فصل دوم
معادلات دیفرانسیل مرتبه اول
First Order Differential Equations
بخش اول
معادلات خطی
Linear Equations

در این فصل در مورد حل معادلات دیفرانسیل مرتبه اول صحبت می کنیم. کلی ترین معادله دیفرانسیل مرتبه اول را می توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t) \qquad (۱)$$

بخش ۲.۱ معادلات خطی

اولین نوع معادلات دیفرانسیل مرتبه اول که مورد بحث قرار می دهیم ، معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است. در این حالت ، بر خلاف بیشتر معادلات مرتبه اول ، می توانیم یک فرمول برای حل کلی این نوع معادله ها پیدا کنیم. این کار را در زیر انجام می دهیم. اما فرمول را از بر نکنید. بلکه مراحل بدست آوردن فرمول را بخاطر بسپارید.

پس اجازه دهید ، ببینیم یک معادله خطی مرتبه اول را چگونه باید حل کرد. بخاطر داشته باشید که در جریان حل معادله ، هدف ، رسیدن به یک حل ، به شکل $y = y(t)$ است.

برای حل یک معادله خطی مرتبه اول ، **باید** با معادله دیفرانسیلی به شکل زیر شروع کنیم. پس اگر معادله دیفرانسیل به شکل زیر نباشد ، مراحلی که در زیر مورد بحث قرار می دهیم ، کار نمی کند.

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t) \qquad (۱)$$

در فرمول (۱) بالا ، هم $p(t)$ و هم $g(t)$ تابع های **پیوسته** هستند. بخاطر بیاورید که یک تابع پیوسته است اگر بتوان نمودار آنرا از چپ به راست رسم کنیم بطوری که لازم نباشد ، قلم را از روی کاغذ برداریم. به عبارت دیگر ، یک تابع پیوسته است ، اگر روی آن سوراخی یا شکستگی نباشد.

حالا ، فرض می کنیم یک تابع جادویی $\mu(t)$ بنام **عامل انتگرال گیری Integrating Factor** وجود دارد. فعلا نگران نباشید که این تابع چیست و از کجا آماده است. بعداً خواهیم دید.

قسمت سبز رنگ زیر طریق بدست آوردن فرمولی برای حل معادله ها دیفرانسیل خطی درجه اول است. می توانید آنرا نخوانده و از آن صرفنظر کنید.

پس ، حالا فرض می کنیم که $\mu(t)$ همه چیز را در شماره (۱) ضرب می کند. پس داریم.

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t) \qquad (۲)$$

حالا معلوم می شود کار جادویی $\mu(t)$ چیست. فرض می کنیم $\mu(t)$ هر چه باشد ، معادله زیر را بر قرار می کند.

$$\mu(t)p(t) = \mu'(t) \qquad (۳)$$

باز هم نگران نباشید $\mu(t)$ را باید کجا پیدا کنیم. تا شماره (۳) را بر قرار کند. همان طور که خواهیم دید ، اگر $p(t)$ پیوسته باشد ، می توانیم $\mu(t)$ پیدا کنیم ، پس شماره(۳) را در شماره (۲) می گذاریم.

$$\mu(t)\frac{dy}{dt}+\mu'(t)y=\mu(t)g(t) \qquad (۴)$$

حالا باید درک کنیم که سمت چپ شماره (۴) چیزی بجز قانون ضرب زیر نیست.

$$\mu(t)\frac{dy}{dt}+\mu'(t)y=\big(\mu(t)y(t)\big)'$$

پس سمت چپ (۴) را با این قاعده ضرب عوض کنیم. پس شماره (۴) می شود.

$$\big(\mu(t)y(t)\big)'=\mu(t)g(t) \qquad (۵)$$

فراموش نکنید که گفتیم دنبال $y(t)$ می گردیم ، پس حالا می توانیم در مورد آن کاری انجام دهیم. فقط لازم است از طرفین انتگرال بگیریم.

$$\int\big(\mu(t)y(t)\big)'dt=\int\mu(t)g(t)dt$$

$$\mu(t)y(t)+C=\int\mu(t)g(t)dt \qquad (۶)$$

لازم به تذکر است که عدد ثابت انتگرال C باید بآشد ،در غیر اینصورت جواب غلط بدست می آوریم.
آخرین کاری که باید انجام دهیم ، این است که چند عملیات جبری انجام دهیم تا جواب $y(t)$ بدست آید.

$$\mu(t)y(t)=\int\mu(t)g(t)dt-C$$

$$y(t)=\frac{\int\mu(t)g(t)dt-C}{\mu(t)}$$

می دانیم که عدد ثابت انتگرال C یک عدد نا شناخته است ، پس می توانیم علامت منفی را به مثبت تغییر دهیم. لذا داریم.

$$y(t)=\frac{\int\mu(t)g(t)dt+C}{\mu(t)} \qquad (۷)$$

پس جواب کلی شماره (۱) را بدست آوردیم. حالا باید ببینیم این تابع جادویی $\mu(t)$ چیست. کار ساده ای است. با شماره (۳) شروع می کنیم.

$$\mu(t)p(t)=\mu'(t)$$

طرفین را بر $\mu(t)$ تقسیم می کنیم.

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}=p(t)$$

بر اساس آنچه در حسابان خوانده ایم ، سمت چپ رابطه بالا چیزی بجز مشتق زیر نیست.

$$(\ln\mu(t))'=p(t)$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\ln\mu(t)+k=\int p(t)\,dt$$

$$\ln \mu(t) = \int p(t)dt + k$$

همان طور که گفتیم ، چون عدد ثابت انتگرال یک عدد نا شناخته است ، پس آنرا مثبت در طرف راست می نویسیم.

حالا معادله آخر را به صورت نمایی می نویسیم. یعنی

$$e^{\ln \mu(t)} = e^{\int p(t)dt+k}$$

پس

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt+k}$$

و در نهیات داریم

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt+k} = e^k e^{\int p(t)dt}$$

زیرا $x^{a+b} = x^a x^b$ همچنین $e^{\ln(x)} = x$

اگر k یک عدد ثابت ناا شناخته باشد ، پس e^k هم یک عدد ثابت نا شناخته است و می توانیم آنرا هم k بنامیم. پس داریم.

$$\mu(t) = ke^{\int p(t)dt} \qquad (۸)$$

پس حالا یک فرمول برای حل کلی شماره (۷) داریم. و همچنین یک فرمول برای عامل انتگرال گیری شماره (۸) اما یک مشکل داریم. و آن این است که دو عدد ثابت نااشناخته داریم. و هر چه این اعداد بیشتر باشند ، مشکل ما بیشتر می شود. پس باید راهی پیدا کنیم که یکی از آنها حذف شوند.

این کار اسانی است. ابتدا (۸) را در (۷) جانشین می کنیم. و سپس اعداد ثابت را مجددا مرتب می کنیم.

$$y(t) = \frac{\int k\,e^{\int p(t)dt} g(t)dt + c}{k\,e^{\int p(t)dt}}$$

$$= \frac{k\int e^{\int p(t)dt} g(t)dt + c}{k\,e^{\int p(t)dt}}$$

$$= \frac{\int e^{\int p(t)dt} g(t)dt + \frac{c}{k}}{e^{\int p(t)dt}}$$

پس شماره (۷) را می توان طوری نوشت ، که هر دو به صورت یک کسر نشان داده شوند. پس چون C و k هر دو اعداد ثابت نا شناخته هستند ، پس کسر را فقط C می نامیم.

$$y(t) = \frac{\int \mu(t)g(t)dt + C}{\mu(t)} \qquad (۹)$$

در فرمول بالا

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt} \qquad (۱۰)$$

این قسمت مهم است باید خوب به خاطر بسپارید.

مراحل حل Solution Process

۱ ـ معادله دیفرانسیل را به صورت شماره (۱) بنویسید. یعنی

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

۲ ـ عامل انتگرال گیری را پیدا کنید.عامل انتگرال گیری مطابق زیر است.

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$$

۳ ـ طرفین را در $\mu(t)$ ضرب کنید ، و مطمئن شوید سمت چپ به صورت $(\mu(t)y(t))'$ نوشته شود.

۴ ـ از طرفین انتگرال بگیرید.

۵ ـ آنرا برای $y(t)$ حل کنید.

توجه : هرگاه معادله های پیش روی ، احتیاج به اعداداعشاری باشد ، از حروف و اعداد انگلیسی استفاده می شود ، تا مشکلی در نوشتن و خواندن پیش نیاید.

مثال ۱

جواب معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید.

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0.196v$$

حل

لازم است معادله دیفرانسیل را به صورت صحیح بنویسیم.

$$\frac{dv}{dt} + 0.196v = 9.8$$

ملاحظه می کنید که $p(t) = 0.196$ است. پس عامل انتگرال گیری $\mu(t)$ مطابق زیر است.

$$\mu(t) = e^{\int 0.196dt} = e^{0.196t}$$

است. به همان دلیل شماره (۸) می توانیم عدد ثابت را حذف کنیم.

حالا تمام جمله های معادله دیفرانسیل را در عامل انتگرال گیری ضرب می کنیم.

$$e^{0.196t}\frac{dv}{dt} + 0.196e^{0.196t}v = 9.8e^{0.196t}$$

$$(e^{0.196t}v)' = 9.8e^{0.196t}$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\int (e^{0.196t}v)'dt = \int 9.8e^{0.196t}dt$$

$$e^{0.196t}v + k = 50e^{0.196t} + C$$

حالا باید ترتیب دو عدد ثابت را بدهیم ، یعنی آنها را یکی کنیم.

$$e^{0.196}v = 50e^{0.196t} + C - k$$

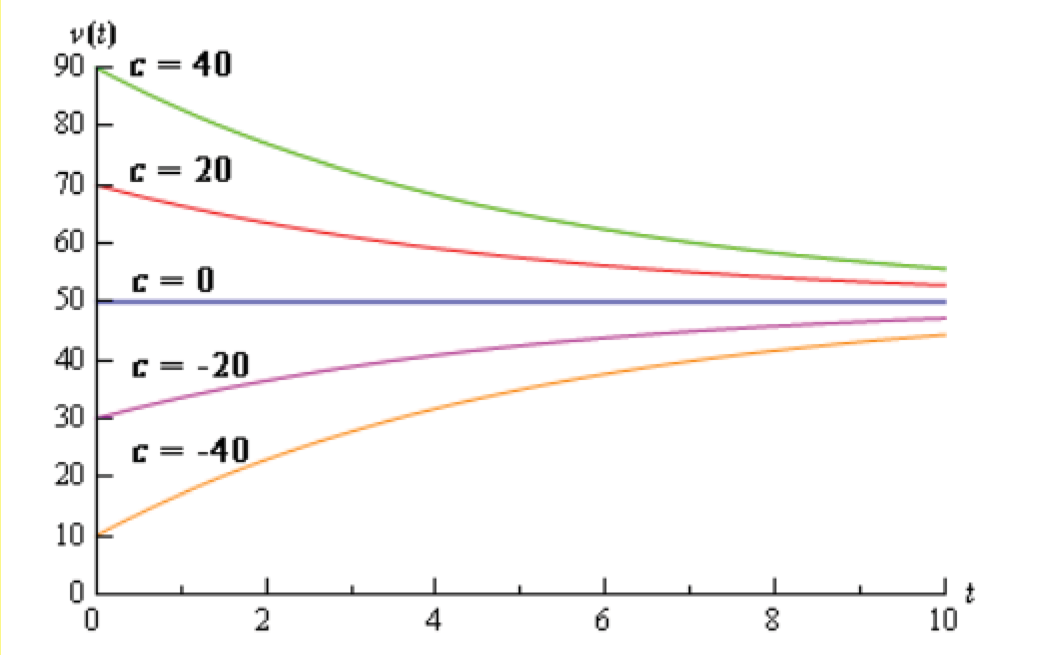
$$e^{0.196}v = 50e^{0.196t} + C$$

مرحله آخر ، طرفین را بر $e^{0.196}$ تقسیم می کنیم.

$$v = 50 + Ce^{-0.196t}$$

برای مقادیر مختلف C به تصویر زیر توجه کنید. به این تصویر می گویند **میدان راستا یا راستای میدان Direction Field**

راستای میدان معادله دیفرانسیل مثال ۱



بخاطر دارید که در بخش ۱.۱ در مورد مساله با مقدار اولیه صحبت کردیم. حالا به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - 0.196v \qquad v(0) = 48$$

ابتدا باید جواب کلی معادله دیفرانسیل را بدست آوریم. اما این کار را در مثال ۱ انجام دادیم. یعنی جواب کلی مطابق زیر را داریم.

$$v = 50 + Ce^{-0.196t}$$

برای پیدا کردن جوابی که بدنبال آن هستیم ، باید مقدار C راپیدا کنیم. برای این کار ، فقط باید شرط اولیه را در معادله بگذاریم و آنرا برای C حل کنیم.

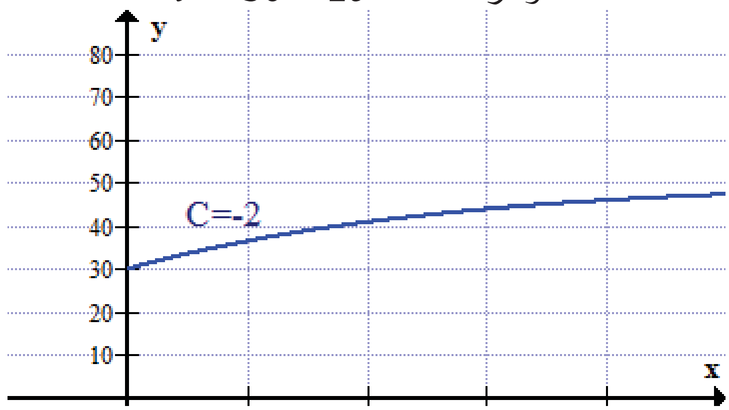
$$48 = v(0) = 50 + C \quad \Rightarrow \quad C = -2$$

پس جواب واقعی برای مساله با مقدار اولیه مطابق زیر است.

$$v = 50 - 2e^{-0.196t}$$

نمودار را در ذیل ملاحظه می کنید.

نمودار $v = 50 - 2e^{-0.196t}$



مثال ۳

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\cos(x)y' + \sin(x)y = ۲\cos^{۳}(x)\sin(x) - ۱ \quad y\left(\frac{\pi}{۴}\right) = ۳\sqrt{۲}\ ,\ 0 \le x < \frac{\pi}{۲}$$

حل

باید معادله دیفرانسیل را باز نویسی کنیم ، بطوری که ضریب مشتق یک باشد. برای این کار طرفین را بر $\cos(x)$ تقسیم می کنیم. پس داریم.

$$\frac{\cos(x)}{\cos(x)}y' + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}y = \frac{۲\cos^{۳}(x)\sin(x)}{\cos(x)} - \frac{۱}{\cos(x)}$$

$$y' + \tan(x)y = ۲\cos^{۲}(x)\sin(x) - \sec(x) \qquad (*)$$

حالا باید عامل انتگرال گیری را پیدا کنیم.

$$\mu(t) = e^{\int \tan(x)dx} = e^{\ln|\sec(x)|}{=}e^{\ln(\sec(x))} = \sec(x)$$

زیرا

$$\int \tan(x)dx = -\ln|\cos(x)| = \ln|\cos(x)|^{-۱} = \ln|\sec(x)| = \ln(\sec(x))$$

$$e^{\ln f(x)} = f(x) \qquad (۱۱)$$

طرفین $(*)$ را در عامل انتگرال گیری یعنی $\sec(x)$ ضرب می کنیم.

$$\sec(x)\, y' + \sec(x)\tan(x)y = ۲\sec(x)\cos^{۲}(x)\sin(x) - \sec^{۲} x$$

$$(\sec(x)y)' = ۲\cos(x)\sin(x) - \sec^{۲}(x)$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\int (\sec(x)y(x))'dx = \int ۲\cos(x)\sin(x) - \sec^{۲}(x)dx$$

$$\sec(x)y(x) = \int \sin(۲x) - \sec^{۲}(x)dx$$

$$\sec(x)y(x) = -\frac{۱}{۲}\cos(۲x) - \tan(x) + C$$

حالا برای $y(x)$ حل می کنیم.

$$y(x) = \frac{-\frac{۱}{۲}\cos(۲x)}{\sec(x)} - \frac{\tan(x)}{\sec(x)} + \frac{C}{\sec(x)}$$

$$= -\frac{۱}{۲}\cos(x)\cos(۲x) - \cos(x)\tan(x) + C\cos(x)$$

$$= -\frac{۱}{۲}\cos(x)\cos(۲x) - \sin(x) + C\cos(x)$$

در نهایت شرط اولیه را بکار می برایم تا مقدار C پیدا شود.

$$۳\sqrt{۲} = y\left(\frac{\pi}{۴}\right) = -\frac{۱}{۲}\cos\left(\frac{\pi}{۴}\right)\cos\left(\frac{\pi}{۲}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{۴}\right) + C\cos\left(\frac{\pi}{۴}\right)$$

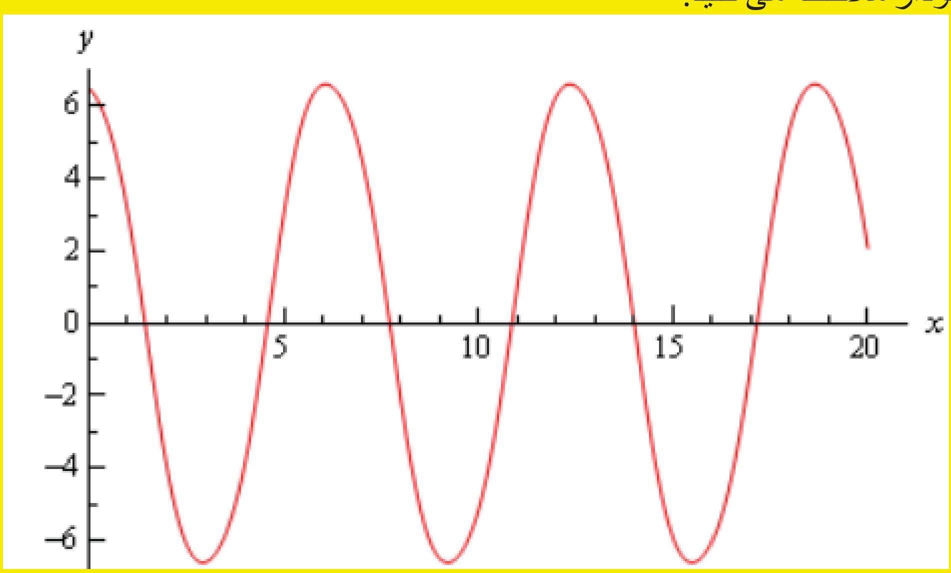
$$۳\sqrt{۲} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} + C\,\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$C - ۷$$

پس جواب واقعی مطابق زیر است.

$$y(x) = -\frac{۱}{۲}\cos(x)\cos(۲x) - \sin(x) + ۷\cos(x)$$

در ذیل هم نمودار ملاحظه می کنید.



مثال ۴

مطلوب است جواب مساله با مقدار اولیه زیر.

$$ty' + ۲y = t^۲ - t + ۱ \qquad y(۱) = \frac{۱}{۲}$$

حل

ابتدا باید ضریب y' فقط یک باشد. پس طرفین را بر t تقسیم می کنیم.

$$y' + \frac{۲}{t}y = t - ۱ + \frac{۱}{t} \qquad (*)$$

حالا باید عامل انتگرال گیری را پیدا کنیم.

$$\mu(t) = e^{\int \frac{۲}{t}dt = e^{۲\int \frac{۱}{t}dt}} = e^{۲\ln|t|}$$

باید $\mu(t)$ را ساده کنیم. اما شماره (۱۱) را نمی توانیم بکار بریم ، زیرا باید جلو لگاریتم ، ضریب یک باشد. ، پس بخاطر آورید که داشتیم.

$$\ln x^r = rl \ln x$$

پس ضریب انتگرال گیری به طریق زیر ساده می کنیم.

$$\mu(t) = e^{۲\ln|t|} = e^{\ln|t|^۲} = |t|^۲ = t^۲$$

اینجا نماد قدر مطلق را حذف کردیم ، زیرا t را به توان ۲ می رسانیم. اما دقت کیند همیشه نمی توانیم قدر مطلق را حذف کنیم ، مگر این که دلیل و یا قانونی داشته باشیم. معمولاً نماد قدر مطلق باید بماند.
حالا ، معادله باز نویسی شده را یعنی $(*)$ در عامل انتگرال گیری ضرب کنیم. توجه داشته باشید که معادله دیفرانسیل اصلی را را نمی توان بکار برد.

$$t^۲\left(y' + \frac{۲}{t}y\right) = t^۲\left(t - ۱ + \frac{۱}{t}\right)$$

$$t^۲y' + ۲ty = t^۳ - t^۲ + t$$

$$\left(t^۲y\right)' = t^۳ - t^۲ + t$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$t^۲y = \int t^۳ - t^۲ + t\,dt$$

$$= \frac{۱}{۴}t^۴ - \frac{۱}{۳}t^۳ + \frac{۱}{۲}t^۲ + C$$

$$y(t) = \frac{۱}{۴}t^۲ - \frac{۱}{۳}t + \frac{۱}{۲} + \frac{C}{t^۲}$$

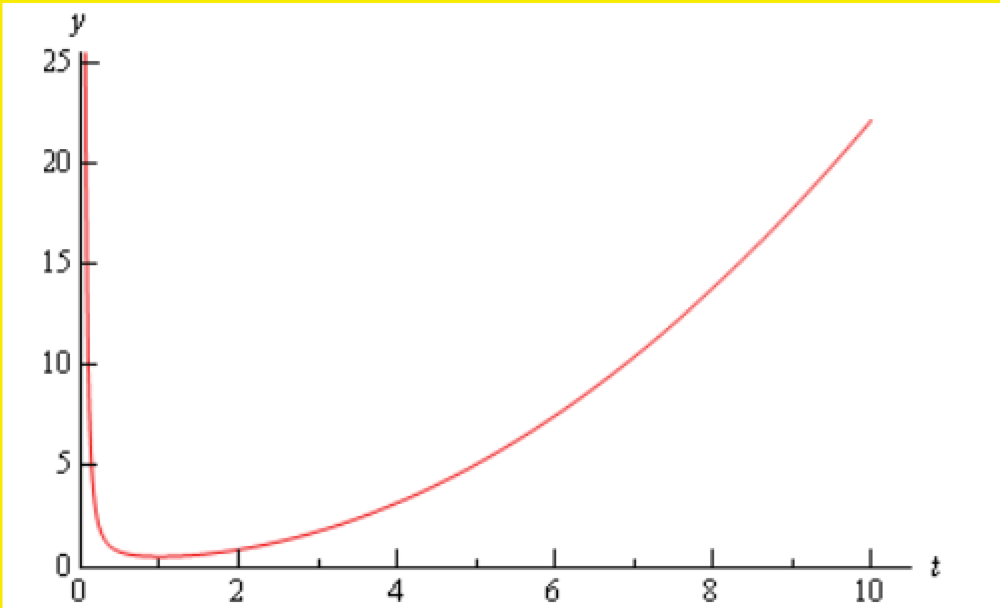
و در نهیات با بکار بردن شرط اولیه ، مقدار C را پیدا می کنیم.

$$\frac{۱}{۲} = y(۱) = \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} + C \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{۱}{۱۲}$$

پس جواب مطابق زیر است.

$$y(t)=\frac{۱}{۴}t^{۲}-\frac{۱}{۳}t+\frac{۱}{۲}+\frac{C}{۱۲t^{۲}}$$

این هم نمودار



مثال ۵

مطلوب است جواب مساله با شرط اولیه زیر.

$$ty'-۲y=t^{۵}\sin(۲t)-t^{۳}+۴t^{۴}\qquad y(\pi)=\frac{۳}{۲}\pi^{۴}$$

حل

ابتدا طرفین را بر t تقسیم می کنیم ، تا معادله دیفرانسیل به صورت صحیح باز نویسی شود.

$$y'-\frac{۲}{t}y=t^{۴}\sin(۲t)-t^{۲}+۴t^{۳}\qquad (*)$$

حالا باید عامل انتگرال گیری را پیدا کنیم.

$$\mu(t)=e^{\int-\frac{۲}{t}dt}=e^{-۲\ln|t|}$$

مانند مثال ۴ نماد قدر مطلق را حذف می کنیم.

$$\mu(t)=e^{-۲\ln|t|}=e^{\ln|t|^{-۲}}=|t|^{-۲}=t^{-۲}$$

حالا معادله دیفرانسیل باز نویسی شده یعنی $(*)$ در $\mu(t)$ ضرب می کنیم.

$$t^{-۲}\left(y'-\frac{۲}{t}y\right)=t^{-۲}\left(t^{۴}\sin(۲t)-t^{۲}+۴t^{۳}\right)$$

$$\left(t^{-۲}y\right)'=t^{۲}\sin(۲t)-۱+۴t$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$t^{-۲}y = \int \left(t^{۲}\sin(۲t) - ۱ + ۴t\right)dt$$
$$= \int t^{۲}\sin(۲t)\,dt + \int -۱ + ۴t dt$$
$$= -\frac{۱}{۲}t^{۲}\cos(۲t) + \frac{۱}{۲}t\sin(۲t) + \frac{۱}{۴}\cos(۲t) - t + ۲t^{۲} + C$$
$$y(t) = -\frac{۱}{۲}t^{۴}\cos(۲t) + \frac{۱}{۲}t^{۳}\sin(۲t) + \frac{۱}{۴}t^{۲}\cos(۲t) - t^{۳} + ۲t^{۴} + Ct^{۲}$$

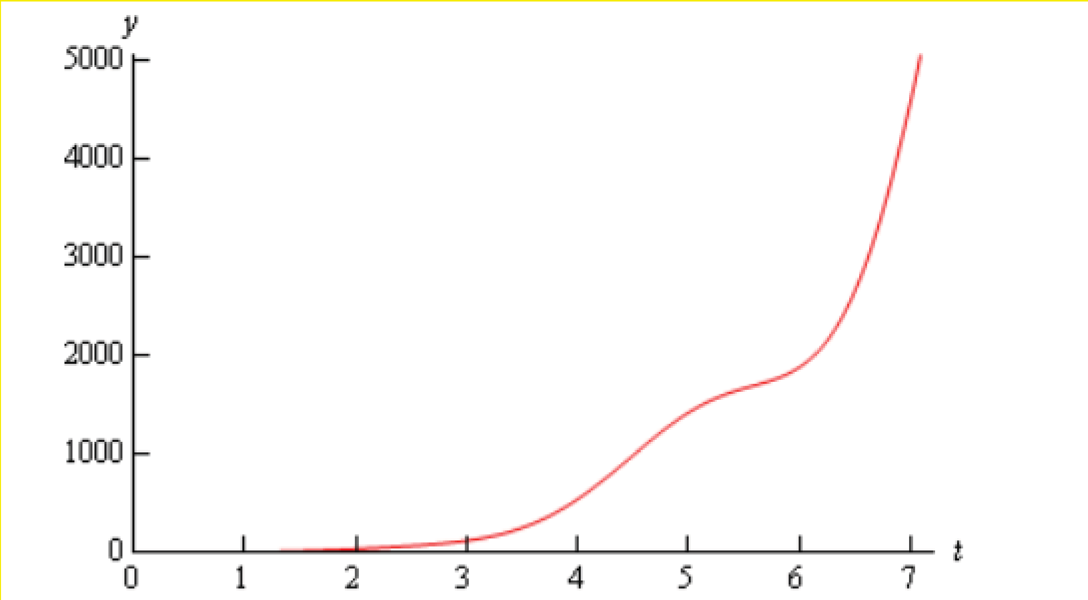
با استفاده از شرط اولیه مقدار C را پیدا می کنیم.

$$\frac{3}{2}\pi^4 = y(\pi) = -\frac{1}{2}\pi^4 + \frac{1}{4}\pi^2 - \pi^3 + 2\pi^4 + c\pi^2 = \frac{3}{2}\pi^4 - \pi^3 + \frac{1}{4}\pi^2 + c\pi^2$$
$$\pi^3 - \frac{1}{4}\pi^2 = c\pi^2$$
$$c = \pi - \frac{1}{4}$$

پس جواب مطابق زیر است.

$$y(t) = -\frac{1}{2}t^4\cos(2t) + \frac{1}{2}t^3\sin(2t) + \frac{1}{4}t^2\cos(2t) - t^3 + 2t^4 + \left(\pi - \frac{1}{4}\right)t^2$$

این هم نمودار



مثال ۶

مطلوب است جواب مساله با مقدار اولیه و سپس تمام رفتار های ممکن جواب ، هنگامی که $t \to \infty$ اگر این رفتار بستگی به مقدار y_0 دارد این وابستگی را مشخص کنید.

$$۲y' - y = ۴\sin(۳t) \qquad y(0) = y_0$$

حل

ابتدا طرفین در بر ۲ تقسیم می کنیم ، تا ضریب y' بشود یک.

$$y' - \frac{۱}{۲}y = ۲\sin(۳t) \qquad (*)$$

حالا $\mu(t)$ را پیدا می کنیم.

$$\mu(t) = e^{\int -\frac{۱}{۲}dt} = e^{-\frac{t}{۲}}$$

طرفین را $(*)$ را در $\mu(t)$ ضرب می کنیم.

$$e^{-\frac{t}{۲}}\left(y' - \frac{۱}{۲}y\right) = ۲e^{-\frac{t}{۲}}\sin(۳t)$$

$$\left(e^{-\frac{t}{۲}}y\right)' = ۲e^{-\frac{t}{۲}}\sin(۳t)$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$e^{-\frac{t}{۲}}y = \int ۲e^{-\frac{t}{۲}}\sin(۳t)dt$$

$$= -\frac{۲۴}{۳۷}e^{-\frac{t}{۲}}\cos(۳t) - \frac{۴}{۳۷}e^{-\frac{t}{۲}}\sin(۳t) + C$$

$$y(t) = -\frac{۲۴}{۳۷}\cos(۳t) - \frac{۴}{۳۷}\sin(۳t) + Ce^{-\frac{t}{۲}}$$

برای پیدا کردن C باید ، شرط اولیه را بکار بریم ، اما این شرط شامل y_0 است ، که مقدار آنرا نداریم.

$$y_0 = y(0) = -\frac{۲۴}{۳۷} + C \qquad \Rightarrow \qquad C = y_0 + \frac{۲۴}{۳۷}$$

پس جواب مطابق زیر است.

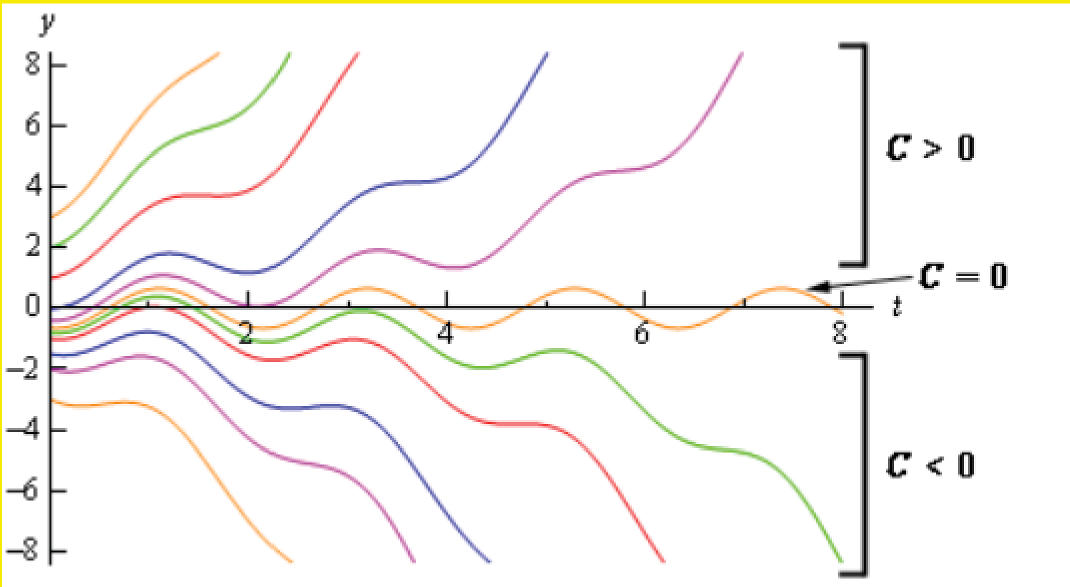
$$y(t) = -\frac{24}{37}\cos(3t) - \frac{4}{37}\sin(3t) + \left(y_0 + \frac{24}{37}\right)\mathbf{e}^{\frac{t}{2}}$$

حالا نگاهی به رفتار جواب هنگامی که $t \to \infty$ میل می کند. تابع نمایی همیشه به طرف بی نهایت می رود هنگامی که $t \to \infty$ می رود. اما بستگی به علامت ضریب C دارد. در جدول زیررفتار جواب

دردرازمدت برای تمام مقادیر C را نشان می دهد.

رفتار جواب هنگامی که $t \to \infty$	دامنه C
$y(t) \to -\infty$	$C < 0$
ثابت است	$C = 0$
$y(t) \to \infty$	$C > 0$

رفتار در نمودار زیر دیده می شود.



حالا که رابطه بین C و y_0 می دانیم می توانیم رابطه بین جواب و y_0 مشخص کنیم.

رفتار جواب هنگامی که $t \to \infty$	دامنه y_0
$y(t) \to -\infty$	$y_0 < -\frac{۲۴}{۳۷}$
ثابت است	$y_0 = -\frac{۲۴}{۳۷}$
$y(t) \to \infty$	$C > -\frac{۲۴}{۳۷}$

رفتار در نمودار زیر دیده می شود.

تمرینات ۲.۱

یاد آوری

معادله باید به صورت زیر نوشته شود.

$$\frac{dy}{dt}+p(t)y=g(t)$$

در این صورت عامل انتگرال گیری مطابق زیر است.

$$\mu(t)=e^{\int p(t)dt}$$

معادله های دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۱) $\frac{dy}{dx}+۳x^{۲}y=۶x^{۲}$

۲) $x^{۲}y'+xy=۱ \qquad x>0 \quad y(۱)=۲$

۳) $y'+y=۱$

۴) $y'=x-y$

۵) $xy'+y=\sqrt{x}$

۶) $\frac{dy}{dx}=۲x$ ، $y(0)=۲$

۷) $y'+۲xy=x$

۸) $x^{۲}y'-xy=x^{۴}\cos(۲x) \quad ,y(\pi)=۲\pi$

۹) $y'-y-xe^{x}=0$

۱۰) $y'-۲y=x$

۱۱) $\frac{dy}{dx}+y=e^{۳x}$

۱۲) $\cos^{۲}(x)\sin(x)\frac{dy}{dx}+\cos^{۳}(x)y=۱$

۱۳ - نشان دهید که $f(t)=\frac{t^{۳}}{۳}+t+\frac{۸}{۳}$ جواب مساله با مقدار اولیه $y'=t^{۲}+۱ \;,\; y(۱)=۴$ است.

۱۴ - مساله با مقدار اولیه برا ی قانون تبرید نیوتن IVP for Newton's Law of Cooling

این مثال مخصوص مساله با مقدار اولیه برای قانون تبرید نیوتن در نظر بگیرید.

$$y'=۲(۲۵-y)\;, \qquad y(۰)=۴۰$$

در مورد جواب های این مساله بحث کنید.

۱۵ - معادله دیفرانسیل زیررا حل کنید.

$$\frac{dy}{dt}+\frac{۱}{۲}y=\frac{۱}{۲}e^{\frac{t}{۳}}$$

سپس نمودار چند جواب را رسم کنید و جواب مخصوصی که نمودار آن از نقطه $(0,۱)$ می گذرد را رسم کنید.

۱۶- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dt} - ۲y = ۴ - t$$

چند جواب را رسم کنید ، و در مورد جوابها هنگامی که $t \to \infty$ بحث کنید.

۱۷ - مسئله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$ty' + ۲y = ۴t^۲ \ , \qquad y(۱) = ۲$$

پاسخ

معادله های دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$۱) \quad \frac{dy}{dx} + ۳x^۲y = ۶x^۲$$

حل

معادله به صورت دلخواه است ، یعنی

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

توجه دارید که در این معادله متغیر مستقل x است و نه t

و لذا عامل انتگرال گیری مطابق زیر است.

$$\mu(x) = e^{\int ۳x^۲dx} = e^{x^۳}$$

طرفین معادله را در $e^{x^۳}$ ضرب می کنیم. پس داریم.

$$e^{x^۳} * \frac{dy}{dx} + ۳x^۲e^{x^۳}y = ۶x^۲e^{x^۳}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^۳}y\right) = ۶x^۲e^{x^۳}$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\int \frac{d}{dx}\left(e^{x^۳}y\right)\ dx = \int ۶x^۲e^{x^۳}\ dx$$

$$e^{x^۳}y = \int ۶x^۲e^{x^۳}dx = ۲e^{x^۳} + C$$

$$y = ۲ + Ce^{-x^۳}$$

توضیح :

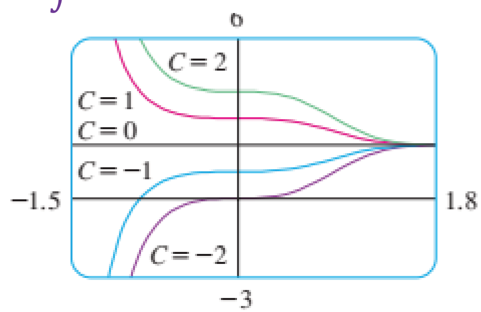
چرا $\int ۶x^۲e^{x^۳}dx = ۲e^{x^۳} + C$ است؟ زیرا ، از طریق جانشینی عمل می کنیم.

فرض می کنیم $u = x^۳$ باشد. پس $\frac{du}{dx} = ۳x^۲$ است ، پس $dx = \frac{۱}{۳x^۲}du$ است. لذا

$$\int ۶x^۲e^{x^۳}\,dx = ۲\int e^u du = ۲e^u$$

چون فرض کردیم $u = x^۳$ پس در نهایت داریم

$$\int ۶x^۲e^{x^۳}\,dx = ۲e^{x^۳} + C$$



۲) $x^۲y' + xy = ۱ \qquad x > 0 \quad y(۱) = ۲$

حل

ابتدا طرفین در بر $x^۲$ تقسیم می کنیم تا معادله به صورت استاندارد بشود. به عبارتی باید ضریب y' یک باشد. پس داریم.

$$y' + \frac{۱}{x}y = \frac{۱}{x^۲} \qquad x > 0 \quad (*)$$

پس عامل انتگرا ل گیری

$$\mu(x) = e^{\int \frac{۱}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

طرفین معادله $(*)$ در x ضرب می کنیم.

$$xy' + y = \frac{۱}{x}$$

$$(xy)' = \frac{۱}{x}$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$xy = \int \frac{۱}{x}dx = \ln x + C$$

$$y = \frac{\ln x + C}{x}$$

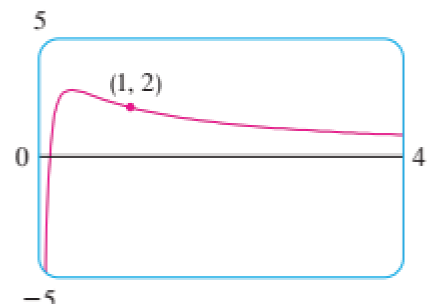
چون شرط اولیه $y(۱) = ۲$ است .پس داریم.

$$۲ = \frac{\ln ۱ + C}{۱} = C$$

لذا جواب مساله با مقدار اولیه

$$y=\frac{\ln x+۲}{x}$$

است. تصویر زیر



۳) $y'+y=۱$

حل

معادله دیفرانسیل به صورت استاندارد $\frac{dy}{dx}+p(x)y=g(x)$ است. پس $p(x)=۱$ است. عامل انتگرال گیری را پیدا می کنیم.

