + y_2(t) = 2e^{-t/2} \cos 3t, \quad y_1(t) - y_2(t) = 2ie^{-t/2} \sin 3t.$$

با حذف $2i$ و 2 برای راحتی، معادله های زیر را داریم.

$$u(t) = e^{-t/2} \cos 3t, \quad v(t) = e^{-t/2} \sin 3t \quad (19)$$

که جواب معادله (15) است با مقادیر حقیقی. اگر مطمئن نیستید که $u(t)$ و $v(t)$ جواب معادله داده شده هستند، باید آنها را در معادله (15) بگذارید و ببینید که این ها، معادله را برقرار می کنند. با محاسبه رانسکین $u(t)$ و $v(t)$ نتیجه زیر را بدست می آوریم.

$$W(u, v)(t) = 3e^{-t}$$

پس $u(t)$ و $v(t)$ تشکیل یک مجموعه اساسی جوابها v جواب کلی معادله (15) می دهند و می توان آنها را به صورت زیر نوشت.

$$y = c_1 u(t) + c_2 v(t) = e^{-t/2} (c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t), \quad (20)$$

برای برقرار کردن شرط های اولیه (16) ابتدا $t = 0$ و $t = 2$ را در (20) می گذاریم، و نتیجه می شود که $c_1 = 2$ سپس با مشتق گرفتن از (20) و قرار دادن $t = 0$ و $y' = 8$ نتیجه می شود

$$-\frac{1}{2}c_1 + 3c_2 = 8,$$

و در نهایت $c_2 = 8$ بدست می آید

پس جواب مساله با شرط اولیه (16)، (15) به صورت زیر است.

$$y = e^{-t/2} (2 \cos 3t + 3 \sin 3t). \quad (21)$$

در زیر نمودار را ملاحظه می کنید.



۵۷ - جواب مساله با شرط اولیه زیر را پیدا کنید.

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1. \quad (25)$$

حل

معادله کمکی به صورت زیر است.

$$16r^2 - 8r + 145 = 0$$

و ریشه ها به صورت زیر هستند.

$$r = 1/4 \pm 3i.$$

پس ، جواب کلی معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$y = c_1 e^{t/4} \cos 3t + c_2 e^{t/4} \sin 3t. \quad (26)$$

برای بکار بردن اولین شرط اولیه ، $t = 0$ را در معادله (26) می گذاریم ، پس داریم.

$$y(0) = c_1 = -2.$$

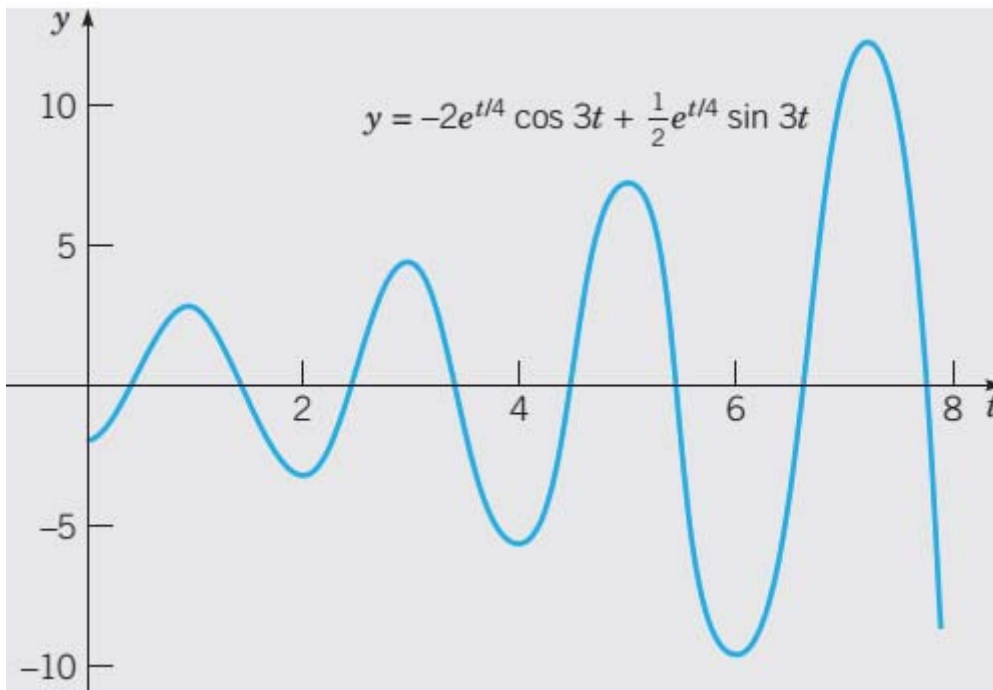
برای استفاده از شرط دوم ، باید از معادله (26) مشتق بگیریم و سپس $t = 0$ قرار دهیم. به این طریق ، معادله زیر را بدست می آوریم.

$$y'(0) = \frac{1}{4}c_1 + 3c_2 = 1,$$

از این معادله $c_2 = \frac{1}{2}$ بدست می آوریم. با بکار بردن c_1 و c_2 در معادله (26) داریم.

$$y = -2e^{t/4} \cos 3t + \frac{1}{2}e^{t/4} \sin 3t \quad (27)$$

این جواب مساله با مقدار اولیه (25) است. نمودار را هم در زیر ملاحظه می کنید.



ملاحظه می کنید که جواب ، یک نوسان در حال رشد است. در معادله (27) عامل های مثلثاتی ، نوسان را مشخص می کنند و عامل توانی ، که اینجا مثبت است ، سبب می شود که کمیت نوسان افزایش پیدا کند.

۵۸ - جواب کلی مدله زیر را پیدا کنید.