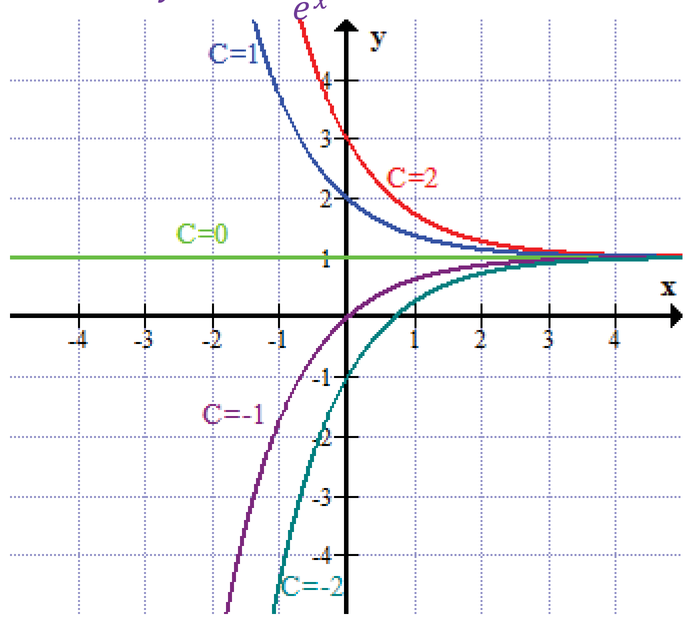
$$\mu(x)=e^{\int ۱\,dx}=e^{x}$$

طرفین را در عامل انتگرال گیری ضرب می کنیم.

$$e^{x}y'+e^{x}y=e^{x}$$
$$(e^{x}y)'=e^{x}$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$e^{x}y=\int e^{x}\,dx$$
$$e^{x}y=e^{x}+C$$
$$y=۱+\frac{C}{e^{x}}=۱+Ce^{-x}$$



۴) $y' = x - y$

حل

به صورت استاندارد می نویسیم. $y' + y = x$ پس $p(x) = ۱$ است. حالا عامل انتگرال گیری را پیدا می کنیم.

$$\mu(x) = e^{\int ۱\, dx} = e^{x}$$

طرفین را در $\mu(x)$ ضرب می کنیم. پس داریم.

$$e^{x}y' + e^{x}y = xe^{x}$$
$$(e^{x}y)' = x\, e^{x}$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$e^{x}y = \int x\, e^{x}\, dx$$
$$e^{x}y = x\, e^{x} - e^{x} + C$$

طرفین را بر e^{x} تقسیم می کنیم.

$$y = x - ۱ + Ce^{-x}$$

چرا $\int x\, e^{x}\, dx = x\, e^{x} - e^{x} + C$ است؟ انتگرا ل جز به جز می گیریم.

$$\int f\, g' = fg - \int f'g$$
$$f = x\ , \qquad g' = e^{x}$$
$$f' = ۱\ , \qquad g = e^{x}$$

پس

$$\int x\, e^{x}\, dx = x\, e^{x} - \int e^{x}\, dx = x\, e^{x} - e^{x} + C$$

۵) $xy' + y = \sqrt{x}$

حل

چون $p(x) = ۱$ مشتق ضریب y' است ، پس می توانیم معادله دیفرانسیل داده شده را که به صورت $xy' + y = \sqrt{x}$ است به صورت معادله قابل انتگرال گیری $(xy)' = \sqrt{x}$ بنویسیم. حالا از طرفین انتگرال می گیریم.

$$xy = \int \sqrt{x}\ dx = \frac{۲}{۳}x^{\frac{۳}{۲}} + C$$
$$y = \frac{۲}{۳}\sqrt{x} + \frac{C}{x}$$

۶) $\dfrac{dy}{dx} = ۲x$ ، $y(0) = ۲$

حل

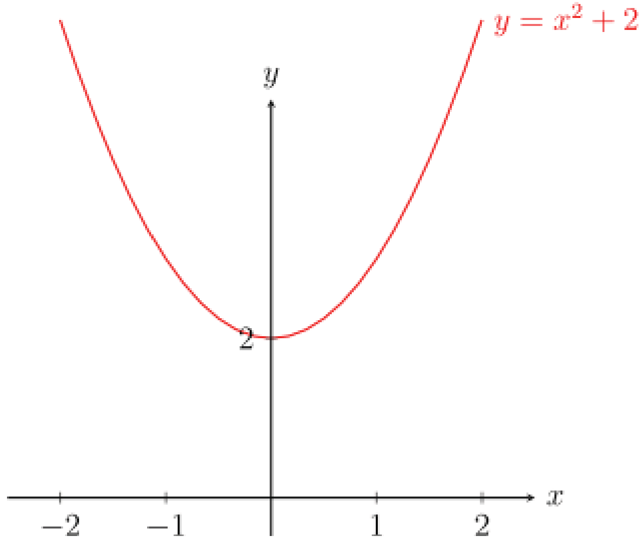
از طرفین انتگرال می گیریم.

$$y = \int ۲x\, dx = x^۲ + C$$

حالاشرط اولیه را بکار می بریم. پس داریم.

$$y(0) = (0)^۲ + C = ۲$$
$$C = ۲$$

پس جواب مساله با شرط اولیه $y = x^۲ + ۲$ است.



۷) $y' + ۲xy = x$

حل

معادله دیفرانسیل به صورت استاندارد $y' + p(x)y = g(x)$است. پس $p(x) = ۲x$ است. پس

$$\mu(x) = e^{\int ۲x\, dx} = e^{x^۲}$$

طرفین معادله به صورت استاندارد را در عامل انتگرال گیری ضرب می کنیم.

$$e^{x^۲} y' + ۲e^{x^۲} xy = e^{x^۲} x$$
$$\left(e^{x^۲} y\right)' = x\, e^{x^۲}$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$e^{x^۲} y = \int x\, e^{x^۲}\, dx = \frac{۱}{۲} e^{x^۲} + C$$

$$y = e^{-x^۲}\left(\frac{۱}{۲} e^{x^۲} + C\right) = \frac{۱}{۲} + Ce^{-x^۲}$$

توضیح :چرا $\int x\, e^{x^۲}\, dx = \frac{۱}{۲}\, e^{x^۲} + C$ است؟

انتگرا ل گیری از طریق جانشینی. فرض می کنیم $u = x^۲$ باشد. پس $\frac{du}{dx} = ۲x$ است. لذا

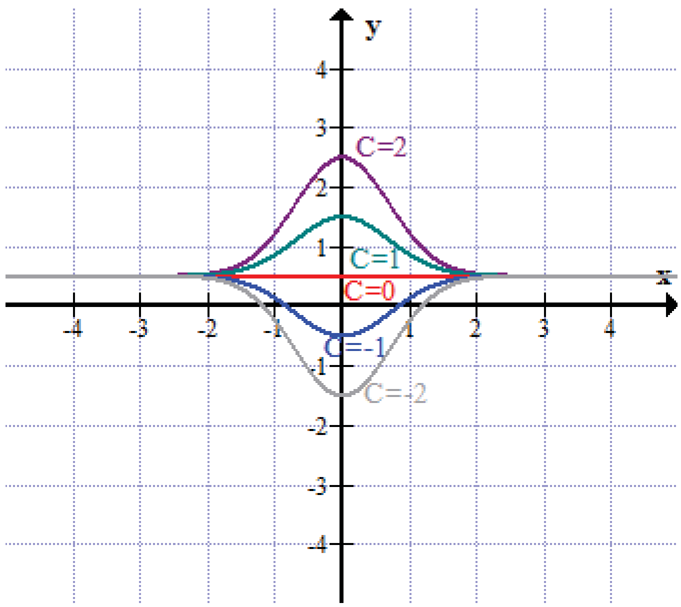
$$dx = \frac{1}{2x} du$$

است. پس

$$\int x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int e^u\, du = \frac{1}{2} e^u$$

جانشینی را بر می گردانیم. پس

$$\int x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$



۸) $x^2 y' - xy = x^4 \cos(2x) \quad , y(\pi) = 2\pi$

حل

ابتدا طرفین را بر x^2 تقسیم می کنیم تا ضریب y' بشود یک. پس داریم.

$$y' - \frac{1}{x} y = x^2 \cos(2x) \qquad (*)$$

حالا معادله دیفرانسیل به صورت استاندارد

$$y' + p(x) y = g(x)$$

است. و $p(x) = -\frac{1}{x}$ است. حالا باید ضریب انتگرال گیری را پیدا کنیم.

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}$$

طرفین معادله $(*)$ را در x^{-1} ضرب می کنیم. پس داریم.

$$x^{-۱}y' - \left(x^{-۱}\right)\frac{۱}{x}y = \left(x^{-۱}\right)x^{۲}\cos(۲x)$$
$$x^{-۱}y' - x^{-۲}y = x\cos(۲x)$$
$$\left(x^{-۱}y\right)' = x\cos(۲x)$$

از طرفین انتگرال می گیریم. پس داریم.

$$x^{-۱}y = \int x\cos(۲x)\,dx = \frac{۱}{۲}\,x\sin(۲x) + \frac{۱}{۴}\cos(۲x) + C$$

طرف راست از طریق انتگرال گیری جز به جز بدست آوردیم. یعنی

$$\int x\cos(۲x)\,dx$$
$$\int fg' = fg - \int f'g$$
$$f = x \text{ ، } g' = \cos(۲x)$$
$$f' = ۱ \text{ ، } g = \frac{\sin(۲x)}{۲}$$

پس

$$\int x\cos(۲x)\,dx = \frac{x\sin(۲x)}{۲} - \int \frac{\sin(۲x)}{۲}\,dx$$

حالا انتگرال سمت راست را از طریق جانشینی محاسبه می کنیم. فرض می کنیم $u = ۲x$ باشد ، پس $\frac{du}{dx} = ۲$ و $dx = \frac{۱}{۲}du$ پس

$$\int \frac{\sin(۲x)}{۲}\,dx = \frac{۱}{۴}\int \sin(u)\,du = -\frac{۱}{۴}\cos(u)$$

جانشینی را بر می گردانیم.

$$\int x\cos(۲x)\,dx = \frac{x\sin(۲x)}{۲} + \frac{\cos(۲x)}{۴} + C$$

پس در نهایت داریم.

$$x^{-۱}y = \int x\cos(۲x)\,dx = \frac{۱}{۲}\,x\sin(۲x) + \frac{۱}{۴}\cos(۲x) + C$$

$$y = \frac{۱}{۲}x^{۲}\sin(۲x) + \frac{۱}{۴}x\cos(۲x) + Cx$$

این جواب کلی است. حالا مقدار اولیه را بکار می بریم.

$$y(\pi) = ۲\pi$$

یعنی

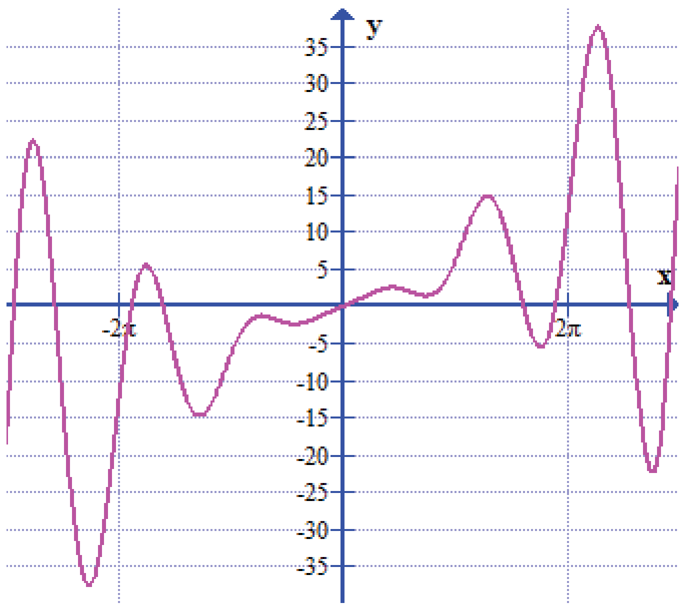
$$\frac{۱}{۲}\pi^{۲}\sin(۲\pi)+\frac{۱}{۴}\pi\cos(۲\pi)+C\pi=۲\pi$$

$$\frac{۱}{۴}\pi+C\pi=۲\pi$$

$$C=\frac{۷}{۴}$$

پس جواب مساله با مقدار اولیه مطابق زیر است.

$$y=\frac{۱}{۲}x^{۲}\sin(۲x)+\frac{۱}{۴}x\cos(۲x)+\frac{۷}{۴}x$$



۹) $y'-y-xe^{x}=0$

حل

معادله را به صورت استاندارد می نویسیم.

$$y'-y=xe^{x}\quad(*)$$

عامل انتگرال گیری را پیدا می کنیم.

$$\mu(x)=e^{\int -۱\,dx=}=e^{-x}$$

طرفین $(*)$ را در $\mu(x)=e^{-x}$ ضرب می کنیم.

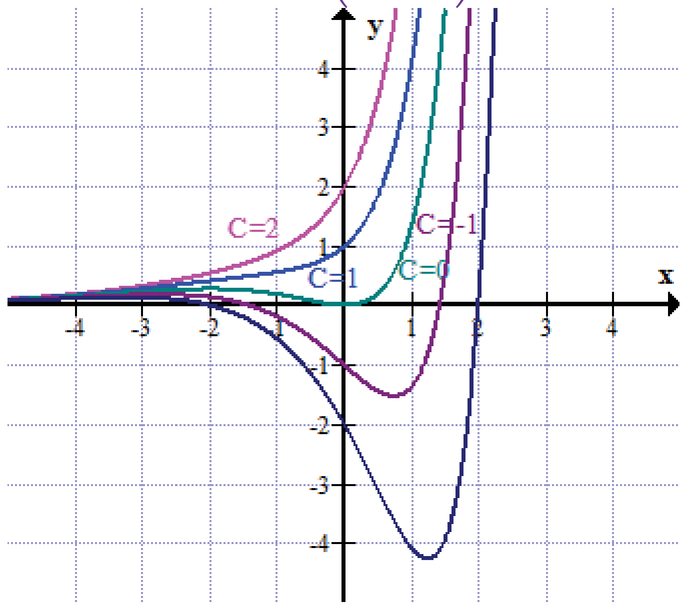
$$e^{-x}y'-e^{-x}y=(e^{-x})xe^{x}=x$$

$$(e^{-x}y)'=x$$

از طرفین انتگرال می گیریم

$$e^{-x}y=\int x\,dx=\frac{۱}{۲}x^{۲}+C$$

$$y = e^{x}\left(\frac{x^{۲}}{۲} + C\right)$$



۱۰) $y' - ۲y = x$

حل

معادله به صورت استاندارد است. $p(x) = -۲$ است. پس عامل انتگرال گیری را پیدا می کنیم.

$$\mu(x) = e^{\int -۲\, dx} = e^{-۲x}$$

طرفین معادله دیفرانسیل که به صورت استابدارد است در $e^{-۲x}$ ضرب می کنیم.

$$e^{-۲x}y' - ۲e^{-۲x}y = e^{-۲x}x$$

$$\left(e^{-۲x}y\right)' = e^{-۲x}\, x$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$e^{-۲x}y = \int x\ e^{-۲x}\ dx$$

انتگرل سمت راست را از طریق انتگرا ل گیری جز به جز محاسبه می کنیم.

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

$$f = x\ , \qquad g' = e^{-۲x}$$

$$f' = ۱\ , \qquad g = -\frac{e^{-۲x}}{۲}$$

پس

$$\int x\ e^{-۲x}\ dx = -\frac{xe^{-۲x}}{۲} - \int -\frac{e^{-۲x}}{۲}\ dx$$

حالا

$$\int -\frac{e^{-۲x}}{۲}\,dx$$

را از طریق جانشینی محاسبه می کنیم. فرض می کنیم $u=-۲x$ باشد ، پس $\frac{du}{dx}=-۲$ است و لذا $dx=-\frac{۱}{۲}\,du$ است. پس داریم.

$$\int -\frac{e^{-۲x}}{۲}\,dx=\frac{۱}{۴}\int e^{u}\,du=\frac{۱}{۴}e^{u}+C$$

جانشینی را بر می گردانیم.

$$\int -\frac{e^{-۲x}}{۲}\,dx=\frac{e^{-۲x}}{۴}+C$$

و در نهایت داریم.

$$\int x\ e^{-۲x}\ dx=-\frac{x\,e^{-۲x}}{۲}-\frac{e^{-۲x}}{۴}+C$$
$$=-\frac{(۲x+۱)e^{-۲x}}{۴}+C$$

و در نهایت داریم.

$$y=\frac{-\frac{(۲x+۱)e^{-۲x}}{۴}}{e^{-۲x}}+Ce^{۲x}$$
$$=-\frac{۱}{۴}(۱+۲x)+Ce^{۲x}$$

۱۱) $\frac{dy}{dx}+y=e^{۳x}$

حل

نماد مشتق را تغییر داده ایم تا با نماد های مختلف که در کتب مختلف می آید ، اشنا شوید.

معادله به صورت استاندارد است. پس $p(x)=۱$,حالا عامل انتگرال گیری را پیدا می کنیم.

$$\mu(x)=e^{\int ۱\,dx}=e^{x}$$

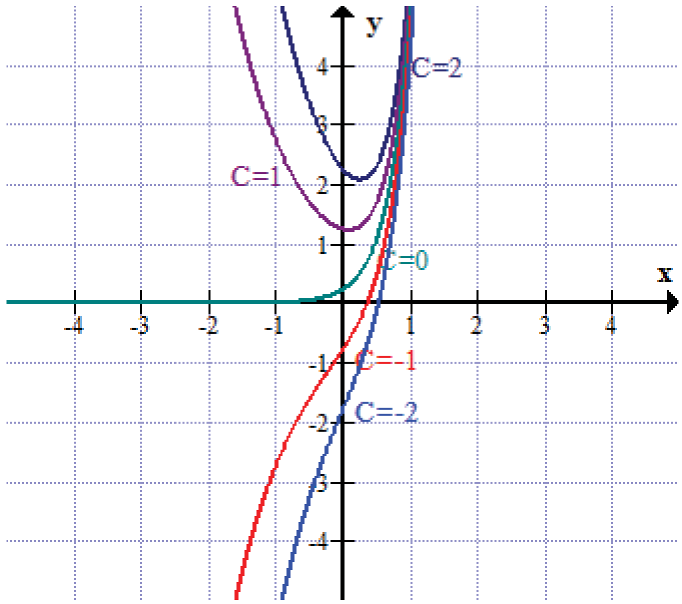
طرفین معادله دیفرانسیل را در e^{x} ضرب می کنیم.

$$\frac{dy}{dx}e^{x}+y\,e^{x}=e^{۳x}*e^{x}$$
$$\frac{d}{dx}(y*e^{x})=e^{۴x}$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$ye^{x}\int e^{۴x}\,dx=\frac{e^{۴x}}{۴}+C$$

$$y=\frac{e^{۳x}}{۴}+Ce^{-x}$$



۱۲) $\cos^{۲}(x)\sin(x)\dfrac{dy}{dx}+\cos^{۳}(x)y=۱$

حل

ابتدا معادله را به صورت استاندارد می نویسیم. یعنی طرفین را بر $\cos^{۲}(x)\sin(x)$ تقسیم می کنیم.

$$\frac{dy}{dx}+\frac{\cos(x)}{\sin(x)}y=\frac{۱}{\cos^{۲}(x)\sin(x)}\qquad(*)$$

حالا عامل انتگرال گیری را پیدا می کنیم. ملاحظه می کنید که $p(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ است. پس

$$\mu(x)=e^{\int\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx}=e^{\ln|\sin(x)|}=\sin(x)$$

چرا $\int\frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx=\ln|\sin x|$ است؟ فرض می کنیم $u=\sin x$ باشد. پس $\frac{du}{dx}=\cos x$ است.

پس $dx=\frac{۱}{\cos x}du$ است. پس

$$\int\frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx=\int\frac{۱}{u}\,dy=\ln(u)=\ln(\sin x)$$

همچنین بر اساس قوانین لگاریتم داریم $e^{\ln c}=c$ پس

$$e^{\ln|\sin(x)|}=\sin(x)$$

طرفین $(*)$ در $\mu(x)$ ضرب می کنیم. پس داریم.

$$\sin(x)\frac{dy}{dx}+\cos(x)y=\frac{۱}{\cos^{۲}(x)}$$
$$\frac{d}{dx}[y*\sin(x)]=\frac{۱}{\cos^{۲}(x)}$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$y*\sin(x)=\int \sec^{۲}(x)dx=\tan(x)+C$$
$$y=\frac{۱}{\cos(x)}+\frac{C}{\sin(x)}$$

۱۳ - نشان دهید که $f(t)=\frac{t^{۳}}{۳}+t+\frac{۸}{۳}$ جواب مساله با مقدار اولیه $y'=t^{۲}+۱\ ,\ y(۱)=۴$ است.

پاسخ

ابتدا $f'(t)$ را محاسبه می کنیم.

$$f'(t)=t^{۲}+۱$$

حالا مقدار اولیه را در $f(t)$ می گذاریم.

$$f(۱)=\frac{۱^{۳}}{۳}+۱+\frac{۸}{۳}=\frac{۱}{۳}+\frac{۳}{۳}+\frac{۸}{۳}=\frac{۱۲}{۳}=۴$$

پس آنچه لازم بود نشان داده شد.

۱۴ - مساله با مقدار اولیه برا ی قانون تبرید نیوتن IVP for Newton's Law of Cooling

این مثال مخصوص مساله با مقدار اولیه برای قانون تبرید نیوتن در نظر بگیرید.

$$y'=۲(۲۵-y)\ ,\qquad y(۰)=۴۰$$

در مورد جواب های این مساله بحث کنید.

جواب

ابتدا صفر معادله را در نظر می گیریم. اگر $y(t_0)=۲۵$ باشد ، سمت راست معادله دیفرانسیل صفر است ، پس تابع ثابت $y(t)=۲۵$ یک جواب معادله دیفرانسیل است. اما یک جواب برای مساله با مقدار اولیه نیست. زیرا $y(۰)\neq ۲۵$.

تفسیر فیزیکی این جواب ثابت این است که اگر مایع دارای همان درجه حرارت باشد که محیط آن دارد ,پس مایع در همان درجه حرارت باقی می ماند. تا وقتی که $y\neq ۲۵$ می توانیم معادله دیفرانسیل را به صورت زیر باز نویسی کنیم.

$$\frac{dy}{dt}*\frac{۱}{۲۵-y}=۲$$
$$\frac{۱}{۲۵-y}dy=۲dt$$

پس

$$\int \frac{۱}{۲۵-y}\,dy = \int ۲\,dt$$

یعنی ، دو ضد مشتق ها باید یکی باشند ، بجز یک اختلاف ثابت .
می توانیم این ضد مشتق ها را محاسبه کنیم و نتایج را دوباره مرتب کنیم.

$$\int \frac{۱}{۲۵-y}\,dy = \int ۲\,dt$$

$$(-۱)\ln|۲۵-y| = ۲t + C_\circ$$

$$\ln|۲۵-y| = -۲t - C_\circ = -۲t + C$$

$$y - ۲۵ = \pm e^{C} e^{-۲t}$$

$$y = ۲۵ \pm e^{C} e^{-۲t} = ۲۵ + Ae^{-۲t}$$

اینجا $A = \pm e^{C} = \pm e^{-C_\circ}$ یک عدد ثابت غیر صفر است. چون می خواهیم $y(\circ) = ۴\circ$ باشد ، جانشین می کنیم و برای A حل می کنیم.

$$۴\circ = ۲۵ + Ae^{\circ}$$

$$A = ۱۵$$

لذا $y = ۲۵ + ۱۵e^{-۲t}$ یک جواب برای مساله با مقدار اولیه است. توجه داشته باشید که y هرگز ۲۵ نمی شیود ، پس این برای تمام مقادیر t منطقی به نظر می‌رسد. اما ، اگر بگذاریم $A = \circ$ باشد ، جواب $y = ۲۵$ برای میادله دیفرانسیل بدست می آوریم ، که جواب برای مساله با مقدار اولیه است ، اگر لازم باشد $y(\circ) = ۲۵$ باشد. پس $y = ۲۵ + Ae^{-۲t}$ تمام جواب های معادله دیفرانسیل $y' = ۲(۲۵-y)$ است ، و تمام جوابهای مساله با مقدار اولیه مربوطه.

۱۵ ـ معادله دیفرانسیل زیررا حل کنید.

$$\frac{dy}{dt} + \frac{۱}{۲}y = \frac{۱}{۲}e^{\frac{t}{۳}}$$

سپس نمودار چند جواب را رسم کنید و جواب مخصوصی که نمودار آن از نقطه $(0,۱)$ می گذرد را رسم کنید.

حل

معادله به صورت استاندارد است. پس $p(t) = \frac{۱}{۲}$ لذا عامل انتگرال گیری را به صورت زیر بدست می آوریم.

$$\mu(t) = e^{\int \frac{۱}{۲}dt} = e^{\frac{t}{۲}}$$

طرفین معادله دیفرانسیل را در $\mu(t)$ ضرب می کنیم. پس داریم.

$$e^{\frac{t}{۲}}\frac{dy}{dt} + \frac{۱}{۲}e^{\frac{t}{۲}}y = \frac{۱}{۲}e^{\frac{۵t}{۶}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{۲}}y\right)=\frac{۱}{۲}e^{\frac{۵t}{۶}}$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$e^{\frac{t}{۲}}y=\frac{۳}{۵}e^{\frac{۵t}{۶}}+C$$

$$y=\frac{۳}{۵}e^{\frac{t}{۳}}+Ce^{-\frac{t}{۲}}$$

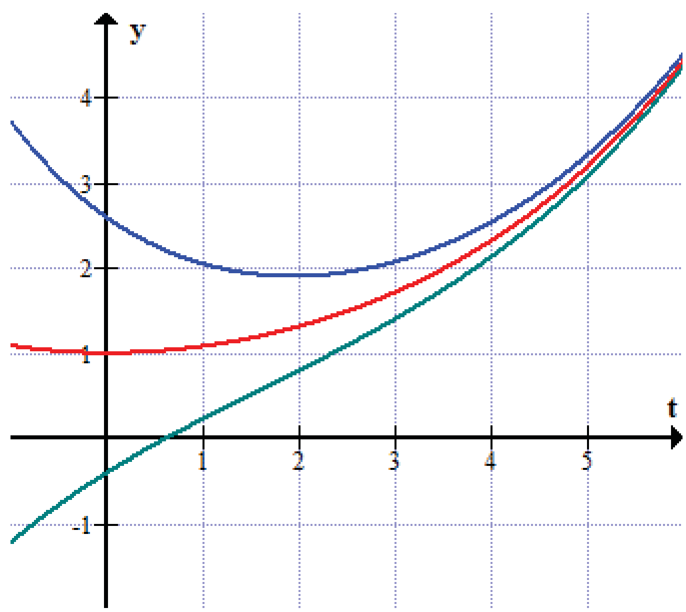
برای پیدا کردن جوابی که از نقطه $(0,۱)$ می گذرد ، در جواب کلی بدست آمده $t=0$ و $y=۱$ قرار می دهیم .

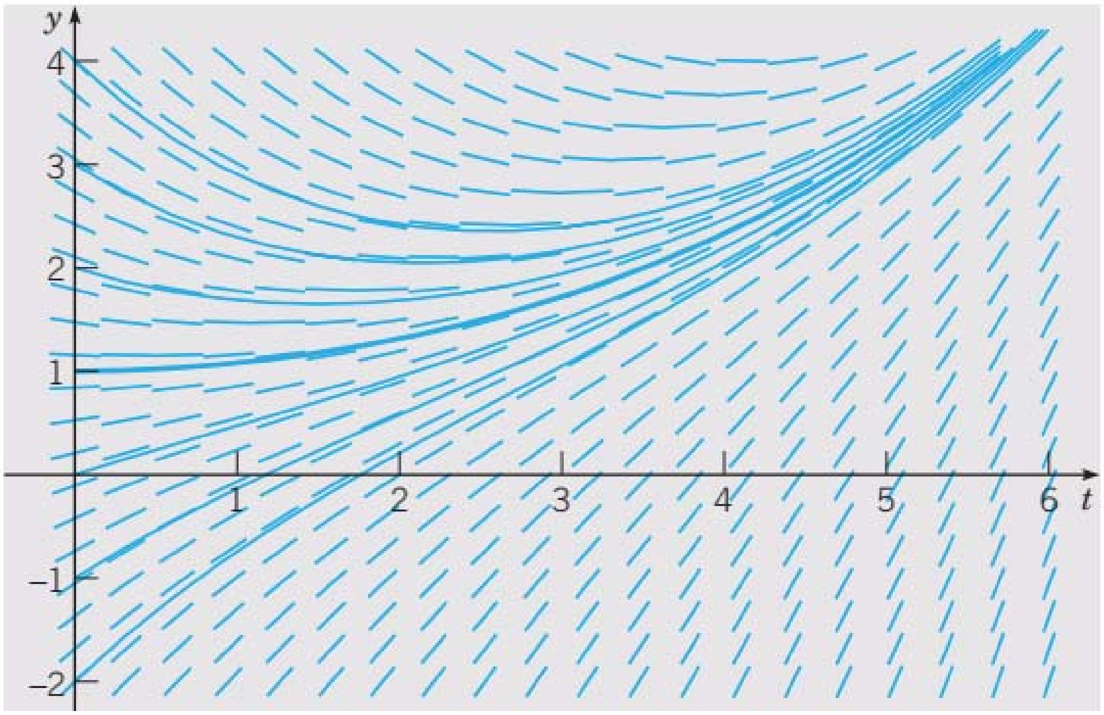
$$۱=\frac{۳}{۵}e^{\frac{0}{۳}}+Ce^{-\frac{0}{۲}}$$

$$C=\frac{۲}{۵}$$

پس ، جوابی که از نقطه $(0,۱)$ می گذرد ، مطابق زیر است.

$$y=\frac{۳}{۵}e^{\frac{t}{۳}}+\frac{۲}{۵}e^{-\frac{t}{۲}}$$





۱۶- معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dt} - ۲y = ۴ - t$$

چند جواب را رسم کنید ، و در مورد جوابها هنگامی که $t \to \infty$ بحث کنید.

حل

معادله داده شده به صورت استاندارد است. و $p(t) = -۲$ است. پس داریم.

$$\mu(t) = e^{\int -۲\, dt} = e^{-۲t}$$

طرفین را در $\mu(t)$ ضرب می کنیم.

$$e^{-۲t}\frac{dy}{dt} - ۲e^{-۲t}y = ۴e^{-۲t} - te^{-۲t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-۲t}y\right) = ۴e^{-۲t} - te^{-۲t}$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$e^{-۲t}y = \int \left(۴e^{-۲t} - te^{-۲t}\right) dt = ۴\int e^{-۲t}\, dt - \int te^{-۲t}\, dt$$

$$= -۲e^{-۲t} + \frac{۱}{۲}te^{-۲t} + \frac{۱}{۴}e^{-۲t} + C$$

زیرا برای انتگرال زیر

$$۴\int e^{-۲t}\ dt$$

فرض می کنیم $u=-۲t$ باشد. پس $\frac{du}{dt}=-۲$ است ، پس $dt=-\frac{۱}{۲}du$ است. پس

$$۴\int e^{-۲t}\,dt=۴\int -\frac{۱}{۲}e^{u}\,du=-۲e^{u}=-۲e^{-۲t}$$

انتگرال زیر را از طریق انتگرال گیری جز به جز محاسبه می کنیم.

$$\int te^{-۲t}\,dt$$

$$\int fg'=fg-\int f'g$$

$$f=t\text{ ، }g'=e^{-۲t}$$

$$f'=۱\text{ ، }g=-\frac{۱}{۲}e^{-۲t}$$

پس

$$\int te^{-۲t}\,dt=\left(-\frac{te^{-۲t}}{۲}\right)-\int -\frac{e^{-۲t}}{۲}\,dt$$

حالا $\int -\frac{e^{-۲t}}{۲}\,dt$ را از طریق جانشینی محاسبه می کنیم. فرض می کنیم $u=-۲t$ باشد ، پس $\frac{du}{dt}=-۲$ است ، پس $dt=-\frac{۱}{۲}\,du$ است. لذا

$$\int -\frac{e^{-۲t}}{۲}\,dt=\frac{۱}{۴}\int e^{u}\,du=\frac{۱}{۴}e^{u}=\frac{۱}{۴}e^{-۲t}+C$$

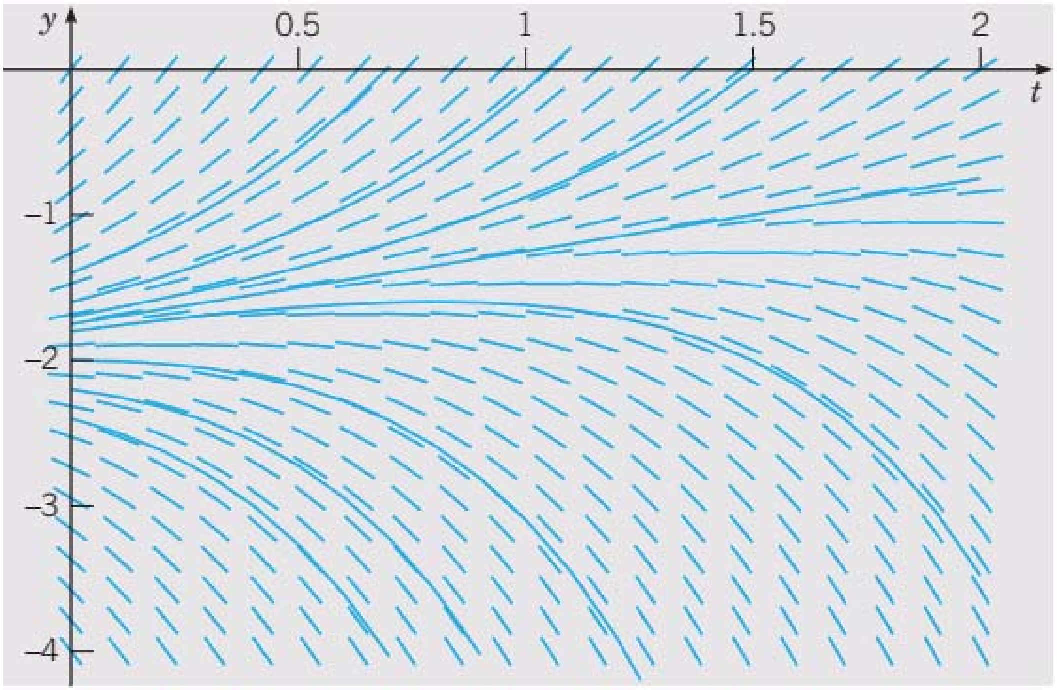
و در نهایت داریم.

$$\int te^{-۲t}\,dt=-\frac{te^{-۲t}}{۲}-\frac{۱}{۴}e^{-۲t}+C$$

پس جواب کلی این معادله

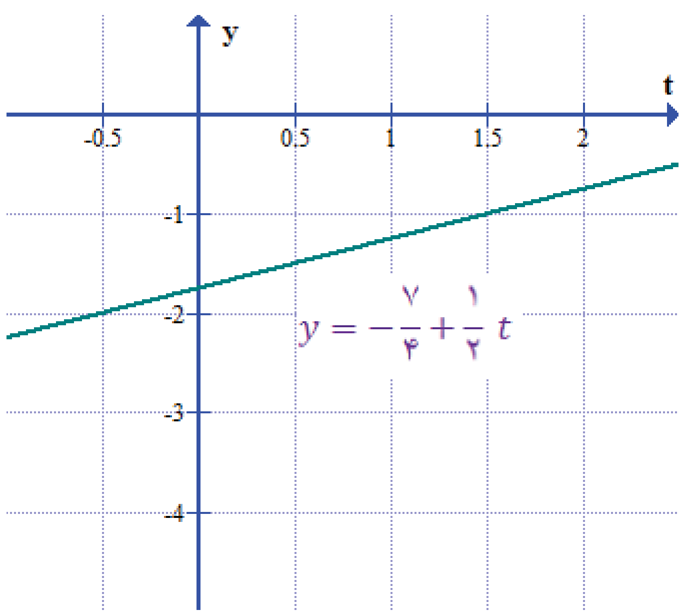
$$y=-\frac{۷}{۴}+\frac{۱}{۲}t+Ce^{۲t}$$

در ذیل نمودار های میدان راستا برای مقادیر مختلف C ملاحظه می کنید.



رفتار جواب برای مقادیر بزرگ t با جمله $Ce^{۲t}$ معین می شود. اگر $C \neq 0$ باشد ، پس جواب از نظر کمیّت بطور تصاعدی افزایش می یابد , هم علامت با C پس هنگامی که t زیاد میشود ، جواب واگرا می شود. حد فاصل بین افزایش مثبت و منفی هنگامی است که $C = 0$ است. اگر $C = 0$ قرار دهیم ، و سپس $t = 0$ قرار دهیم ، می بینیم که $y = -\frac{۷}{۴}$ نقطه جدا سازی روی محور y است.

توجه داشته باشید برای مقدار اولیه $C = 0$ ، جواب $y = -\frac{۷}{۴} + \frac{۱}{۲} t$ به طور مثبت افزایش می یابد ، اما تقریبا به صورت خط مستقیم ونه به طور تصاعدی .برای $C = 0$ نمودار مطابق تصویر زیر است.



۱۷ - مسلله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$ty' + ۲y = ۴t^{۲} \ , \qquad y(۱) = ۲$$

حل

برای این که معادله داده شده به صورت استاندارد نوشته شود ، طرفین را بر t تقسیم می کنیم.

$$y' + \left(\frac{۲}{t}\right) y = ۴t \qquad (*)$$

پس $p(t) = \frac{۲}{t}$ است. حالا $\mu(t)$ را پیدا می کنیم.

$$\mu(t) = e^{\int \frac{۲}{t} dt} = e^{۲ \ln|t|} = e^{\ln|t|^{۲}} = t^{۲}$$

فراموش نشود ، بر اساس قانون لگاریتم $e^{f(x)} = x$

حالا طرفین را در $\mu(t) = t^{۲}$ ضرب می کنیم.

$$t^{۲} y' + ۲ty = ۴t^{۳}$$

$$\left(t^{۲} y\right)' = ۴t^{۳}$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$t^{۲} y = \int ۴t^{۳} dt = t^{۴} + C$$

$$y = t^{۲} + C^{-t^{۲}}$$

این جواب کلی معادله است. حالا مقدار اولیه $y(۱) = ۲$ در جواب کلی می گذاریم پس داریم.

$$۲ = ۱^{۲} + \frac{C}{۱^{۲}} \ , \quad t > 0$$

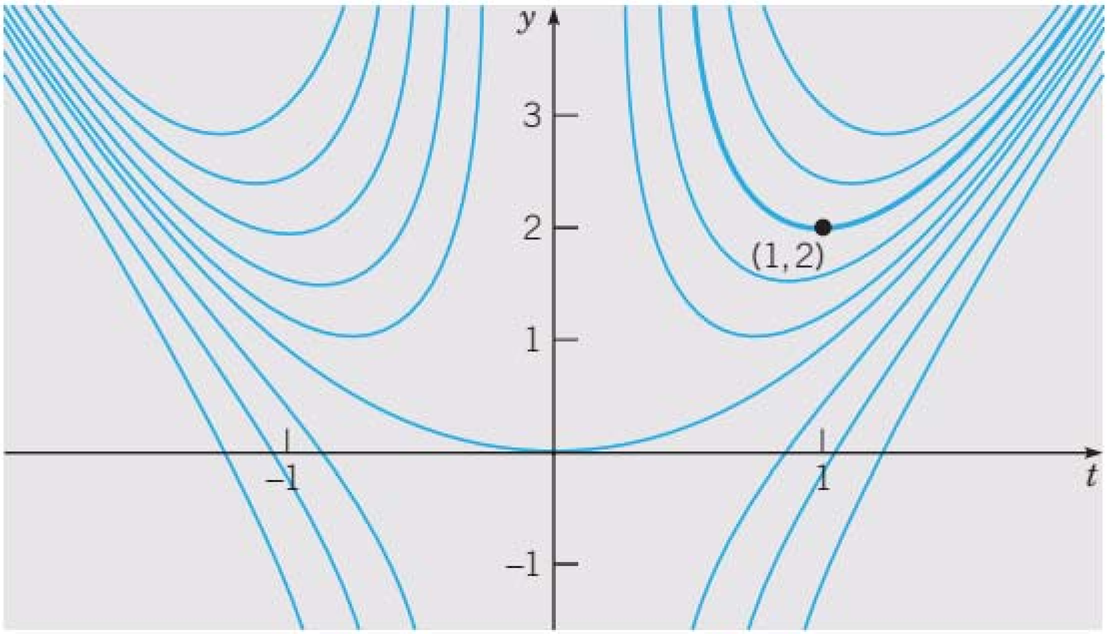
$$C = ۱$$

در تصویر زیر ، منحنی های جواب برای مقادیر مختلف C ملاحظه می کنید. همچنین جواب مساله با مقدار اولیه با منحنی ضخیم تر نشان داده شده است. نقطه $(۱,۲)$ هم روی آن مشخص شده است.

ملاحظه می کنید که قسمت مثبت محور y برای این منحنی ضخیم ، خط مجانب است ، زیرا داریم

$$y = t^{۲} + \frac{۱}{t^{۲}}$$

پس $t < 0$ قسمتی از جواب برای مساله با مقدار اولیه نیست.


y
3
2
1
−1
(1,2)
−1
1
t

بخش ۲.۲ معادلات تفکیک پذیر Separable Equations

در این بخش می خواهیم در مورد معادلات دیفرانسیل مرتبه اول غیر خطی بحث کنیم. اولین نوع معادلات درجه اول غیر خطی ، معادلات دیفرانسیل تفکیک پذیر هستند.

یک معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر، یک معادله دیفرانسیل است که بتوان به صورت های زیر نوشت.

$$N(y)\frac{dy}{dx} = M\ (x) \qquad (۱)$$

$$y' = f(x)g(y) \qquad (۲)$$

به این نوع معادله دیفرانسیل ، قابل تفکیک می گویند ، زیرا می‌توان آنرا به صورت یک تابع x ضرب در یک تابع y نوشت. مثال

$$y' = \left(x^۲ - ۴\right)(۳y + ۲) \qquad (۳)$$

$$y' = ۶x^۲ + ۴x \qquad (۴)$$

$$y' = \sec y + \tan y \qquad (۵)$$

$$y' = xy + ۳x - ۲y - ۶ \qquad (۶)$$

درمعادله (۳) تابع های x و y کاملا مشخص هستند.

در معادله (۴) تابع $f(x) = ۶x^۲ + ۳x$ و تابع $g(y) = ۱$ است.

در معادله (۵) تابع $g(y) = \sec y + \tan y$ و $f(x) = ۱$ است.

معادله (۶) را می توان به صورت $(y + ۳)(x - ۲)$ نوشت.

مراحل حل معادله های دیفرانسیل تفکیک پذیر.

۱ – ابتدا $g(y) = 0$ قرار دهید ، تا جواب ثابت پیدا شود.

۲ ـ معادله را به صورت زیر بنویسید.

$$g(y)dy = f(x)dx \qquad (۷)$$

۳ ـ از طرفین انتگرال بگیرید.

۴ – معادله بدست آمده را برای y حل کنید ، اگر ممکن باشد.

۵ ـ اگر شرط اولیه وجود داشته باشد ، مقادیر مناسب y و x در معادله بگذارید ، تا عدد ثابت پیدا شود.

مثال ۱

با استفاده از روش تفکیک ، یک جواب کلی برای معادله دیفرانسیل زیر پیدا کنید.

$$y' = \left(x^۲ - ۴\right)(۳y + ۲)$$

حل

در این مثال $f(x) = x^۲ - ۴$ و $g(y) = ۳y + ۲$ است.

۱ ـ ابتدا $g(y) = 0$ قرار می دهیم.تا جواب ثابت پیدا شود.

$$g(y) = ۳y + ۲ = 0$$

$$y = -\frac{۲}{۳}$$

۲ - معادله را باز نویسی می کنیم.

$$\frac{۱}{۳y+۲}dy=\left(x^{۲}-۴\right)dx$$

۳ - از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\int\frac{۱}{۳y+۲}dy=\int\left(x^{۲}-۴\right)\,dx$$

برای انتگرال طرف چپ ، فرض می کنیم $u=۳y+۲$ باشد ،پس

$$\frac{du}{dy}=۳\ \Rightarrow\ ۳dy=du\ \Rightarrow\ dy=\frac{۱}{۳}du$$

برای انتگرال طرف راست داریم.

$$\int\left(x^{۲}-۴\right)\,dx=\frac{۱}{۳}x^{۳}-۴x+C$$

پس معادله به صورت زیر می شود.

$$\frac{۱}{۳}\int\frac{۱}{u}du=\frac{۱}{۳}x^{۳}-۴x+C$$

$$\frac{۱}{۳}\ln|u|=\frac{۱}{۳}x^{۳}-۴x+C$$

$$\frac{۱}{۳}\ln|۳y+۲|=\frac{۱}{۳}x^{۳}-۴x+C$$

طرفین را در ۳ ضرب می کنیم.

$$\ln|۳y+۲|=x^{۳}-۱۲x+۳C$$

چون C یک عدد ثابت اختیاری است ، پس $۳C$ هم می تواند یک عدد ثابت اختیاری باشد. پس می توانیم آنرا $C_{۱}$ یا هر حرف دیگری بنامیم. حالا طرفین به صورت نمایی می نویسیم.

$$e^{\ln|۳y+۲|}=e^{x^{۳}-۱۲x+C_{۱}}$$

$$|۳y+۲|=e^{C_{۱}}e^{x^{۳}-۱۲x}$$

باز هم $C_{۲}=e^{C_{۱}}$ قرار می دهیم.

$$|۳y+۲|=C_{۲}e^{x^{۳}-۱۲x}$$

بخاطر قدر مطلق سمت چپ ، دو جواب داریم

$$۳y+۲=C_{۲}e^{x^{۳}-۱۲x}$$

و

$$۳y+۲=-C_{۲}e^{x^{۳}-۱۲x}$$

پس

$$y = \frac{-۲ \pm C_۲ e^{x^۳ - ۱۲x}}{۳}$$

چون $C_۲ > 0$ است ، پس بکار بردن علامت مثبت یا منفی مهم نیست.در حقیقت عدد ثابت می تواند علامت مثبت یا منفی داشته باشد. همچنین اندیس را هم می توانیم حذف کنیم. پس داریم.

$$y = \frac{-۲ + Ce^{x^۳ - ۱۲x}}{۳}$$

اگر $C = 0$ باشد ، $y = -\frac{۲}{۳}$ است. این همان جواب عدد ثابت که در مرحله اول بسدت آوردیم.

مثال ۲

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید و بازه ای که که در آن جواب معتبر است ، مشخص کنید.

$$\frac{dy}{dx} = ۶y^۲x \qquad y(۱) = \frac{۱}{۲۵}$$

حل

$$dy = \left(۶y^۲x\right)dx$$

طرفین را بر $y^۲$ تقسیم می کنیم.

$$y^{-۲}dy = ۶x\,dx$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\int y^{-۲}dy = \int ۶x\,dx$$

$$-\frac{۱}{y} = ۳x^۲ + C$$

این یک جواب تلویحی و یا ضمنی است. می توان جواب صریح و روشن را پیدا کرد. اما اول مقدار ثابت C را پیدا می کنیم. برای این کار ، شرط اولیه را به کار می بریم.

$$-\frac{۱}{\frac{۱}{۲۵}} = ۳(۱)^۲ + C$$

$$C = -۲۸$$

حالا این مقدار C را در جواب کلی می گذاریم.

$$-\frac{۱}{y} = ۳x^۲ - ۲۸$$

$$y(x) = \frac{۱}{۲۸ - ۳x^{۲}}$$

حالا که جواب را پیدا کردیم ، باید نگران معتبر بودن بازه باشیم. به عبارتی باید مشخص کنیم در چه بازه ای ، این جواب می تواند صحت داشته باشد. می دانیم که دو شرط وجود دارد که یک بازه اعتبار داشته باشد. اول این که باید یک بازه پیوسته باشد. دوم این که باید شامل مقدار متغیر مستقل در شرط اولیه باشد ، یعنی در این مورد باید $x = ۱$

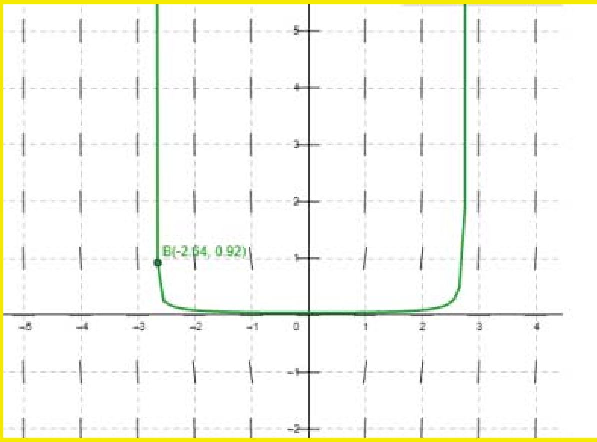
پس باید از دو مقدار برای x دوری کنیم. یکی این که $x \neq \pm\sqrt{\frac{۲۸}{۳}}$ زیرا در این صورت مخرج صفر می شود. این بازه های معتبر زیر را به ما میدهد.

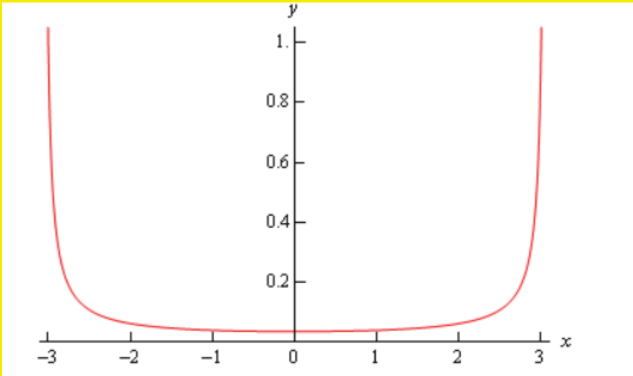
$$-\infty < x < -\sqrt{\frac{۲۸}{۳}} \qquad -\sqrt{\frac{۲۸}{۳}} < x < \sqrt{\frac{۲۸}{۳}} \qquad \sqrt{\frac{۲۸}{۳}} < x < \infty$$

اما تنها بازه زیر معتبر است ، زیرا در این بازه x شامل آن مقدار که در شرط اولیه آمده است ، می باشد.

$$-\sqrt{\frac{۲۸}{۳}} < x < \sqrt{\frac{۲۸}{۳}}$$

این هم نمودار جواب همراه با میدان راستا





مثال ۳

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید و بازه ای که که در آن جواب معتبر است ، مشخص کنید.

$$y' = \frac{۳x^{۲} + ۴x - ۴}{۲y - ۴} \qquad y(۱) = ۳$$

حل

معادله داده شده تفکیک پذیر است.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{۳x^۲+۴x-۴}{۲y-۴}$$
$$(۲y-۴)dy=\left(۳x^۲+۴x-۴\right)dx$$
از طرفین انتگرال می گیریم.
$$\int(۲y-۴)dy=\int\left(۳x^۲+۴x-۴\right)dx$$
$$y^۲-۴y=x^۳+۲x^۲-۴x+C$$
جواب بدست آمده جواب ضمنی است. مقدار شرط اولیه را در این جواب می گذاریم. پس داریم.
$$(۳)^۲-۴(۳)=(۱)^۳+۲(۱)^۲-۴(۱)+C$$
$$C=-۲$$
پس جواب تلویحی مطابق زیر است.
$$y^۲-۴y=x^۳+۲x^۲-۴x-۲$$
حالا باید جواب صریح را پیدا کنیم. ابتدا معادله بالا را مطابق زیر باز نویسی می کنیم.
$$y^۲-۴y-\left(x^۳+۲x^۲-۴x-۲\right)=0$$
این یک معادله درجه دوم به صورت $y^۲+by+c=0$ است. اما عدد ثابت c شامل x ها است.
$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$$
$$=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶-۴(۱)\left(-(x^۳+۲x^۲-۴x-۲)\right)}}{۲}$$
$$=\frac{۴\pm\sqrt{۱۶+۴(x^۳+۲x^۲-۴x-۲)}}{۲}$$
$$=\frac{۴\pm۲\sqrt{۴+(x^۳+۲x^۲-۴x-۲)}}{۲}$$
$$=۲\pm\sqrt{x^۳+۲x^۲-۴x+۲}$$
ملاحظه می کنید که دو جواب پیدا کردیم .اما فقط یک جواب لازم داریم. در حقیقت یکی از علامت های مثبت یا منفی صحیح است. برای این که ببینیم کدام صحیح است ، شرط اولیه را دو باره بکار می بریم.
$$۳=y(۱)=۲\pm\sqrt{۱+۲-۴+۲}=۲\pm۱=۳,۱$$
پس علامت مثبت ، می تواند جواب باشد ، زیرا در شرط اولیه گفته شده است $y(۱)=۳$ پس جواب صریح معادله دیفرانسیل ، مطابق زیر است.

$$y(x) = ۲ + \sqrt{x^۳ + ۲x^۲ - ۴x + ۲}$$

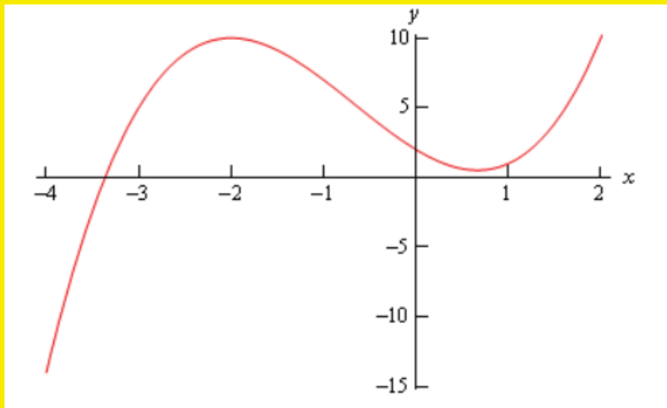
حالا باید بازه مجاز را پیدا کنیم. اینجا یک رادیکال داریم و می دانیم اگر عبارت داخل رادیکل منفی باشد ، یک جواب مختلط خواهیم داشت ، پس باید

$$x^۳ + ۲x^۲ - ۴x + ۲ \geq 0$$

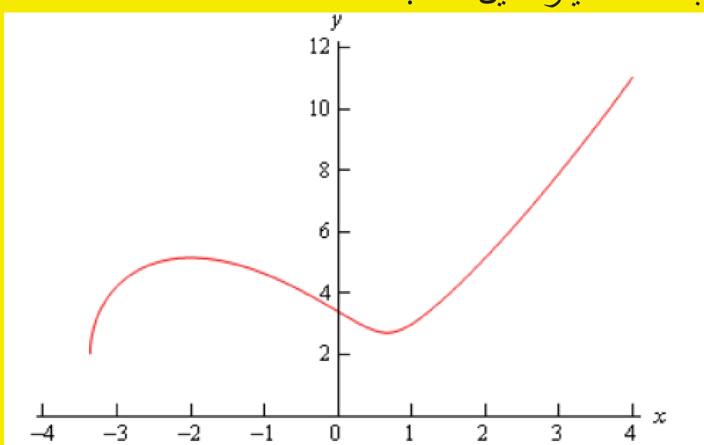
با استفاده از یک نرم افزار ، می توانیم پیدا کنیم که طرف چپ نا مساوی بالا برای

$$x = -3.36523$$

مساوی صفر است ، پس بازه مجاز $x \geq -3.36523$ است. در زیر تصویر مقدار عبارت زیر رادیکل است.



و در ذیل ، تصویر جواب معادله دیفرانسیل است.



مثال ۴

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید و بازه ای که که در آن جواب معتبر است ، مشخص کنید.

$$y' = \frac{xy^۳}{\sqrt{۱ + x^۲}} \qquad y(0) = -۱$$

حل

ابتدا متغیر ها را جدا می کنیم. به عبارتی به صورت استاندارد می نویسیم.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy^{۳}}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$$

$$y^{-۳}dy=x\left(۱+x^{۲}\right)^{-\frac{۱}{۲}}dx$$

حالا از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\int y^{-۳}dy=\int x\left(۱+x^{۲}\right)^{-\frac{۱}{۲}}dx$$

$$-\frac{۱}{۲y^{۲}}=\sqrt{۱+x^{۲}}+C$$

توضیح در مورد انتگرال ها

$$\int y^{-۳}\,dy$$

از قانون توان ها استفاده می کنیم.

$$\int x^{n}\,dx=\frac{x^{n+۱}}{n+۱}$$

پس با $n=-۳$ داریم.

$$\int y^{-۳}\,dy=\frac{y^{-۳+۱}}{-۳+۱}=\frac{y^{-۲}}{-۲}=-\frac{۱}{۲y^{۲}}$$

برای انتگرال سمت راست داریم.

$$\int x\left(۱+x^{۲}\right)^{-\frac{۱}{۲}}dx$$

فرض می کنیم $u=۱+x^{۲}$ باشد ، پس $\frac{du}{dx}=۲x$ پس $dx=\frac{۱}{۲x}du$ لذا

$$\int x\left(۱+x^{۲}\right)^{-\frac{۱}{۲}}dx=\frac{۱}{۲}\int\frac{۱}{\sqrt{u}}du$$

حالا از قانون توان ها استفاده می کنیم.با $n=-\frac{۱}{۲}$ داریم.

$$\int\frac{۱}{\sqrt{u}}du=\int u^{-\frac{۱}{۲}}du=\frac{u^{-\frac{۱}{۲}+۱}}{-\frac{۱}{۲}+۱}=\frac{u^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

پس

$$\frac{۱}{۲}\int\frac{۱}{\sqrt{u}}\,du=\sqrt{u}=\sqrt{x^{۲}+۱}+C$$

پس نشان دادیم پاسخ انتگرال زیر

$$\int y^{-۳} dy = \int x\left(۱ + x^{۲}\right)^{-\frac{۱}{۲}} dx$$

مطابق زیر است.

$$-\frac{۱}{۲y^{۲}} = \sqrt{۱ + x^{۲}} + C$$

حالا شرط اولیه را بکار می بریم.

$$-\frac{۱}{۲} = \sqrt{۱} + C$$

$$C = -\frac{۳}{۲}$$

پس جواب تلویحی مطابق زیر است.

$$-\frac{۱}{۲y^{۲}} = \sqrt{۱ + x^{۲}} - \frac{۳}{۲}$$

حالا برای $y(x)$ حل می کنیم.

$$\frac{۱}{y^{۲}} = ۳ - ۲\sqrt{۱ + x^{۲}}$$

$$y^{۲} = \frac{۱}{۳ - ۲\sqrt{۱ + x^{۲}}}$$

$$y(x) = \pm\frac{۱}{\sqrt{۳ - ۲\sqrt{۱ + x^{۲}}}}$$

مجددا شرط اولیه را بکار می بریم. ملاحظه می شود که علامت منفی برای جواب ، صحیح است. لذا جواب صریح این معادله دیفرانسیل مطابق زیر است.

$$y(x) = -\frac{۱}{\sqrt{۳ - ۲\sqrt{۱ + x^{۲}}}}$$

حالا بازه مجاز را بر رسی می کنیم.

رادیکال داخلی داخلی مساله نیست ، زیر $۱ + x^{۲} \geq 0$ است. پس باید مشکل مخرج صفر را بر طرف کنیم و همچنین مطمئن شویم رادیکال بیرونی منفی نشود. پس برای رفع هر دو مشکل باید نا معادله زیر بر قرار باشد.

$$۳-۲\sqrt{۱+x^{۲}}>0$$

$$۳>۲\sqrt{۱+x^{۲}}$$

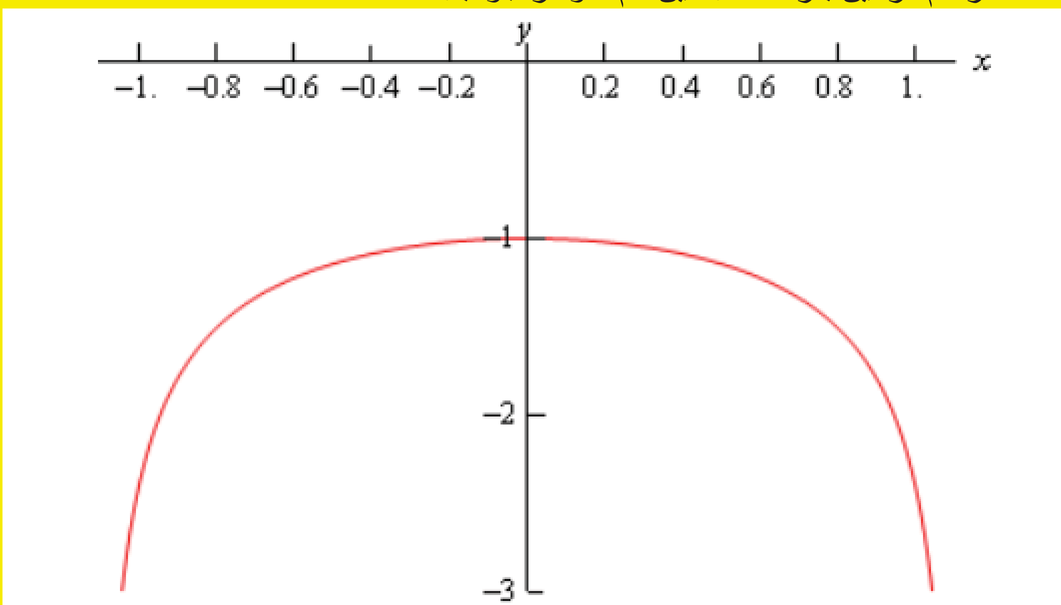
$$۹>۴\left(۱+x^{۲}\right)$$

$$\frac{۹}{۴}>۱+x^{۲}$$

$$\frac{۵}{۴}>x^{۲}$$

$$-\frac{۵}{۴}<x<\frac{۵}{۴}$$

خوشبختانه صفر هم در این بازه است. این هم نمودار جواب.



مثال ۵

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید و بازه ای که که در آن جواب معتبر است ، مشخص کنید.

$$y'=e^{-y}\left(۲x-۴\right) \qquad y\left(۵\right)=0$$

حل

تفکیک کردن این معادله دیفرانسیل آسان است. طرفین را در e^{y} ضرب می کنیم،

$$e^{y}y'=۲x-۴$$

$$e^{y}\frac{dy}{dx}=۲x-۴$$

$$e^{y}dy=\left(۲x-۴\right)dx$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\int e^y\,dy = \int (2x-4)dx$$

$$e^y = x^2 - 4x + C$$

شرط اولیه را بکار می بریم.

$$e^0 = (5)^2 - 4(5) + C$$

$$1 = 25 - 20 + C$$

$$C = -4$$

پس جواب تلویحی مطابق زیر است.

$$e^y = x^2 - 4x - 4$$

به آسانی می توانیم جواب صریح را بدست آوریم. برای این کا ر از طرفین لگاریتم طبیعی می گیریم.

$$y(x) = \ln\left(x^2 - 4x - 4\right)$$

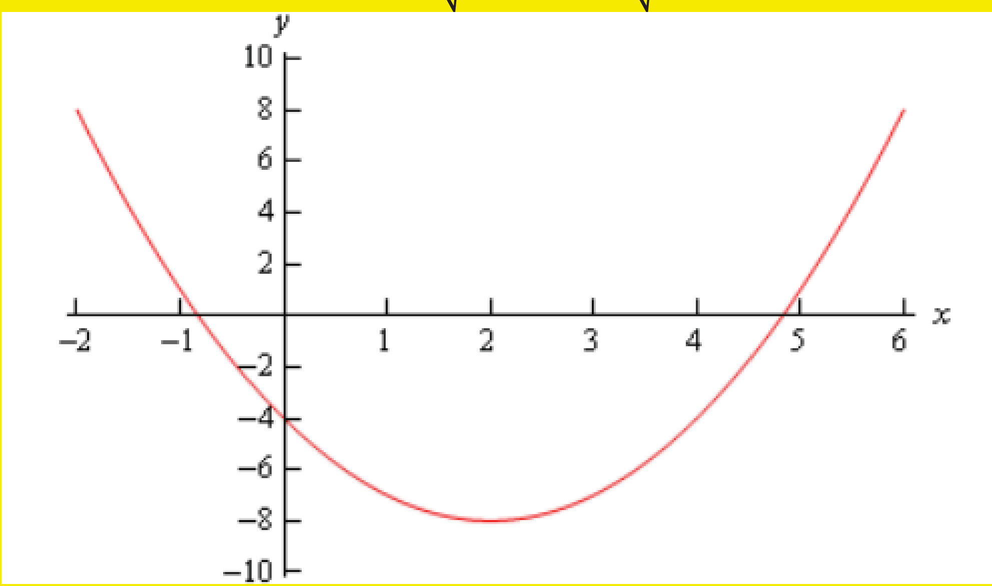
حالا باید بازه مجاز را پیدا کنیم. می دانیم که مقادیر صفر و منفی را نمی توان برای لگاریتم بکار برد. پس باید نا مساوی زیر را حل کنیم.

$$x^2 - 4x - 4 > 0$$

چند جمله ای درجه دوم بالا در دو نقطه صفر است. یعنی در $x = 2 \pm 2\sqrt{2}$

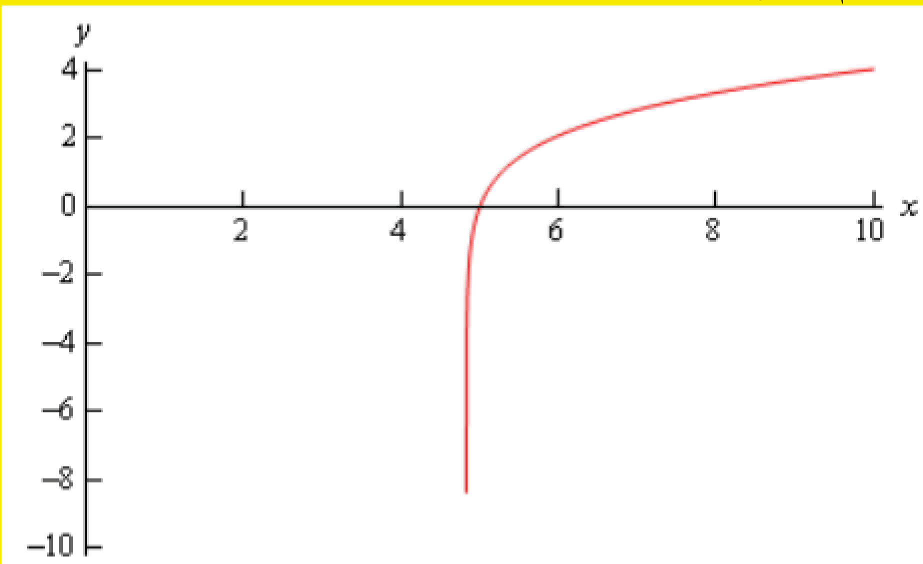
نمودار زیر نشان می دهد که در حقیقت دو بازه است که در آن مقدار مثبت برای این چند جمله ای مثبت است. پس بازه هایی که ممکن است معتبر باشند ، مطابق زیر است.

$$-\infty < x < 2 - 2\sqrt{2} \quad ، \quad 2 + 2\sqrt{2} < x < \infty$$



از نمودار درجه دوم بالا ، می توانیم نتیجه بگیریم که بازه دوم یعنی $2 + 2\sqrt{2} < x < \infty$

معتبر است. واین هم نمودار جواب.



مثال ۶

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید و بازه ای که که در آن جواب معتبر است ، مشخص کنید.

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r^{۲}}{\theta} \qquad r(۱) = ۲$$

حل

متغیر ها را تفکیک می کنیم.

$$\frac{۱}{r^{۲}}dr = \frac{۱}{\theta}d\theta$$

انتگرال می گیریم.

$$\int \frac{۱}{r^{۲}}dr = \int \frac{۱}{\theta}d\theta$$

$$-\frac{۱}{r} = \ln|\theta| + C$$

توضیح

برای dr $\frac{۱}{r^{۲}}\int$ از قانون توان ها استفاده می کنیم. یعنی

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+۱}}{n+۱}$$

پس

$$\int \frac{۱}{r^{۲}}\,dr = \int r^{-۲}dr = \frac{r^{-۲+۱}}{-۲+۱} = -\frac{۱}{r}$$

حالا شرط اولیه را بکار می بریم.

$$-\frac{۱}{r} = \ln|\theta| + C$$

$$-\frac{۱}{۲} = \ln(۱) + C \quad , \quad C = -\frac{۱}{۲}$$

پس جواب تلویحی مطابق زیر است.

$$-\frac{۱}{r} = \ln|\theta| - \frac{۱}{۲}$$

برای r حل می کنیم. پس داریم.

$$r = \frac{۱}{\frac{۱}{۲} - \ln|\theta|}$$

اینجا دو مشکل داریم. یکی این که باید از $\theta = 0$ دوری کنیم. اما بخاطر قدر مطلق نگران منفی بودن θ نیستیم.

همچنین باید مخرج کسر صفر نشود. یعنی باید از معادله زیر پرهیز کنیم.

$$\frac{۱}{۲} - \ln|\theta| = 0$$

$$\ln|\theta| = \frac{۱}{۲}$$

طرفین را نمایی می کنیم.

$$|\theta| = e^{\frac{۱}{۲}}$$

$$\theta = \pm\sqrt{e}$$

پس این سه نقطه یعنی $\theta \neq 0$ و $\theta = \pm\sqrt{e}$ محور اعداد را به چهار قسمت تقسیم می کند.

$$-\infty < \theta < -\sqrt{\mathbf{e}}$$

$$-\sqrt{\mathbf{e}} < \theta < 0$$

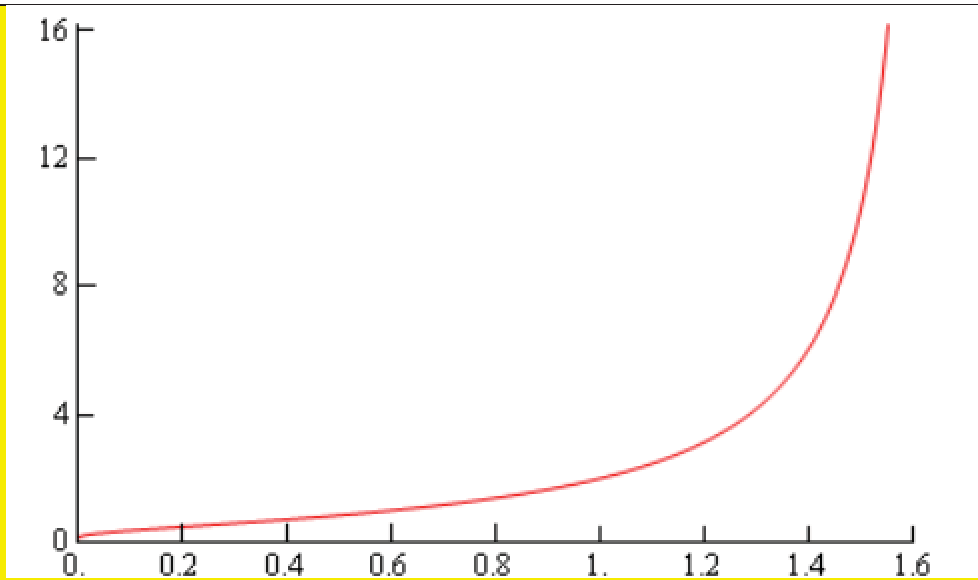
$$0 < \theta < \sqrt{\mathbf{e}}$$

$$\sqrt{\mathbf{e}} < \theta < \infty$$

بازه ای که می تواند معتبر باشد ، بازه ای است که شامل $\theta = ۱$ است. پس بازه معتبر

$$0 < \theta < \sqrt{e}$$

است. این هم نمودار جواب.



مثال ۷

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dt} = e^{y-t}\sec(y)\left(۱ + t^{۲}\right) \qquad y(0) = 0$$

حل

برای تفکیک کردن متغیر ها ، احتیاج به کمی کار است. پس این طور شروع می کنیم.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e^{y}e^{-t}}{\cos(y)}\left(۱ + t^{۲}\right)$$

$$e^{-y}\cos(y)dy = e^{-t}\left(۱ + t^{۲}\right)dt$$

$$\int e^{-y}\cos(y)dy = \int e^{-t}\left(۱ + t^{۲}\right)dt$$

از طریق انتگرال گیری جز به جز داریم.

$$\frac{\mathbf{e}^{-y}}{2}\left(\sin(y) - \cos(y)\right) = -\mathbf{e}^{-t}\left(t^2 + 2t + 3\right) + c$$

با استفاده از شرط اولیه داریم.

$$\frac{1}{2}(-1) = -(3) + c \qquad c = \frac{5}{2}$$

پس جواب تلویحی مطابق زیر است.

$$\frac{\mathbf{e}^{-y}}{2}\left(\sin(y) - \cos(y)\right) = -\mathbf{e}^{-t}\left(t^2 + 2t + 3\right) + \frac{5}{2}$$

نمی توان جواب صریح برای این معادله پیدا کرد. پیدا کردن بازه معتبر هم خیلی مشکل است .پس همین جا متوقف می شویم.

توضیح در مورد انتگرال مثال ۷

$$\int e^{-y}\cos(y)\ dy = \int e^{-t}\left(۱ + t^{۲}\right)\ dt$$

برای انتگرال سمت چپ داریم.

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

$$f = \cos(y) \quad g' = e^{-y}$$
$$f' = -\sin(y) \quad g = -e^{-y}$$

پس

$$\int e^{-y}\cos(y)\ dy = -e^{-y}\cos(y) - \int e\ -^{y}\sin(y)\ dy$$

برای مرتبه دوم داریم.

$$f = -\sin(y) \quad g' = -e^{-y}$$
$$f' = -\cos(y) \quad g = e^{-y}$$

پس داریم.

$$= -e^{-y}\cos(y) - \left(-e^{-y}\sin(y) - \int -e^{-y}\cos(y)dy\right)$$

باز هم یک مرتبه دیگر این کار را ادامه می دهیم.

$$= -e^{-y}cos(y) - \left(-e^{y}\sin(y) + \int e^{-y}\cos(y)\ dy\right)$$

انتگرال $\int e^{-y}\cos(y)dy$ دو مرتبه پیدا شد. می توان برای آن حل کرد.

$$= \frac{e^{-y}\sin(y) - e^{-y}\cos(y)}{۲}$$

پس

$$\int e^{-y}\cos(y)dy = \frac{e^{-y}\sin(y) - e^{-y}\cos(y)}{۲}$$
$$= \frac{e^{-y}(\sin(y) - \cos(y))}{۲}$$

برای انتگرال سمت راست هم همین کار را انجام می دهیم.

تمرینات بخش ۲.۲

معادله های دیفرانسیل تفکیک پذیر زیر را حل کنید.

۱) $\frac{dy}{dx}=\frac{x-۵}{y^۲}$

۲) $\frac{dy}{dx}=\frac{y-۱}{x+۳} \qquad y(-۱)=0$

۳) $\frac{dy}{dx}=\frac{۶x^۵-۲x+۱}{\cos(y)+e^y}$

۴) $y'=(۲x+۳)(y^۲-۴) \qquad y(0)=-۱$

۵) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^۲}{۱-y^۲}$

۶) $\frac{dy}{dx}=\frac{۳x^۲+۴x+۲}{۲(y-۱)} \qquad y(0)=-۱$

۷) $\frac{dy}{dx}=\frac{۴x-x^۳}{۴+y^۳}$ ، $y(0)=۱$

۸) $y'=۲t(۲۵-y)$

۹) $\sec(t)\frac{dy}{dt}-e^{y+\sin(t)}=0$

۱۰) $\frac{dy}{dt}=\frac{y^۲+۱}{t+۱}$

۱۱) $\frac{dy}{dt}=\frac{۴\sin(۲t)}{y} \qquad y(0)=۱$

۱۲) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^۲(x-۳)}{x^۳}$

۱۳) $y'=-\frac{x}{y}$

۱۴) $y'=\frac{xy-y}{y+۱} \qquad y(۲)=۱$

۱۵) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy^۲-x}{y}$

۱۶) $\frac{dy}{dx}=(۱+e^{-۱})(y^۲-۱)$

۱۷) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(x+۲)^۲}{x\sin(y)}$

۱۸) $\dfrac{dy}{dx}=y\left(۳+e^{۲x}\right)$

۱۹) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^x}{y}$

۲۰) $\dfrac{dy}{dx}=xy-x\ ,\ \ y(0)=۲$

۲۱) $\dfrac{dy}{dx}=xy-۴x$

۲۲) $\dfrac{dy}{dx}=۳y^۲-y^۲\sin(x)$

۲۳) $\dfrac{dy}{dx}=xy-۳x-۲y+۶$

۲۴) $\dfrac{dy}{dx}=\tan(y)$

۲۵) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$

۲۶) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{۶x^۲+۴}{۳y^۲-۴y}$

پاسخ **تمرینات بخش** ۲.۲

معادله های دیفرانسیل تفکیک پذیر زیر را حل کنید.

۱) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-۵}{y^۲}$

جواب

یاد آوری :ابتدا باید متغیر ها را تفکیک کرد ، یعنی به صورت زیر نوشته شود. سپس از طرفین انتگرال گرفت.

$$f(y)dy=g(x)dx$$

$$y^۲dy=(x-۵)dx$$

$$\int y^۲\,dy=\int(x-۵)dx$$

$$\frac{y^۳}{۳}=\frac{x^۲}{۲}-۵x+C$$

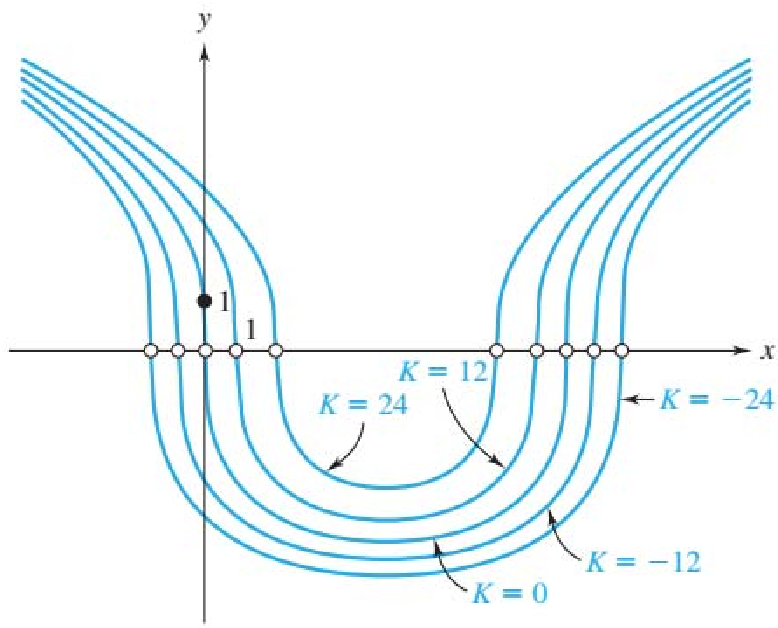
معادله بدست آمده را برای y حل می کنیم.

$$y = \left(\frac{۳x^{۲}}{۲} - ۱۵x + ۳C\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

چون C یک عدد اختیاری است ، پس می توان نوشت $K = ۳C$ پس داریم.

$$y = \left(\frac{۳x^{۲}}{۲} - ۱۵x + K\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

این هم نمودار چند جواب برا ی چند مقادیر مختلف K



۲) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-۱}{x+۳} \qquad y(-۱) = 0$

پاسخ
متغیر ها تفکیک می کنیم و سپس انتگرال می گیریم.

$$\frac{۱}{y-۱}dy = \frac{۱}{x+۳}dx$$

$$\int \frac{۱}{y-۱}dy = \int \frac{۱}{x+۳}dx$$

$$\ln|y-۱| = \ln|x+۳| + C$$

حالا مقادیر شرط اولیه را در معادله بالا می گذاریم.

$$\ln(0-۱) = \ln|-۱+۳| + C$$

$$0 = \ln(۱) = \ln(۲) + C$$

$$0 = \ln(۲) + C$$

$$C = -\ln(۲)$$

پس جواب تلویحی مطابق زیر است.

$$\ln(۱-y) = \ln(x+۳) - \ln(۲)$$

$$\ln(۱-y) = \ln\left(\frac{x+۳}{۲}\right)$$

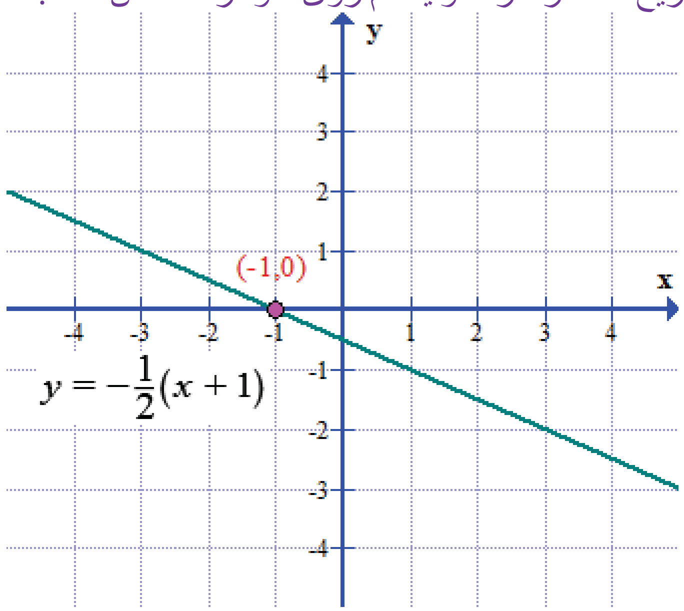
$$۱-y = \frac{x+۳}{۲}$$

$$y = ۱ - \frac{۱}{۲}(x+۳)$$

$$y = -\frac{۱}{۲}(x+۱)$$

پس جواب صریح مطابق بالا بدست آوردیم.

این هم نمودار جواب صریح ، مقدار شرط اولیه هم روی نمودار مشخص است.



۳) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{۶x^۵ - ۲x + ۱}{\cos(y) + e^y}$

پاسخ

متغیر ها را تفکیک می کنیم و انتگرال می گیریم.

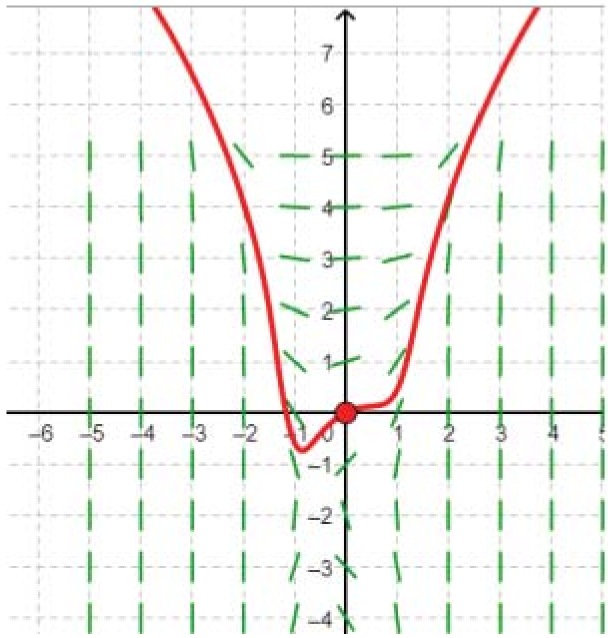
$$(\cos(y)+e^y)dy = \left(۶x^۵ - ۲x + ۱\right)dx$$

$$\int (\cos(y)+e^y)dy = \int \left(۶x^۵ - ۲x + ۱\right)dx$$

$$\sin(y) + e^y = x^۶ - x^۲ + x + C$$

اینجا به بن بست بر خورد کرده ایم. می خواهیم جواب صریح بدست اوریم، اما نمی توانیم. این موضوع ممکن است هنگام حل معادله های دیفرانسیل غیر خطی پیش آید. پس باید به همین جواب تلویحی قانع باشیم.

اینجا است که رسم رمیدان راستا به کمک مهندسین می آید ، تا در مورد جواب های احتمالی تجزیه و تحلیل کنند و نتیجه دلخواه را بگیرند.



۴) $y' = (۲x+۳)(y^۲-۴) \qquad y(0) = -۱$

پاسخ

اینجا $f(x) = ۲x + ۳$ و $g(y) = y^۲ - ۴$ است. $g(y) = 0$ قرار می دهیم $y = \pm ۲$ بدست می آوریم ، که جوابهای ثابت هستند.