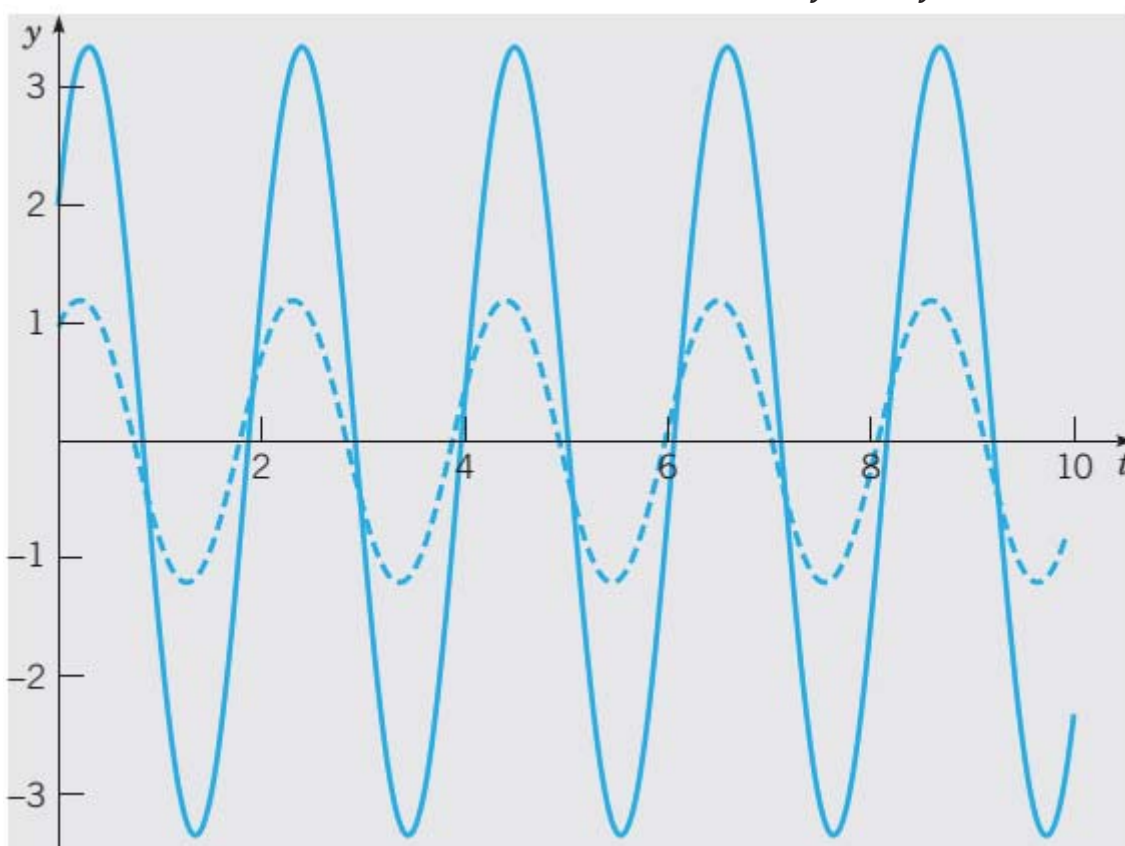
$$y'' + 9y = 0. \quad (28)$$

حل

معادله کمکی $r^2 + 9 = 0$ است و ریشه ها $r = \pm 3i$ هستند ، پس $\lambda = 0$ است و $\mu = 3$ است. جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t; \quad (29)$$

دو نمونه جواب $y'' + 9y = 0$ در زیر ملاحظه می کنید.



۵۹ - معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$y'' + 4y' + 4y = 0. \quad (5)$$

حل

معادله کمکی به صورت زیر است.

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0,$$

پس ریشه های مکرر دارد. $r_1 = r_2 = -2$ پس یک جواب معادله داده شده $y_1 = e^{-2t}$ است. برای پیدا کردن جواب کلی معادله (5) به یک جواب دوم احتیاج داریم که یک مضرب y_1 نباشد. برای این کار یک تابع t جلو e^{-2t} می گذاریم. پس جواب کلی معادله (5) به صورت زیر است.

$$y = c_1 t e^{-2t} + c_2 e^{-2t}. \quad (11)$$

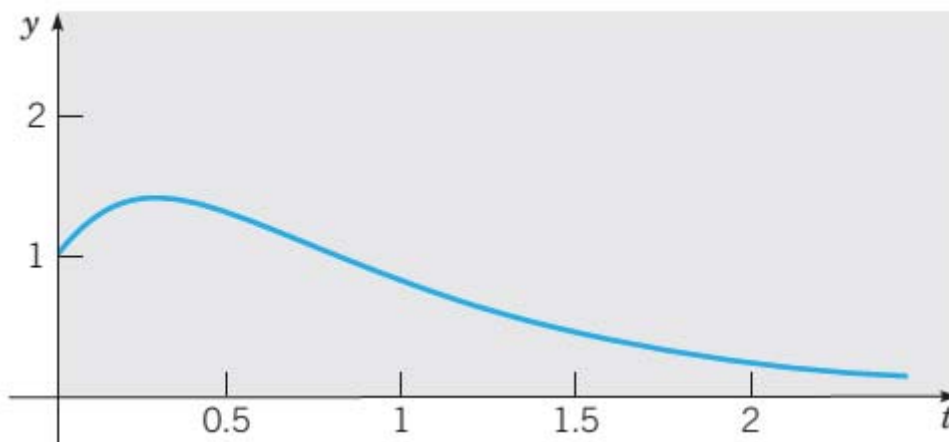
نشان می دهیم که این دو جواب، تشکیل یک مجموعه اساسی جواب ها را می دهند. برای این کار، رانسکین را محاسبه می کنیم.

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(t) &= \begin{vmatrix} e^{-2t} & t e^{-2t} \\ -2e^{-2t} & (1-2t)e^{-2t} \end{vmatrix} \\ &= e^{-4t} - 2te^{-4t} + 2te^{-4t} = e^{-4t} \neq 0. \end{aligned}$$

لذا

$$y_1(t) = e^{-2t}, \quad y_2(t) = t e^{-2t} \quad (12)$$

تشکیل یک مجموعه اساسی جوابهای معادله (5) است، و جواب کلی آن، معادله (11) است. نمودار یک نمونه از جواب در ذیل می آید.



۶۰- مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y'' - y' + 0.25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{3}. \quad (21)$$

حل

معادله کمکی به صورت زیر است.

$$r^2 - r + 0.25 = 0,$$

ریشه ها هم $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ هستند. پس جواب کلی معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$y = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2}. \quad (22)$$

شرط اول به صورت زیر داریم.

$$y(0) = c_1 = 2.$$

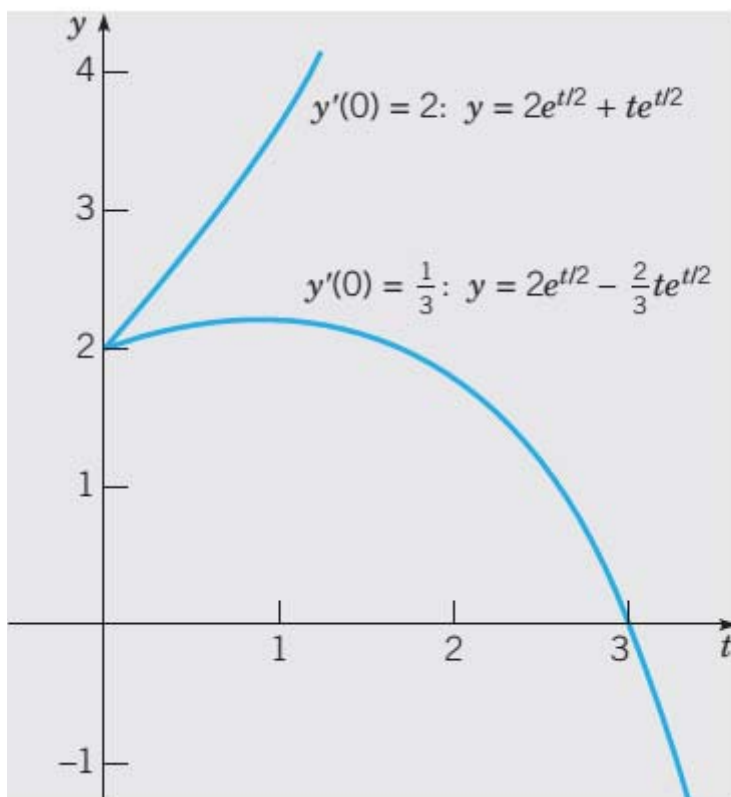
برای این که شرط دوم برقرار باشد، ابتدا از معادله (22) مشتق می گیریم و $t = 0$ قرار می دهیم. پس داریم.

$$y'(0) = \frac{1}{2}c_1 + c_2 = \frac{1}{3},$$

پس $c_2 = -\frac{2}{3}$ است. پس جواب مساله با شرط اولیه به صورت زیر است.

$$y = 2e^{t/2} - \frac{2}{3}te^{t/2}. \quad (23)$$

این هم نمودار.