طرفین را بر $y^۲ - ۴$ تقسیم و در dx ضرب می کنیم. پس داریم.

$$\frac{dy}{y^۲-۴} = (۲x+۳)dx$$

انتگرال می گیریم.

$$\int \frac{dy}{y^۲-۴} = \int (۲x+۳)dx \qquad (*)$$

برای انتگرال سمت چپ از روش کسر جزیی استفاده می کنیم. پس داریم.

$$\frac{۱}{y^۲-۴} = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{y-۲} - \frac{۱}{y+۲}\right)$$

پس معادله $(*)$ می شود.

$$\frac{۱}{۴}\int \left(\frac{۱}{y-۲} - \frac{۱}{y+۲}\right)dy = \int (۲x+۳)dx$$

$$\frac{۱}{۴}\left(\ln|y-۲|-\ln|y+۲|\right)=x^{۲}+۳x+C$$

طرفین را در ۴ ضرب می کنیم و بجای $۴C$ می نویسیم $C_۱$ پس داریم.

$$\ln|y-۲|-\ln|y+۲|=۴x^{۲}+۱۲x+C_۱$$

$$\ln\left|\frac{y-۲}{y+۲}\right|=۴x^{۲}+۱۲x+C_۱$$

طرفین را نمایی می کنیم.

$$\left|\frac{y-۲}{y+۲}\right|=e^{۴x^{۲}+۱۲x+C_۱}=e^{C_۱}e^{۴x^{۲}+۱۲x}$$

بجای $e^{C_۱}$ می نویسیم $C_۲$ پس داریم.

$$\left|\frac{y-۲}{y+۲}\right|=C_۲e^{۴x^{۲}+۱۲x}$$

حالا فرض می کنیم $C_۳=\pm C_۲$ یا $C_۳=0$ باشد. پس قدر مطلق را می توانیم حذف کنیم.

$$\frac{y-۲}{y+۲}=C_۳e^{۴x^{۲}+۱۲x}$$

حالا طرفین را در $y+۲$ ضرب می کنیم. پس داریم.

$$y-۲=C_۳(y+۲)e^{۴x^{۲}+۱۲x}$$

$$y-۲=C_۳ye^{۴x^{۲}+۱۲x}+۲C_۳e^{۴x^{۲}+۱۲x}$$

$$y-C_۳ye^{۴x^{۲}+۱۲x}=۲+۲C_۳e^{۴x^{۲}+۱۲x}$$

$$y\left(۱-C_۳e^{۴x^{۲}+۱۲x}\right)=۲+۲C_۳e^{۴x^{۲}+۱۲x}$$

$$y=\frac{۲+۲C_۳e^{۴x^{۲}+۱۲x}}{۱-C_۳e^{۴x^{۲}+۱۲x}}$$

برای پیدا کردن $c_۳$ مقدار شرط اولیه را جانشین می کنیم. یعنی $x=0$ و $y=-۱$ را در جواب کلی بالا می گذاریم. و یا این دو مقدار را در معادله زیر می گذاریم

$$\frac{y-۲}{y+۲}=C_۳e^{۴x^{۲}+۱۲x}$$

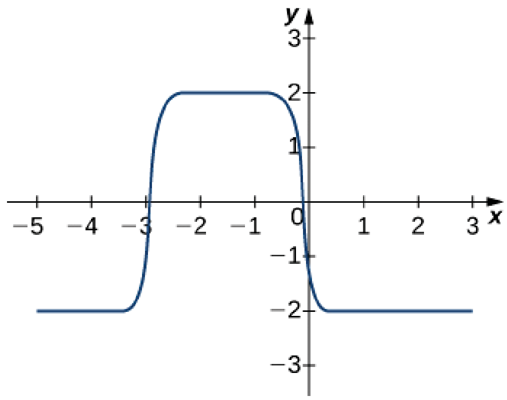
$$\frac{-۱-۲}{-۱+۲}=C_۳e^{۴(0)^{۲}+۱۲(0)}$$

$$C_۳=-۳$$

پس

$$y = \frac{2 - 6e^{4x^2+12x}}{1 + 3e^{4x^2+12x}}$$

این هم نمودار جواب.



۵) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1 - y^2}$

حل

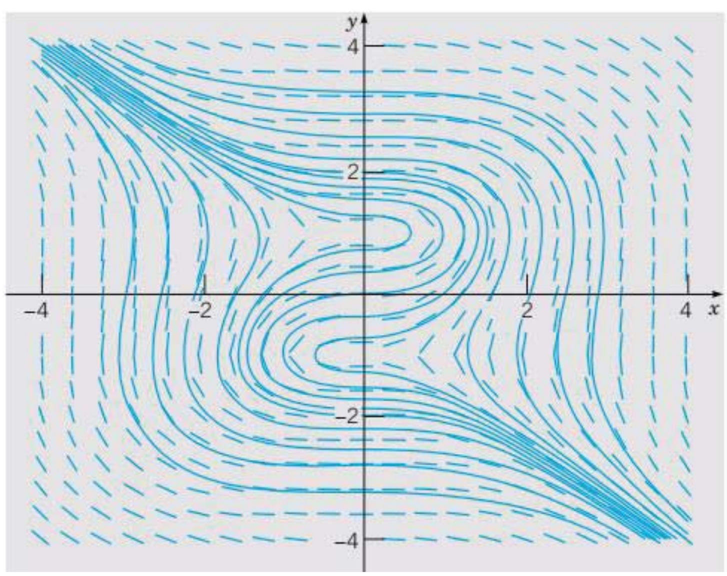
$$\left(1 - y^2\right) dy = x^2 dx$$

$$\int \left(1 - y^2\right) dy = \int x^2 dx$$

$$y - \frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$3y - y^3 = x^3 + 3C$$

باز هم به بن بست رسیدیم. زیرا معادله دیفرانسیل غیر خطی است. و لذا نمی توانیم جواب صریح پیدا کنیم. این هم نمودار که توسط نرم افزار تهیه شده است.



۶) $\frac{dy}{dx} = \frac{۳x^۲ + ۴x + ۲}{۲(y-۱)} \qquad y(0) = -۱$

پاسخ

$$۲(y-۱)dy = \left(۳x^۲ + ۴x + ۲\right) dx$$
$$\int ۲(y-۱)dy = \int \left(۳x^۲ + ۴x + ۲\right) dx$$
$$y^۲ - ۲y = x^۳ + ۲x^۲ + ۲x + C$$

برای پیدا کردن C مقادیر شرط اولیه را در معادله بالا می گذاریم. یعنی $x = 0$ و $y = -۱$ پس داریم $C = ۳$

$$y^۲ - ۲y = x^۳ + ۲x^۲ + ۲x + ۳$$

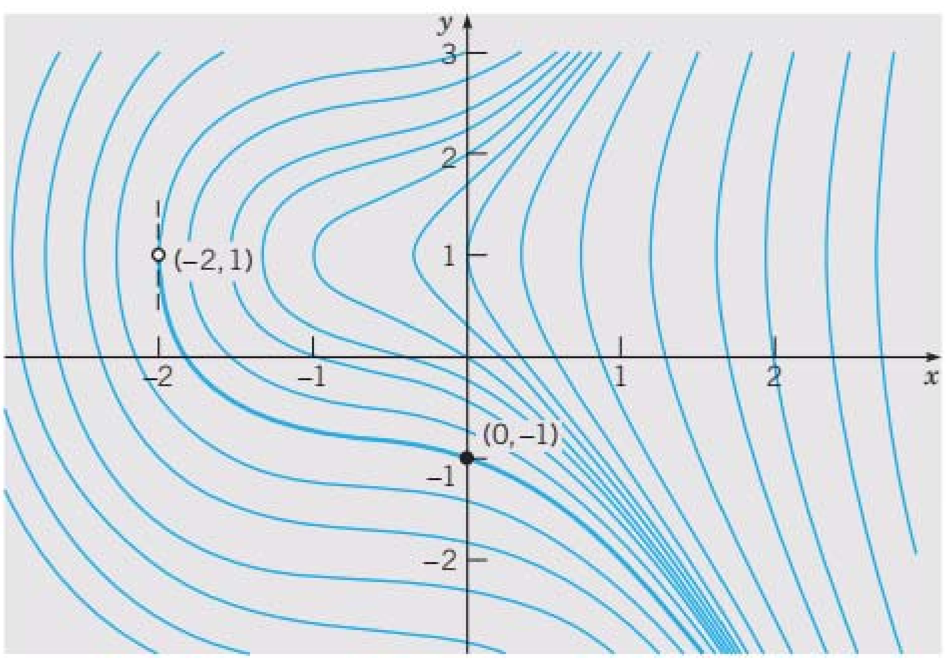
معادله بالا درجه دوم است و می توان با استفاده از فرمول درجه دوم y را پیدا کرد.

$$y = ۱ \pm \sqrt{x^۳ + ۲x^۲ + ۲x + ۴}$$

اگر علامت مثبت را در نظر بگیریم ، آنوقت $y(0) = ۳$ است و این خلاف مقدار شرط اولیه است ، پس علامت منفی را قبول می کنیم ، زیرا در این صورت $y(0) = -۱$ که شرط اولیه را بر قرار می کند.
پس جواب این معادله

$$y = ۱ - \sqrt{x^۳ + ۲x^۲ + ۲x + ۴}$$

است. برای بدست آوردن بازه معتبر ، باید مطمئن شویم که عبارت زیر رادیکال منفی نشود. صفر چند جمله ای زیر رادیکال $x = -۲$ است. پس بازه قابل قبول $x \geq -۲$ است. این هم نمودار.



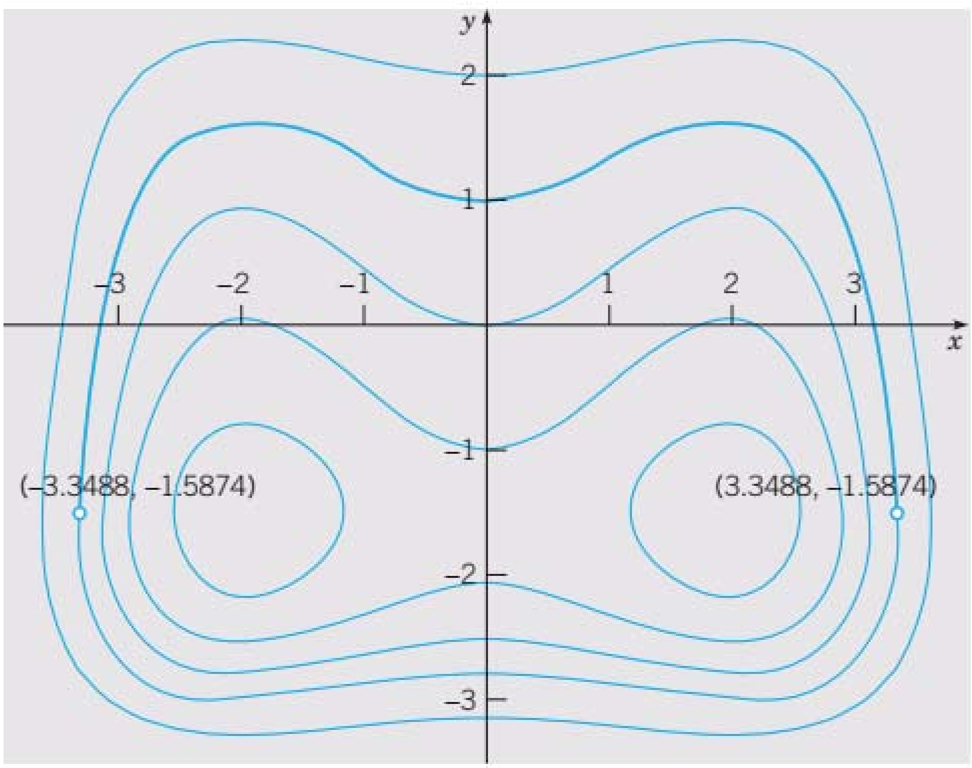
ملاحظه می کنید که منحنی در $x=-۲$ ضخیم تر رسم شده است. نقطه $(0,-۱)$ هم روی منحنی مشخص شده است.

۷) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{۴x-x^۳}{۴+y^۳}$, $y(0)=۱$

حل

$$\left(۴+y^۳\right)dy=\left(۴x-x^۳\right)dx$$
$$\int\left(۴+y^۳\right)dy=\int\left(۴x-x^۳\right)dx$$
$$۴y+\frac{۱}{۴}y^۴=۲x^۲-\frac{۱}{۴}x^۴+C$$
$$y^۴+۱۶y+x^۴-۸x^۲=۴C$$

بجای $۴C$ می توانیم C بنویسیم. زیرا یک عدد اختیاری است. اگر در معادله بالا $x=0$ و $y=۱$ اختیار کنیم ، $C=۱۷$ بدست می آید. منحنی که از نقطه $(0,۱)$ می گذرد ، پر رنگ تر رسم شده است.



۸) $y' = ۲t(۲۵ - y)$

حل

اینجا داریم $y(t) = ۲۵$ یک جواب است. اگر $y \neq ۲۵$ باشد ، داریم.

$$\frac{۱}{۲۵ - y} dy = ۲t\, dt$$

$$\int \frac{۱}{۲۵ - y} dy = \int ۲t\, dt$$

$$(-۱) \ln|۲۵ - y| = t^۲ + C_0$$

$$\ln|۲۵ - y| = -t^۲ - C_0 = -t^۲ + C$$

$$|۲۵ - y| = e^{-t^۲ + c} = e^{-t^۲} e^C$$

$$y - ۲۵ = \pm e^C e^{-t^۲}$$

$$y = ۲۵ \pm e^C e^{-t^۲} = ۲۵ + K e^{-t^۲}$$

این جواب معادله دیفرانسیل داده شده است. اگر $K = 0$ باشد ، $y = ۲۵$ جواب ثابت است که در بالا بدست آوردیم.

۹) $\sec(t) \frac{dy}{dt} - e^{y + \sin(t)} = 0$

حل

با تفکیک متغیر ها شروع می کنیم.

$$\sec(t) \frac{dy}{dt} = e^{y + \sin(t)}$$

$$\sec(t) \frac{dy}{dt} = e^y e^{\sin(t)}$$

$$e^{-y} dy = \frac{e^{\sin(t)}}{\sec(t)} dt = \cos(t) e^{\sin(t)} dt$$

$$\int e^{-y} dy = \int \cos(t) e^{\sin(t)} dt$$

$$-e^{-y} = e^{\sin(t)} + C$$

$$y = -\ln\left(D - e^{\sin(t)}\right)$$

این جواب معادله دیفرانسیل است. D یک عدد ثابت است.

توضیح در مورد $\int \cos(t) e^{\sin(t)} dt = e^{\sin(t)} + C$

فرض می کنیم $u = \sin(t)$ باشد ، پس $\frac{du}{dt} = \cos(t)$ پس $dt = \frac{۱}{\cos(t)} du$ پس

$$\int \cos(t) e^{\sin(t)} dt = \int e^u du$$

حالا از قانون نمایی استفاده می کنیم. یعنی

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)}$$

اینجا $a = e$ است. پس داریم $\int e^u du = e^u$ حالا جانشینی را بر می گردانیم. پس

$$\int \cos(t)e^{\sin(t)}dt = e^{\sin(t)} + C$$

۱۰) $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2 + 1}{t + 1}$

حل

$$\frac{1}{y^2 + 1}dy = \frac{1}{t + 1}dt$$

$$\int \frac{1}{y^2 + 1}dy = \int \frac{1}{t + 1}dt$$

$$\tan^{-1}(y) = \ln|t + 1| + C$$

$$y = \tan(\ln|t + 1| + C)$$

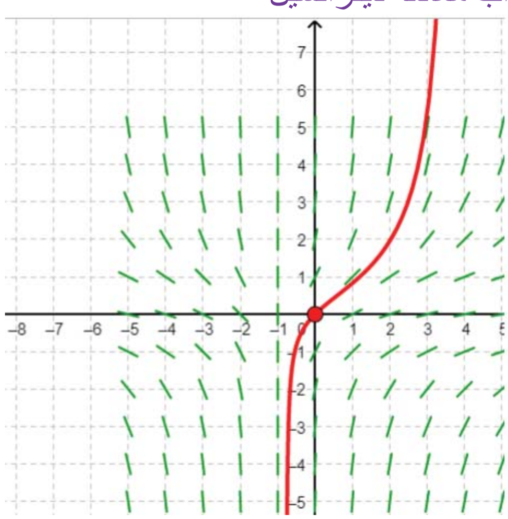
توضیح : بر اساس آنچه در حسابان خوانده ایم

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

اینجا $a = 1$ است ، پس داریم.

$$\int \frac{1}{y^2 + 1}dy = \arctan(y)$$

این هم میدان راستا و نمودار جواب معادله دیفرانسیل



۱۱) $\frac{dy}{dt}=\frac{۴\sin(۲t)}{y} \qquad y(0)=۱$

حل

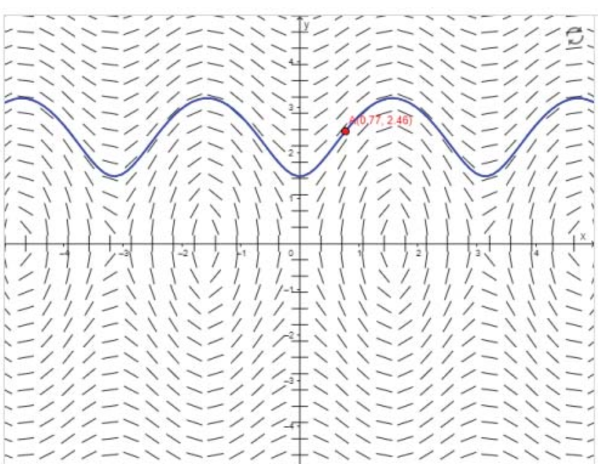
$$y\,dy=۴\sin(۲t)dt$$
$$\int y\,dy=\int ۴\sin(۲t)\,dt$$
$$\frac{y^۲}{۲}=-۲\cos(۲t)+C$$
$$y^۲=-۴\cos(۲t)+۲C$$
$$y=\pm\sqrt{-۴\cos(۲t)+۲C}$$

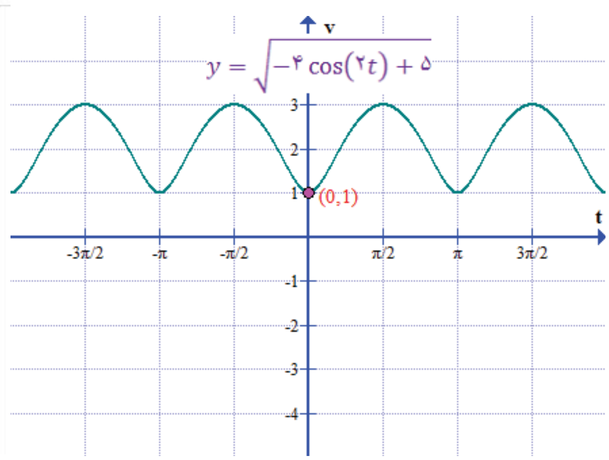
بر اساس مقدار شرط اولیه $y(0)=۱$ داریم.

$$۱=\sqrt{-۴\cos(0)+۲C}$$
$$۱=\sqrt{-۴+۲C}$$
$$۱=-۴+۲C$$
$$۵=۲C$$
$$C=\frac{۵}{۲}$$

پس جواب مساله با مقدار اولیه $y=\sqrt{-۴\cos(۲t)+۵}$ است.

این هم میدان راستا همراه با نمودار جواب با مقدار اولیه





۱۲) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^{۲}(x-۳)}{x^{۳}}$

حل

$$\frac{۱}{y^{۲}}dy=\frac{x-۳}{x^{۳}}dx$$

$$\int\frac{۱}{y^{۲}}dy=\left(\frac{۱}{x^{۲}}-\frac{۳}{x^{۳}}\right)dx$$

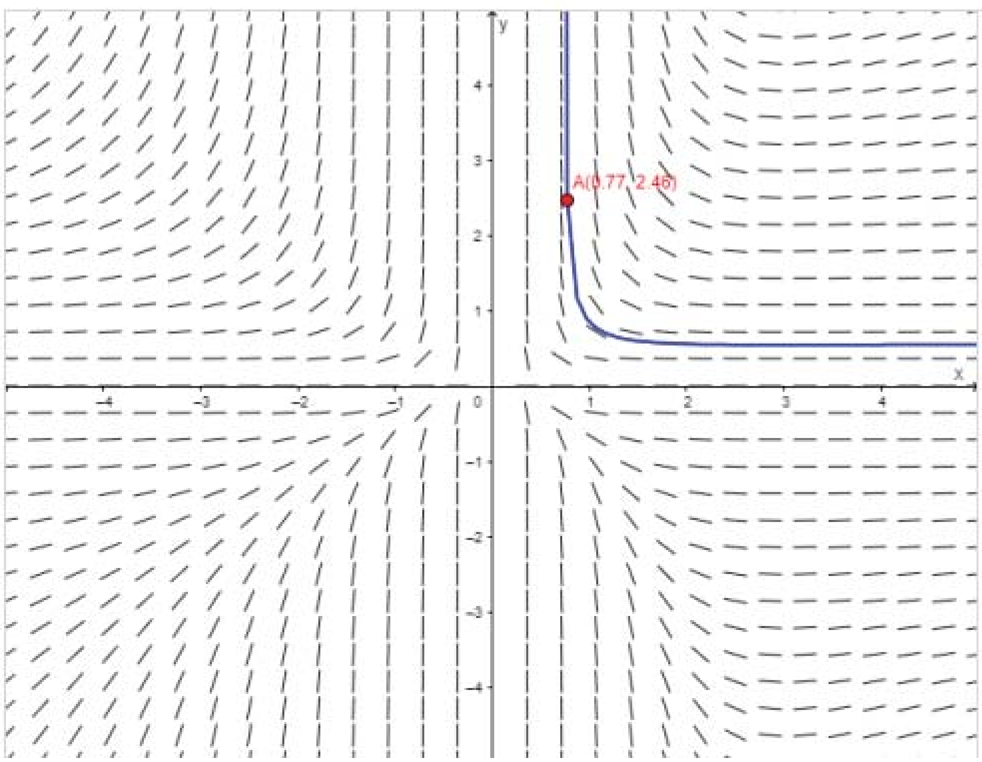
$$-\frac{۱}{y}=-\frac{۱}{x}+\frac{۳}{۲x^{۲}}+C$$

$$-\frac{۱}{y}=\frac{-۲x+۳+۲Cx^{۲}}{۲x^{۲}}$$

$$\frac{۱}{y}=\frac{۲x-۳-۲Cx^{۲}}{۲x^{۲}}$$

$$y=\frac{۲x^{۲}}{۲x-۳-۲Cx^{۲}}$$

این هم میدان راستا همراه با یک جواب ، که نرم افزار برای یک مقدار اولیه پیدا کرده است.

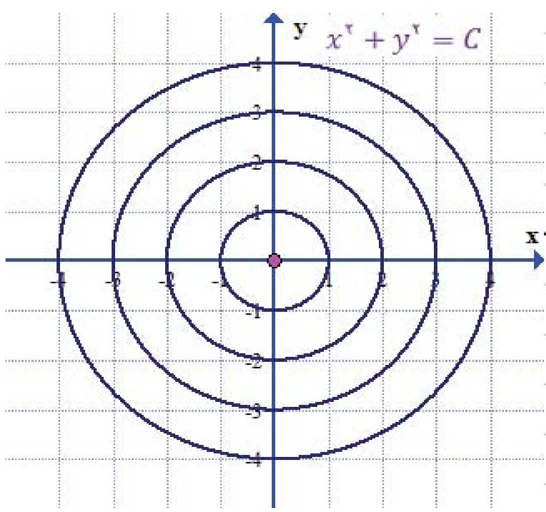


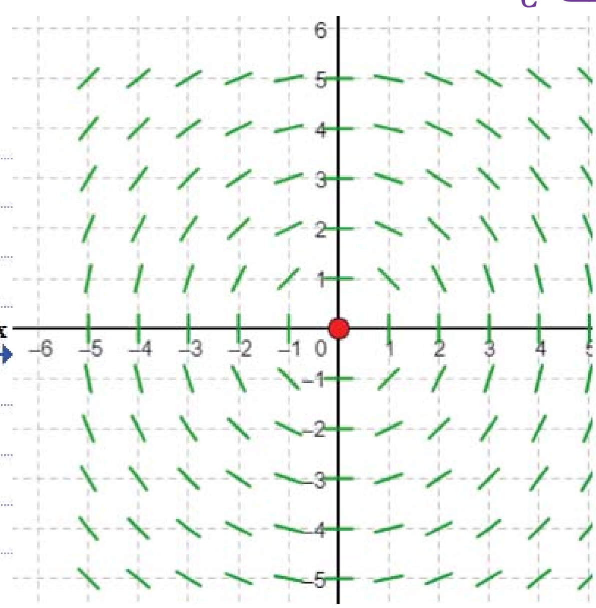
۱۳) $y' = -\dfrac{x}{y}$

حل

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$
$$y dy = -x\,dx$$
$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$
$$\frac{۱}{۲}y^{۲} = -\frac{۱}{۲}x^{۲} + C$$
$$x^{۲} + y^{۲} = C$$

چون $C = ۲C$ هر کدام یک عدد اختیاری هستند. این هم میدان راستا و نمودار های چند جواب با مقادیر مختلف C





با توجه به میدان راستای بالا ، ملاحظه می کنید که جوابهای این معادله دیفرانسیل ، شامل یک سری دائره های به مرکز مبدا مختصات. است.

۱۴) $y' = \dfrac{xy - y}{y + ۱}$　　　$y(۲) = ۱$

حل

$$y' = \frac{xy - y}{y + ۱} = \frac{y(x - ۱)}{y + ۱} = (x - ۱)\frac{y}{y + ۱}$$

پس $f(x) = x - ۱$ و $g(y) = \frac{y}{y+۱}$ است.

$$\left(\frac{y+1}{y}\right)y' = x-1 \ ، \ y \neq 0$$

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)y' = x-1$$

$$\left(1+\frac{1}{y}\right)dy = (x-1)dx$$

$$\int\left(1+\frac{1}{y}\right)dy = \int(x-1)dx$$

پس جواب کلی معادله دیفرانسیل مطابق زیر است.

$$y+\ln|y| = \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

ملاحظه می کنید که y تلویحا تعریف شده است.
همان طور که در بالا گفته شد

$$g(y) = \frac{y}{y+1}$$

است. پس یک جواب $y=0$ است. اما $\ln(0)$ وجود ندارد. ا این جواب در جواب کلی ، وجود ندارد. پس $y=0$ تنها جواب است. برای پیدا کردن جوابی که شرط اولیه را بر قرار کند ، $x=2$ و $y=1$ قرار می دهیم.

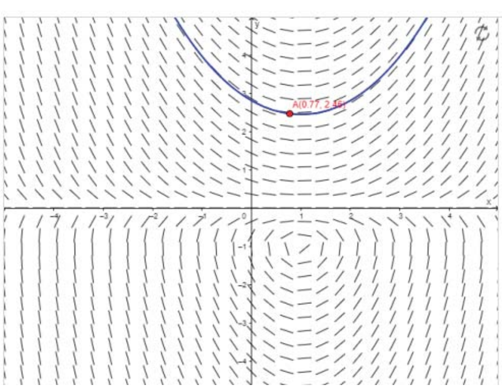
$$1+\ln(1) = \frac{1}{2}(2)^2 - 2 + C$$

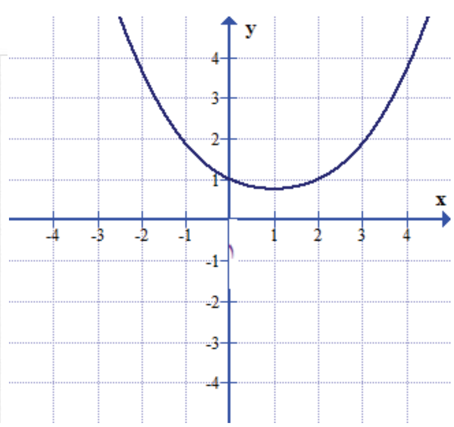
$$C = 1$$

پس جواب مخصوصی که شرط اولیه را بر قرار کند

$$y+\ln(y) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$$

است. میدان راستا همراه با جوابی که شرط اولیه را بر قرار می کند.





۱۵) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy^{۲}-x}{y}$

حل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy^{۲}-x}{y}=\frac{x\left(y^{۲}-۱\right)}{y}$$

$$\frac{y}{y^{۲}-۱}dy=x\,dx \qquad , \; y\neq\pm۱ \qquad (*)$$

$$\int\frac{y}{y^{۲}-۱}dy=\int x\,dx$$

$$\frac{۱}{۲}\ln\left(y^{۲}-۱\right)=\frac{۱}{۲}x^{۲}+C$$

$$\ln\left(y^{۲}-۱\right)=x^{۲}+C$$

توجه کنید که بجای $۲C$ نوشته ایم C زیرا همانطور که مکررا گفته شده است چون C و $۲C$ و غیرو اعداد اختیاری هستند.

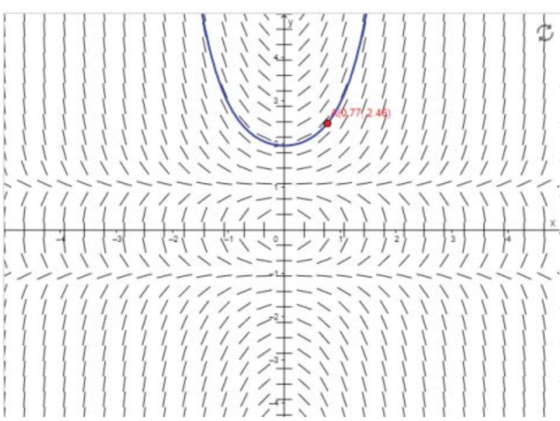
طرفین را به صورت نمایی می نویسیم.

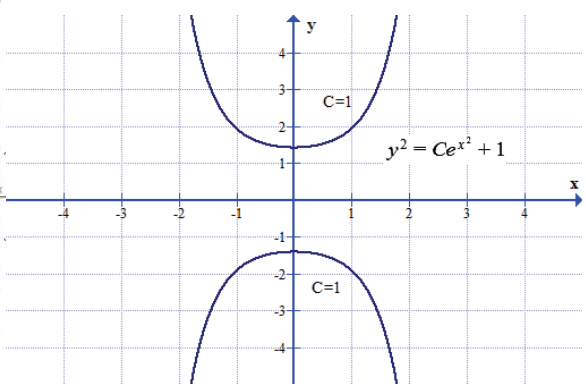
$$y^{۲}-۱=e^{x^{۲}+C}=e^{x^{۲}}e^{C}=Ce^{x^{۲}}$$

پس جواب کلی ، مطابق زیر است.

$$y^{۲}=Ce^{x^{۲}}+۱$$

اگر $C=0$ باشد ، پس $y=\pm۱$ است و این خلاف عبارت $(*)$ بالا است. پس هیچ جواب ویژه ای ندارد. ملاحظه می کنید که میدان رستا با نمودار جواب کلی با $C=۱$ هماهنگ است.





۱۶) $\frac{dy}{dx}=\left(۱+e^{-۱}\right)\left(y^{۲}-۱\right)$

حل

$$\frac{dy}{y^{۲}-۱}=\left(۱+e^{-۱}\right)dx$$

$$\int \frac{۱}{y^{۲}-۱}\,dy=\int\left(۱+e^{-۱}\right)dx$$

انتگرال سمت راست مطابق زیر بدست می یاد.

$$\int\left(۱+e^{-۱}\right)dx=x-e^{-۱}+C$$

انتگرال سمت چپ را از طریق کسر های جزئی محاسبه می کنیم.

$$\int \frac{۱}{y^{۲}-۱}dy=\int \frac{۱}{(y+۱)(y-۱)}dy$$

ابتدا $y=۱$ قرار می دهیم.

$$۱=A(y-۱)+B(y+۱)=A(۱-۱)+B(۱+۱)=۲B\ ,\qquad B=\frac{۱}{۲}$$

حالا $B=\frac{۱}{۲}$ جانشین می کنیم و $y=0$ قرار می دهیم.

$$۱=A(y-۱)+B(y+۱)=A(0-۱)+\frac{۱}{۲}(0+۱)=-A+\frac{۱}{۲}\ \ ,\ \ A=-\frac{۱}{۲}$$

پس داریم

$$\int \frac{۱}{y^{۲}-۱}\,dy=\int \frac{۱}{(y+۱)(y-۱)}\,dy=\int\left\{\frac{A}{y+۱}+\frac{B}{y-۱}\right\}dy$$

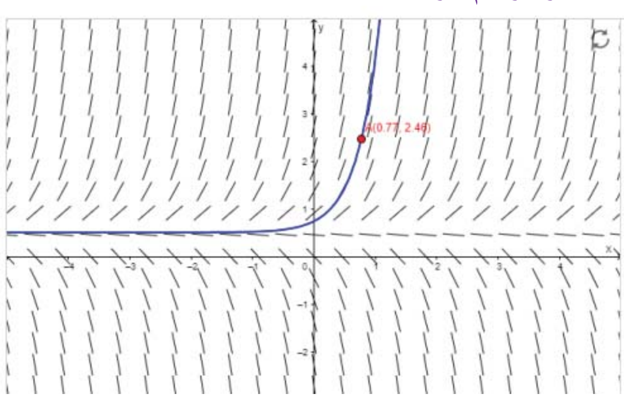
$$=\int\left[-\frac{۱}{۲}\left\{\frac{۱}{y+۱}\right\}+\frac{۱}{۲}\left\{\frac{۱}{y-۱}\right\}\right]dy$$

$$=\frac{۱}{۲}\int\left(\frac{۱}{y-۱}\quad+\frac{۱}{y+۱}\right)dy=\frac{۱}{۲}\left(\ln|y-۱|-\ln|y+۱|\right)=\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{y-۱}{y+۱}\right|$$

پس روی هم رفته ، جواب کلی این معادله به صورت زیر است.

$$\frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{y-۱}{y+۱}\right|=x-e^{-۱}+C$$

باز هم بیش از این نمی توانیم پیش برویم. زیرا هر چه جلو برویم ، معادله پیچیده تر می شود. نرم افزار ، خود نمودار یک جواب را رسم کرده است.



۱۷) $\frac{dy}{dx}=\frac{(x+۲)^۲}{x\sin(y)}$

حل

$$\sin(y)dy=\frac{(x+۲)^۲}{x}dx$$
$$\sin(y)dy=\int\frac{x^۲+۴x+۴}{x}dx$$
$$\int\sin(y)dy=\int\left(x+۴+\frac{۴}{x}\right)dx$$

سمت چپ داریم.

$$\int\sin(y)dy=-\cos(y)$$

سمت راست داریم.

$$\int\left(x+۴+\frac{۴}{x}\right)dx=\frac{x^۲}{۲}+۴x+۴\ln|x|+C$$

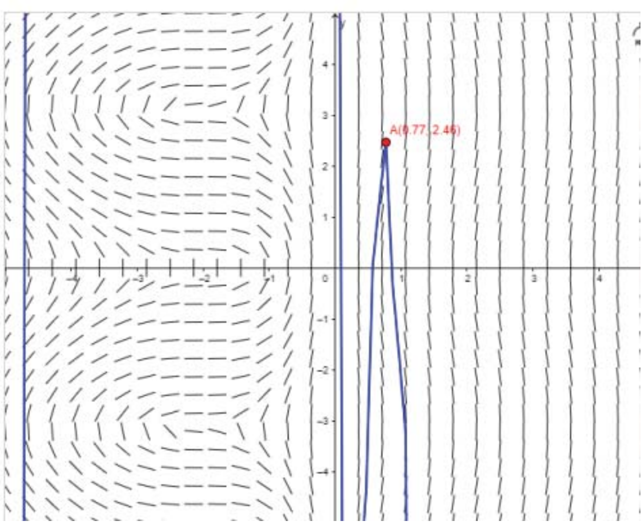
پس روی هم رفته داریم.

$$-\cos(y)=\frac{x^۲}{۲}+۴x+۴\ln|x|+C$$

برای پیدا کردن جواب کلی ابتدا علامت منفی سمت چپ را به سمت راست منتقل می کنیم و سپس معکوس کسینوس را برای طرفین بکار می بریم. پس داریم.

$$y(x)=\cos^{-1}\left(-\frac{x^۲}{۲}-۴x-۴\ln|x|-C\right)$$

باز هم بیش از این نمی توانیم پیش برویم. اینجا است که رسم میدان راستا به ما کمک می کند که یک ایده کلی در مورد جواب بدست آوریم.



۱۸) $\frac{dy}{dx} = y\left(۳ + e^{۲x}\right)$

حل

$$\frac{۱}{y}dy = \left(۳ + e^{۲x}\right)dx$$

$$\int \frac{۱}{y}dy = \int \left(۳ + e^{۲x}\right)dx$$

انتگرال سمت چپ داریم.

$$\int \frac{۱}{y}dy = \ln|y|$$

انتگرال سمت راست داریم.

$$\int \left(۳ + e^{۲x}\right)dx = ۳x + \frac{۱}{۲}e^{۲x} + C$$

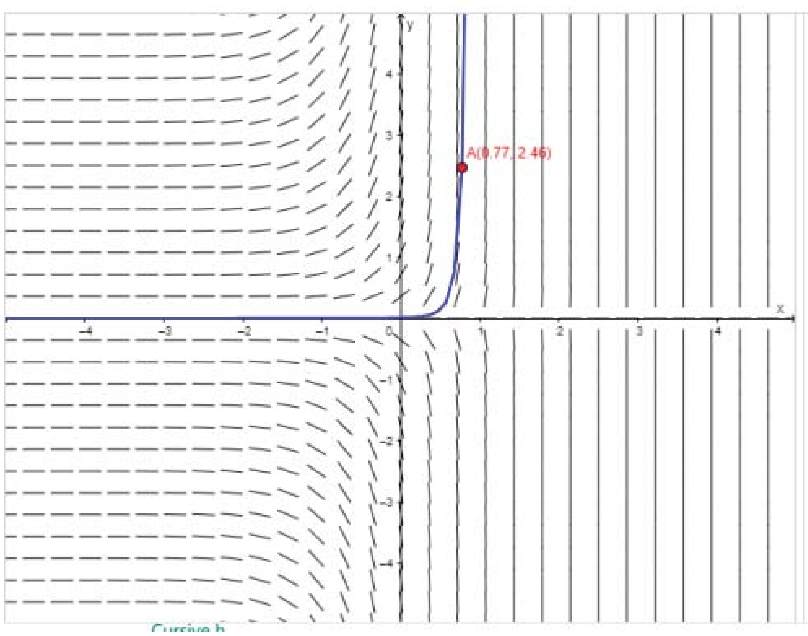
لذا

$$\ln|y| = ۳x + \frac{۱}{۲}e^{۲x} + C$$

قانون نمایی را بر دو طرف اعمال می کنیم.یا　طرفین را نمایی می کنیم.

$$e^{\ln|y|} = e^{۳x + \frac{۱}{۲}e^{۲x} + C}$$

$$y(x) = \left|e^{۳x + \frac{۱}{۲}e^{۲x} + C}\right|$$



۱۹) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x}{y}$

حل

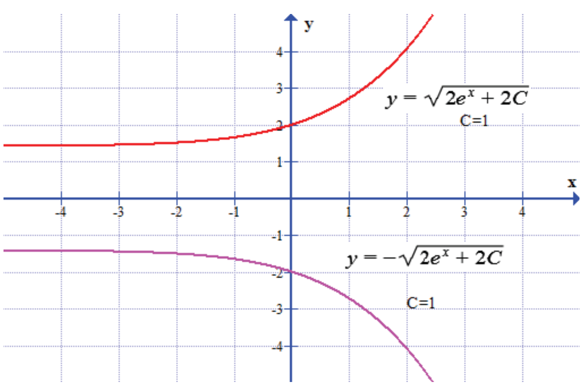
$$y dy = e^x dx$$

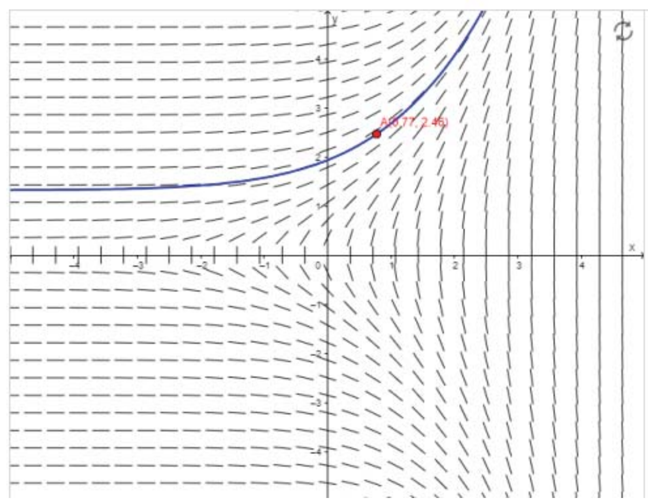
$$\int y dy = \int e^x dx$$

$$\frac{۱}{۲} y^۲ = e^x + C$$

$$y^۲ = ۲e^x + ۲C$$

$$y(x) = \pm \sqrt{۲e^x + ۲C}$$





۲۰) $\frac{dy}{dx} = xy - x$ ، $y(0) = ۲$

حل

$$\frac{dy}{dx} = x(y - ۱)$$

$$\frac{۱}{y - ۱} dy = x\, dx$$

$$\int \frac{۱}{y - ۱} dy = \int x\, dx$$

$$\ln|y - ۱| = \frac{۱}{۲} x^۲ + C$$

به توان نمایی می رسانیم.

$$e^{\ln|y-۱|} = e^{\frac{۱}{۲}x^۲ + C}$$

$$y - ۱ = \left|e^{\frac{۱}{۲}x^{۲}+C}\right|$$

$$y = \left|e^{\frac{۱}{۲}x^{۲}+C}\right| + ۱$$

تساوی بدست آمده بالا ، جواب کلی معادله دیفرانسیل داده شده است. برا پیدا کردن مقدار C مقادیر شرط اولیه را بکار می بریم.

$$y(0) = \left|e^{\frac{۱}{۲}0^{۲}+C}\right| + ۱$$

$$۲ = |e^{C}| + ۱$$

$$e^{C} = ۲ - ۱ = ۱$$

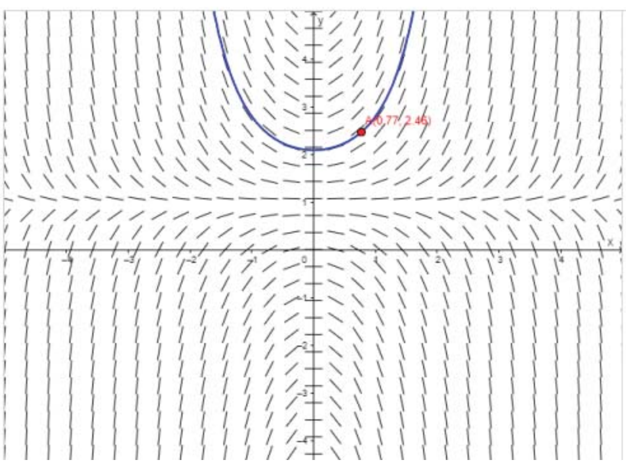
$$\ln|e^{C}| = \ln|۱|$$

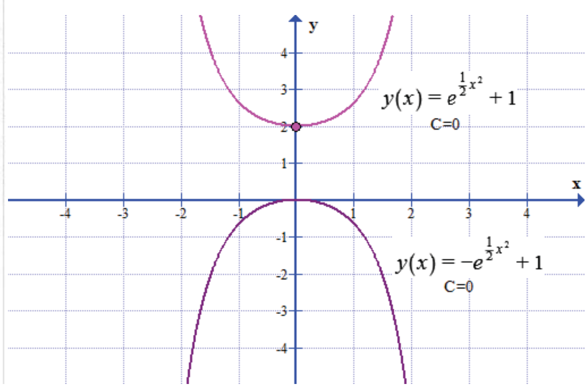
$$C = 0$$

پس

$$y(x) = \left|e^{\frac{۱}{۲}x^{۲}}\right| + ۱$$

ملاحظه می کنید که میدان راستا با تصویر جواب مخصوص مطابقت درد،





۲۱) $\dfrac{dy}{dx} = xy - ۴x$

حل

$$\frac{dy}{dx} = x(y - ۴)$$

$$\frac{۱}{y - ۴}dy = x\,dx$$

$$\int \frac{۱}{y-۴} dy = \int x\, dx$$

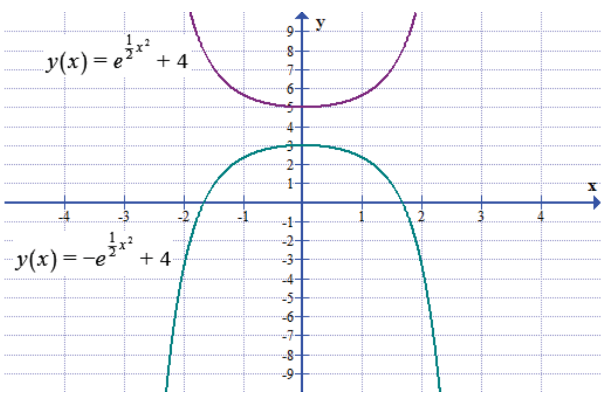
$$\ln|y-۴| = \frac{۱}{۲}x^{۲} + C_{۱}$$

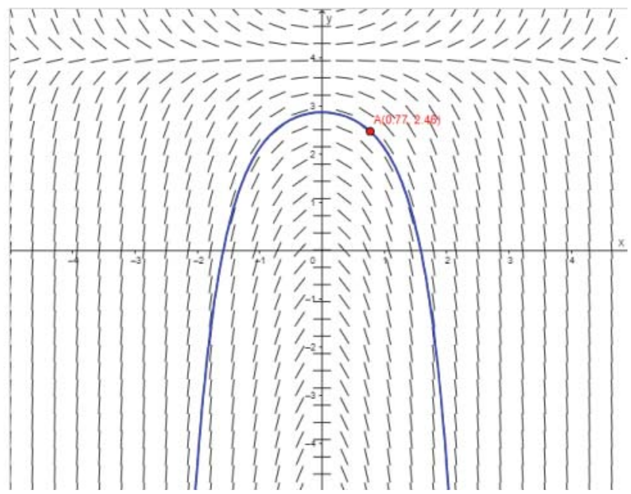
$$|y-۴| = e^{\frac{۱}{۲}x^{۲}+C_{۱}} = Ce^{\frac{۱}{۲}x^{۲}}$$

تساوی بالا جواب کلی معادله دیفرانسیل است. می توانیم جواب صریح را پیدا کنیم.

$$y-۴ = \begin{cases} Ce^{\frac{۱}{۲}x^{۲}} & \text{اگر} \quad y \geq ۴ \\ -Ce^{\frac{۱}{۲}x^{۲}} = Ke^{\frac{۱}{۲}x^{۲}} & \text{اگر} \quad y < ۴ \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} Ce^{\frac{۱}{۲}x^{۲}} + ۴ \\ Ke^{\frac{۱}{۲}x^{۲}} + ۴ \end{cases}$$





ملاحظه می کنید که میدان راستا و دو نمودار مخصوص مطابقت دارد .