تصویر بالا، جواب $y(0) = 2$ ، $y'(0) = \frac{1}{3}$ و $y'(0) = 2$ با $y'' - y' + 0.25y = 0$ ، را تغییر دهیم به این صورت که شیب اولیه را تغییر دهیم و فرض کنیم دومین شرط اولیه $y' = 2$ باشد. جواب این مساله تغییر یافته به صورت زیر است.

$$y = 2e^{t/2} + te^{t/2},$$

همان طور که ملاحظه می کنید، نمودار آن در بالا رسم شده است. نمودار نشان می دهد که یک شیب بحرانی اولیه وجود دارد، با یک مقدار بین $\frac{1}{3}$ و 2 که جواب ها را جدا می کند از آن که بطور مثبت افزایش می یابد و آن که بطور منفی رشد می کند.

۶۱ - می دانیم $y_1(t) = t^{-1}$ یک جواب معادله زیر است.

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0, \quad t > 0, \quad (31)$$

مطلوب است یک مجموعه اساسی جواب ها.

حل

ابتدا فرض می کنیم $y = v(t)t^{-1}$ باشد، پس داریم.

$$y' = v't^{-1} - vt^{-2}, \quad y'' = v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}.$$

با جانشین کردن y, y', y'' در معادله (31) و جمع کردن جمله ها، داریم.

$$\begin{aligned} & 2t^2(v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}) + 3t(v't^{-1} - vt^{-2}) - vt^{-1} \\ &= 2tv'' + (-4 + 3)v' + (4t^{-1} - 3t^{-1} - t^{-1})v \\ &= 2tv'' - v' = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

حالا که ضریب v صفر است، همان طور که انتظار می رود، این کمک خوبی است برای چک کردن عملیات جبری که انجام دادیم.

با تفکیک متغیر ها در معادله (32) و حل کردن برای $v'(t)$ داریم.

$$v'(t) = ct^{1/2};$$

پس

$$v(t) = \frac{2}{3}ct^{3/2} + k.$$

و لذا

$$y = \frac{2}{3}ct^{1/2} + kt^{-1}, \quad (33)$$

جمله دوم سمت راست معادله (33) یک مضرب $y_1(t)$ است و می توانیم حذف کنیم. اما جمله اول، یک جواب جدید $y_2(t) = t^{\frac{1}{2}}$ است. می توان نشان داد که رانسکین y_1 و y_2 به صورت زیر است.

$$W(y_1, y_2)(t) = \frac{3}{2}t^{-3/2}, \quad t > 0. \quad (34)$$

در نتیجه y_1 و y_2 تشکیل یک مجموعه اساسی جواب های معادله (31) را می دهند.

۶۲- یک جواب خصوصی برای معادله زیر پیدا کنید.

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}. \quad (9)$$

حل

می خواهیم یک تابع Y پیدا کنیم، بطوری که $Y''(t) - 3Y'(t) - 4Y(t) = 3e^{2t}$ باشد.

مکر گفته ایم اگر نماد ها تغییر داده ایم، صرفا بخاطر اشتناایی شما با نماد های مختلف در کتب مختلف است. پس Y و Y_p هر دو نمایش یک متغیر هستند.

چون تابع نمایی، خودش را در خلال مشتق گیری، باز تولید می کند، منطقی ترین راه این است که فرض کنیم $Y(t)$ مضرب هایی از e^{2t} باشد. یعنی

$$Y(t) = Ae^{2t},$$

که باید A را مشخص کنیم. برای پیدا کردن A محاسبات زیر را انجام می دهیم.

$$Y'(t) = 2Ae^{2t}, \quad Y''(t) = 4Ae^{2t},$$

این ها را در معادله (9) می گذاریم. پس داریم.

$$(4A - 6A - 4A)e^{2t} = 3e^{2t}.$$

لذا $A = -\frac{1}{2}$ است. $-6Ae^{2t} = 3e^{2t} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$ است. و در نهایت یک جواب خصوصی به صورت زیر است.

$$Y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}. \quad (10)$$

۶۳ - یک جواب خصوصی برای معادله زیر پیدا کنید.

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \sin t. \quad (11)$$

حل

بر اساس تمرین ۶۲ فرض می‌کنیم $Y(t) = A \sin t$ باشد. با جانشین کردن در معادله (11) و جابجا کردن جمله‌ها، داریم.

$$-5A \sin t - 3A \cos t = 2 \sin t,$$

یا

$$(2 + 5A) \sin t + 3A \cos t = 0. \quad (12)$$

می‌خواهیم معادله (12) برای تمام t ها برقرار باشد. پس باید برای دو نقطه مشخص مانند $t = 0$ و $t = \frac{\pi}{2}$ برقرار باشد. در این دو نقطه، معادله (12) به $3A = 0$ و $2 + 5A = 0$ تبدیل می‌شود. این دو معادله‌های متضاد، می‌گوید هیچ انتخابی برای A وجود ندارد، بطوری که معادله (12) در این دو نقطه $t = 0$ و $t = \frac{\pi}{2}$ برقرار باشد. این حد اقلی بود که پیدا کردیم. این یعنی فرض اول ما مناسب نبوده است. ظهور جمله کسینوس، در معادله (12) به ما می‌گوید، در فرض اول ما، باید جمله کسینوس هم اضافه کنیم. یعنی، بگوییم

$$Y(t) = A \sin t + B \cos t,$$

حالا باید، A و B را پیدا کنیم. پس داریم.

$$Y'(t) = A \cos t - B \sin t, \quad Y''(t) = -A \sin t - B \cos t.$$

این‌ها را در معادله (11) می‌گذاریم. پس داریم.

$$(-A + 3B - 4A) \sin t + (-B - 3A - 4B) \cos t = 2 \sin t. \quad (13)$$

برای این که معادله (13) برقرار باشد، ضریب‌های سینوس و کسینوس را با هم جور می‌کنیم. پس A و B باید معادله‌های زیر را برقرار کنند.

$$-5A + 3B = 2, \quad -3A - 5B = 0.$$

پس $A = -\frac{5}{17}$ و $B = \frac{3}{17}$ است. لذا جواب خصوصی (11) به صورت زیر است.

$$Y(t) = -\frac{5}{17} \sin t + \frac{3}{17} \cos t.$$

روشی که در این تمرین بکار بردیم، می‌تواند هنگامی که طرف راست معادله، یک چند جمله‌ای است، بکار برده شود. مثلاً اگر داشته باشیم

$$y'' - 3y' - 4y = 4t^2 - 1, \quad (14)$$

می‌توان فرض زیر را داشته باشیم.

$$Y(t) = At^2 + Bt + C.$$

۶۴ - یک جواب خصوصی برای معادله زیر پیدا کنید.

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^t \cos 2t. \quad (15)$$

حل

اینجا فرض می‌کنیم $Y(t)$ مضرب e^t و یک ترکیب خطی سینوس و کسینوس باشد. یعنی

$$Y(t) = Ae^t \cos 2t + Be^t \sin 2t.$$

عملیات جبری اینجا کمی پیچیده است. اما به هر حال داریم.

$$Y'(t) = (A + 2B)e^t \cos 2t + (-2A + B)e^t \sin 2t$$

و

$$Y''(t) = (-3A + 4B)e^t \cos 2t + (-4A - 3B)e^t \sin 2t.$$

این‌ها را در معادله (15) جانشین می‌کنیم. پس A و B باید معادله‌های زیر را برقرار کنند.

$$10A + 2B = 8, \quad 2A - 10B = 0.$$

پس $A = \frac{10}{13}$ و $B = \frac{2}{13}$ است. پس جواب خصوصی (15) به صورت زیر است.

$$Y(t) = \frac{10}{13}e^t \cos 2t + \frac{2}{13}e^t \sin 2t.$$

۶۵ - یک جواب خصوصی برای معادله زیر پیدا کنید.