۲۲) $\dfrac{dy}{dx} = ۳y^{۲} - y^{۲}\sin(x)$

حل

$$\frac{dy}{dx} = y^{۲}(۳-\sin(x))$$

$$\frac{۱}{y^{۲}} dy = (۳-\sin(x))dx$$

$$\int \frac{۱}{y^{۲}} dy = \int (۳-\sin(x))dx$$

$$-\frac{۱}{y} = ۳x + \cos(x) + C_۱$$

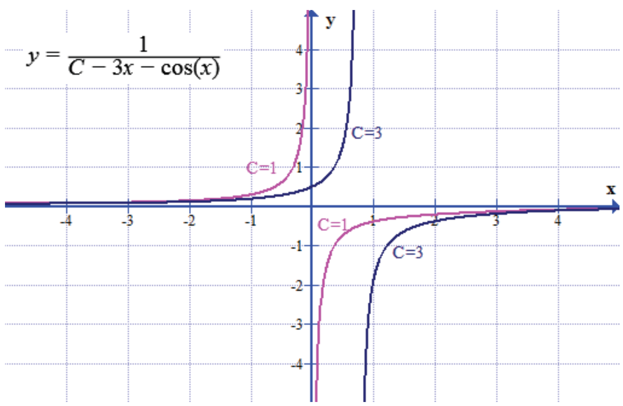
$$\frac{۱}{y} = -۳x - \cos(x) + C_۲$$

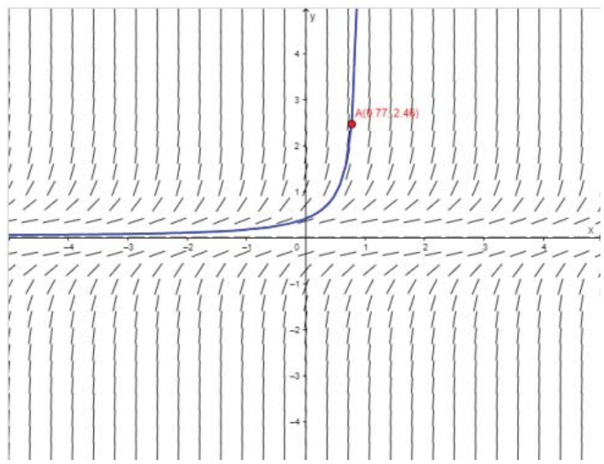
$$y = -\frac{۱}{۳x + \cos(x) + C_۲}$$

پس جواب کلی معادله دیفرانسیل داده شده به صورت زیر است.

$$y = \frac{۱}{C - ۳x - \cos(x)}$$

میدان راستا و جواب مخصوص برای $C = 0$ تطبیق می کنند.





۲۳) $\frac{dy}{dx} = xy - ۳x - ۲y + ۶$

حل

$$\frac{dy}{dx} = (x-۲)(y-۳)$$

$$\frac{۱}{y-۳}dy = (x-۲)dx$$

$$\int \frac{۱}{y-۳}\,dy = \int (x-۲)\,dx$$

$$\ln|y-۳| = \frac{۱}{۲}x^۲ - ۲x + C_۱$$

$$|y-۳| = e^{\frac{۱}{۲}x^۲ - ۲x + C_۱}$$

پس جواب کلی مطابق زیر است.

$$|y-۳| = Ce^{\frac{۱}{۲}x^{۲}-۲x}$$

$$y-۳ = \begin{cases} Ce^{\frac{۱}{۲}x^{۲}-۲x} & \text{اگر} \quad y \geq ۳ \\ -Ce^{\frac{۱}{۲}x^{۲}-۲x} = Ke^{\frac{۱}{۲}x^{۲}-۲x} & \text{اگر} \quad y < ۳ \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} Ce^{\frac{۱}{۲}x^{۲}-۲x} + ۳ \\ Ke^{\frac{۱}{۲}x^{۲}-۲x} + ۳ \end{cases}$$

نمودار ها تقریبا مانند بالا هستند.

۲۴) $\dfrac{dy}{dx} = \tan(y)$

حل

$$\frac{۱}{\tan(y)}dy = dx$$

$$\int \frac{۱}{\tan(y)}dy = \int dx$$

$$\int \frac{\cos(y)}{\sin(y)}dy = \int dx$$

$$\int \frac{۱}{\sin(y)}d(\sin(y)) = \int dx$$

$$\ln|\sin(y)| = x + C_۱$$

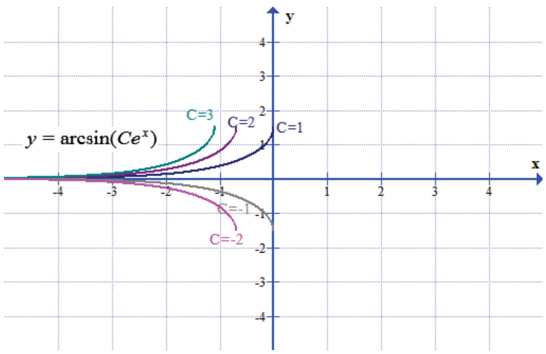
جواب کلی به صورت زیر است.

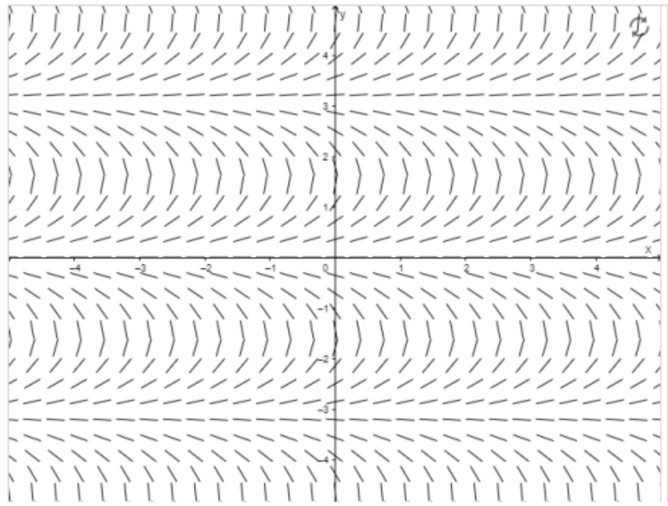
$$|\sin(y)| = e^{x+C_۱} = Ce^{x}$$

برا ی پیدا کردن جواب اختصاصی ، داریم.

$$\sin(y) = \begin{cases} Ce^{x} & \text{اگر} \quad \sin(y) \leq ۱ \\ -Ce^{x} = Ke^{x} & \text{اگر} \quad -۱ \leq \sin(x) < 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} \arcsin(Ce^{x}) \\ \arcsin(Ke^{x}) \end{cases}$$





۲۵) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$

حل

$$\frac{۱}{y}dy = \frac{۱}{x}dx$$

$$\int \frac{۱}{y}dy = \int \frac{۱}{x}dx$$

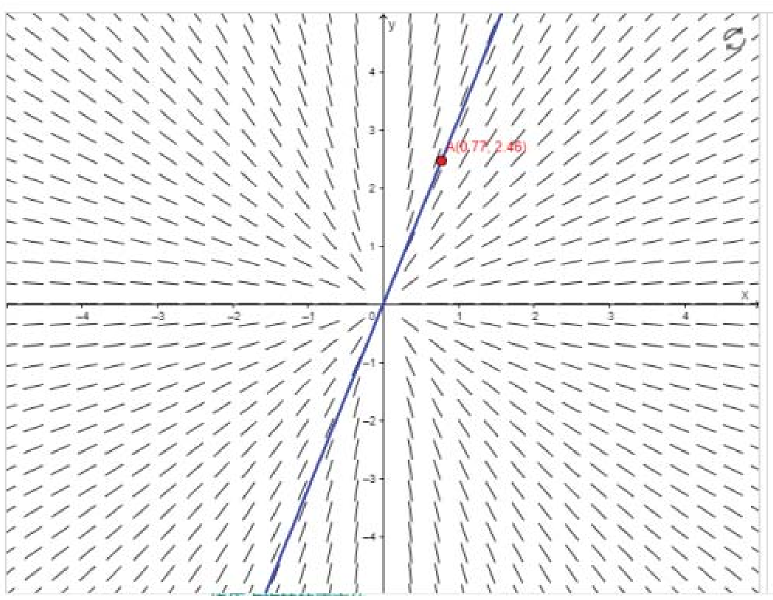
$$\ln|y| = \ln|x| + C_۱$$

$$|y| = |x| + e^{C_۱} = C|x|$$

اگر فرض کنیم $C = e^{C_۱}$ باشد

$$|y| = C|x|$$

معادله بالا ، جواب کلی معادله دیفرانسیل داده شده است.

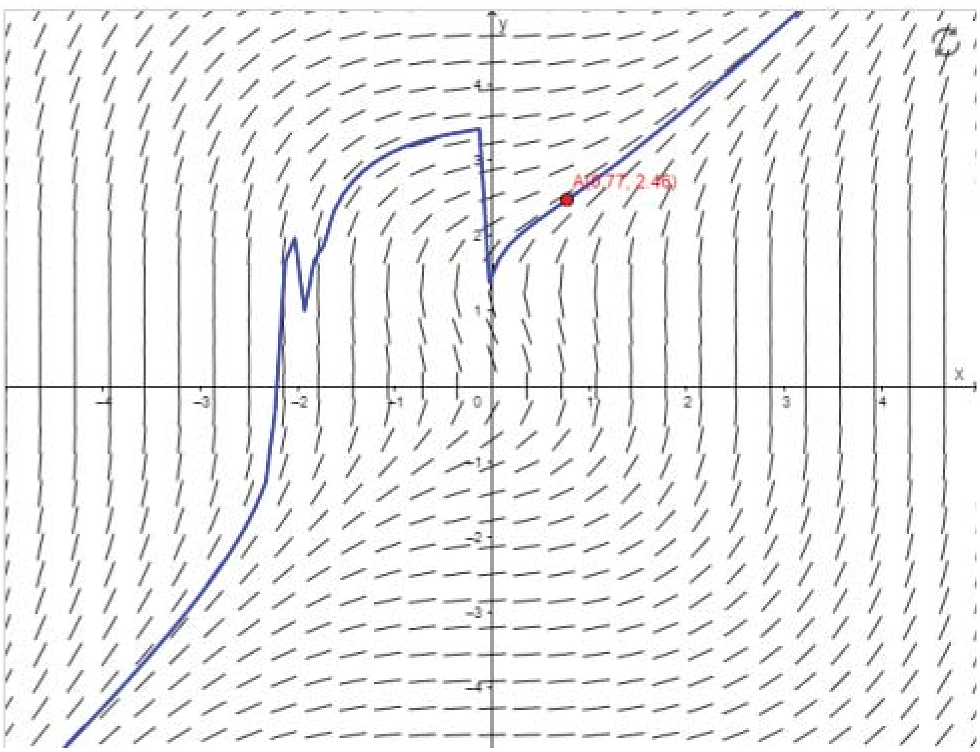


۲۶) $\frac{dy}{dx} = \frac{۶x^۲ + ۴}{۳y^۲ - ۴y}$

حل

$$\left(۳y^۲ - ۴y\right) dy = \left(۶x^۲ + ۴\right) dx$$
$$\int \left(۳y^۲ - ۴y\right) dy = \int \left(۶x^۲ + ۴\right) dx$$
$$y^۳ - ۲y^۲ = ۲x^۳ + ۴x + C$$
$$y = \frac{۲x^۳ + ۴x + C}{y^۲ - ۲y}$$

این جواب تلویحی است. بیش از این نمی توانیم پیش برویم.



بخش ۲.۳ کار بردهای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

کار برد اول : مسیر های عمود بر هم. Orthogonal Trajectories

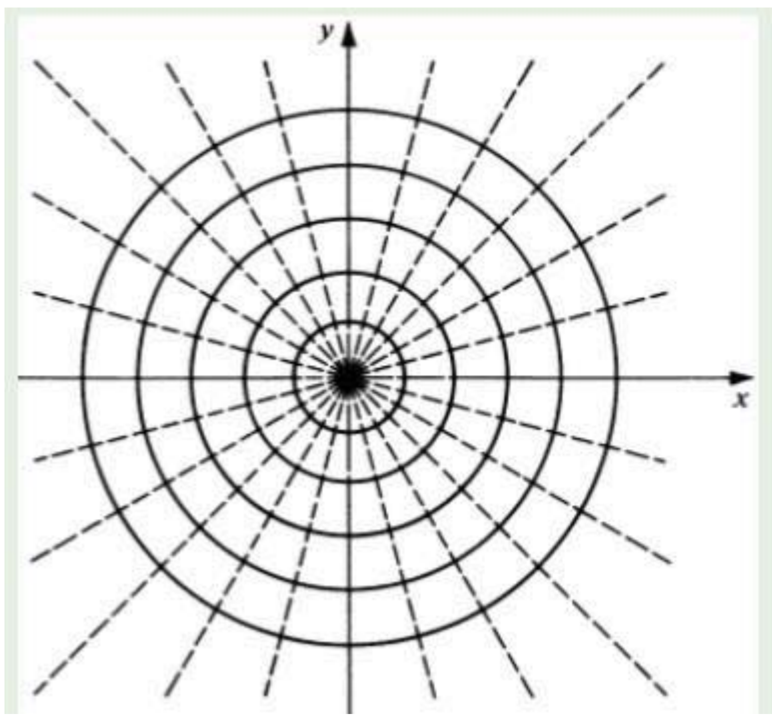
فرض کنید یک خانواده از منحنی های زیر داشته باشیم.

$$F(x.y,c) = 0 \qquad (۱)$$

و یک خانواده دیگر منحی مطابق زیر داشته باشیم.

$$G(x,y,k) = 0 \qquad (۲)$$

بطوری که در هر تقاطع یک منحنی خانواده $F(x,y,c) = 0$ با یک منحنی از خانواده $G(x.y,k) = 0$ خطوط مماس برمنحنی ها بر هم عمود باشند.
پس دو خانواده از منحنی وجود دارد ، که همیشه بطور عمودی یکدیگر را قطع می کنند. **مثلا** خانواده دائره های $x^۲ + y^۲ = c$ که مرکز آنها مبدا مختصات است و خانواده $y = kx$ که خط هایی هستند که از مبدا عبور می کنند ، نسبت به هم ، مسیر های متعامد هستند. تصویر زیر. متعامد یعنی عمود بر هم.



چگونه مسیر های عمود بر هم را پیدا کنیم. How to Find Orthogonal Trajectories

برای پیدا کردن مسیر های عمود خانواده زیر

$$F(x,y,c) = 0 \qquad (۳)$$

گام اول : از شماره (۳) بطور ضمنی نسبت به x مشتق بگیرید ، تا رابطه زیر بدست آورید.

$$g\left(x,y,\frac{dy}{dx},c\right) \qquad (۴)$$

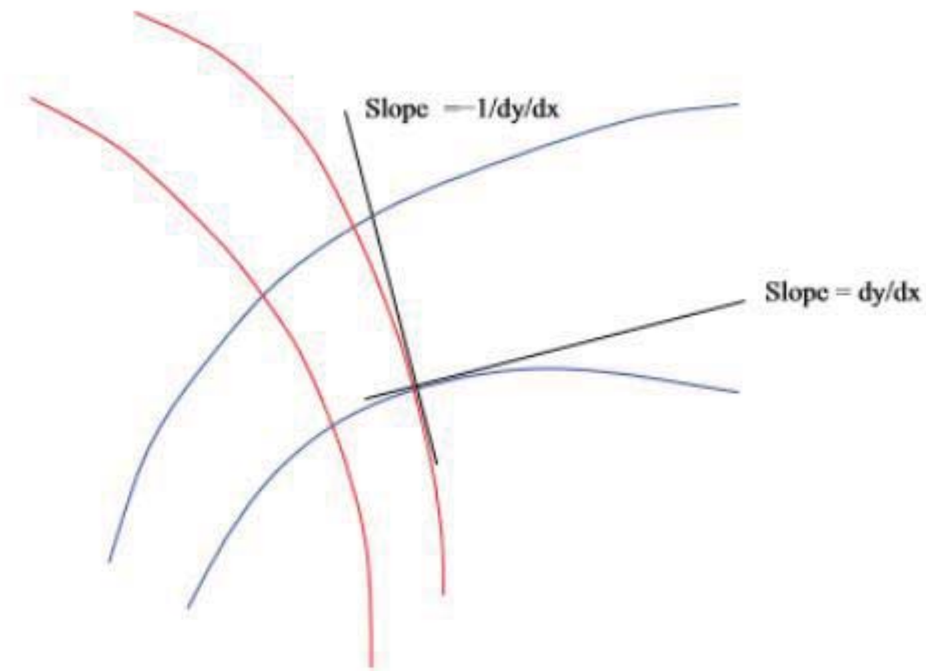
گام دوم : پارامترهای c را از شماره های (۳) و (۴) حذف کنید ، تا معادله دیفرانسیل زیر بدست آورید.

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \qquad (۵)$$

گام سوم : بجای $\frac{dy}{dx}$ در شماره (۵) بنویسید $\frac{-۱}{\frac{dy}{dx}}$ تا معادله دیفرانسیل زیر بدست آورید.

$$H\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \qquad (۶)$$

گام چهارم : جواب کلی شماره (۶) مسیر های متعامد است که می خواهیم.



مثال ۱

مسیر های متعامد خانواده خطوط مستقیم که از مبدا می گذرند پیدا کنید.

حل

خانواده خطوط که از مبدا می گذرند مطابق زیر است.

$$y = kx \qquad (۷)$$

گام اول: از شماره (۷) بطور ضمنی نسبت به x مشتق می گیریم.

$$\frac{dy}{dx} = k \qquad (۸)$$

گام دوم : از شماره (۷) و (۸) پارامتر k را حذف می کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \qquad (۹)$$

این معادله دیفرانسیل شماره (۷) است.

گام سوم : در شماره (۹) بجای $\frac{dy}{dx}$ می نویسیم $\frac{-۱}{\frac{dy}{dx}}$ پس داریم.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \qquad (۱۰)$$

گام چهارم : معادله دیفرانسیل (۱۰) را حل می کنیم. پس داریم.

$$x^۲ + y^۲ = c \qquad (۱۱)$$

پس مسیر های عمودبر خانواده خطوط مستقیم که از مبدا می‌گذرند ، شماره (۱۱) است ، که این ها دائره هایی هستند که مرکز آنها ، مبدا مختصات است.

مثال ۲

مطلوب است مسیر ها ی عمود بر خانواده زیر.

$$cx^۲ - y^۲ = ۱ \qquad (۱۲)$$

حل

گام اول : از شماره (۱۲) بطور ضمنی بر حسب x مشتق می گیریم.

$$۲cx - ۲y\frac{dy}{dx} = 0 \qquad (۱۳)$$

گام دوم : پارامتر c را از (۱۲) حذف می کنیم.

$$c = \frac{۱ + y^۲}{x^۲}$$

شماره (۱۳) میشود

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱ + y^۲}{xy} \qquad (۱۴)$$

شماره (۱۴) مشتق خانواده (۱۲) است.

گام سوم : بجای $\frac{dy}{dx}$ در شماره (۱۴) می گذاریم $\frac{-۱}{\frac{dy}{dx}}$ پس داریم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-xy}{۱ + y^۲} \qquad (۱۵)$$

گام چهارم :معادله دیفرانسیل (۱۵) را حل می کنیم ، با روش تفکیک متغیر ها

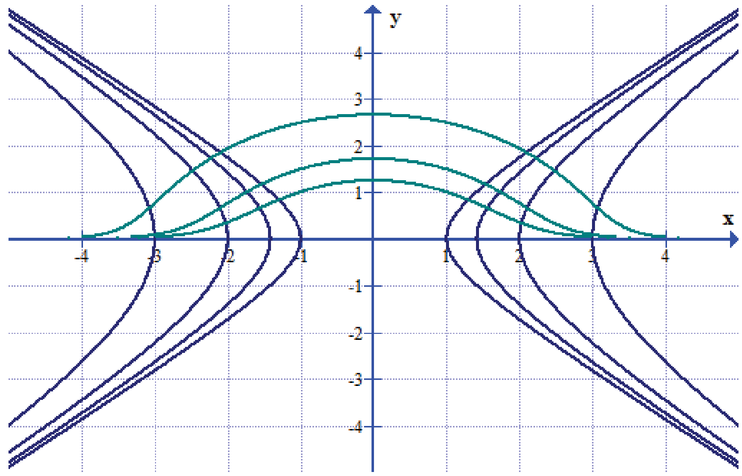
$$\int \frac{1 + y^2}{y}\, dy = -\int x\, dx$$

$$\int \left(\frac{1}{y} + y\right)\, dy = -\int x\, dx$$

$$\ln y + (y^2/2) = (-x^2/2) + c_1$$

$$2\ln y + y^2 + x^2 = c_1. \qquad (16)$$

پس شماره (۱۶) مسیر های عمودی است که می خواهیم. در تصویر زیر منحنی های بنفش خانواده $cx^۲ - y^۲ = ۱$ است و منحنی های سبز خانواده $۲\ln(y) + y^۲ + x^۲ = c_۱$ است.



مثال ۳

مطلوب است مسیر های عمودی خانواده زیر

$$y^۲ = cx^۳ \qquad (۱۷)$$

حل

گام اول : از شماره (۱۷) مشتق ضمنی بر حسب x می گیریم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۳cx^۲}{۲y} \qquad (۱۸)$$

گام دوم :پارامتر c را از (۱۷) حذف می کنیم.

$$c = \frac{y^۲}{x^۳}$$

پس داریم

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۳y}{۲x} = f(x,y) \qquad (۱۹)$$

شماره (۱۹) معادله دیفرانسیل خانواده (۱۷) است.

گام سوم :در شماره (۱۹) بجای $\frac{dy}{dx}$ می گذاریم $\frac{-۱}{\frac{dy}{dx}}$

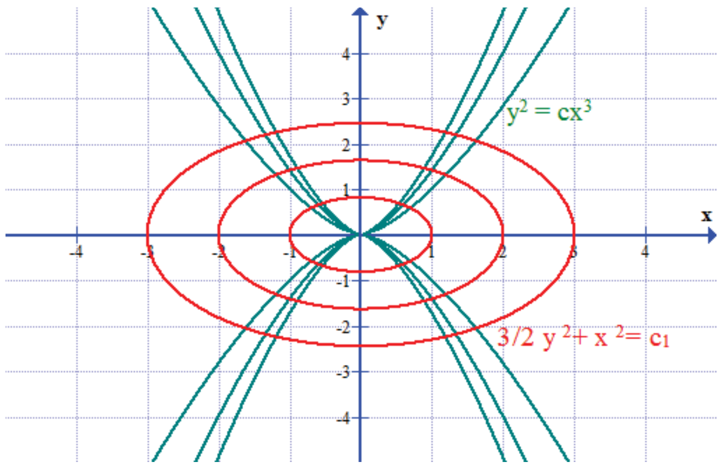
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-۲x}{۳y} \qquad (۲۰)$$

گام چهارم :معادله دیفرانسیل (۲۰) را حل می کنیم ، با روش تفکیک متغیر ها.

$$\int 3y\ dy = -\int 2x\ dx$$

$$\frac{3}{2}y^2 + x^2 = c_1. \qquad (21)$$

پس شماره (۲۱) معادله مسیر های عمودی دلخواه است.



کار برد دوم **رشد و تباهی**

در بسیاری از پدیده های طبیعی ، کمیّت ها نسبت به اندازه آنها ، رشد می کنند و یا رو به زوال می روند. مثلا اگر $y = y(t)$ تعداد جمعیت حیوانات و یا باکتری ها باشد ، پس منطقی است اگر انتظار داشته باشیم که میزان یا نرخ رشد یعنی $y'(t)$ متناسب با جمعیت $y(t)$ باشد ، یعنی

$$y'(t) = ky(t)$$

باشد. اینجا k یک عدد ثابت است.

بطور کلی ، اگر $y(t)$ مقدار یک کمیّت y در زمان t باشد و اگر میزان یا نرخ تغییر y نسبت به t متناسب با اندازه $y(t)$ در هر زمانی از t باشد ، پس

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad (۱)$$

است. معادله (۱) را **قانون رشد طبیعی** می گویند **اگر** $k > 0$ و **قانون زوال طبیعی** می گویند اگر $k < 0$ باشد . پس قانون رشد و تحلیل نمایی را می توان به صورت زیر نوشت.

$$y = ce^{kt}$$

اینجا c مقدار اولیه است و می توان آنرا از شرط اولیه $y(0) = y_0$ که در ابتدای مساله داده می شود ، پیدا کرد.

عدد k عدد ثابت تناسب است که در ابتدای مساله ممکن است به عنوان شرط اضافی داده شود.

فرض می کیم $y(t_0) = y_0$ باشد. معادله دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

تفکیک پذیر است و می توانیم آنرا حل کنیم.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky$$

$$\frac{dy}{y} = kdt$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdt$$

$$\ln y = kt + c$$

$$e^{\ln y} = e^{kt+c}$$

$$y = e^c e^{kt}$$

$$y = c_1 e^{kt};\ c_1 = \pm e^c$$

با استفاده از شرط اولیه داریم.

$$y_0 = c_1 e^0$$

$$y_0 = c_1$$

$$y = y_0 e^{kt}$$

برای پیدا کردن عدد ثابت k احتیاج به شرط اولیه دیگری داریم که ممکن است داده شود.

مثال ۱

یک نوع باکتری نسبت به تعداد موجود رشد می کند. اگر در مدت ۴ روز تعداد باکتری ها دو برابر شود ، مطلوب است مدت زمانی که تعداد باکتری ها ۱۰ برابر تعداد اولیه بشود.

حل

فرض می کنم $p(t)$ تعداد باکتری ها بعد از t روز باشد. توجه :معمولا حروفی را که انتخاب می کنیم ، دارای معنی هستند. مثلا اینجا p را برای تعداد جمعیت بکار بردیم ، زیراکلمه جمعیت در انگلیسی *Population* است. و t حرف اول کلمه *time* است یعنی وقت.

$$\frac{dp}{dt} = kp$$

شرط اولیه را بکار می بریم.

$$p(0) = p_0$$

برای پیدا کردن عدد ثابت c و k شرط اولیه را بکار می بریم.

$$p(۴) = ۲p_0$$

عبارت بالا یعنی چه؟ در صورت مساله گفته شد ، در مدت ۴ روز تعداد باکتری ها ۲ برابر می شود. این شرط اولیه بود. $p(۴)$ یعنی جمعیت روز چهارم. مساوی است با $۲p_0$ دو برابر جمعیت اولیه . دربالا ثابت کردیم که

$$y = y_0 e^{kt}$$

پس برای این مساله داریم.

$$p = ce^{kt}$$

بر اساس شرط اولیه $p(0) = p_0$ این یعنی $t = 0$ است و $p = p_0$ پس داریم

$$p_0 = ce^0$$
$$c = p_0$$

پس c را پیدا کردیم ، پس داریم.

$$p = p_0 e^{kt}$$

حالا باید k را پیدا کنیم. بر اساس شرط اضافی اولیه $p(۴) = ۲p_0$ یعنی $t = ۴$ است ، پس می توانیم k را پیدا کنیم.

$$2p_0 = p_0 e^{4k}$$

$$e^{4k} = 2$$

$$\ln\left(e^{4k}\right) = \ln 2$$

$$4k = \ln 2 \;\Rightarrow\; k = \frac{\ln 2}{4} \simeq 0.173$$

در نهایت زمان لازم برای ۱۰ برابر شدن جمعیت باکتری ها

$$10p_0 = p_0 e^{0.173t}$$

$$e^{0.173t} = 10$$

$$\ln\left(e^{0.173t}\right) = \ln 10$$

$$t = \frac{\ln 10}{0.173}$$
$$t \simeq 13.31$$

روز لازم است.

مثال ۲

جمعیت دنیا در سال ۱۹۵۰ بالغ بر ۲۵۶۰ میلیون و در سال ۱۹۶۰ بالغ بر ۳۰۴۰ میلیون بود ، و فرض کنید روشد جمعیت متناسب به اندازه جمعیت باشد ، مطلوب است نرخ رشد k
با استفاده از اطلاعات داده شده جمعیت در سال ۱۹۹۳ و ۲۰۲۰ را بطور تقریب بدست آورید.

حل

جمعیت $p(t)$ به میلیون حساب می کنیم.

$$\frac{dp}{dt} = kp$$
$$p = ce^{kt}$$

شرط اولیه داریم.

$$p(t_0) = p_0$$
$$p(0) = ۲۵۶۰$$

پس می توانیم c را پیدا کنیم.

$$p = ce^{kt}$$

$$p(0) = ce^0$$
$$c = ۲۵۶۰$$

حالا k را پیدا می کنیم.

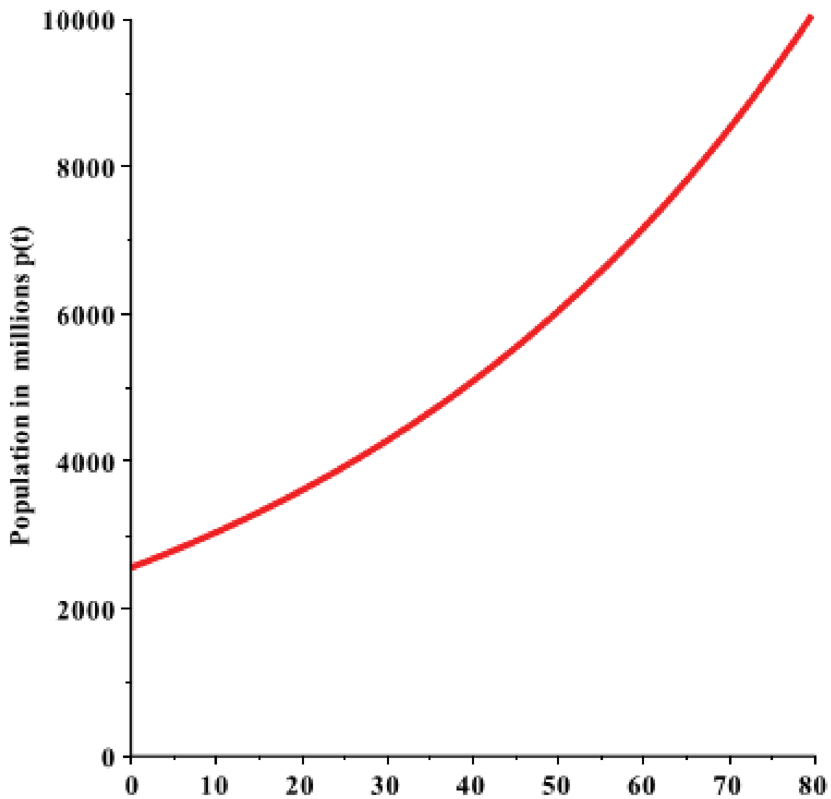
$$p(۱۰) = ۳۰۴۰$$
$$p = ce^{kt}$$
$$۳۰۴۰ = ۲۵۶۰ e^{۱۰k}$$
$$e^{۱۰k} = \frac{۳۰۴۰}{۲۵۶۰}$$
$$\ln\left(e^{10k}\right) = \ln 1.1875$$
$$10k = \ln 1.1875 \ \Rightarrow \ k = \frac{\ln 1.1875}{10} \simeq 0.01785.$$
$$p(t) = 2560e^{0.017185t}.$$

پس جمعیت در سال ۱۹۹۳ تقریبا مطابق زیر بدست می آید.

$$p(43) = 2560e^{0.017185(43)} \simeq 5360$$

و جمعیت در سال ۲۰۲۰ تقریبا

$$p(70) = 2560e^{0.017185(70)} \simeq 8524$$



مثال ۳

مقدار ۱۰۰ میلی گرم ازیک ماده رادیو اکتیو وجود دارد. بعد از ۲ سال مقدار ۷۵ میلی گرم از آن باقی مانده است. فرمولی برای مقدار این ماده در هر زمان پیدا کنید. نیمه عمر این ماده رامحاسبه کنید.

حل

مقدار موجود از ماده در هر زمان

$$\frac{dy}{dt} = ky$$
$$y = ce^{kt}$$

شرط اولیه داریم

$$y(t_0) = y_0$$
$$y(0) = ۱۰۰$$

پس می توانیم عدد ثابت c را پیدا کنیم.

$$y = ce^{kt} \ \Rightarrow \ y(0) = ce^0 \ \Rightarrow \ 100 = c.$$

$$y = 100e^{kt}$$

حالا عدد ثابت k را پیدا می کنیم.

$$y(2) = 75.$$
$$75 = 100e^{2k}$$
$$e^{2k} = \frac{75}{100}$$
$$\ln\left(e^{10k}\right) = \ln 0.75$$
$$2k = \ln 0.75 \;\Rightarrow\; k = \frac{\ln 0.75}{2} \simeq -0.1438.$$

پس داریم.

$$y(t) = 100e^{-0.1438t}.$$
$$y(t) = 100e^{-0.1438t},$$

از معادله آخر نیمه عمر این ماده یعنی $y = ۵۰$ میلی گرم را پیدا می کنیم.

$$50 = 100e^{-0.1438t}$$
$$e^{-0.1438t} = 0.5$$
$$\ln e^{-0.1438t} = \ln 0.5$$
$$-0.1438t = \ln 0.5$$
$$t = \frac{\ln 0.5}{-0.1438} \simeq 4.82 \text{ years.}$$

بخش ۲.۴ معادله های دیفرانسیل کامل Exact Differential Equations

یک معادله دیفرانسیل به صورت

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

یک معادله دیفرانسیل کامل می نامند اگر یک تابع دو متقیری $u(x,y)$ وجود داشته باشد با مشتق های پاره ای بطوری که داشته باشیم.

$$du(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

در این صورت ، جواب کلی یک معادله کامل ، مطابق زیر است.

$$u(x,y) = C$$

اینجا C یک عدد ثابت اختیاری است.

تست کامل بودن

فرض کنید تابع های $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ مشتق های پاره ای پیوسته در یک دامنه D داشته باشند. معادله دیفرانسیل $P(x,y) + Q(x,y)d = 0$ کامل است اگر و فقط اگر داشته باشیم

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

مراحل حل یک معادله دیفرانسیل کامل

۱ ـ ابتدا لازم است مطمئن شوید که معادله دیفرانسیل ، کامل است ، یعنی امتحان کنید آیا رابطه زیر بر قرار است.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

۲ ـ سپس سیستم دو معادله دیفرانسیل می نویسیم که تابع $u(x,y)$ تعریف می کند.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases}$$

۳ ـ معادله اول را نسبت به x انتگرال می گیریم. بجای عدد ثابت C یک تابع نا شناخته y می نویسیم.

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y)$$

۴ ـ نسبت به y مشتق می گیریم ، تابع $u(x,y)$ را در معادله دوم جانشین می کنیم.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\int P(x,y) + \varphi(y)\right] = Q(x,y)$$

از اینجا یک عبارت برای مشتق تابع نا شناخته $\varphi(y)$ پیدا می کنیم.

$$\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)\,dx\right)$$

۵ ـ با انتگرال گرفتن عبارت آخر ، تابع $\varphi(y)$ را پیدا می کنیم ، و لذا تابع $u(x,y)$

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx+\varphi(y)$$

۶ - جواب کلی معادله دیفرانسیل مطابق زیر بدست می آید.

$$u(x,y)=C$$

توجه :در کتب مختلف برای نماد های u و φ نماد های دیگر مانند ψ یا ϕ ممکن است بکار برند.

مثال ۱

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$۲xydx+\left(x^۲+۳y^۲\right)dy=0$$

حل

این معادله دیفرانسیل کامل است زیرا مشتق های پاره ای مساوی هستند.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^۲+۳y^۲\right)=۲x\ ,\qquad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(۲xy)=۲x$$

پس سیستم معادلات دیفرانسیل زیر را داریم تا تابع $u(x,y)$ را پیدا کنیم.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=۲xy\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=x^۲+۳y^۲\end{cases}$$

از معادله اول بر حسب x انتگرال می گیریم.

$$u(x,y)=\int ۲xy\,dx=x^۲y+\varphi(y)$$

ملاحظه می کنید که بجای C جمله $\varphi(y)$ گذاشتیم. حالا این عبارت که برای $u(x,y)$ بدست آوردیم در معادله دوم می گذاریم. پس داریم.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[x^۲y+\varphi(y)\right]=x^۲+۳y^۲\Rightarrow\ x^۲+\varphi'(y)=x^۲+۳y^۲$$

پس

$$\varphi'(y)=۳y^۲$$

با انتگرال گرفتن از این آخرین معادله ، تابع نا شناخته $\varphi(y)$ را پیدا می کنیم.