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} + 2 \sin t - 8e^t \cos 2t. \quad (19)$$

حل

سمت راست معادله (19) را به چند قسمت تقسیم می‌کنیم. پس داریم.

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t},$$

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \sin t,$$

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^t \cos 2t.$$

جوابهای این معادله‌ها را در تمرینات ۶۲، ۶۳، ۶۴ پیدا کردیم. پس جواب خصوصی معادله (19) به صورت زیر است.

$$Y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{17} \cos t - \frac{5}{17} \sin t + \frac{10}{13}e^t \cos 2t + \frac{2}{13}e^t \sin 2t.$$

۶۶ - یک جواب خصوصی برای معادله زیر پیدا کنید.

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}. \quad (20)$$

حل

فرض می‌کنیم یک جواب خصوصی به صورت زیر باشد.

$$Y(t) = Ate^{-t}.$$

پس داریم.

$$Y'(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t}, \quad Y''(t) = -2Ae^{-t} + Ate^{-t}. \quad (25)$$

این‌ها را در معادله (20) جانشین می‌کنیم. پس داریم.

$$(-2A - 3A)e^{-t} + (A + 3A - 4A)te^{-t} = 2e^{-t}.$$

پس $-5A = 2$ لذا $A = -\frac{2}{5}$ است. و در نهایت، یک جواب خصوصی معادله (20) به صورت زیر است.

$$Y(t) = -\frac{2}{5}te^{-t}. \quad (26)$$

۶۷ - نشان دهید $f(x) = x + 3e^{-x}$ یک جواب معادله دیفرانسیل زیر است در $(-\infty, \infty)$

$$\frac{dy}{dx} + y = x + 1$$

حل

برای این کار باید f معادله دیفرانسیل داده شده را برقرار کند. پس مشتق f را محاسبه می کنیم.

$$f'(x) = 1 - 3e^{-x}$$

معادله بالا در $(-\infty, \infty)$ هم پیوسته است و هم تعریف شده. پس f و f' را در معادله دیفرانسیل داده شده می گذاریم.

$$1 - 3e^{-x} + x + 3e^{-x} = x + 1$$

$$1 + x = x + 1$$

نشان داده شد.

۶۸ - نشان دهید $f(x) = 2e^{3x} - 5e^{4x}$ یک جواب معادله دیفرانسیل زیر است در $(-\infty, \infty)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\frac{dy}{dx} + 12y = 0$$

حل

مشتق ها را محاسبه می کنیم.

$$f'(x) = 6x^{3x} - 20e^{4x}$$

$$f''(x) = 18e^{3x} - 80e^{4x}$$

این ها را در معادله داده شده می گذاریم.

$$18e^{3x} - 80e^{4x} - 7(6e^{3x} - 20e^{4x}) + 12(2e^{3x} - 5e^{4x}) = 0$$

$$18e^{3x} - 80e^{4x} - 42e^{3x} + 140e^{4x} + 24e^{3x} - 60e^{4x} = 0$$

$$(18 - 42 + 24)e^{3x} + (-80 + 140 - 60)e^{4x} = 0$$

$$0e^{3x} + 0e^{4x} = 0$$

$$0 = 0$$

۱۶۹ - آیا معادله دیفرانسیل زیر تفکیک پذیر است یا نه؟

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 - y^2 \sin(x)$$

حل

چون

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 - y^2 \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y^2(3 - \sin(x))$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y^2} dy = (3 - \sin(x))dx$$

$$\Leftrightarrow (3 - \sin(x))dx - \frac{1}{y^2} dy = 0,$$

پس معادله داده شده تفکیک پذیر است.

۷۰ - آیا معادله دیفرانسیل زیر تفکیک پذیر است یا نه؟

$$\frac{dy}{dx} = 3x - y \sin(x)$$

حل

چون

$$\frac{dy}{dx} = 3x - y \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow dy = (3x - y \sin(x))dx$$

$$\Leftrightarrow (y \sin(x) - 3x)dx - dy = 0,$$

پس معادله داده شده تفکیک پذیر نیست.

۷۱ - جواب کلی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$\frac{dy}{dx} = xy - 4x$$

حل

چون

$$\frac{dy}{dx} = xy - 4x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x(y - 4) \Leftrightarrow \frac{1}{y-4} dy - x dx = 0,$$

است و فرض می کنیم $y - 4 \neq 0$ باشد، پس مدله تفکیک پذیر است، پس داریم.

$$\int \frac{1}{y-4} dy - \int x dx = C_1$$

$$\Leftrightarrow \ln|y-4| - \frac{1}{2}x^2 = C_1$$

$$\Leftrightarrow \ln|y-4| = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$$\Leftrightarrow |y-4| = e^{\frac{1}{2}x^2 + C_1}, \text{ let } C = e^{C_1}$$

$$\Leftrightarrow |y-4| = Ce^{\frac{1}{2}x^2}$$

معادله آخر یک جواب کلی تلویحی برای معادله داده شده است. حالا، می توان نوشت.

$$y-4 = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{2}x^2}, & y \geq 4 \\ -Ce^{\frac{1}{2}x^2}, & y < 4 \end{cases}$$

یا

$$y = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{2}x^2} + 4 \\ Ke^{\frac{1}{2}x^2} + 4 \end{cases}$$

۷۲ - جواب کلی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 - y^2 \sin(x)$$

حل

چون داریم.

$$\frac{dy}{dx} = y^2(3 - \sin(x)) \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} dy - (3 - \sin(x)) dx = 0,$$

پس معادله تفکیک پذیر است. لذا داریم.

$$\int \frac{1}{y^2} dy - \int (3 - \sin(x)) dx = C_1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} - (3x + \cos(x)) = C_1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = 3x + \cos(x) + C_1$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{3x + \cos(x) + C_1}, \text{ let } C = -C_1$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{C - 3x - \cos(x)}$$

۷۳ - جواب کلی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید

$$\frac{dy}{dx} = xy - 3x - 2y + 6$$

حل

چون داریم

$$\frac{dy}{dx} = xy - 3x - 2y + 6 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = (x-2)(y-3) \Leftrightarrow \frac{1}{y-3} dy - (x-2)dx = 0,$$

پس معادله داده شده تفکیک پذیر است ، لذا داریم.

$$\int \frac{1}{y-3} dy - \int (x-2) dx = C_1$$

$$\Leftrightarrow \ln|y-3| - \frac{1}{2}x^2 + 2x = C_1$$

$$\Leftrightarrow \ln|y-3| = \frac{1}{2}x^2 - 2x + C_1$$

$$\Leftrightarrow |y-3| = e^{\frac{1}{2}x^2 - 2x + C_1}, \text{ let } C = e^{C_1}$$

$$\Leftrightarrow |y-3| = Ce^{\frac{1}{2}x^2 - 2x}$$

این جوان کلی تلویحی است. حل می توان نوشت.

$$y-3 = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{2}x^2 - 2x}, & y \geq 3 \\ -Ce^{\frac{1}{2}x^2 - 2x} = Ke^{\frac{1}{2}x^2 - 2x}, & y < 3 \end{cases}$$

یا

$$y = \begin{cases} Ce^{\frac{1}{2}x^2 - 2x} + 3 \\ Ke^{\frac{1}{2}x^2 - 2x} + 3 \end{cases}$$

۷۴ - جواب کلی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید

$$\frac{dy}{dx} = \tan(y)$$

حل

چون داریم.

$$\frac{dy}{dx} = \tan(y) \Leftrightarrow \frac{1}{\tan(y)} dy - dx = 0$$

در صورتی که $\tan y \neq 0$ باشد، داریم.

$$\Leftrightarrow \int \frac{\cos(y)}{\sin(y)} dy - \int dx = C_1$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{\sin(y)} d(\sin(y)) - \int dx = C_1$$

$$\Leftrightarrow \ln |\sin(y)| - x = C_1$$

$$\Leftrightarrow \ln |\sin(y)| = x + C_1$$

$$\Leftrightarrow |\sin(y)| = e^{x+C_1}, \text{ let } C = e^{C_1}$$

$$\Leftrightarrow |\sin(y)| = Ce^x$$

معادله آخر جواب تلویحی است. می توان مطابق تمرینات قبلی، جواب صریح را پیدا کرد.

$$\sin(y) = \begin{cases} Ce^x, & 0 \leq \sin(y) \leq 1 \\ -Ce^x = Ke^x, & -1 \leq \sin(y) \leq 0 \end{cases}$$

پس در نهایت داریم.

$$y = \begin{cases} \arcsin(Ce^x) \\ \arcsin(Ke^x) \end{cases}$$

۷۵ - جواب کلی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

حل

چون داریم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{y} dy - \frac{1}{x} dx = 0$$

پس

$$\int \frac{1}{y} dy - \int \frac{1}{x} dx = C_1$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| - \ln|x| = C_1$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln|x| + \ln e^{C_1}$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln(e^{C_1}|x|), \text{ let } C = e^{C_1}$$

$$\Leftrightarrow |y| = C|x|$$

معادله آخر ، جواب کلی معادله دیفرانسیل است.

۷۶ - جواب کلی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2+4}{3y^2-4y}$$

حل

چون داریم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2+4}{3y^2-4y} \Leftrightarrow (3y^2 - 4y)dy - (6x^2 + 4)dx = 0$$

و اگر فرض کنیم

$$3y^2 - 4y \neq 0$$

باشد ، پس داریم.

$$\int (3y^2 - 4y) dy - \int (6x^2 + 4) dx = C$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 2y^2 - 2x^3 - 4x = C$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x^3 + 4x + C}{y^2 - 2y}$$

۷۷ - جواب کلی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید

$$(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = y^2 + 1$$

حل

چون داریم.

$$(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} = y^2 + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+y^2} dy - \frac{1}{1+x^2} dx = 0,$$

پس

$$\int \frac{1}{1+y^2} dy - \int \frac{1}{1+x^2} dx = C$$

$$\Leftrightarrow \arctan(y) - \arctan(x) = C$$

$$\Leftrightarrow \arctan(y) = \arctan(x) + C$$

$$\Leftrightarrow y = \tan(\arctan(x) + C)$$

۷۸ - جواب کلی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید

$$(y^2 - 1) \frac{dy}{dx} = 4xy^2$$

حل

چون داریم

$$(y^2 - 1) \frac{dy}{dx} = 4xy^2 \Leftrightarrow \frac{y^2 - 1}{y^2} dy - 4x dx = 0$$

و اگر فرض کنیم $y \neq 0$ باشد، پس

$$\int \left(\frac{y^2 - 1}{y^2} \right) dy - \int 4x dx = C$$

$$\Leftrightarrow \int \left(1 - \frac{1}{y^2} \right) dy - \int 4x dx = C$$

$$\Leftrightarrow y + \frac{1}{y} - 2x^2 = C$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2 + 1}{y} = 2x^2 + C$$

۷۹ - مشخص کنید، آیا معادله دیفرانسیل زیر همگن است یا نه

$$(x - y)dx + xdy = 0$$

حل

چون معادله داده شده را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x-y}{x} = -1 + \frac{y}{x} = -\frac{\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$$

پس یک تابع g وجود دارد، بطوری که $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ باشد، لذا معادله داده شده، همگن است.

۸۰ - مشخص کنید ، آیا معادله دیفرانسیل زیر همگن است یا نه

$$(x^2 + xy)dx - y^2 dy = 0$$

حل

چون می توان نوشت

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + \frac{x}{y} = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{1}{\frac{y}{x}},$$

پس یک تابع g وجود دارد ، بطوری که $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ باشد ، لذا معادله داده شده ، همگن است

۸۱ - مشخص کنید ، آیا معادله دیفرانسیل زیر همگن است یا نه

$$(x^2 + xy + y^2)dx - (y^2 + x)dy = 0$$

حل

چون داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{y^2 + x} = \frac{xy\left(\frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x}\right)}{xy\left(\frac{y}{x} + \frac{1}{y}\right)} = \frac{\frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x}}{\frac{y}{x} + \frac{1}{y}}$$

چون نمی توان یک تابع g پیدا کنیم بطوری که $f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$ باشد ، پس این معادله دیفرانسیل ، همگن نیست.

۸۲ - جواب کلی معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{x^2}.$$

حل

معادله دیفرانسیل داده شده ، همگن است. زیرا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{x^2} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

حالا ، فرض می کنیم $y = vx$ باشد ، پس

$$dy = vdx + xdv \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$\Leftrightarrow v + x \frac{dv}{dx} = v + v^2$$

$$\Leftrightarrow x \frac{dv}{dx} = v^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{v} dv - \frac{1}{x} dx = 0$$

انتگرال می گیریم.

$$\int \frac{1}{v^2} dv - \int \frac{1}{x} dx = C$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{v} - \ln|x| = C$$

جانشینی را بر می گردانیم.

$$-\frac{x}{y} - \ln|x| = C \Leftrightarrow y = -\frac{x}{\ln|x| + C},$$

۸۳ - مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$2xy \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

$$y(1) = 0$$

حل

داریم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{y} \right)$$

پس معادله داده شده ، همگن است. فرض می کنیم $y = vx$ باشد. پس

$$dy = v dx + x dv \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$$

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2v} + \frac{1}{2}v$$

$$\Leftrightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1}{2v} - \frac{1}{2}v$$

$$\Leftrightarrow x \frac{dv}{dx} = \frac{1 - v^2}{2v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2v}{1 - v^2} dv - \frac{1}{x} dx = 0$$

انتگرال می گیریم.

$$\begin{aligned}
& \int \frac{2v}{1-v^2} dv - \int \frac{1}{x} dx = C_1 \\
& \Leftrightarrow - \int \frac{1}{1-v^2} d(-v^2) - \int \frac{1}{x} dx = C_1 \\
& \Leftrightarrow -\ln|1-v^2| - \ln|x| = C_1 \\
& \Leftrightarrow -\ln|(1-v^2)x| = C_1 \\
& \Leftrightarrow \ln|(1-v^2)x| = C \quad (\text{let } C = -C_1) \\
& \Leftrightarrow |(1-v^2)x| = e^C.
\end{aligned}$$

جانشینی را بر می گردانیم.

$$|(1-v^2)x| = e^C \Leftrightarrow \left| \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)x \right| = e^C \Leftrightarrow \left| x - \frac{y^2}{x} \right| = e^C.$$

با استفاده از مقدار اولیه ، داریم.

$$|1-0| = e^C \Leftrightarrow 1 = e^C,$$

یعنی

$$\left| x - \frac{y^2}{x} \right| = 1$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}
x - \frac{y^2}{x} &= -1 \Leftrightarrow y^2 = x^2 + x \\
x - \frac{y^2}{x} &= 1 \Leftrightarrow y^2 = x^2 - x.
\end{aligned}$$