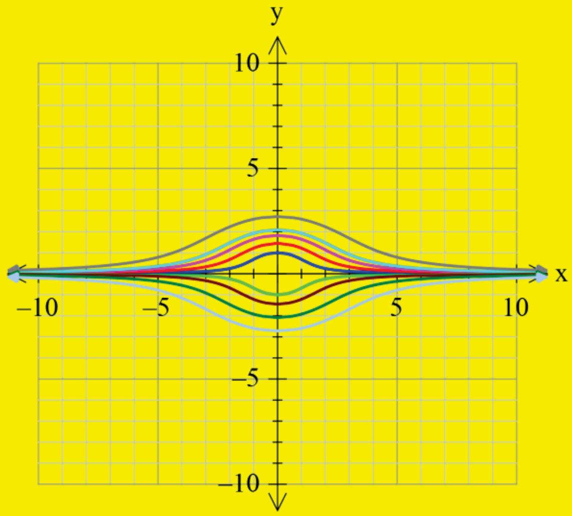
$$\varphi(y)=\int ۳y^۲dy=y^۳$$

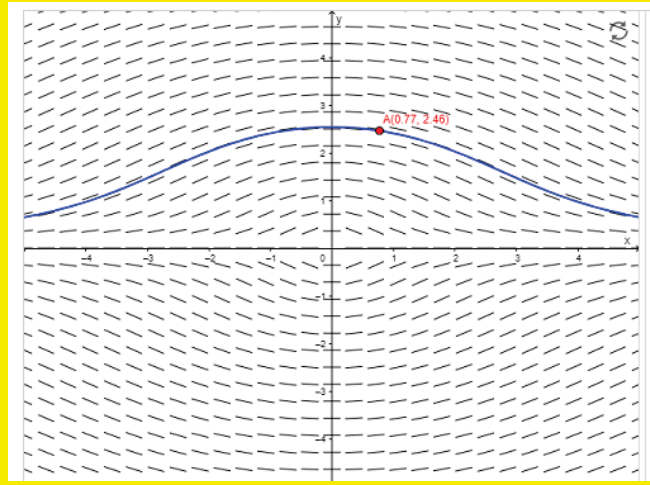
پس جواب کلی معادله دیفرانسیل کامل داده شده ، مطابق زیر است.

$$x^۲y+y^۳=C$$

اینجا C یک عدد ثابت اختیاری است.

در ذیل میدان راستا و نمودار جواب برای چند مقدار مختلف C





مثال ۲

معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$\left(۶x^{۲} - y + ۳\right)dx + \left(۳y^{۲} - x - ۲\right)dy = 0$$

حل

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(۳y^{۲} - x - ۲\right) = -۱ \quad ، \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(۶x^{۲} - y + ۳\right) = -۱$$

پس معادله دیفرانسیل داده شده ، کامل است. یک سیستم معادله ها می نویسیم تا $u(x, y)$ مشخص شود.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) = ۶x^{۲} - y + ۳ \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) = ۳y^{۲} - x - ۲ \end{cases}$$

از معادله اول بر حسب x انتگرال می گیریم و فرض می کنیم y یک عدد ثابت است.

$$u(x, y) = \int \left(۶x^{۲} - y + ۳\right)\, dx = \frac{۶x^{۳}}{۳} - xy + ۳x + \varphi(y)$$

$$= ۲x^{۳} - xy + ۳x + \varphi(y)$$

بجای C یک تابع پیوسته مشتق پذیر اختراع کردیم.

حالا این معادله را در معادله دوم سیستم بالا می گذاریم.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(۲x^{۳} - xy + ۳x + \varphi(y)\right) = -x + \varphi'^{(y)} = ۳y^{۲} - x - ۲$$

پس یک معادله برای $\varphi'(y)$ پیدا کردیم.

$$\varphi'(y) = ۳y^{۲} - ۲$$

حالا از معادله بالا انتگرال می گیریم.

$$\varphi(y) = \int \left(۳x^{۲} - ۲\right)\, dy = y^{۳} - ۲y$$

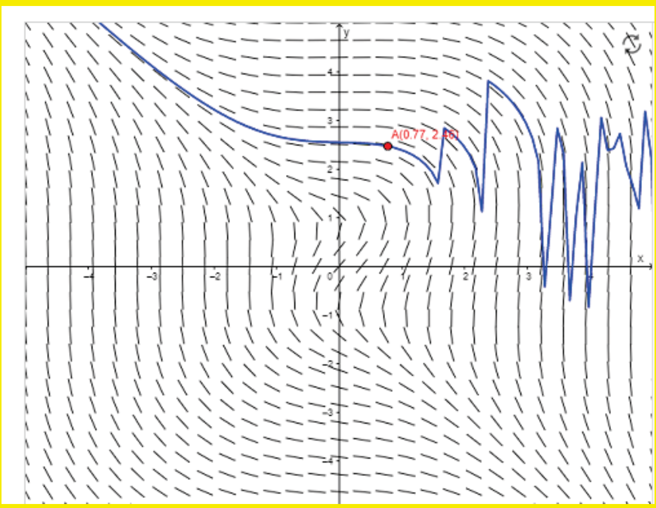
پس تابع $u(x,y)$ مطابق زیر است.

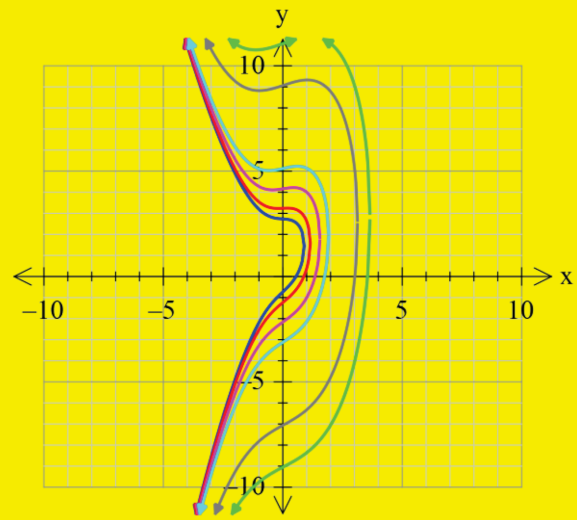
$$u(x,y) = ۲x^{۳} - xy + ۳x + y^{۳} - ۲y = C$$

لذا جواب کلی معادله دیفرانسیل داده شده ، مطابق زیر است.

$$۲x^{۳} - xy + ۳x + y^{۳} - ۲y = C$$

این هم میدان راستا و نمودار جواب با چند مقدار مختلف C





مثال ۳

در این مثال بجای نماد u نماد ψ بکار می بریم.

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$۲xy - ۹x^{۲} + \left(۲y + x^{۲} + ۱\right)\frac{dy}{dx} = 0 \quad ، \quad y(0) = -۳$$

حل

اینجا نماد های M و N بجای نماد های P و Q بکار می بریم.

$$M = ۲xy - ۹x^{۲} \quad , \qquad M_y = ۲x$$

$$N = ۲y + x^{۲} + ۱ \quad ، \qquad N_x = ۲x$$

چون

$$M_y = N_x = ۲x$$

پس این معادله دیفرانسیل ، کامل است. باز ملاحظه می کنید بجای $\frac{\partial P}{\partial y}$ نماد M_y و بجای $\frac{\partial Q}{\partial x}$ نماد N_x بکار بردیم.

حالا بجای $u(x,y)$ از نماد $\psi(x,y)$ استفاده می کنیم. پس باید $\psi(x,y)$ را پیدا کنیم.

$$\psi_x = M$$

$$\psi_y = N$$

در مثال های ۱ و ۲ یک سیستم معادلات تشکیل دادیم و انتگرال یکی را گرفتیم در دیگری گذاشتیم. ، اینجا هم هر کدام را که دلمان بخواهد انتگرال می گیریم.

$$\psi = \int M\,dx \quad \text{یا} \quad \psi = \int N\,dy$$

اما باید آنرا که آسان تر است انتخاب کنیم. پس اولی را انتخاب می کنیم.

$$\psi(x,y) = \int \left(۲xy - ۹x^{۲}\right) dx = x^{۲}y - ۳x^{۳} + h(y)$$

همانطور که ملاحظه می کنید بجای $\varphi(y)$ از نماد $h(y)$ استفاده کردیم. یعنی بجای عدد ثابت C یک تابع $h(y)$ بکار بردیم.

حالا باید $h(y)$ را پیدا کنیم. کار مشکلی نیست. $\psi_x = M$ را بکار بردیم تا بیشترین قسمت $\psi(x,y)$ را بدست آوریم. پس $\psi_y = N$ را بکار می بریم تا $h(y)$ را پیدا کنیم.

برای این کار از $\psi(x,y)$ نسبت به y مشتق می گیریم و آنرا مساوی N قرار می دهیم. زیرا در حقیقت مساوی هستند.

$$\psi_y = x^{۲} + h'(y) = ۲y + x^{۲} + ۱ = N$$

$$h'(y) = ۲y + ۱$$

حالا با انتگرال گرفتن از معادله بالا ، $h(y)$ پیدا می شود. توجه داشته باشید اگر $h'(y)$ شامل x باشد ، یک جایی اشتباه کرده ایم.

$$h(y) = \int ۲y + ۱\,dy = y^{۲} + K$$

پس حالا می توانیم $\psi(x,y)$ را بنویسیم.

$$\psi(x,y) = x^{۲}y - ۳x^{۳} + y^{۲} + y + K = y^{۲} + \left(x^{۲} + ۱\right)y - ۳x^{۳} + K$$

حالا باید تکلیف K را معین کنیم. چون K یک عدد اختیاری است ، پس می توانیم بجای آن $-C$ بنویسیم. پس داریم.

$$y^{۲} + \left(x^{۲} + ۱\right)y - ۳x^{۳} = C$$

حالا مقدار اولیه را در معادله بالا می گذاریم تا C پیدا شود.

$$\left(-۳\right)^{۲} + (0 + ۱)(-۳) - ۳(0)^{۳} = C$$

$$C = ۶$$

پس جواب تلویحی مطابق زیر است.

$$y^{۲} + \left(x^{۲} + ۱\right)y - ۳x^{۳} - ۶ = 0$$

معادله بالا ، یک معادله درجه دوم بر حسب y است. پس داریم.

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{-\left(x^2+1\right) \pm \sqrt{\left(x^2+1\right)^2 - 4(1)\left(-3x^3-6\right)}}{2(1)} \\ &= \frac{-\left(x^2+1\right) \pm \sqrt{x^4+12x^3+2x^2+25}}{2} \end{aligned}$$

مجددا ، مقدار اولیه را بکار می بریم. تا مشخص کنیم کدام $\pm$ صحیح است. مثبت یا منفی در جلو رادیکال

$$-3 = y(0) = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2} = -3,\ 2$$

پس علامت منفی صحیح است. لذا جواب صریح مطابق زیر است.

$$y(x) = \frac{-\left(x^2+1\right) - \sqrt{x^4 + 12x^3 + 2x^2 + 25}}{2}$$

حالا باید بازه معتبر را پیدا کنیم. می دانیم که رادیکال نباید منفی باشد. پس

$$x^4 + 12x^3 + 2x^2 + 25 = 0$$

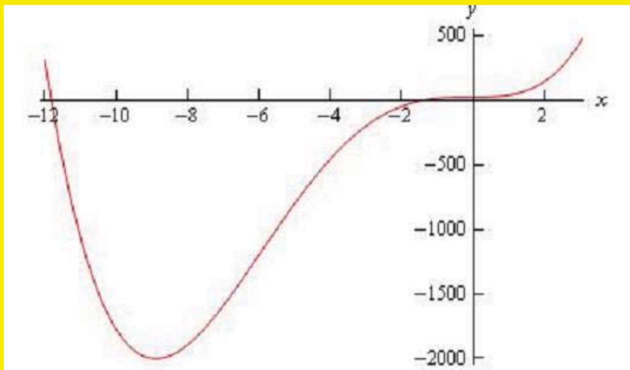
با استفاده از نرم افزار صفر های معادله بالا

$$x = -11.81557624$$

و

$$x = -1.396911133.$$

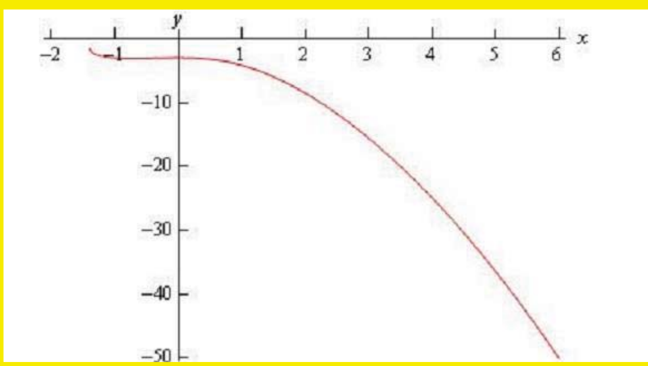
هستند.



با توجه به نمودار بالا ملاحظه می کنید که بازه معتبر مطابق زیر است.

$$-1.396911133 \le x < \infty$$

این هم نمودارصحیح



اگر بخاطر داشته باشید این معادله را در بخش معادله های تفکیک پذیر حل کردیم.

تمرینات بخش ۲.۴

معادله های دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$۱)\quad e^{y}dx+(۲y+xe^{y})dy=0$$

$$۲)\quad (۲xy-\sin x)dx+\left(x^{۲}-\cos y\right)dy=0$$

$$۳)\quad \left(۱+۲x\sqrt{x^{۲}-y^{۲}}\right)dx-۲y\sqrt{x^{۲}-y^{۲}}dy=0$$

$$۴)\quad \frac{۱}{y^{۲}}-\frac{۲}{x}=\frac{۲xy'}{y^{۳}}\quad ,\qquad y(۱)=۱$$

$$۵)\quad ۲xy^{۲}+۴=۲\left(۳-x^{۲}y\right)y'\quad ،\qquad y(-۱)=۸$$

$$۶)\quad \frac{۲ty}{t^{۲}+۱}-۲t-\left(۲-\ln\left(t^{۲}+۱\right)\right)y'=0\quad ،\qquad y(۵)=0$$

پاسخ تمرینات بخش ۲.۴

$$۱)\quad e^{y}dx+(۲y+xe^{y})dy=0$$

پاسخ

ابتدا چک می‌کنیم که آیا معادله دیفرانسیل داده شده ، کامل است یا نه.

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(۲y+xe^{y})=e^{y}\quad ،\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}=e^{y}$$

چون $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ است ، پس معادله ، کامل است. حالا باید تابع $u(x,y)$ را پیدا کنیم. برای این کار یک سیستم دو معادله ای تشکیل می دهیم.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^{y}\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=۲y+xe^{y}\end{cases}$$

پس

$$u(x,y)=\int P(x,y)dx=\int e^{y}\,dx=xe^{y}+\varphi(y)$$

حالا از عبارت بدست آمده بر حسب y مشتق می گیریم و آنرا مساوی $\frac{\partial u}{\partial y}$ یعنی معادله دوم دستگاه ، قرار می دهیم تا $\varphi'(y)$ بدست آید.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(xe^{y}+\varphi(y)\right)=۲y+xe^{y}$$

$$xe^{y}+\varphi'(y)=۲y+xe^{y}$$

$$\varphi'(y)=۲y$$

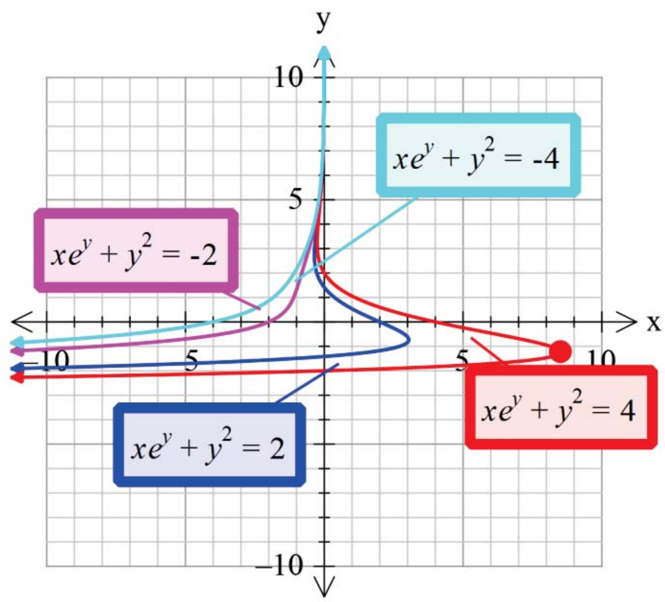
در نتیجه $\varphi(y)$ و تمام $u(x,y)$ را پیدا می کنیم.

$$\varphi(y) = \int \varphi'(y)dy = \int ۲y\,dy = y^۲$$

$$u(x,y) = xe^y + \varphi(y) = xe^y + y^۲$$

جواب کلی معادله دیفرانسیل ,مطابق زیر است.

$$xe^y + y^۲ = C$$



۲) $(۲xy - \sin x)dx + \left(x^۲ - \cos y\right)dy = 0$

پاسخ

معادله دیفرانسیل داده شده کامل است زیرا

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^۲ - \cos y\right) = ۲x = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(۲xy - \sin x) = ۲x$$

برای پیدا کردن $u(x,y)$ سیستم دو معادله ای زیر را تشکیل می دهیم.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = ۲xy - \sin x \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^۲ - \cos y \end{cases}$$

از معادله اول برحسب x انتگرال می گیریم. پس داریم.

$$u(x,y) = \int (۲xy - \sin x)dx = x^۲y + \cos x + \varphi(y)$$

عبارت بدست آمده را در معادله دوم می گذاریم.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^۲y + \cos x + \varphi(y)\right] = x^۲ - \cos y$$

$$x^۲ + \varphi'(y) = x^۲ - \cos y$$

$$\varphi'(y) = -\cos y$$

پس

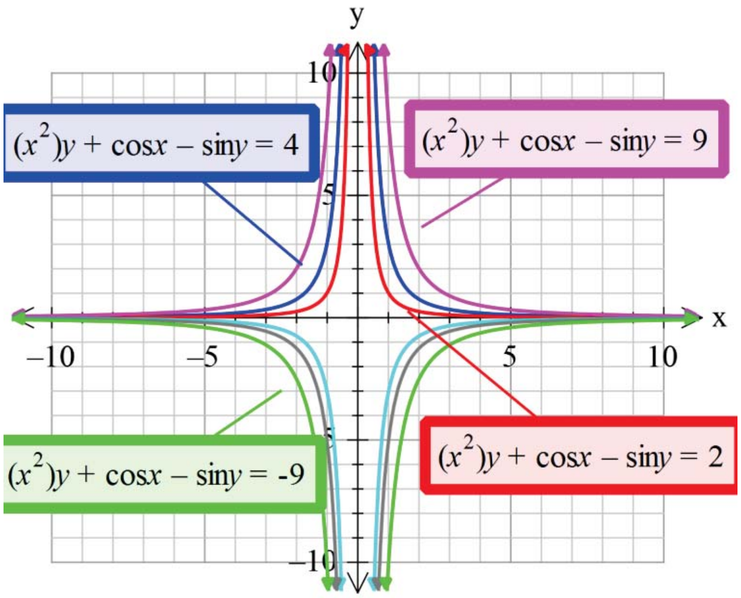
$$\varphi(y) = \int(-\cos y)dy = -\sin y$$

پس

$$u(x,y) = x^{۲}y + \cos x - \sin y$$

لذا جواب کلی معادله دیفرانسیل ، مطابق زیر است.

$$x^{۲}y + \cos x - \sin y = C$$



$$۳)\quad \left(۱ + ۲x\sqrt{x^{۲} - y^{۲}}\right)dx - ۲y\sqrt{x^{۲} - y^{۲}}dy = 0$$

پاسخ

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-۲y\sqrt{x^{۲} - y^{۲}}\right) = -۲y * \frac{۲x}{۲\sqrt{x^{۲} - y^{۲}}} = -\frac{۲xy}{\sqrt{x^{۲} - y^{y}}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(۱ + ۲x\sqrt{x^{۲} - y^{۲}}\right) = ۲x * \frac{(-۲y)}{۲\sqrt{x^{۲} - y^{۲}}} = -\frac{۲xy}{\sqrt{x^{۲} - y^{۲}}}$$

پس معادله دیفرانسیل داده شده ، کامل است.

حالا باید تابع $u(x,y)$ پیدا کنیم ، بطوری که سیستم معادله های زیر را بر قرار کند.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x} = ۱ + ۲x\sqrt{x^۲ - y^۲} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -۲y\sqrt{x^۲ - y^۲}\end{cases}$$

از معادله اول انتگرال می گیریم.

$$u(x,y) = \int \left(۱ + ۲x\sqrt{x^۲ - y^۲}\right)dx = x + \frac{\left(x^۲ - y^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}} + \varphi(y)$$

$$= x + \frac{۲}{۳}\left(x^۲ - y^۲\right)^{\frac{۳}{۲}} + \varphi(y)$$

همان طور که قبلا هم مکررا گفته شد $\varphi(y)$.یک تابع نا شناخته y است که بجای C بکار می بریم.
و باید این تابع نا شناخته را پید کنیم.
پس آخرین عبارت بدست آمده را در معادله دوم می گذاریم.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x + \frac{۲}{۳}\left(x^۲ - y^۲\right)^{\frac{۳}{۲}} + \varphi(y)\right] = -۲y\sqrt{x^۲ - y^۲}$$

$$-۲y\sqrt{x^۲ - y^۲} + \varphi'(y) = -۲y\sqrt{x^۲ - y^۲}$$

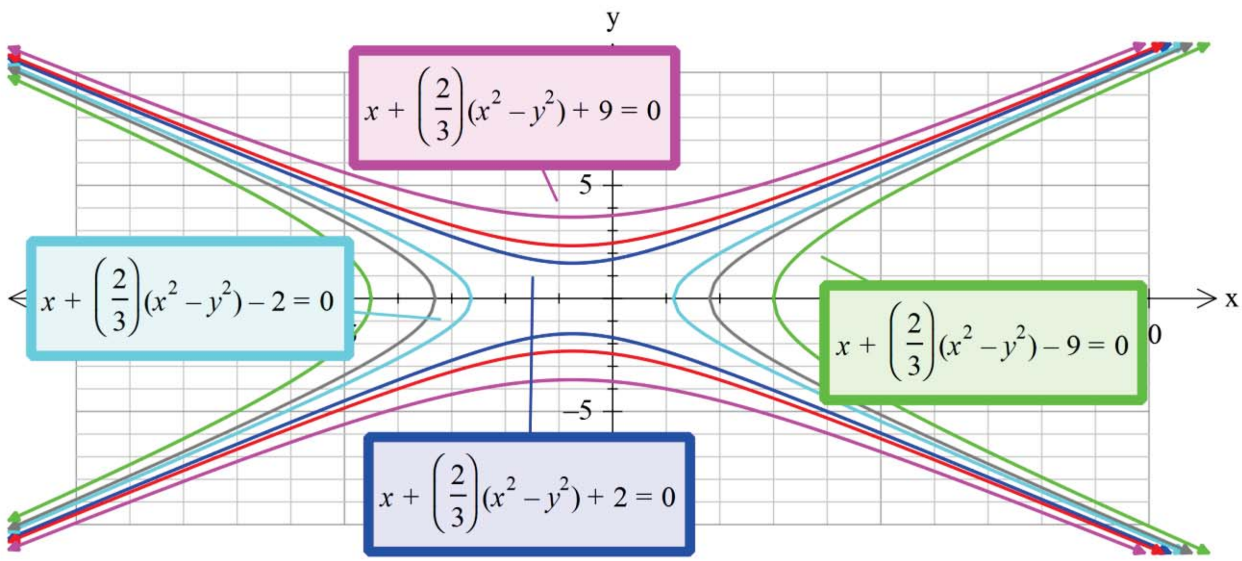
$$\varphi'(y) = 0$$

از عبارت آخری ، انتگرال می گیریم.

$$\varphi(y) = C$$

پس جواب کلی معادله دیفرانسیل داده شده ، مطابق زیر است.

$$x + \frac{۲}{۳}\left(x^۲ - y^۲\right)^{\frac{۳}{۲}} + C = 0$$



۴) $\frac{۱}{y^۲}-\frac{۲}{x}=\frac{۲xy'}{y^۳}\quad,\quad y(۱)=۱$

پاسخ

$$\frac{۱}{y^۲}-\frac{۲}{x}=\frac{۲x}{y^۳}\frac{dy}{dx}$$
$$\left(\frac{۱}{y^۲}-\frac{۲}{x}\right)dx=\frac{۲x}{y^۳}dy$$
$$\left(\frac{۱}{y^۲}-\frac{۲}{x}\right)dx-\frac{۲x}{y^۳}dy=0$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{۲x}{y^۳}\right)=-\frac{۲}{y^۳}\quad,\quad\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{۱}{y^۲}-\frac{۲}{x}\right)=-\frac{۲}{y^۳}$$

پس معادله دیفرانسیل داده شده ، کامل است. پس می توانیم سیستم معادله های زیر را بنویسیم ,تا تابع $u(x,y)$ را پیدا کنیم.

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{۱}{y^۲}-\frac{۲}{x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{۲x}{y^۳}\end{cases}$$

تا بحال ، از معادله اول انتگرال می گرفتیم. اینجا ، بهتر است از معادله دوم برحسب y انتگرال بگیریم.

$$u(x,y)=\int\left(-\frac{۲x}{y^{۳}}\right)dy=\frac{x}{y^{۲}}+\varphi(x)$$

حالا از این عبارت بر حسب x مشتق می گیریم.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{y^{۲}}-\varphi(x)\right]=\frac{۱}{y^{۲}}-\frac{۲}{x}$$

$$\frac{۱}{y^{۲}}+\varphi'(x)=\frac{۱}{y^{۲}}-\frac{۲}{x}$$

$$\varphi'(x)=-\frac{۲}{x}$$

از عبارت آخر انتگرال می گیریم.

$$\varphi(x)=\int-\frac{۲}{x}dx=-۲\ln|x|=\ln\frac{۱}{x^{۲}}$$

پس جواب کلی معادله دیفرانسیل ، مطابق زیر است.

$$\frac{x}{y^{۲}}+\ln\frac{۱}{x^{۲}}=C$$

جواب مخصوص با استفاده از شرط اولیه بدست می آوریم.

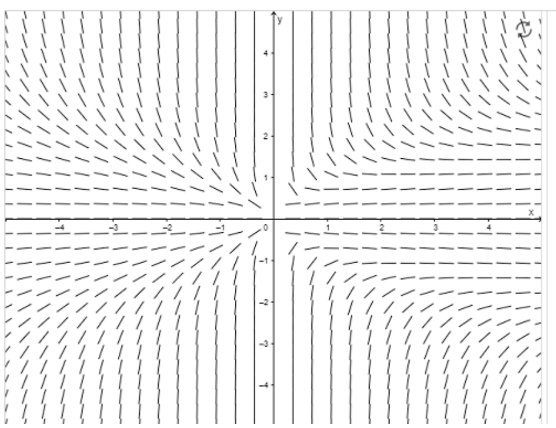
$$\frac{۱}{۱^{۲}}+\ln\frac{۱}{۱^{۲}}=C$$

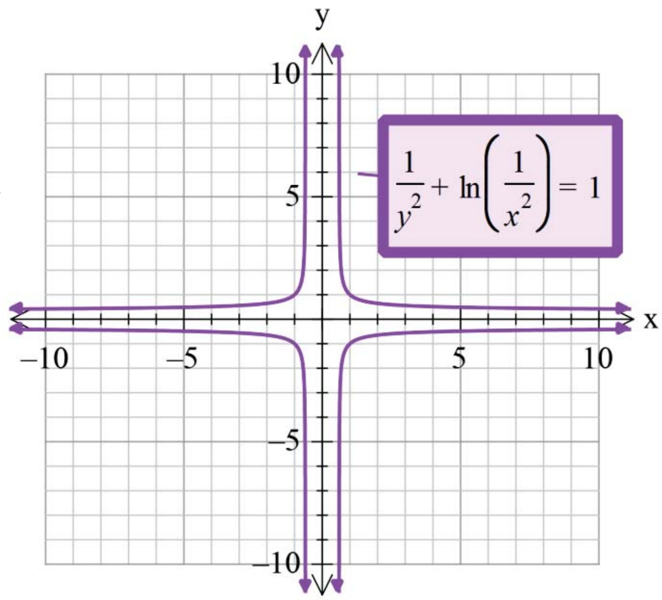
$$C=۱$$

پس جواب مساله با شرط اولیه مطابق زیر است.

$$\frac{۱}{y^{۲}}+\ln\frac{۱}{x^{۲}}=۱$$

ملاحظه می کنید که میدان راستا با جواب مخصوص مطابقت دارد.





پاسخ تمرینات زیر با نماد های متفاوت نسبت به بالا داده شده است تا عزیزان با نماد های مختلف آشنا شوند.

$$۵)\quad ۲xy^{۲} + ۴ = ۲\left(۳ - x^{۲}y\right)y' \quad ، \quad y(-۱) = ۸$$

پاسخ

قبل از هر کار ، باید معادله دیفرانسیل را به صورت استاندارد بنویسیم.یعنی سمت راست باید صفر باشد و بین دو جمله علامت $+$ باشد.

$$2xy^2 + 4 - 2\left(3 - x^2y\right)y' = 0$$
$$2xy^2 + 4 + 2\left(x^2y - 3\right)y' = 0$$

پس داریم.

$$M = 2xy^2 + 4 \qquad M_y = 4xy$$
$$N = 2x^2y - 6 \qquad N_x = 4xy$$

پس معادله دیفرانسیل ، کامل است. می توانیم M را بر حسب x انتگرال بگیریم ، و یا N را بر حسب y اینجا فرقی ندارد ، پس N را انتگرال می گیریم.

$$\Psi(x, y) = \int 2x^2y - 6\,dy = x^2y^2 - 6y + h(x)$$

ملاحظه می کنید که عدد ثابت انتگرال باید تابع x باشد ، چون بر حسب y انتگرال گرفتیم. حالا عبارت بدست آمده را بر حسب x مشتق می گیریم و آنرا مساوی M قرار می دهیم.

$$\Psi_x = 2xy^2 + h'(x) = 2xy^2 + 4 = M$$

پس داریم.

$$h'(x) = 4 \quad \Rightarrow \quad h(x) = 4x$$

پس ψ پیدا کردیم.

$$\Psi(x,y) = x^2y^2 - 6y + 4x$$

و در نهایت جواب تلویحی این معادله دیفرانسیل مطابق زیر است.

$$x^2y^2 - 6y + 4x = c$$

با بکار بردن شرط اولیه داریم

$$64 - 48 - 4 = c \quad c = 12$$

لذا جواب مطابق زیر است.

$$x^2y^2 - 6y + 4x - 12 = 0$$

با استفاده از فرمول درجه دوم داریم.

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4x^2(4x-12)}}{2x^2} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 48x^2 - 16x^3}}{2x^2} \\ &= \frac{6 \pm 2\sqrt{9 + 12x^2 - 4x^3}}{2x^2} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 12x^2 - 4x^3}}{x^2} \end{aligned}$$

شرط اولیه را مجددا بکار می بریم. پس ملاحظه می شود که علامت + صحیح است. لذا جواب صریح معادله مطابق زیر است.

$$y(x) = \frac{3 + \sqrt{9 + 12x^2 - 4x^3}}{x^2}$$

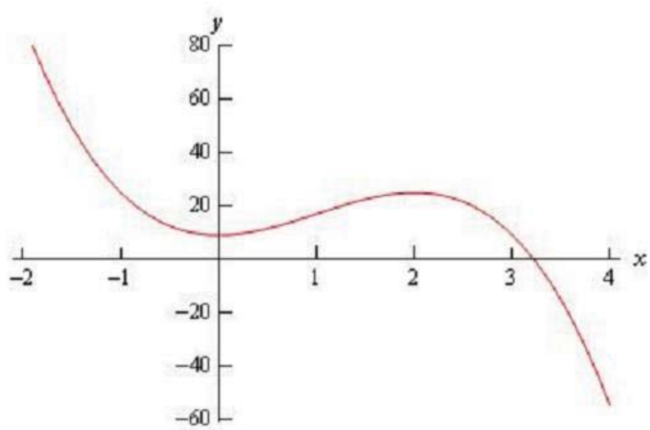
حالا بازه معتبر را پیدا می کنیم. می دانیم که عبارت زیر رادیکال نباید منفی باشد.

$$-4x^3 + 12x^2 + 9 = 0$$

تنها جواب حقیقی این رادیکا ل

$$x = 3.217361577.$$

در زیر ، نمودار چند جمله ای را ملاحظه می کنید.



در تصویر بالا ، به نظر می رسد که چند جمله ای در بازه زیر مثبت است و ممکن است نتیجه بگیریم که این بازه معتبر است.

$$-\infty < x < 3.217361577$$

اما این بازه نمی تواند بازه معتبر باشد ، زیرا شامل صفر هم هست ، و باید از صفر هم دوری کنیم. پس پس این بازه را باید به دو بازه زیر ، تقسیم کنیم.

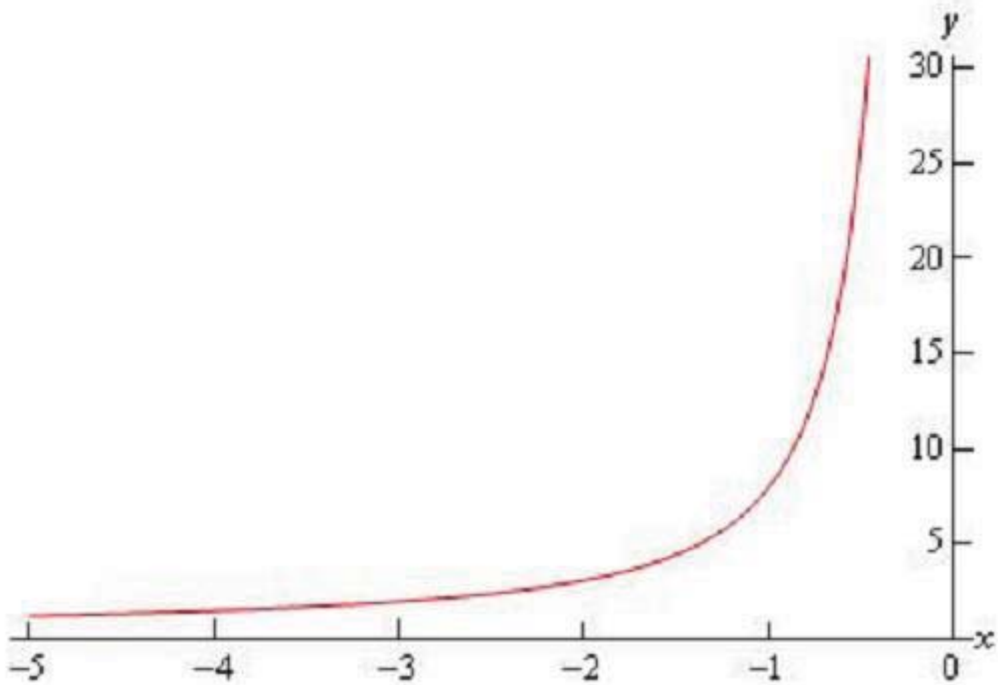
$$-\infty < x < 0$$

$$0 < x < 3.217361577$$

بازه اول ، شامل $x = -۱$ است ، یعنی مقدار شرط اولیه ، پس بازه معتبر ، بازه زیر است.

$$-\infty < x < 0.$$

و لذا نمودار زیر ، نمودار جواب است.



$$۶)\quad \frac{۲ty}{t^{۲}+۱} - ۲t - \left(۲ - \ln\left(t^{۲}+۱\right)\right)y' = 0 \quad ، \quad y(۵) = 0$$

پاسخ

ابتدا مشکل نماد منفی بین M و N را به طریق زیر حل می کنیم. یعنی باید داشته باشیم

$$M + Ny' = 0$$

پس داریم

$$\frac{2ty}{t^2+1} - 2t + \left(\ln\left(t^2+1\right) - 2\right)y' = 0$$

حالا داریم.

$$M = \frac{2ty}{t^2+1} - 2t \qquad M_y = \frac{2t}{t^2+1}$$
$$N = \ln(t^2+1) - 2 \qquad N_t = \frac{2t}{t^2+1}$$

پس نتیجه می گیریم که این معادله دیفرانسیل ، کامل است. از اولی ، انتگرال می گیریم.

$$\Psi(t,y) = \int \frac{2ty}{t^2+1} - 2t\,dt = y\ln(t^2+1) - t^2 + h(y)$$

حالا از رابطه بدست آمده بر حسب y مشتق می گیریم و با N مقایسه می کنیم.

$$\Psi_y = \ln(t^2+1) + h'(y) = \ln(t^2+1) - 2 = N$$

پس داریم.

$$h'(y) = -2 \qquad \Rightarrow \qquad h(y) = -2y$$

و لذا

$$\Psi(t,y) = y\ln(t^2+1) - t^2 - 2y$$

پس جواب تلویحی مطابق زیر است.

$$y\ln(t^2+1) - t^2 - 2y = c$$

مقدار اولیه را بکار می بریم.

$$-25 = c$$

حالا جواب تلویحی به صورت زیر است.

$$y\left(\ln(t^2+1) - 2\right) - t^2 = -25$$

این هم جواب صریح.

$$y(t) = \frac{t^2-25}{\ln(t^2+1) - 2}$$

حالا می خواهیم بازه معتبر را پیدا کنیم. لگاریتم بالا همیشه مثبت است ، پس نگرانی از این بابت نداریم.
باید نگران تقسیم بر صفر باشیم. پس باید از نقاط زیر دوری کنیم.

$$\ln(t^2+1) - 2 = 0$$
$$\ln(t^2+1) = 2$$
$$t^2+1 = e^2$$
$$t = \pm\sqrt{e^2-1}$$

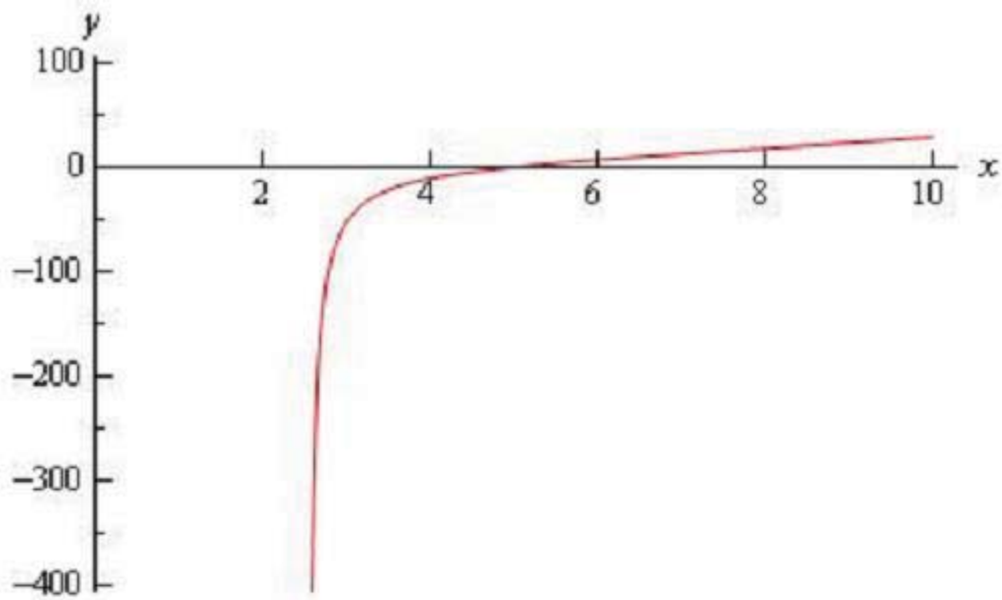
حالا سه بازه محتمل داریم.

$$-\infty < t < -\sqrt{e^2-1}$$
$$-\sqrt{e^2-1} < t < \sqrt{e^2-1}$$
$$\sqrt{e^2-1} < t < \infty$$

بازه آخر ، شامل $t = ۵$ است ، پس این بازه ، معتبر است.

$$\sqrt{e^2 - 1} < t < \infty$$

این هم نمودار.



معادله های دیفرانسیل برنولی Bernoulli Differential Equations

در این بخش ، نگاهی به معادله های به شکل زیر ، می کنیم.

$$y' + p(x)y = q(x)y^n$$

اینجا $p(x)$ و $q(x)$ تابع های پیوسته در بازه ای که روی آن کار می کنیم ، هستند و n یک عدد حقیقی است. معادله های به این شکل را **معادله های برنولی** می گویند.

متوجه هستید که اگر $n = 0$ یا $n = ۱$ باشد ، پس معادله ، خطی است و می دانیم که چگونه آنرا حل کنیم. پس در این بخش ، معادله هایی را مورد بحث قرار می دهیم که مقدار n غیر از صفر و یا یک باشد.

برای حل آن نوع معادله ها ، ابتدا معادله دیفرانسیل را بر y^n تقسیم می کنیم. تا معادله زیر بدست آید.

$$y^{-n}y' + p(x)y^{۱-n} = q(x)$$

حالا این جانشینی را انجام می دهیم. یعنی ضریب $p(x)$ را به v تبدیل می کنیم.

$$v = y^{۱-n}$$

تا معادله را به معادله دیفرانسیل بر حسب v تبدیل کنیم. این کار منجر به معادله دیفرانسیلی می شود که می توانیم حل کنیم.

اما باید در مورد y' مواظب باشیم. باید مشخص کنیم y' چیست. تنها کاری که باید انجام دهیم ، این است که طرفین عبارت جانشین ، بر حسب x مشتق بگیریم. توجه داشته باشید که هم y و هم v تابع های x هستند ، پس لازم است قاعده زنجیره ای را روی قسمت سمت راست اعمال کنیم. این یعنی مشتق ضمنی بگیریم. پس با مشتق گرفتن از $v = y^{۱-n}$ داریم.

$$v' = (۱-n)y^{-n}y'$$

حالا با وارد کردن عبارت بالا ، و همچنین جانشین ، معادله زیر را خواهیم داشت.

$$\frac{۱}{۱-n}v' + p(x)v = q(x)$$

معادله بدست آمده بالا ، یک معادله دیفرانسیل خطی است ، که می توانیم آنرا برای v حل کنیم ، و سپس با برگشت جانشین ، می توانیم معادله دیفرابسیل اولیه را بدست آوریم و آنرا حل کنیم.