۸۴ - در تمرین زیر ، مشخص کنید آیا معادله داده شده کامل است یا نه. اگر کامل است ، آنرا حل کنید.

$$(3x + 2y)dx + (2x + y)dy = 0.$$

حل

ابتدا باید ببینیم ، این معادله کامل است یا نه.

$$\begin{aligned}
M(x, y) &= 3x + 2y, N(x, y) = 2x + y, \\
\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} &= 2, \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2.
\end{aligned}$$

چون

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 2$$

است ، پس نتیجه می گیریم معادله دیفرانسیل داده شده ، کامل است.
علاوه بر این ،

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = M(x, y) = 3x + 2y$$

و

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = N(x, y) = 2x + y.$$

حالا ، داریم.

$$F(x, y) = \int M(x, y) dx + h(y) = \int (3x + 2y) dx + h(y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + h(y).$$

پس

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 2x + \frac{dh(y)}{dy}$$

و لذا

$$2x + y = 2x + \frac{dh(y)}{dy} \Leftrightarrow y = \frac{dh(y)}{dy}.$$

در نتیجه

$$h(y) = \frac{1}{2}y^2 + C_0$$

و

$$F(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 + C_0.$$

$$\frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 + C_0 = C_1$$

$$\frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 = C$$

پس جواب کلی این معادله دیفرانسیل ، به صورت زیر است.

$$\frac{3}{2}x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2 = C.$$

۸۵ - معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

حل

به آسانی می توان چک کرد که $y = e^{2x}$ و $y = e^{3x}$ معادله دیفرانسیل داده شده را برقرار می کند. پس جواب کلی این معادله $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}$ است.

۸۶ - معادله زیر را حل کنید.

$$y^{(5)} - 4y^{(4)} + 5y''' + 6y'' - 36y' + 40y = 0.$$

حل

معادله کمکی داریم.

$$\lambda^5 - 4\lambda^4 + 5\lambda^3 + 6\lambda^2 - 36\lambda + 40 = 0,$$

$$(\lambda - 2)^2 (\lambda + 2) (\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0.$$

پس ریشه ها به صورت زیر هستند.

$$\lambda = 2, 2, -2, 1 \pm 2i$$

در نهایت.

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + c_3 e^{-2x} + c_4 e^x \cos(2x) + c_5 \sin(2x),$$

۸۷ - معادله زیر را حل کنید.

$$y'' - y = x.$$

حل

معادله همگن مربوطه به صورت زیر است.

$$y'' - y = 0$$

معادله کمکی و ریشه ها به صورت زیر هستند.

$$\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

پس

$$y_1 = e^x, \quad y_2 = e^{-x}.$$

۸۸ - میدانیم که $y = x$ یک جواب معادله همگن زیر است.

$$y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{x+2}{x^2}y = 0$$

با این اطلاعات ، معادله نا همگن زیر را حل کنید.

$$y'' - \frac{x+2}{x}y' + \frac{x+2}{x^2}y = x e^x.$$

حل

با استفاده از این حقیقت که $y_1 = x$ داریم.

$$\begin{aligned}
 y_2 &= x \int \frac{e^{-\int (-\frac{x+2}{x}) dx}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{\int (1+\frac{2}{x}) dx}}{x^2} dx = x \int \frac{e^{x+2\ln(|x|)}}{x^2} dx \\
 &= x \int \frac{e^x e^{2\ln(|x|)}}{x^2} dx = x \int \frac{e^x |x|^2}{x^2} dx = x \int e^x dx = x e^x.
 \end{aligned}$$

پس

$$W = \begin{vmatrix} x & x e^x \\ 1 & e^x + x e^x \end{vmatrix} = x e^x + x^2 e^x - x e^x = x^2 e^x.$$

از این، داریم.

$$\begin{aligned}
 v_1' &= -\frac{y_2 R}{W} = -\frac{x e^x x e^x}{x^2 e^x} = -e^x \implies v_1 = -e^x, \\
 v_2' &= \frac{y_1 R}{W} = \frac{x x e^x}{x^2 e^x} = 1 \implies v_2 = x.
 \end{aligned}$$

پس

$$y_p = v_1 y_1 + v_2 y_2 = -x e^x + x^2 e^x,$$

و جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = C_1 x + C_2 x e^x - x e^x + x^2 e^x = C_1 x + C_2' x e^x + x^2 e^x, \quad x \neq 0,$$

۸۹ - معادله زیر را حل کنید.

$$\text{Solve } y'' + 3y' + 2y = e^x - 3.$$

حل

معادله کمکی داریم.

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 + 3\lambda + 2 &= 0. \\
 (\lambda + 2)(\lambda + 1) &= 0, \\
 \lambda &\in \{-1, -2\}
 \end{aligned}$$

پس

$$y_1 = e^{-x} \quad y_2 = e^{-2x}.$$

حالا فرض می کنیم.

$$y = A e^x + B.$$

پس

$$y' = A e^x \quad y'' = A e^x$$

پس داریم.

$$y'' + 3y' + 2y = A e^x + 3A e^x + 2A e^x + 2B = 6A e^x + 2B.$$

ضریب ها را با هم مقایسه می کنیم. پس داریم.

$$6A = 1 \implies A = \frac{1}{6},$$

$$2B = -3 \implies B = -\frac{3}{2}.$$

لذا

$$y_p = e^x/6 - 3/2$$

و

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{e^x}{6} - \frac{3}{2},$$

۹۰ - معادله زیر را حل کنید.

$$y'' + y = \sin(x).$$

حل

$$\lambda^2 + 1 = 0.$$

$$\lambda = \pm i,$$

$$y_1 = \cos(x)$$

$$y_2 = \sin(x).$$

حالا فرض می کنیم.

$$y = Ax \sin(x) + Bx \cos(x).$$

پس

$$y' = A \sin(x) + Ax \cos(x) + B \cos(x) - Bx \sin(x)$$

$$= (A - Bx) \sin(x) + (Ax + B) \cos(x),$$

$$y'' = -B \sin(x) + (A - Bx) \cos(x) + A \cos(x) - (Ax + B) \sin(x)$$

$$= (-Ax - 2B) \sin(x) + (2A - Bx) \cos(x).$$

پس

$$y'' + y = (-Ax - 2B) \sin(x) + (2A - Bx) \cos(x) + Ax \sin(x) + Bx \cos(x).$$

ضریب ها را مقایسه می کنیم.

$$-2B = 1 \implies B = -\frac{1}{2},$$

$$2A = 0 \implies A = 0.$$

لذا

$$y_p = -x \cos(x)/2$$

و جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) - \frac{x \cos(x)}{2},$$

۹۱ - معادله زیر را حل کنید.

$$y'' - 4y = x^2.$$

حل

$$\lambda^2 - 4 = 0,$$

$$\lambda = \pm 2,$$

$$y_1 = e^{2x}$$

$$y_2 = e^{-2x}$$

حالا ، فرض می کنیم

$$y = Ax^2 + Bx + C$$

پس

$$y' = 2Ax + B$$

$$y'' = 2A.$$

لذا

$$y'' - 4y = 2A - 4Ax^2 - 4B - 4C = -4Ax^2 + 0x + (2A - 4B - 4C).$$

ضریب ها را مقایسه می کنیم.

$$-4A = 1 \implies A = -\frac{1}{4},$$

$$-4B = 0 \implies B = 0,$$

$$2A - 4C = 0 \implies C = \frac{A}{2} = \frac{-1/4}{2} = -\frac{1}{8}.$$

پس

$$y_p = -x^2/4 - 1/8,$$

و جواب کلی

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8},$$

۹۲ - معادله زیر را حل کنید.

$$y'' - y' = x.$$

حل

$$\lambda^2 - \lambda = 0,$$

$$\lambda \in \{1, 0\},$$

$$y_1 = e^x$$

$$y_2 = 1.$$

فرض می کنیم.

$$y = Ax^2 + Bx.$$

پس

$$y' = 2Ax + B$$

$$y'' = 2A$$

لذا

$$y'' - y = 2A - 2Ax - B.$$

ضریب ها را مقایسه می کنیم.

$$-2A = 1 \implies A = -\frac{1}{2},$$

$$2A - B = 0 \implies B = -1.$$

پس

$$, y_p = -x^2/2 - x,$$

و جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = c_1 e^x + c_2 - \frac{x^2}{2} - x,$$

۹۳- معادله زیر را حل کنید.

$$2y'' + 18y = 6 \tan(3t)$$

حل

طرفین را بر ۲ تقسیم می کنیم ، ضریب y'' بشود یک.

$$y'' + 9y = 3 \tan(3t)$$

$$y_c(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)$$

$$y_1(t) = \cos(3t) \quad y_2(t) = \sin(3t)$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos(3t) & \sin(3t) \\ -3 \sin(3t) & 3 \cos(3t) \end{vmatrix} = 3 \cos^2(3t) + 3 \sin^2(3t) = 3$$

$$Y_P(t) = -\cos(3t) \int \frac{3 \sin(3t) \tan(3t)}{3} dt + \sin(3t) \int \frac{3 \cos(3t) \tan(3t)}{3} dt$$

$$\begin{aligned}
&= -\cos(3t) \int \frac{\sin^2(3t)}{\cos(3t)} dt + \sin(3t) \int \sin(3t) dt \\
&= -\cos(3t) \int \frac{1 - \cos^2(3t)}{\cos(3t)} dt + \sin(3t) \int \sin(3t) dt \\
&= -\cos(3t) \int \sec(3t) - \cos(3t) dt + \sin(3t) \int \sin(3t) dt \\
&= -\frac{\cos(3t)}{3} (\ln|\sec(3t) + \tan(3t)| - \sin(3t)) + \frac{\sin(3t)}{3} (-\cos(3t)) \\
&= -\frac{\cos(3t)}{3} \ln|\sec(3t) + \tan(3t)|
\end{aligned}$$

پس

$$y(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t) - \frac{\cos(3t)}{3} \ln|\sec(3t) + \tan(3t)|$$

۹۴ - معادله زیر را حل کنید.

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t^2 + 1}$$

حل

جواب عمومی به صورت زیر است. سعی کنید پیدا کنید چرا. مشکل نیست.

$$y_c(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$$

پس داریم.

$$y_1(t) = e^t \quad y_2(t) = t e^t$$

رانسکین دو تابع به صورت زیر است.

$$W = \begin{vmatrix} e^t & t e^t \\ e^t & e^t + t e^t \end{vmatrix} = e^t (e^t + t e^t) - e^t (t e^t) = e^{2t}$$

جواب خصوصی داریم.

$$\begin{aligned}
 Y_P(t) &= -e^t \int \frac{te^t e^t}{e^{2t}(t^2+1)} dt + te^t \int \frac{e^t e^t}{e^{2t}(t^2+1)} dt \\
 &= -e^t \int \frac{t}{t^2+1} dt + te^t \int \frac{1}{t^2+1} dt \\
 &= -\frac{1}{2}e^t \ln(1+t^2) + te^t \tan^{-1}(t)
 \end{aligned}$$

جواب کلی به صورت زیر است.

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t - \frac{1}{2} e^t \ln(1+t^2) + te^t \tan^{-1}(t)$$

۹۵- معادله زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned}
 ty'' - (t+1)y' + y &= t^2 \\
 y_1(t) &= e^t \quad y_2(t) = t+1
 \end{aligned}$$

باید طرفین را بر t تقسیم کنیم.

$$y'' - \left(1 + \frac{1}{t}\right)y' + \frac{1}{t}y = t$$

رانسکین مجموعه اساسی جوابها به صورت زیر است.

$$W = \begin{vmatrix} e^t & t+1 \\ e^t & 1 \end{vmatrix} = e^t - e^t(t+1) = -te^t$$

جواب خصوصی به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
 Y_P(t) &= -e^t \int \frac{(t+1)t}{-te^t} dt + (t+1) \int \frac{e^t(t)}{-te^t} dt \\
 &= e^t \int (t+1)e^{-t} dt - (t+1) \int dt \\
 &= e^t (-e^{-t}(t+2)) - (t+1)t \\
 &= -t^2 - 2t - 2
 \end{aligned}$$

جواب کلی به صورت زیر است.

$$y(t) = c_1 e^t + c_2(t+1) - t^2 - 2t - 2$$

۹۶ - دامنه جواب مساله با مقدار اولیه زیر را پیدا کنید.

$$(t-1)y'' - 3ty' + \frac{4(t-1)}{(t-3)}y = t(t-1), \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 0.$$

حل

ابتدا مدله را به صورت استاندارد می نویسیم.

$$y'' - \frac{3t}{(t-1)}y' + \frac{4}{(t-3)}y = t.$$

ضریب های معادله در دامنه زیر تعریف شده هستند.

$$(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, \infty).$$

پس جواب ، ممکن است در $t = 1$ یا $t = 3$ تعریف شده نباشد. یعنی ، جواب در بازه های زیر تعریف شده است.

$$(-\infty, 1) \text{ یا } (1, 3) \text{ یا } (3, \infty)$$

چون شرط اولیه در $t_0 = 2 \in (1, 3)$ است. پس دامنه جواب

$$D = (1, 3).$$

است.

۹۷ - مساله با شرط اولیه زیر را حل کنید.

$$2y'' - 3y' - 2y = 0, \quad y(0) = \frac{3}{2}, \quad y'(0) = -\frac{1}{8}$$

حل

۱ - ابتدا معادله کمکی را حل می کنیم.

$$2\lambda^2 - 3\lambda - 2 = (2\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0$$

ریشه ها به صورت زیر هستند.

$$\lambda = -\frac{1}{2}, 2.$$

۲ - جواب کلی را می نویسیم.