اجازه دهید یک مثال بیاوریم.

مثال ۱

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید و بازه معتبر برای جواب را پیدا کنید.

$$y' + \frac{۴}{x}y = x^۳y^۲ \quad ، \quad y(۲) = -۱ \;,\; x > 0$$

حل

اولین کاری که باید انجام دهیم ، این است که آنرا به صورت **مناسب** بنویسیم. این یعنی طرفین را بر $y^۲$ تقسیم کنیم.

$$y^{-۲}y' + \frac{۴}{x}y^{-۱} = x^۳$$

جانشینی و مشتق گیری که باید انجام دهیم مطابق زیر است.

$$v = y^{-۱} \qquad v' = -y^{-۲}y'$$

با این جانشینی ، معادله دیفرانسیل به صورت زیر تبدیل می شود.

$$-v' + \frac{۴}{x}v = x^{۳}$$

یک معادله دیفرانسیل خطی بدست آوردیم ، که میدانیم چگونه باید آنرا حل کرد.

$$v' - \frac{۴}{x}v = -x^{۳}$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{۴}{x}dx} = e^{-۴\ln|x|} = x^{-۴}$$

$$\int \left(x^{-۴}v\right)' dx = \int -x^{-۱}dx$$

$$x^{-۴}v = -\ln|x| + c$$

$$v(x) = cx^{۴} - x^{۴}\ln x$$

ملاحظه می کنید که قدر مطلق را حذف کردیم ، زیر در فرض مساله گفته شده $x > 0$

حالا باید در مورد عدد ثابت انتگرال تصمیم بگیریم. ، همچنین باید y را پیدا کنیم. پس جانشینی را بر می گردانیم و سپس مقدار اولیه را بکار می بریم.

$$y^{-۱} = x^{۴}(c - \ln x)$$

حالا می توانیم معادله بدست آمده بالا را برای y حل کنیم و سپس مقدار اولیه را بکار بریم و یا ابتدا مقدار اولیه را بکار بریم و سپس معادله بالا را برای y حل کنیم.

پس اجازه دهید ، مقدار اولیه را بکار بریم و c را پیدا کنیم.

$$(-۱)^{-۱} = c۲^{۴} - ۲^{۴}\ln ۲$$

$$c = \ln ۲ - \frac{۱}{۱۶}$$

حالا c را در معادله می گذاریم و آنرا برای y حل می کنیم.

$$y(x) = \frac{1}{x^4\left(\ln 2 - \frac{1}{16} - \ln x\right)} = \frac{-16}{x^4\left(1 + 16\ln x - 16\ln 2\right)} = \frac{-16}{x^4\left(1 + 16\ln\frac{x}{2}\right)}$$

ملاحظه می کنید برای بدست آوردن جواب بالا ، کمی عملیات جبری انجام داده ایم.

قبل از پیدا کردن بازه معتبر ، اجازه دهید مقدار اولیه را برای v بکار بریم. یعنی برای

$$v = y^{-۱}$$

$$v(x) = y^{-۱}(x)$$

$$v(۲) = y^{-۱}(۲) = (-۱)^{-۱} = -۱$$

پس ملاحظه می کنید که همان مقدار اولیه رابرای v پیدا کردیم که برای y بود. اما نباید انتظار داشته باشید که همیشه این چنین است.

خوب ، حالا بازه معتبر را پیدا می کنیم. می دانیم که $x > 0$ است. این یعنی نگران لگاریتم صفر و تقسیم برصفر در $x = 0$ نیستیم. اما باید نگران صفر شدن جمله دوم باشیم. یعنی

$$۱ + ۱۶ \ln \frac{x}{۲} = 0$$

$$\ln \frac{x}{۲} = -\frac{۱}{۱۶}$$

$$\frac{x}{۲} = e^{-\frac{۱}{۱۶}}$$

$$x = 2e^{-\frac{1}{16}} \approx 1.8788$$

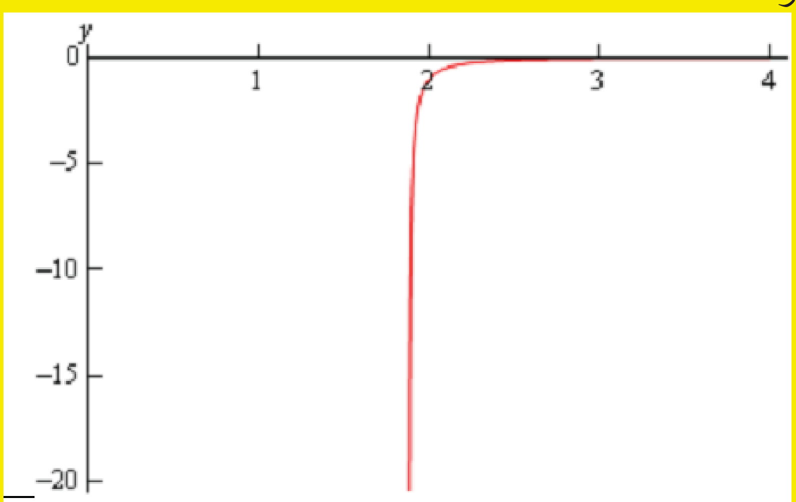
پس دو بازه معتبر احتمالی می توانند دو بازه زیر باشند،

$$0 < x < 2e^{-\frac{1}{16}} \qquad 2e^{-\frac{1}{16}} < x < \infty$$

چون ، بازه دوم شامل مقدار اولیه است ، پس بازه معتبر

$$2e^{-\frac{1}{16}} < x < \infty .$$

است. این هم نمودار



مثال ۲

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$y' = ۵y + e^{-۲x}y^{-۲} \qquad y(0) = ۲$$

حل

اولین کاری که باید انجام دهیم این است که طرفین معادله را در $y^{۲}$ ضرب کنیم. همچنین کمی تغیرات انجام دهیم, تا معادله به صورت معادله دیفرانسیل خطی بشود.

$$y^{۲}y' - ۵y^{۳} = e^{-۲x}$$

جانشین مطابق زیر است.

$$v = y^{۳} \qquad v' = ۳y^{۲}y'$$

حالا عمل جانشینی را انجام می دهیم.

$$\frac{۱}{۳}v' - ۵v = e^{-۲x}$$

$$v' - ۱۵v = ۳e^{-۲x}$$

معادله خطی بدست آوردیم و ضریب انتگرال گیری هم مطابق زیر است.

$$\mu(x) = e^{-۱۵x}$$

با کمی تغییر و بکار بردن ضریب انتگرال گیری و حل معادله دیفرانسیل بدست آمده ، داریم.

$$v(x) = ce^{۱۵x} - \frac{۳}{۱۷}e^{-۲x}$$

در ابتدای حل مساله ، فرض کردیم $v = y^{۳}$ پس حالا جانشینی را بر می‌گردانیم. پس داریم.

$$y^{۳} = ce^{۱۵x} - \frac{۳}{۱۷}e^{-۲x}$$

مقدار اولیه را بکار می بریم. پس داریم.

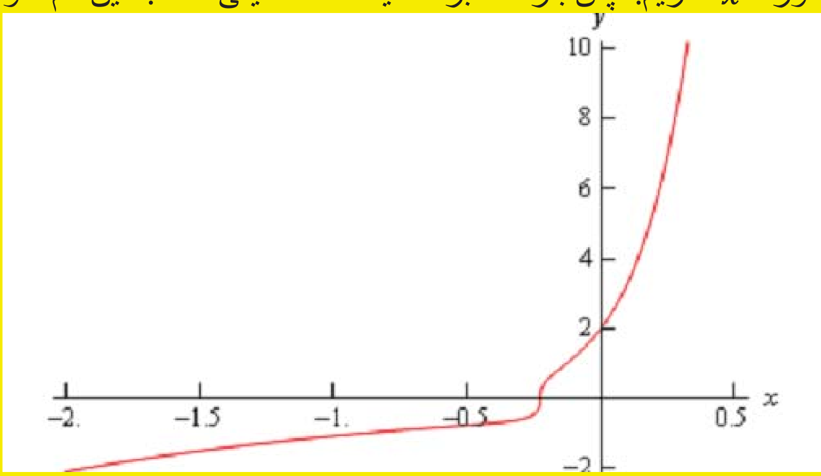
$$۸ = c - \frac{۳}{۱۷}$$

$$c = \frac{۱۳۹}{۱۷}$$

مقدار c را در جواب بدست آمده بالا می گذاریم.

$$y(x) = \left(\frac{۱۳۹e^{۱۵x} - ۳e^{-۲x}}{۱۷}\right)^{\frac{۱}{۳}}$$

اینجا مساله ای در مورد x نداریم. پس بازه معتبر ، کلیه اعداد حقیقی است. این هم نمودار جواب.



مثال ۳

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید و بازه معتبر را مشخص کنید.

$$6y' - 2y = xy^4 \qquad y(0) = -2$$

حل

ابتدا معادله دیفرانسیل را به صورت مناسب می نویسیم و سپس عمل جانشینی را انجام می دهیم. یعنی اول طرفین را بر y^4 تقسیم می کنیم.

$$6y^{-4}y' - 2y^{-3} = x$$

جانشین مطابق زیر است.

$$v = y^{-3} \qquad v' = -3y^{-4}y'$$

جانشین را در معادله دیفرانسیل می گذاریم.

$$-2v' - 2v = x$$

$$v' + v = -\frac{1}{2}x$$

$$\mu(x) = e^x$$

با کمی تغییرات و حل معادله دیفرانسیل خطی بدست آمده ، داریم.

$$v(x) = -\frac{1}{2}(x-1) + ce^{-x}$$

حالا جانشینی را بر می گردانیم.

$$y^{-3} = -\frac{1}{2}(x-1) + ce^{-x}$$

حالا مقدار اولیه را بکار می بریم.

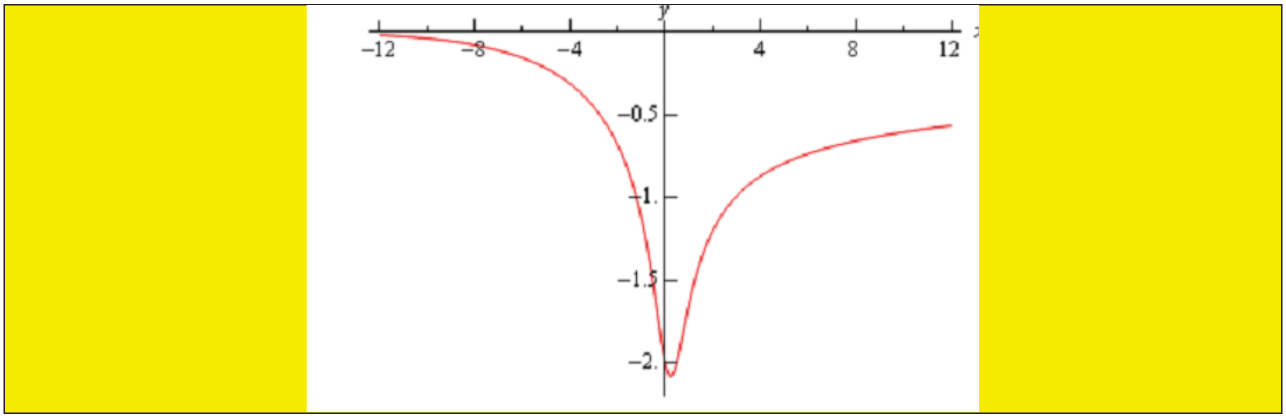
$$-\frac{1}{8} = \frac{1}{2} + c \qquad , \quad c = -\frac{5}{8}$$

پس داریم.

$$y(x) = -\frac{2}{\left(4x - 4 + 5e^{-x}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

حالا باید بازه معتبر را پیدا کنیم. اینجا باید نگران مخرج صفر باشیم. با استفاده از نرم افزار ، متوجه می شویم که مخرج هرگز ، صفر نمی شود. پس نگرانی نداریم. بازه معتبر تمام اعداد حقیقی است.

این هم نمودار جواب.



تمرینات بخش ۲.۵

معادله های دیفرانسیل برنولی زیر را حل کنید و درصورت لزوم بازه معتبر را مشخص کنید.

۱) $y' + \frac{y}{x} - \sqrt{y} = 0 \qquad y(۱) = 0$

۲) $y' - y = y^{۲} e^{x}$

۳) $y' + \frac{y}{x} = y^{۲}$

۴) $y' + y\cot x = y^{۴} \sin x$

۵) $y' + \frac{۲y}{x} = ۲x\sqrt{y}$

۶) $\frac{dy}{dx} + x^{۵} y = x^{۵} y^{۷}$

پاسخ تمرینات بخش ۲.۵

معادله های دیفرانسیل برنولی زیر را حل کنید و درصورت لزوم بازه معتبر را مشخص کنید.

۱) $y' + \frac{y}{x} - \sqrt{y} = 0 \qquad y(۱) = 0$

حل

ابتدا معادله دیفرانسیل را به صورت مناسب می نویسیم.

$$y' + \frac{۱}{x} y = y^{\frac{۱}{۲}}$$

حالا ، طرفین را بر $y^{\frac{۱}{۲}}$ تقسیم می کنیم. پس داریم.

$$y^{-\frac{۱}{۲}} y' + \frac{۱}{x} y^{\frac{۱}{۲}} = ۱$$

جانشین مطابق زیر است

$$v = y^{\frac{۱}{۲}} \qquad v' = \frac{۱}{۲}y^{-\frac{۱}{۲}}y'$$

حالا عمل جانشینی را انجام می دهیم. پس داریم.

$$۲v' + \frac{۱}{x}v = ۱$$

$$v' + \frac{۱}{۲x}v = \frac{۱}{۲}$$

$$\mu(x) = x^{\frac{۱}{۲}}$$

بعد از تغییراتی و سپس حل معادله دیفرانسیل خطی ، با استفاده از عامل انتگرال گیری داریم.

$$v(x) = \frac{۱}{۳}x + cx^{-\frac{۱}{۲}}$$

حالا جانشینی را بر می گردانیم.

$$y^{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۳}x + cx^{-\frac{۱}{۲}}$$

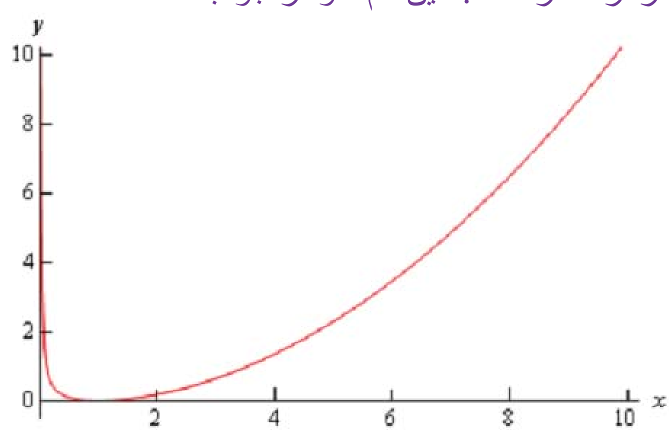
با بکار بردن مقدار اولیه ، داریم.

$$0 = \frac{۱}{۳} + c \quad ، \quad c = -\frac{۱}{۳}$$

با بکار بردن مقدار c و حل معادله بدست آمده برا ی y داریم.

$$y(x) = \left(\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}x^{-\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{x^3 - 2x^{\frac{3}{2}} + 1}{9x}$$

بخاطر x در مخرج کسر و همچنین ریشه دوم در صورت ، پس باید داشته باشیم $x > 0$ و لذا بازه معتبر ، کلیه اعداد بزرگ تر از صفر است. این هم نمودار جواب



۲) $y' - y = y^{۲} e^{x}$

حل

اینجا $n = ۲$ است. پس جانشینی زیر را بکار می بریم.

$$v = y^{۱-n} = \frac{۱}{y}$$

از طرفین مشتق می گیریم. y در سمت راست ، تابع x است.

$$v' = \left(\frac{۱}{y}\right)' = -\frac{۱}{y^{۲}} y'$$

طرفین معادله اصلی را بر $y^{۲}$ تقسیم می کنیم.

$$y' - y = y^{۲} e^{x} \quad , \quad \Rightarrow \quad \frac{y'}{y^{۲}} - \frac{۱}{y} = e^{x}$$

حالا v و v' جانشین می کنیم. پس داریم.

$$-v' - v = e^{x} \quad ، \quad \Rightarrow \quad v' + v = -e^{x}$$

یک معادله دیفرانسیل خطی بدست آوردیم. برای حل آن ، از عامل انتگرال گیری استفاده می کنیم.

$$\mu(x) = e^{\int ۱\, dx} = e^{x}$$

پس جواب کلی این معادله دیفرانسیل خطی مطابق زیر است.

$$v(x) = \frac{\int \mu(x)\, f(x) dx + C}{\mu(x)} = \frac{\int e^{x}(-e^{x})\, dx + C}{e^{x}}$$

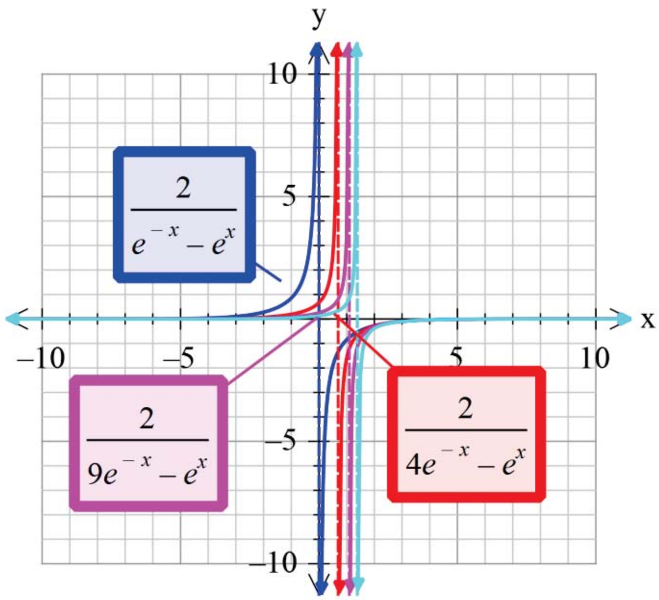
$$= \frac{-\frac{e^{۲x}}{۲} + C}{e^{x}} = -\frac{e^{x}}{۲} + Ce^{-x} = \frac{۲Ce^{-x} - e^{x}}{۲}$$

چون C یک عدد اختیاری است ، پس بجای $۲C$ می توانیم C بنویسیم. حال بر می گردیم به $y(x)$
پس جواب تلویحی مطابق زیر است.

$$y = \frac{۱}{v} = \frac{۲}{Ce^{-x} - e^{x}}$$

توجه داشته باشید ، هنگامی که معادله دیفرانسیل را بر $y^{۲}$ تقسیم کردیم ، جواب $y = 0$ را از دست دادیم. پس جواب نهایی مطابق زیر است.

$$y = \frac{۲}{Ce^{-x} - e^{x}} \quad , \qquad y = 0$$



۳) $y' + \frac{y}{x} = y^{۲}$

حل

اجازه دهید ، چون کتب مختلف نماد های مختلف بکار می برند ، برا ی آشنایی شما ، نماد های دیگری بکار بریم. مثلا بجای v نماد z بجای n نماد m بجای μ نماد u را بکار بریم. ملاحظه می کنید این نماد ها شبیه به هم هستند.

ملاحظه می کنید که این معادله دیفرانسیل ، یک معادله برنولی است. پس جانشینی زیر را بکار می بریم.

$$z = y^{1-m} = \frac{1}{y}.$$

مشتق می گیریم.

$$z' = \left(\frac{1}{y}\right)' = -\frac{y'}{y^2}.$$

معادله دیفرانسیل اولیه را بر $y^{۲}$ تقسیم می کنیم و سپس بجای y نماد z بکار می بریم.

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{yx} = 1.$$

هنگامی که بر $y^{۲}$ تقسیم می کنیم ، جواب $y = 0$ را از دست می دهیم.
معادله دیفرانسیل بر حسب z مطابق زیر است.

$$-z' + \frac{z}{x} = 1$$

یا

$$z' - \frac{z}{x} = -1.$$

یک معادله دیفرانسیل خطی برای تابع $z(x)$ بدست آوردیم. با بکار بردن عامل انتگرال گیری ، آنرا حل می کنیم.

$$u(x)=e^{\int\left(-\frac{1}{x}\right)dx}=e^{-\int\frac{dx}{x}}=e^{-\ln|x|}=e^{\ln\frac{1}{|x|}}=\frac{1}{|x|}.$$

می توانیم مطمئن شویم که $\frac{1}{x}$ در حقیقت ، عامل انتگرال گیری است.

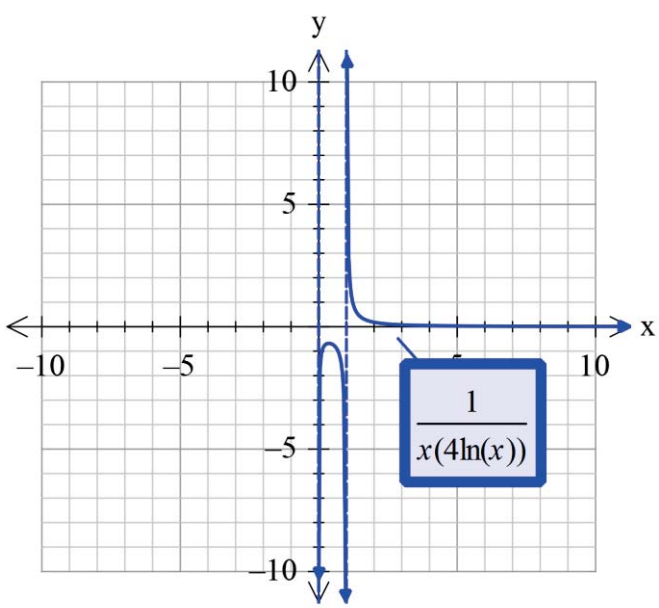
$$z'\cdot\frac{1}{x}-\frac{z}{x}\cdot\frac{1}{x}=z'\cdot\frac{1}{x}-\frac{z}{x^2}=\left(z\cdot\frac{1}{x}\right)'.$$

ملاحظه می کنید که سمت چپ معادله ، مشتق حاصلضرب $z(x)u(x)$ است ، بعد از ضرب در $\frac{1}{x}$ جواب کلی معادله دیفرانسیل $z(x)$ مطابق زیر است.

$$z=\frac{\int u(x)f(x)dx+C}{u(x)}=\frac{\int\frac{1}{x}\cdot(-1)dx+C}{\frac{1}{x}}=\frac{-\ln|x|+C}{\frac{1}{x}}=x\left(C-\ln|x|\right).$$

با توجه به این که $y=\frac{1}{z}$ است ، داریم.

$$y=\frac{1}{x\left(C-\ln|x|\right)},$$



۴) $y' + y\cot x = y^{۴} \sin x$

حل

این یک نادله دیفرانسیل برنولی است با $m = ۴$ پس جانشینی زیر را بکار می بریم.

$$z = y^{1-m} = y^{-3}.$$

مشتق می گیریم.

$$z' = \left(y^{-3}\right)' = -3y^{-4}y' = -\frac{3y'}{y^4}.$$

طرفین معادله اصلی را در ۳− ضرب و سپس بر $y^{۴}$ تقسیم می کنیم.

$$y' + y\cot x = y^4 \sin x, \quad \Rightarrow -\frac{3y'}{y^4} - \frac{3\cot x}{y^3} = -3\sin x.$$

توجه دارید که با تقسیم کردن بر $y^{۴}$ جواب $y = 0$ را از دست می دهیم. معادله آخر را بر حسب z می نویسیم.

$$z' - 3\cot x \cdot z = -3\sin x.$$

این یک معادله دیفرانسیل خطی است ، پس با استفاده از عامل انتگرال گیری ، داریم.

$$u(x) = e^{\int(-3)\cot x dx} = e^{-3\int \cot x dx} = e^{-3\int \frac{\cos x dx}{\sin x}} = e^{-3\int \frac{d(\sin x)}{\sin x}} = e^{-3\ln|\sin x|} = e^{\ln \frac{1}{|\sin x|^3}} = \frac{1}{|\sin x|^3}.$$

پس تابع $u(x) = \frac{۱}{\sin^{۳} x}$ عامل انتگرال گیری به حساب می آوریم. در حقیقت سمت چپ معادله مشتق حاصلضرب $z(x)u(x)$ است بعد از ضرب کردن در $u(x)$

$$z' \cdot \frac{1}{\sin^3 x} - 3\cot x \cdot z \cdot \frac{1}{\sin^3 z} = z'\frac{1}{\sin^3 z} - \frac{3z\cos x}{\sin^4 x} = \left(z\frac{1}{\sin^3 x}\right)'.$$

پس جواب کلی معادله دیفرانسیل خطی $z(x)$ به صورت است.

$$z = \frac{\int u(x)f(x)dx + C}{u(x)} = \frac{\int \frac{1}{\sin^3 x}(-3\sin x)dx + C}{\frac{1}{\sin^3 x}} = \frac{-3\int \frac{dx}{\sin^2 x} + C}{\frac{1}{\sin^3 x}} = (3\cot x + C)\sin^3 x.$$

چون $z = y^{-۳}$ است ، پس جواب کلی معادله دیفرانسیل برنولی به صورت زیر است.

$$\frac{1}{y^3} = (3\cot x + C)\sin^3 x, \quad y = 0.$$

۵) $y' + \frac{۲y}{x} = ۲x\sqrt{y}$

حل

این معادله هم معادله برنولی است, با پارامتر $m = \frac{۱}{۲}$ پس می توان آنرا به یک معادله دیفرانسیل خطی تبدیل کرد با جانشینی $z = y^{۱-m} = \sqrt{y}$ و لذا مشتق این تابع $z(x)$ به صورت زیر است.

$$z' = (\sqrt{y})' = \frac{y'}{2\sqrt{y}}.$$

معادله اصلی را بر $۲\sqrt{y}$ تقسیم می کنیم.

$$y' + \frac{2y}{x} = 2x\sqrt{y}, \;\; \Rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}} + \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}x\sqrt{y}} = \frac{\cancel{2}x\sqrt{y}}{\cancel{2}\sqrt{y}}, \;\; \Rightarrow \frac{y'}{2\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x} = x.$$

با جایگزین کردن z برای y داریم.

$$z' + \frac{z}{x} = x.$$

یک معادله دیفرانسیل خطی ساده بدست آوردیم. عامل انتگرال گیری مطابق زیر است.

$$u(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = e^{\ln|x|} = |x|.$$

تابع $u(x) = x$ را انتخاب می کنیم. سمت چپ معادله , مشتق حاصلضرب $z(x)u(x)$ است ، بعد از ضرب کردن در $u(x)$

$$z' \cdot x + \frac{z}{x} \cdot x = z'x + z = (zx)'.$$

پس جواب کلی معادله دیفرانسیل خطی به صورت زیر است.

$$z = \frac{\int u(x)f(x)dx + C}{u(x)} = \frac{\int x \cdot x dx + C}{x} = \frac{\int x^2 dx + C}{x} = \frac{\frac{x^3}{3} + C}{x}.$$

جانشینی را بر می گردانیم.

$$\sqrt{y} = \frac{\frac{x^3}{3} + C}{x} \;\; \text{or} \;\; x\sqrt{y} = \frac{x^3}{3} + C.$$

پس جواب کامل به صورت زیر است.

$$x\sqrt{y} = \frac{x^3}{3} + C, \;\; y = 0.$$

$$۶)\quad \frac{dy}{dx}+x^{۵}y=x^{۵}y^{۷}$$

حل

بعضی از کتب معادله را به طریق زیر عمل می کنند. ایده یکی است. تمرین ۶ را به این روش عمل می کنیم تا شما به روش های مختلف آشنا شوید. در حقیقت این دو روش ها با هم تفاوتی ندارند.

معادله دیفرانسیل داده شده ، یک معادله برنولی است ، با $p(x)=x^{۵}$ و $q(x)=x^{۵}$ و $n=۷$ پس داریم.

$$v=y^{۱-n}=y^{-۶}$$

بر حسب y می شود.

$$y=v^{-\frac{۱}{۶}}$$

از y بر حسب x مشتق می گیریم.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-۱}{۶}v^{-\frac{۷}{۶}}\frac{dv}{dx}$$

در معادله اصلی بجای $\frac{dy}{dx}$ و y عبارت های بدست آمده بالا می گذاریم.

$$\frac{dy}{dx}+x^{۵}y=x^{۵}y^{۷}$$

$$-\frac{۱}{۶}v^{-\frac{۷}{۶}}\frac{dv}{dx}+x^{۵}v^{-\frac{۱}{۶}}=x^{۵}v^{-\frac{y}{۶}}$$

طرفین را در $-۶v^{\frac{۷}{۶}}$ ضرب می کنیم.

$$\frac{dv}{dx}-۶x^{۵}v=-۶x^{۵}$$

حالا با این جایگزینی معادله ای داریم که می توانیم آنرا حل کنیم.

$$\frac{dv}{dx}=۶x^{۵}v-۶x^{۵}$$

$$\frac{dv}{dx}=(v-۱)۶x^{۵}$$

با استفاده از تفکیک متغیر ها داریم.

$$\frac{dv}{u-۱}=۶x^{۵}dx$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\int\frac{۱}{v-۱}dv=\int ۶x^{۵}dx$$

$$\ln(v-۱)=x^{۶}+C$$

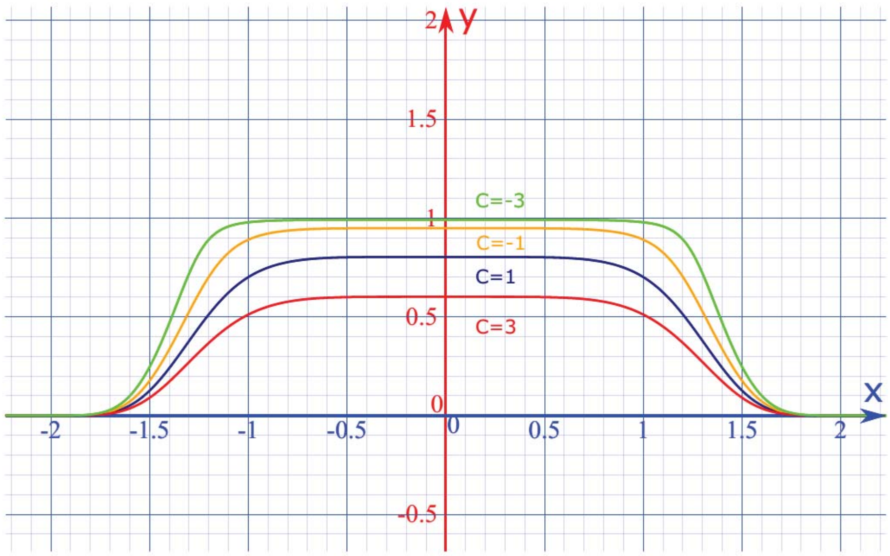
$$v-۱=e^{x^{۶}}+C$$

$$v = e^{\left(x^{۶}+C\right)} + ۱$$

جانشینی را بر می گردانیم.

$$y = v^{-\frac{۱}{۶}}$$

$$y = \left(e^{\left(x^{۶}+C\right)} + ۱\right)^{-\frac{۱}{۶}}$$



بخش ۶ .۲ معادله های دیفرانسیل همگن یا متجانس Homogeneous Differential Equations

در بخش قبل ، معادله های دیفرانسیل برنولی ، دیدیم که برای حل یک معادله دیفرانسیل ، لازم شد عمل جانشینی $v = y^{۱-n}$ انجام دهیم. با این کار توانستیم معادله دیفرانسیل را به شکلی تغییر دهیم که بتوانیم به آسانی آنرا حل کنیم. در این بخش ، به نوع دیگر جانشینی می پردازیم ، بطوری که معادله های دیفرانسیل را به معادله های قابل حل تبدیل کنیم.

معادله ای را که در این بخش مورد بحث قرارمی دهیم ، معادله ای است به صورت زیر.

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

معادله های دیفرانسیل که بتوان آنها را به صورت بالا نوشت ، به معادله های دیفرانسیل **همگن** **Homogeneous** معروف هستند. توجه داشته باشید که گاهی اوقات لازم است تغییراتی به معادله بدهیم تا به صورت مناسب نوشته شود.

بعد از مشخص شدن این که معادله ما به صورت معادله دیفرانسیل همگن یا متجانس است ، جانشینی زیر را انجام می دهیم.

$$v(x) = \frac{y}{x}$$

سپس ، می توانیم آنرا به صورت زیر باز نویسی کنیم.

$$y = xv$$

سپس ،با توجه به این نکته که هم v و هم y تابع های x هستند ، مشتق ضمنی از رابطه بالا می گیریم ، تا رابطه زیر بدست آید.

$$y' = v + xv'$$

با این جانشینی ، معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$v + xv' = F(v)$$

$$xv' = F(v) - v \qquad \Rightarrow \quad \frac{dv}{F(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

همان طور که ملاحظه می کنید ، با کمی تغییر دراین معادله دیفرانسیل جدید ، یک معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر بدست می آوریم.

اجازه دهید با چند مثال این موضوع را روشن کنیم.

مثال ۱

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید. و بازه معتبر را مشخص کنید.

$$xyy' + ۴x^۲ + y^۲ = 0 \qquad y\left(۲\right) = -۷ \quad x > 0$$

حل

ابتدا طرفین را بر $x^۲$ تقسیم می کنیم.

$$\frac{y}{x}y' = -۴ - \frac{y^۲}{x^۲} = -۴ - \left(\frac{y}{x}\right)^۲$$

این یک شکل مناسبی که در بالا گفته ایم نیست ، اما می بینید که متغیر ها به صورت کسر $\frac{y}{x}$ نوشته شده اند. و این همان کاری است که باید انجام دهیم. پس اجازه دهید عمل جانشینی را روی این شکل معادله دیفرانسیل انجام دهیم.

$$v(v + xv') = -۴ - v^۲$$

حالا معادله دیفرانسیل را طوری می نویسیم که همه چیز از هم جدا شوند.

$$vxv' = -۴ - ۲v^۲$$

$$xv' = -\frac{۴ + ۲v^۲}{v}$$

$$\frac{v}{۴ + ۲v^۲}dv = -\frac{۱}{x}dx$$

از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\frac{۱}{۴}\ln\left(۴ + ۲v^۲\right) = -\ln(x) + C$$

با استفاده از خواص لگاریتم ، معادله بالا را به صورت زیر باز نویسی می کنیم.

$$\ln\left(۴ + ۲v^۲\right)^{\frac{۱}{۴}} = \ln(x)^{-۱} + C$$

حالا طرفین را به توان نمایی می رسانیم. یا طرفین را نمایی می کنیم.

$$\left(۴ + ۲v^۲\right)^{\frac{۱}{۴}} = e^{\ln(x)^{-۱}+C} = e^C e^{\ln(x)^{-۱}} = \frac{C}{x}$$

چون C یک عدد اختیاری است پس e^C هم یک عدد اختیاری است و می تاون بجای آن نوشت C همان طور که در بالا انجام داده ایم.

در نهایت معادله بالا را برای v حل می کنیم و سپس جانشینی را بر می گردانیم.

$$۴ + ۲v^۲ = \frac{c^۴}{x^۴} = \frac{C}{x^۴}$$

$$v^۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{C}{x^۴} - ۴\right)$$

$$\frac{y^۲}{x^۲} = \frac{۱}{۲}\left(\frac{C - ۴x^۴}{x^۴}\right)$$

$$y^۲ = \frac{۱}{۲}x^۲\left(\frac{C - ۴x^۴}{x^۴}\right) = \frac{C - ۴x^۴}{۲x^۲}$$

حالا مقدار اولیه را بکار می بریم.

$$۴۹ = \frac{C - ۴(۱۶)}{۲(۴)} \qquad C = ۴۵۶$$

و در نهایت

$$y^{۲}=\frac{۲۲۸-۲x^{۴}}{x^{۲}} \qquad y(x)=\pm\sqrt{\frac{۲۲۸-۲x^{۴}}{x^{۲}}}$$

شرط اولیه به ما می گوید علامت $-$ صحیح است. پس جواب واقعی

$$y=-\sqrt{\frac{۲۲۸-۲x^{۴}}{x^{۲}}}$$

است. برای پیدا کردن بازه معتبر باید از $x=0$ دوری کنیم. و چون عبارت زیر رادیکال هم نباید منفی باشد ، پس

$$۲۲۸-۲x^{۴}\geq 0$$

$$x^{۴}\leq ۱۱۴$$

$$-3.2676\leq x\leq 3.2676$$

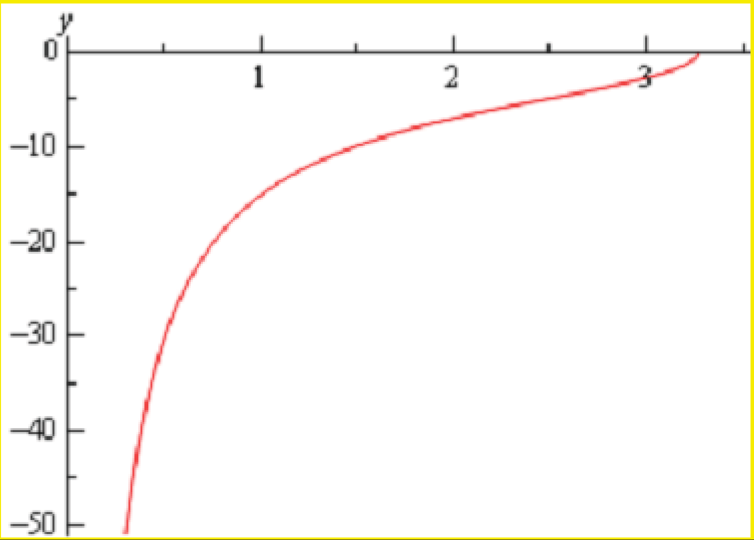
پس دو بازه ممکن داریم.

$$-3.2676\leq x<0 \qquad\qquad 0<x\leq 3.2676$$

و شرط اولیه می گوید بازه زیر ، معتبر است.

$$0<x\leq 3.2676$$

این هم نمودار جواب.



مثال ۲

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید و بازه معتبر را مشخص کنید.

$$xy'=y(\ln x-\ln y) \qquad y(۱)=۴ \qquad x>0$$

حل

بنظر می رسد که این مدله دیفرانسیل ، همگن نیست. اما با استفاده از خواص لگاریتم ، می توانیم آنرا به صورت زیر باز نویسی کنیم.

$$y' = \frac{y}{x}\ln\left(\frac{x}{y}\right)$$

به این ترتیب ، معادله دیفرانسیل ، همگن است. جانشینی را بکار می بریم و سپس تفکیک متغیر ها

$$v + xv' = v\ln\left(\frac{۱}{v}\right)$$

$$xv' = v\left(\ln\left(\frac{۱}{v}\right) - ۱\right)$$

$$\frac{dv}{v\left(\ln\left(\frac{۱}{v}\right) - ۱\right)} = \frac{dx}{x}$$

از طرفین انتگرال می گیریم و کمی باز نویسی انجام می دهیم ، پس داریم.

$$-\ln\left(\ln\left(\frac{۱}{v}\right) - ۱\right) = \ln x + C$$

$$\ln\left(\ln\left(\frac{۱}{v}\right) - ۱\right) = C - \ln x$$

توجه : برای انتگرال گرفتن از سمت چپ از طریق جانشینی $u = \ln\left(\frac{۱}{v}\right) - ۱$ استفاده شد.

با نمایی کردن طرفین ، دو مرتبه ، v را پیدا می کنیم.

$$\ln\left(\frac{۱}{v}\right) - ۱ = e^{\ln(x)^{-۱}+C} = e^{C}e^{\ln(x)^{-۱}} = \frac{C}{x}$$

$$\ln\left(\frac{۱}{v}\right) = \frac{C}{x} + ۱$$

$$\frac{۱}{v} = e^{\frac{C}{x}+۱}$$

$$v = e^{-\frac{C}{x}-۱}$$

جانشینی را بر می گردانیم. و برای y حل می کنیم.

$$\frac{y}{x} = e^{-\frac{C}{x}-۱}$$

$$y(x) = xe^{-\frac{C}{x}-۱}$$

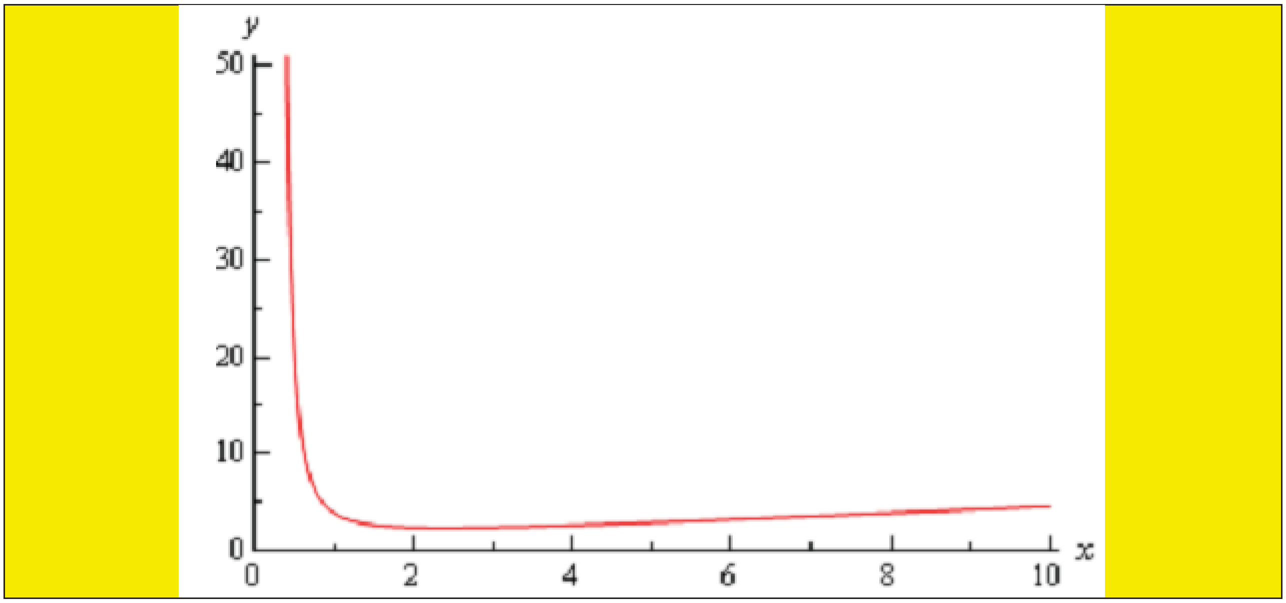
با استفاده از مقدار اولیه ، C را پیبدا می کنیم.

$$۴ = e^{-C-۱} \qquad c = -(۱ + \ln ۴)$$

پس جواب زیر را داریم.

$$y = xe^{\frac{۱+\ln ۴}{x}-۱}$$

واضح است که باید از $x = 0$ دوری کنیم ، زیرا تقسیم بر صفر خواهیم داشت. پس با در نظر گرفتن مقدار اولیه ، بازه معتبر $x > 0$ است. این هم نمودار جواب.