تابع های $y = e^{2t}$ و $y = 2^{-\frac{1}{2}t}$ جواب های مستقل هستند ، پس جواب کلی به صورت زیر است.

$$y = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^{2t}$$

۳ - شرایط اولیه را بکار می بریم.

$$y(0) = c_1 e^{\frac{1}{2} \cdot 0} + c_2 e^{2 \cdot 0} = c_1 + c_2$$

$$y'(0) = -\frac{1}{2}c_1 e^{-\frac{1}{2} \cdot 0} + 2 \cdot c_2 e^{2 \cdot 0} = -\frac{1}{2}c_1 + 2c_2$$

پس ، شرایط اولیه دو معادله به ما میدهند.

$$c_1 + c_2 = \frac{3}{2}$$

6

$$-\frac{1}{2}c_1 + 2c_2 = -\frac{1}{6}$$

7

از معادله (6) داریم.

$$c_2 = \frac{3}{2} - c_1$$

در معادله (7) می گذاریم. پس داریم.

$$-\frac{1}{2}c_1 + 2c_2 = -\frac{1}{2}c_1 + 2\left(\frac{3}{2} - c_1\right) = 3 - \frac{5}{2}c_1 = -\frac{1}{8}$$

پس

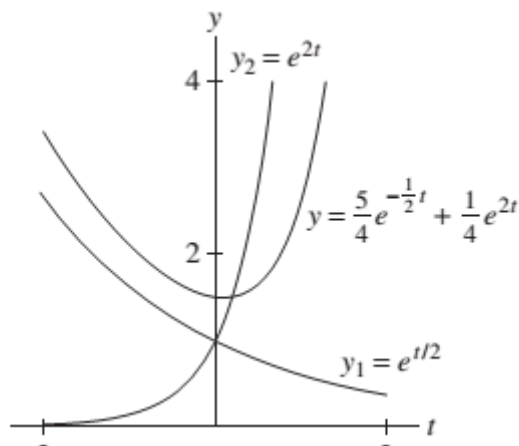
$$c_1 = \frac{2}{5}\left(3 + \frac{1}{8}\right) = \frac{5}{4}$$

$$c_2 = \frac{3}{2} - c_1 = \frac{1}{4}$$

لذا، جواب خصوصی معادله دیفرانسیل داده شده، به صورت زیر است.

$$y = \frac{5}{4}e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{1}{4}e^{2t}$$

این هم نمودار جواب ها.



۹۸ - مساله با شرط اولیه زیر را حل کنید.

$$4y'' - 4y' + y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1.$$

حل

۱ - معادله کمکی، ریشه های مضاعف دارد. $\lambda = \frac{1}{2}$

۲ - جواب کلی را می نویسیم.

$$y = (c_1 + c_2 t)e^{\frac{1}{2}t}$$

۳ - شرایط اولیه را بکار می بریم.

اولین شرط به ما معادله زیر را می دهد.

$$y(1) = (c_1 + c_2)e^{1/2} = 0$$

پس داریم.

$$c_2 = -c_1$$

بعد داریم.

$$y'(t) = \frac{1}{2}(c_1 + c_2t)e^{\frac{1}{2}t} + c_2e^{\frac{1}{2}t} = \left(\frac{1}{2}c_1 + c_2 + \frac{1}{2}c_2t\right)e^{\frac{1}{2}t}$$

$$y'(1) = \left(\frac{1}{2}c_1 + \frac{3}{2}c_2\right)e^{\frac{1}{2}} = 1$$

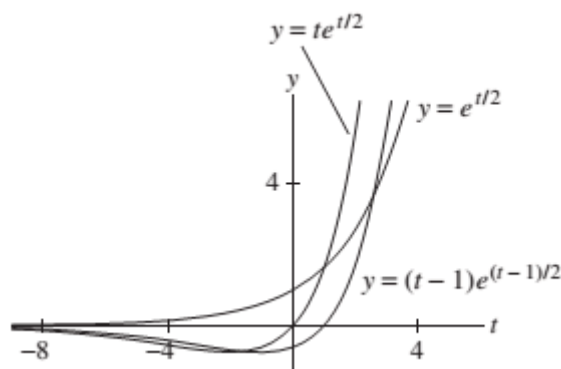
جانشین می کنیم.

$$\left(\frac{1}{2}c_1 - \frac{3}{2}c_1\right)e^{\frac{1}{2}} = -c_1e^{\frac{1}{2}} = 1 \Rightarrow c_1 = -e^{-\frac{1}{2}}, c_2 = e^{-\frac{1}{2}}$$

جواب خصوصی به صورت زیر است.

$$y = (-e^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{1}{2}}t)e^{\frac{1}{2}t} = (t-1)e^{\frac{1}{2}(t-1)}$$

این هم نمودار.



۹۹ - مساله با شرط اولیه زیر را حل کنیم.

$$4y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = \frac{3}{2}.$$

حل

۱ - ریشه های معادله کمکی به صورت زیر هستند.

$$\frac{-4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(4)(13)}}{8} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}i$$

۲ - جواب کلی را می نویسیم.

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t}(c_1 \cos \sqrt{3}t + c_2 \sin \sqrt{3}t)$$

۳ - شرایط اولیه را بکار می بریم.

$$y(0) = e^0(c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0) = c_1$$

اولین شرط اولیه یعنی $y(0) = 3$ به ما $c_1 = 3$ می دهد. پس

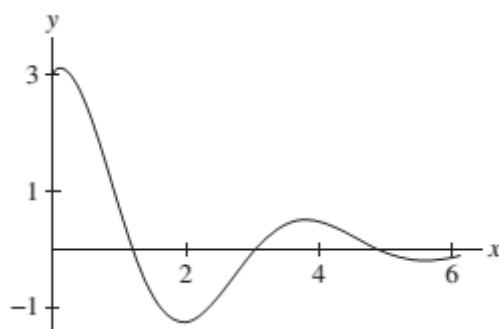
$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t} (3 \cos \sqrt{3}t + c_2 \sin \sqrt{3}t)$$

$$y'(t) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t} (3 \cos \sqrt{3}t + c_2 \sin \sqrt{3}t) + e^{-\frac{1}{2}t} (-3\sqrt{3} \sin \sqrt{3}t + \sqrt{3}c_2 \cos \sqrt{3}t)$$

$$y'(0) = -\frac{3}{2} + \sqrt{3}c_2 = \frac{3}{2}$$

پس $c_2 = \sqrt{3}$ بدست می آوریم. جواب خصوصی و نمودار به صورت زیر است.

$$y(t) = e^{-\frac{1}{2}t} (3 \cos \sqrt{3}t + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}t)$$



۱۰۰ - جواب کلی معادله زیر را پیدا کنید.

$$y'' - 4y' + 3y = 3t^2 - 5.$$

حل

۱ - ضریب های یک جواب آزمایشی ، پیدا می کنیم. ملاحظه می کنید که

$$f(t) = 3t^2 - 5$$

یک چند جمله ای درجه دوم است. پس تصور می کنیم یک جواب آزمایشی به صورت زیر باشد.

$$y_p(t) = At^2 + Bt + C$$

داریم.

$$y_p'(t) = 2At + B$$

$$y_p''(t) = 2A$$

$$\begin{aligned} y_p'' - 4y_p' + 3y_p &= (2A) - 4(2At + B) + 3(At^2 + Bt + C) \\ &= \underbrace{3At^2 + (-8A + 3B)t + (2A - 4B + 3C)} \end{aligned}$$

این ابروی بالا باید مساوی $f(t)$ باشد. پس y_p یک جواب خصوصی است اگر داشته باشیم.

$$3At^2 + (-8A + 3B)t + (2A - 4B + 3C) = 3t^2 - 5$$

ضریب ها را در طرفین مساوی قرار می دهیم.

$$3A = 3 \quad -8A + 3B = 0 \quad 2A - 4B + 3C = -5$$

اولین معادله $A = 1$ به ما می دهد. دومین $B = \frac{8}{3}$ به ما می دهد. با معادله سوم داریم.

$$C = \frac{1}{3}(-5 - 2A + 4B) = \frac{1}{3}(-5 - 2 + \frac{32}{3}) = \frac{11}{9}$$

پس جواب خصوصی به صورت زیر است.

$$y_p(t) = t^2 + \frac{8}{3}t + \frac{11}{9}$$

حالا معادله همگن زیر

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

دارای جواب زیر است.

$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t}.$$

حالا جواب کلی را می نویسیم.

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = t^2 + \frac{8}{3}t + \frac{11}{9} + c_1 e^t + c_2 e^{3t}$$