تمرینات بخش ۲.۶

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید و بازه معتبر را مشخص کنید.

۱) $y' - (۴x - y + ۱)^۲ = 0 \quad y(0) = ۲$

۲) $y' = e^{۹y-x} \qquad y(0) = 0$

معادله های دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۳) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^۲ + y^۲}{xy}$

۴) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(x-y)}{x^۲}$

۵) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{x+y}$

پاسخ تمرینات بخش ۲.۶

مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید و بازه معتبر را مشخص کنید.

۱) $y' - (۴x - y + ۱)^۲ = 0 \quad y(0) = ۲$

حل

جانشینی زیر را بکار می بریم.

$$v = ۴x - y \qquad v' = ۴ - y'$$

ملاحظه می کنید که $+۱$ را به شمار نیاوردیم. معمولا فقط قسمت $ax + by$ در جانشینی به حساب می آید. پس در معادله دیفرانسیل جانشین می کنیم.

$$۴-v'-(v+۱)^۲=0$$
$$v'=۴-(v+۱)^۲$$
$$\frac{dv}{(v+۱)^۲-۴}=-dx$$

از طرفین انتگرال می گیریم. برای انتگرال سمت چپ از روش کسر های پاره ای استفاده می کنیم.

$$\int\frac{dv}{v^۲+۲v-۳}=\int\frac{dv}{(v+۳)(v-۱)}=\int -dx$$
$$\frac{۱}{۴}\int\frac{۱}{v-۱}-\frac{۱}{x+۳}dv=\int -dx$$
$$\frac{۱}{۴}\left(\ln(v-۱)-\ln(v+۳)\right)=-x+C$$
$$\ln\left(\frac{v-۱}{v+۳}\right)=C-۴x$$
$$\frac{v-۱}{v+۳}=e^{C-۴x}=Ce^{-۴x}$$
$$v-۱=Ce^{-۴x}(v+۳)$$
$$v\left(۱-Ce^{-۴x}\right)=۱+۳Ce^{-۴x}$$
$$v=\frac{۱+۳Ce^{-۴x}}{۱-Ce^{-۴x}}$$
$$۴x-y=\frac{۱+۳Ce^{-۴x}}{۱-Ce^{-۴x}}$$
$$y(x)=۴x-\frac{۱+۳Ce^{-۴x}}{۱-Ce^{-۴x}}$$

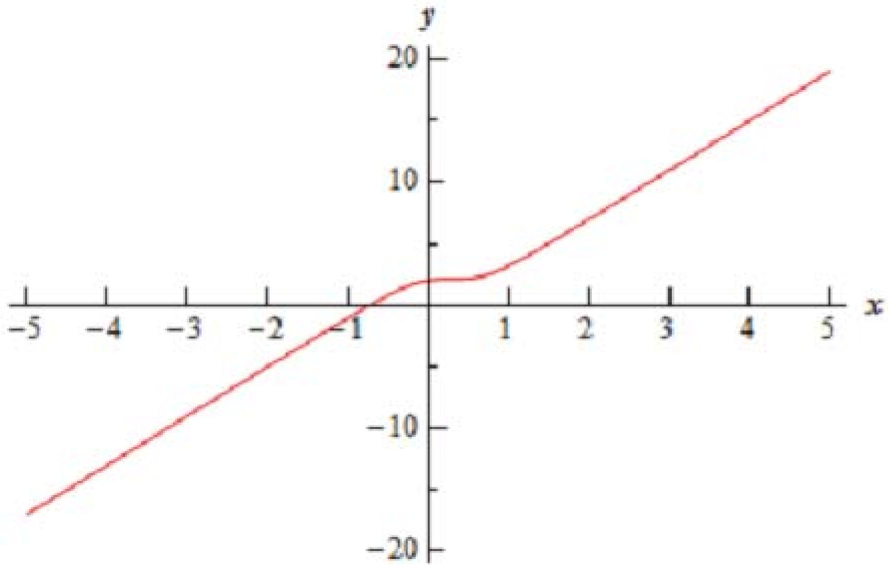
مقدار اولیه را بکار می بریم تا C پیدا شود.

$$۲=y(0)=-\frac{۱+۳C}{۱-C}\qquad C=-۳$$

پس جواب مطابق زیر است.

$$y(x)=۴x-\frac{۱-۹e^{-۴x}}{۱+۳e^{-۴x}}$$

چون در مورد مقادیر x مشکلی نداریم ، پس بازه معتبر کلیه اعداد حقیقی است. این هم نمودار جواب



۲) $y' = e^{۹y-x} \qquad y(0) = 0$

حل

جانشین مطابق زیر است.

$$v = ۹y - x \qquad v' = ۹y' - ۱$$

جانشین را جایگزین می کنیم.

$$\frac{۱}{۹}(v' + ۱) = e^{v}$$

$$v' = ۹e^{v} - ۱$$

$$\frac{dv}{۹e^{v} - ۱} = dx \qquad\qquad \frac{e^{-v}dv}{۹ - e^{-v}} = dx$$

ملاحظه می کنید که کمی عملیات انجام داده ایم تا عبارت آخر بدست آید. تاکنون باید مهارت کافی برای این کار بدست آورده باشد. حالا انتگرال می گیریم.

$$\ln(۹ - e^{-v}) = x + C$$

برای v حل می کنیم.

$$۹ - e^{-v} = e^{C}e^{x} = Ce^{x}$$

$$e^{-v} = ۹ - Ce^{x}$$

$$v = -\ln(۹ - Ce^{x})$$

جانشینی را بر می گردانیم.

$$y(x) = \frac{۱}{۹}\left(x - \ln(۹ - Ce^{x})\right)$$

مقدار اولیه را بکار می بریم.

$$0 = y(0) = -\frac{۱}{۹}\ln(۹ - C) \qquad\qquad C = ۸$$

پس جواب مطابق زیر است.

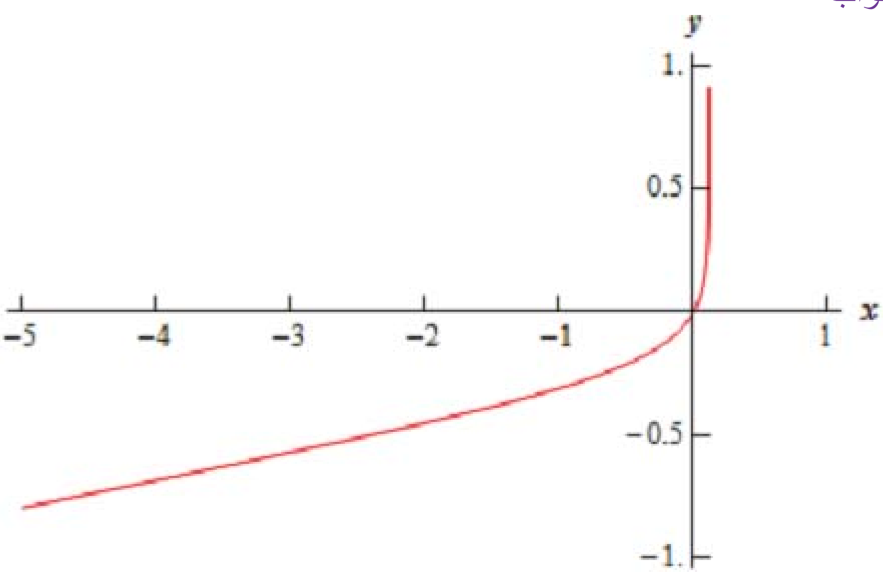
$$y(x) = \frac{۱}{۹}\left(x - \ln\left(۹ - ۸e^{x}\right)\right)$$

برای پیدا کردن بازه معتبر باید مطمئن شویم که لگاریم مثبت داشته باشیم. پس

$$۹ - ۸e^{x} > 0 \qquad e^{x} < \frac{۹}{۸}$$

$$x < \ln\tfrac{9}{8} = 0.1178$$

این هم نمودار جواب



معادله های دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۳) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^{۲} + y^{۲}}{xy}$

حل

سعی می کنیم معادله را به صورت زیر بنویسیم.

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

پس داریم.

$$\frac{x^{۲} + y^{۲}}{xy}$$

$$\frac{x^{۲}}{xy} + \frac{y^{۲}}{xy}$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{-۱}+\frac{y}{x}$$

پس معادله ما به صورت زیر است.

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)^{-۱}+\frac{y}{x}$$

جانشین زیر را داریم.

$$v=\frac{y}{x}$$

$$y=xv$$

مشتق ضمنی بر حسب x می گیریم.

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$$

عمل جانشینی را انجام می دهیم.

$$v+x\frac{dv}{dx}=v^{-۱}+v$$

از طرفین v کم می کنیم.

$$x\frac{dv}{dx}=v^{-۱}$$

حالا عمل تفکیک متغیر ها را انجام می دهیم.

$$v\,dv=\frac{۱}{x}dx$$

انتگرال می گیریم.

$$\int v\,dv=\int\frac{۱}{x}\,dx$$

$$\frac{v^{۲}}{۲}=\ln(x)+C$$

فرض می کنیم $C=\ln(k)$ باشد ، پس داریم.

$$\frac{v^{۲}}{۲}=\ln(x)+\ln(k)$$

$$\frac{v^{۲}}{۲}=\ln(kx)$$

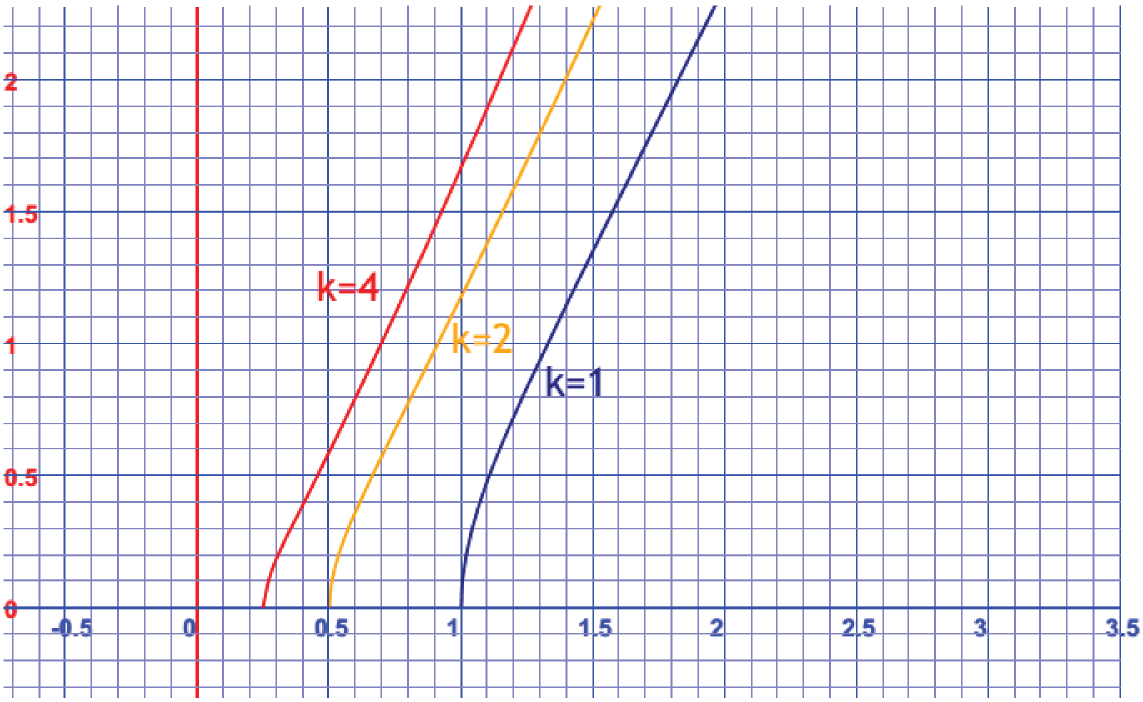
$$v=\pm\sqrt{۲\ln(kx)}$$

حالا جانشینی را بر می گردانیم.

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{۲\ln(kx)}$$

$$y = \pm x\sqrt{۲\ln(kx)}$$

تصویرقسمت مثبت به صورت زیر است.



۴) $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-y)}{x^۲}$

حل

سعی می کنیم معادله را به صورت زیر بنویسیم.

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

داریم.

$$\frac{xy}{x^۲} - \frac{y^۲}{x^۲}$$

$$\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^۲$$

پس داریم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^۲$$

جانشین به صورت زیر است.

$$v = \frac{y}{x} \qquad\qquad y = vx$$

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

پس داریم.

$$v + x\frac{dv}{dx} = v - v^۲$$

$$x\frac{dv}{dx} = -v^۲$$

متغیر ها را تفکیک می کنیم.

$$-\frac{۱}{v^۲}dv = \frac{۱}{x}dx$$

انتگرال می گیریم.

$$\int -\frac{۱}{v^۲}dv = \int \frac{۱}{x}dx$$

$$\frac{۱}{v} = \ln(x) + C$$

بجای C می نویسیم $\ln(k)$

$$\frac{۱}{v} = \ln(x) + \ln(k)$$

$$\frac{۱}{v} = \ln(kx)$$

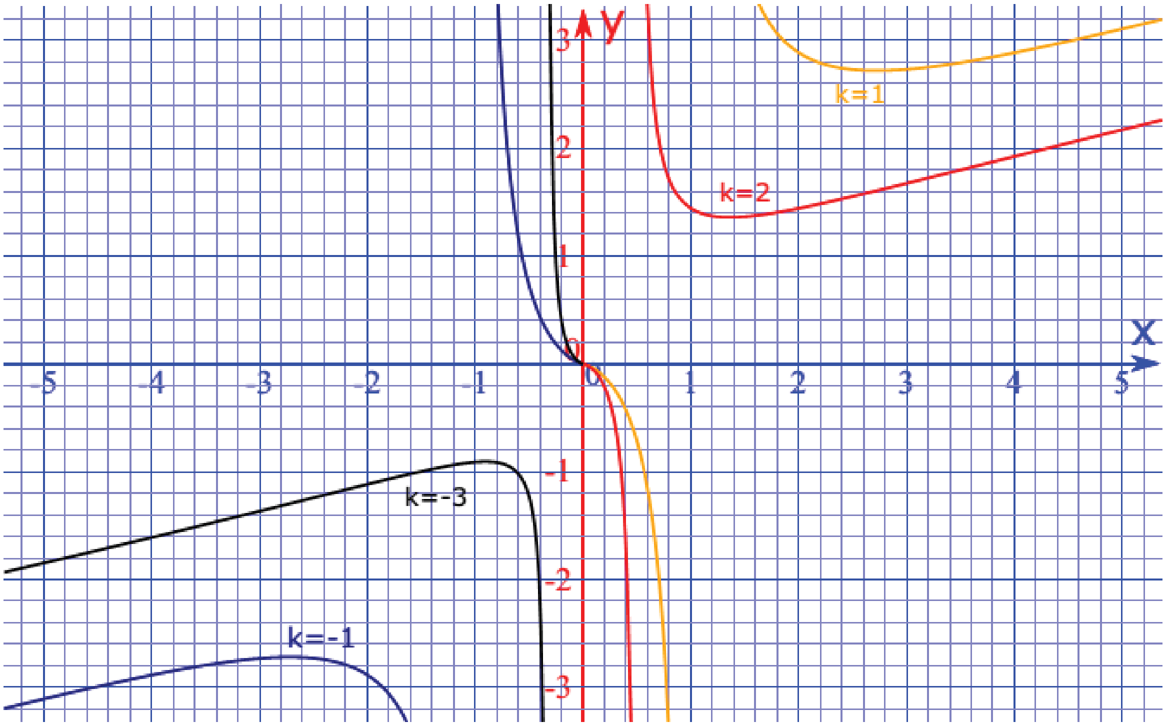
$$v = \frac{۱}{\ln(kx)}$$

جانشینی را بر می گردانیم.

$$v = \frac{y}{x} = \frac{۱}{\ln(kx)}$$

$$y = \frac{x}{\ln(kx)}$$

چند نمودار برای مقادیر مختلف k



۵) $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y}$

حل

به صورت $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$ می نویسیم.

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{\frac{x}{x} - \frac{y}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{y}{x}} = \frac{۱ - \frac{y}{x}}{۱ + \frac{y}{x}}$$

پس داریم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱ - \frac{y}{x}}{۱ + \frac{y}{x}}$$

$$v = \frac{y}{x} \qquad y = vx \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

لذا

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{۱ - v}{۱ + v}$$

ز طرفین v کم می کنیم.

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{۱ - v}{۱ + v} - v$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v}{1+v}-\frac{v+v^2}{1+v}$$
$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1-2v-v^2}{1+v}$$

متغیر ها را جدا می کنیم.

$$\frac{1+v}{1-2v-v^2}dv=\frac{1}{x}dx$$

انتگرال می گیریم.

$$\int\frac{1+v}{1-2v-v^2}dv=\int\frac{1}{x}dx$$
$$-\frac{1}{2}\ln\left(1-2v-v^2\right)=\ln(x)+C$$

بجای C می نویسیم $\ln(k)$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(1-2v-v^2\right)=\ln(x)+\ln(k)$$

$$\left(1-2v-v^2\right)^{-\frac{1}{2}}=kx$$
$$1-2v-v^2=\frac{1}{k^2x^2}$$

جانشینی را بر می گردانیم.

$$1-2\left(\frac{y}{x}\right)-\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{1}{k^2x^2}$$
$$x^2-2xy-y^2=\frac{1}{k^2}$$
$$y^2+2xy-x^2=-\frac{1}{k^2}$$

بجای $-\frac{1}{k^2}$ می نویسیم C پس سریم.

$$y^2+2xy-x^2=C$$

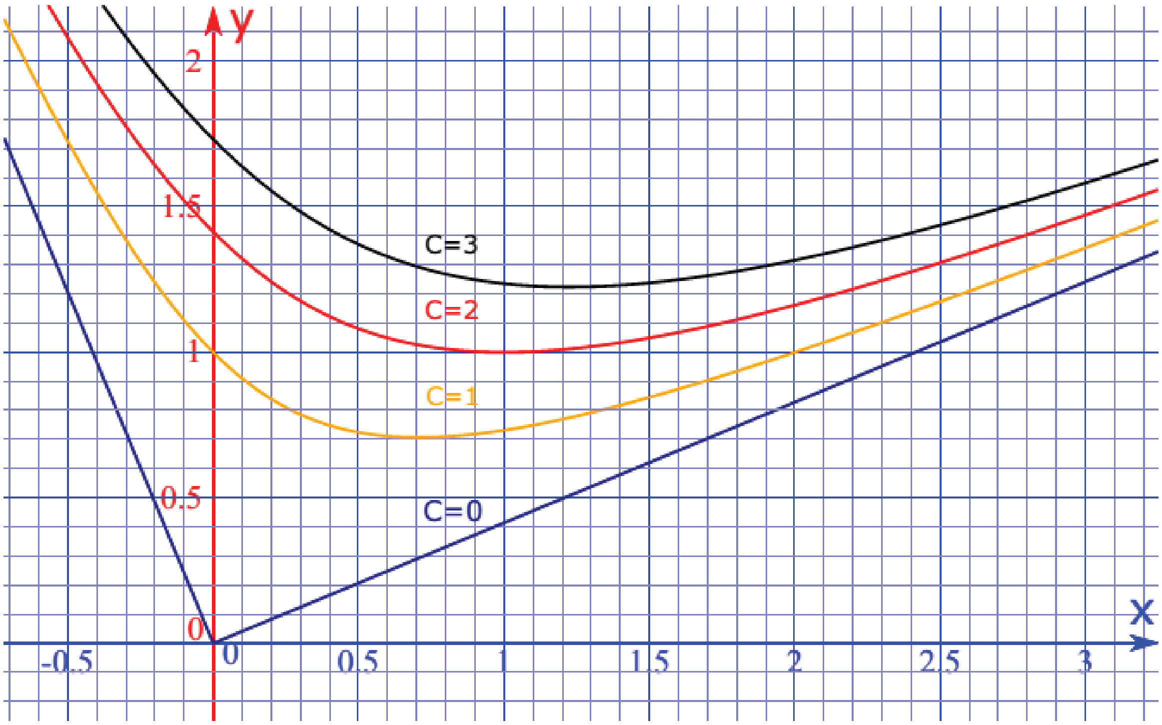
به طرفین $2x^2$ اضافه می کنیم.

$$y^2+2xy+x^2=2x^2+C$$
$$(y+x)^2=2x^2+C$$
$$y+x=\pm\sqrt{2x^2+C}$$

از طرفین x کم می کنیم.

$$y = \pm\sqrt{۲x^۲ + C} - x$$

این جواب بود. نمودار قسمت مثبت در زیر ملاحظه می کنید.



بخش ۲.۷ بازه های معتبر Intervals of Validity

اجازه دهید به یک قضیه در مورد معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول نگاهی کنیم.

قضیه ۱

مساله با مقدار اولیه زیر را ملاحظه کنید.

$$\boldsymbol{y' + p(t)y = g(t) \qquad y(t_0) = y_0}$$

اگر $p(t)$ و $g(t)$ تابع های پیوسته در بازه باز $\alpha < t < \beta$ باشند و بازه شامل t_0 باشد ، پس یک جواب منحصر به فرد برای مساله با مقدار اولیه در آن بازه وجود دارد.

این قضیه می گوید ، برای معادلات دیفرانسیل مرتبه اول خطی در صورت وجود شرایط بالا ، یک جواب منحصر به فرد حتما وجود دارد ، حتی اگر نتوانیم آن جواب را پیدا کنیم .

موضوع دوم ، این که اگر بازه در قضیه ، بزرگ ترین بازه باشد که در آن $p(t)$ و $g(t)$ پیوسته هستند ، پس آن بازه ، بازه معتبر برای جواب است. این یعنی ، برای معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه اول ، لزومی ندارد معادله دیفرانسیل را حل کنیم ، تا بتوانیم بازه معتبر را پیدا کنیم. همچنین توجه داشته باشد که بازه معتبر، کم به مقدار اولیه بستگی دارد. بازه باید شامل t_0 باشد ، اما مقدار y_0 هیچ اثری روی بازه معتبر ندارد.

مثال ۱

بدون حل مساله با مقدار اولیه زیر ، بازه معتبر را مشخص کنید.

$$\left(t^{۲} - ۹\right)y' + ۲y = \ln\left|۲۰ + ۴t\right| \qquad y\left(۴\right) = -۳$$

حل

برای استفاده از قضیه ، باید معادله دیفرانسیل را به صورت مناسب که در قضیه گفته شده است ، بنویسیم.
پس لازم است طرفین را بر ضریب مشتق تقسیم کنیم.

$$y' + \frac{۲}{t^{۲} - ۹}y = \frac{\ln\left|۲۰ - ۴t\right|}{t^{۲} - ۹}$$

حالا باید پیدا کنیم که دو تابع ، کجا پیوسته نیستند. $p(t)$ در $t = \pm ۳$ پیوسته نیست. زیر در این نقاط ، مخرج صفر است. همچنین $g(t)$ در $t = \pm ۳$ پیوسته نیست. همچنین در $t = ۵$ تابع $g(t)$ پیوسته نیست ، زیرا برای $t = ۵$ لگاریتم صفر خواهیم داشت. البته اینجا لازم نیست نگران لگاریتم منفی باشیم ، بخاطر قدر مطلق. با در دست داشتن این نقاط ، چهار بازه خواهیم داشت که در آنها هر دو $p(t)$ و $g(t)$ پیوسته هستند. این چهار بازه عبارتند از

$-\infty < t < -3 \qquad -3 < t < 3 \qquad 3 < t < 5 \qquad 5 < t < \infty$

نقاط انتهایی هر بازه ، نقاطی هستندکه حد اقل یکی از تابع ها در آنجا پیوسته نیست. این ضمانت می کند که هر دو تابع در هر کدام از بازه ها ، پیوسته هستند.

در نهایت ، اجازه دهید بازه معتبر واقعی را پیدا کنیم. بازه معتبر واقعی ، آن است که شامل $t_0 = ۴$ است. پس بازه معتبر برای مساله با مقدار اولیه مطابق زیر است.

$$3 < t < 5$$

باید مواظب باشیم که فورا نتیجه گیری نکنیم که سه بازه در مثال بالا ، معتبر هستند. زیرا باید مقدار اولیه را هم در نظر بگیریم. اگر مقدار اولیه تغییر دهیم ، بازه معتبر هم ممکن است تغییر کند.

قضیه ۲

مساله با مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید.

$$\boldsymbol{y' = f(t,y) \quad y(t_0) = y_0}$$

اگر $\boldsymbol{f(t,y)}$ و $\boldsymbol{\frac{\partial f}{\partial y}}$ تابع های پیوسته در یک سیستم مختصات مستطیلی

$$\boldsymbol{\alpha < t < \beta, \gamma < y < \delta}$$

که شامل نقطه $\boldsymbol{(t_0, y_0)}$ باشد ، پس یک جواب منحصر به فرد برای مساله با مقدار اولیه در بازه $\boldsymbol{t_0 - h < t < t_0 + h}$ که مشتمل $\boldsymbol{\alpha < t < \beta}$ ، است ، وجود دارد.

این قضیه ، بر عکس قضیه قبل ، نمی توان برای پیدا کردن بازه معتبر استفاده کرد. اما ، میدانیم یک جواب منحصر به فرد وجود دارد ، اگر شرایط قضیه بر قرار باشد ، اما برای پیدا کردن بازه معتبر ، احتیاج به جواب داریم. همچنین ، توجه داشته باشید که برای معادلات دیفرانسیل غیر خطی به نظر می‌رسد که مقدار y_0 ممکن است روی بازه معتبر اثر بگذارد.

مثال ۲

تمام جوابهای ممکن مساله با مقدار اولیه زیر را مشخص کنید.

$$y' = y^{\frac{1}{3}} \quad y(0) = 0$$

حل

ابتدا باید توجه کنید که معادله دیفرانسیل شرایط قضیه را بر قرار نمی کند.

$$f(y) = y^{\frac{1}{3}} \qquad \frac{df}{dy} = \frac{1}{3y^{\frac{2}{3}}}$$

پس، تابع در هر بازه ای پیوسته است. اما مشتق در $y = 0$ پیوسته نیست. و لذا در هر بازه ای که شامل $y = 0$ باشد ، مشتق ، پیوسته نیست. برای این که بتوانیم قضیه را بکار بریم ، هر دوتابع باید در بازه ای که شامل $y_0 = 0$ است ، پیوسته باشند. و این برای ما مساله است زیرا $y_0 = 0$ را داریم.
پس اجازه دهید ، روی مساله کار کنیم. این معادله دیفرانسیل ، تفکیک پذیر است و تا حدودی حل آن ساده است.

$$\int y^{\frac{1}{3}} dy = \int dt$$

$$\frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} = t + C$$

با بکار بردن مقدار اولیه داریم $C = 0$ است. پس جواب مطابق زیر است.

$$\frac{۳}{۲}y^{\frac{۲}{۳}} = t$$

$$y^{\frac{۲}{۳}} = \frac{۲}{۳}t$$

$$y^{۲} = \left(\frac{۲}{۳}t\right)^{۳}$$

$$y(t) = \pm\left(\frac{۲}{۳}t\right)^{\frac{۳}{۲}}$$

پس دو جواب ممکن بدست آوردیم. هر دوجواب ، معادله دیفرانسیل و شرط اولیه را بر قرار می کنند.
همچنین یک جواب سوم هم برای مساله با شرط اولیه داریم. $y(t) = 0$ هم یک جواب است که شرط اولیه را بر قرار می کند.

مثال ۳

بازه معتبر برای مساله با مقدار اولیه زیر را مشخص کنید و وابستگی آن به مقدار y_0 بگویید.

$$y' = y^{۲} \qquad y(0) = y_0$$

حل

قبل از هر چیز باید توجه کنید که این معادله دیفرانسیل ، خطی نیست ، و هر دو شرایط قضیه ۲ را دارا است ، پس یک جواب منحصر به فرد برای مساله با مقدار اولیه برای هر مقدار ممکن y_0 دارد.
همچنین توجه داشته باشید که از ما خواسته شده که هر وابستگی که بازه معتبر به مقدار y_0 دارد ، بیان کنیم. این دقیقا تفاوت بین معادله دیفرانسیل خطی و غیر خطی را نشان می دهد. در معادله دیفرانسیل خطی ، بازه های معتبر وابستگی به مقدار y_0 ندارد. بازه معتبر معادله دیفرانسیل غیر خطی به مقدار y_0 بستگی دارد.
پس اجازه دهید ابتدا مساله با مقدار اولیه را حل کنیم و چند بازه معتبر پیدا کنیم.
اولا ، اگر $y_0 = 0$ باشد ، پس $y(t) = 0$ جواب است و در این صورت بازه معتبر مطابق زیر است.

$$-\infty < t < \infty$$

لذا برای بقیه مساله ، فرض می کنیم $y_0 \neq 0$ است. حالا معادله دیفرانسیل ، تفکیک پذیر است ، پس جواب کلی را پید می کنیم.

$$\int y^{-۲}dy = \int dt$$

$$-\frac{۱}{y} = t + C$$

با استفاده از مقدار اولیه داریم.

$$C = -\frac{۱}{y_0}$$

پس جواب مطابق زیر است.

$$-\frac{۱}{y} = t - \frac{۱}{y_0}$$

حالا که یک جواب مساله با مقدار اولیه داریم ، می توانیم برای پیدا کردن بازه معتبرشروع کنیم.
با توجه به جواب ، ملاحظه می کنیم که تنها مساله ، تقسیم بر صفر است در

$$t = \frac{۱}{y_0}$$

این نتیجه می شود که دو بازه معتبر محتمل داریم.

$$-\infty < t < \frac{۱}{y_0}$$

$$\frac{۱}{y_0} < t < \infty$$

بازه معتبر واقعی ، آن بازه ای است که شامل $t_0 = 0$ باشد. این بستگی به مقدار y_0 دارد. اگر $y_0 < 0$ باشد ، پس $0 < \frac{۱}{y_0}$ است ، پس بازه دوم در بالا شامل $t_0 = 0$ است. به همین ترتیب ، اگر $y_0 > 0$ باشد ، پس $\frac{۱}{y_0} > 0$ است و در این صورت بازه اول شامل $t_0 = 0$ است.
این سبب می شود که بازه های معتبر زیر را داشته باشیم.
اگر $y_0 > 0$ باشد ، پس $-\infty < t < \frac{۱}{y_0}$ بازه معتبر است.
اگر $y_0 = 0$ باشد ، پس $-\infty < t < \infty$ بازه معتبر است.
اگر $y_0 < 0$ باشد ، پس $\frac{۱}{y_0} < t < \infty$ بازه معتبر است.

بخش ۸ .۲ کار برد های معادلات دیفرانسیل مرتبه اول Modeling With First Order DE’S

۱ ـ مسائل مربوط به ترکیب مایعات Mixing Problems

مثال ۱

در یک برکه ۵۰۰ ، ۰۰۰ گالن آب پاک وجود دارد ، یک راه خروجی هم دارد که در هر روز ۱۰,۰۰۰ گالن آب از آن خارج می شود. از طریق یک مجرا ، روزی ۱۲,۰۰۰ گالن آب الوده وارد استخر می شود. میزان آلودگی این آب ورودی ۲ گرم در هر گالن است. یک معادله دیفرانسیل پیدا کنید که این مراحل را نشان می دهد و سپس معین کنید بعد از ۱۰ روز غلظت آلودگی برکه چقدر است.

حل

فرض می کنیم $x(t)$ مقدار آلودگی در استخر بر حسب گرم بعد از t روز باشد. از چپ به راست

میزان آلودگی خروجی − میزان آلودگی ورودی = میزان آلودگی

برای پیدا کردن میزان الودگی ورودی داریم.

$$\frac{\text{گرم}}{\text{روز}}=\frac{\text{گالن}}{\text{روز}}\times\frac{\text{گرم}}{\text{گالن}}=\frac{۱۲,۰۰۰}{۱}\times\frac{۲}{۱}=۲۴,۰۰۰\ \text{گرم در روز}$$

برای پیدا کردن میزان آلودگی خروجی ، توجه دارید که در ابتدا در استخر ۵۰۰,۰۰۰ گالن آب وجود دارد و سطح آب به میزان ۲,۰۰۰ گالن در روز افزایش می یابد. پس مجموع گالن های آب در استخر بعد از t روز ، مطابق زیر است.

$$\text{سطح آب بر حسب گالن}=۵۰۰,۰۰۰+۲,۰۰۰\,t$$

برای میزان آلودگی خروجی داریم.

$$\frac{\text{گرم}}{\text{روز}}=\frac{\text{گالن}}{\text{روز}}\times\frac{\text{گرم}}{\text{گالن}}=\frac{۱۰,۰۰۰}{۱}\times\frac{x}{۵۰۰۰۰۰+۲۰۰۰\,t}$$

$$=\frac{۱۰\,x}{۵۰۰+۲t}\ \text{گرم در روز}$$

اینها را که روی هم بریزیم ، داریم.

$$\frac{dx}{dt}=۲۴\,۰۰۰-\frac{۱۰\,x}{۵۰۰+۲t}$$

این یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول است. با

$$p(t)=\frac{۱۰\,x}{۵۰۰+۲t}\quad \text{و}\quad g(t)=۲۴\,۰۰۰$$

$$\mu=e^{\int\frac{۱۰}{۵۰۰+۲t}}$$

$$=e^{۵\,\ln(۵۰۰+۲t)}=\left(۵۰۰+۲t\right)^{۵}$$

طرفین را در عامل انتگرال گیری ضرب می کنیم.

$$\left(\left(۵۰۰+۲t\right)^{۵}x\right)'=۲۴\,۰۰۰\left(۵۰۰+۲t\right)^{۵}$$

حالا از طرفین انتگرال می گیریم.

$$(500+2t)^{5}x = 2000\,(500+2t)^{6} + C$$

$$x = 2000\,(500+2t) + \frac{C}{(500+2t)^{5}}$$

حالا مقدار اولیه را بکار می بریم.

$$x = 2000\,(500) + \frac{C}{(500)^{5}}$$

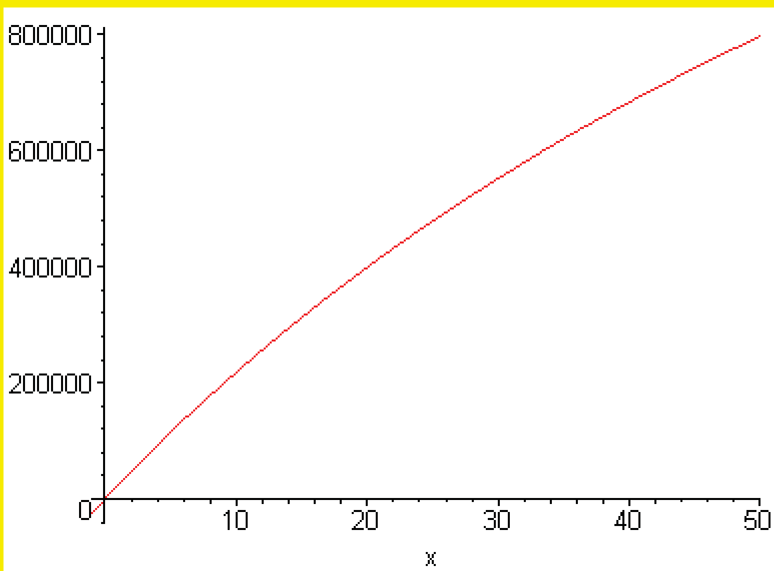
$$C = -3/125 \times 10^{19}$$

حالا $x(10)$ را محاسبه می کنیم. یعنی الودگی بعد از ۱۰ روز.

$$x = 2000\left(500+2(10)\right) + \frac{-3/125 \times 10^{19}}{\left(500+2(10)\right)^{5}}$$

$$= 218072 \quad \text{گرم}$$

این هم نمودار



در مثال بعد ، مدل زیر را بکار می بریم. از چپ به راست.

نرخ تغییر $Q(t)$

نرخی که $Q(t)$ از مخزن خارج میشود − نرخی که $Q(t)$ وارد مخزن میشود =

توجه منظور از کلمه نرخ ، یعنی میزان یا سرعت

در فرمول بالا، نرخ تغییر $Q(t)$ یعنی $Q'(t) = \frac{dQ}{dt}$

نرخی که $Q(t)$ وارد مخزن می شود یعنی

غلظت ماده در مایعی که وارد می شود × سرعتی که مایع وارد می شود

نرخی که $Q(t)$ از مخزن خارج می شود یعنی

غلظت ماده در مایع که خارج می شود × سرعتی که مایع خارج می شود

مثال ۲

یک مخزن ۱۵۰۰ گالنی ، دارای ۶۰۰ گالن آب و ۵ پوند نمک است که در آن آب حل شده است. آب با سرعت ۹ گالن در ساعت وارد مخزن می شود ، غلظت نمک آبی که وارد مخزن می شود

$$\frac{۱}{۵}\left(۱+\cos(t)\right)$$

پوند در هر گالن است. اگر یک محلول کاملا مخلوط شده ، با سرعت ۶ گالن در ساعت از مخزن خارج شود ، هنگامی که مخزن لب ریزمی شود ، چه مقدار نمک در گالن است؟

حل

پس ، فرض ما این است که آن لحظه ای که آب وارد مخزن می شود ، به طریقی ، بطور یکنواخت سر تا سر مخزن پخش می شود. اما ، باید توجه داشت که این فقط یک فرض است و نه یک حقیقت.

ابتدا ، غلظت نمک در ابی که از مخزن خارج می شود ، مشخص می کنیم.

$$\text{غلظت}=\frac{\text{مقدار نمک در مخزن در هر لحظه t}}{\text{حجم آب در مخزن در هر لحظه t}}$$

مقدار نمک در هر لحظه $Q(t)$ است. حجم آب هم به اسانی می توان پیدا کرد. هنگام شروع ۶۰۰ گالن داریم و هرساعت ۹ گالن وارد و ۶ گالن خارج می شود. پس اگر t را بر حسب ساعت حساب کنیم ،هر ساعت ۳ گالن وارد مخزن می شود ، یا به عبارتی در هر لحظه t مقدار $۶۰۰+۳t$ گالن آب وارد مخزن می شود.

پس ، مساله با مقدار اولیه می شود

$$Q'(t)=(۹)\left(\frac{۱}{۵}\left(۱+\cos(t)\right)\right)-(۶)\left(\frac{Q(t)}{۶۰۰+۳t}\right)\qquad Q(0)=۵$$

$$Q'(t)=\frac{۹}{۵}\left(۱+\cos(t)\right)-\frac{۲Q(t)}{۶۰۰+t}\qquad Q(0)=۵$$

این یک معادله دیفرانسیل خطی است. حل آن مشکل نیست. بیشترین قسمت آنرا حل می کنیم و بقیه را به شما واگذار می کنیم.

$$Q'(t)+\frac{۲Q(t)}{۲۰۰+t}=\frac{۹}{۵}\left(۱+\cos(t)\right)$$

$$\mu(t)=e^{\int\frac{۲}{۲۰۰+t}dt}=e^{۲\ln(۲۰۰+t)}=(۲۰۰+t)^{۲}$$

$$\int\left((۲۰۰+t)^{۲}Q(t)\right)'dt=\int\frac{۹}{۵}(۲۰۰+t)^{۲}\left(۱+\cos(t)\right)dt$$

$$(200+t)^2 Q(t)=\frac{9}{5}\left(\frac{1}{3}(200+t)^3+(200+t)^2\sin(t)+2(200+t)\cos(t)-2\sin(t)\right)+c$$

$$Q(t)=\frac{9}{5}\left(\frac{1}{3}(200+t)+\sin(t)+\frac{2\cos(t)}{200+t}-\frac{2\sin(t)}{(200+t)^2}\right)+\frac{c}{(200+t)^2}$$

پس جواب کلی را پیدا کردیم. حالا مقدار اولیه را بکار می بریم. تا c پیدا شود.

$$5=Q(0)=\frac{9}{5}\left(\frac{1}{3}(200)+\frac{2}{200}\right)+\frac{c}{(200)^2} \qquad c=-4600720$$

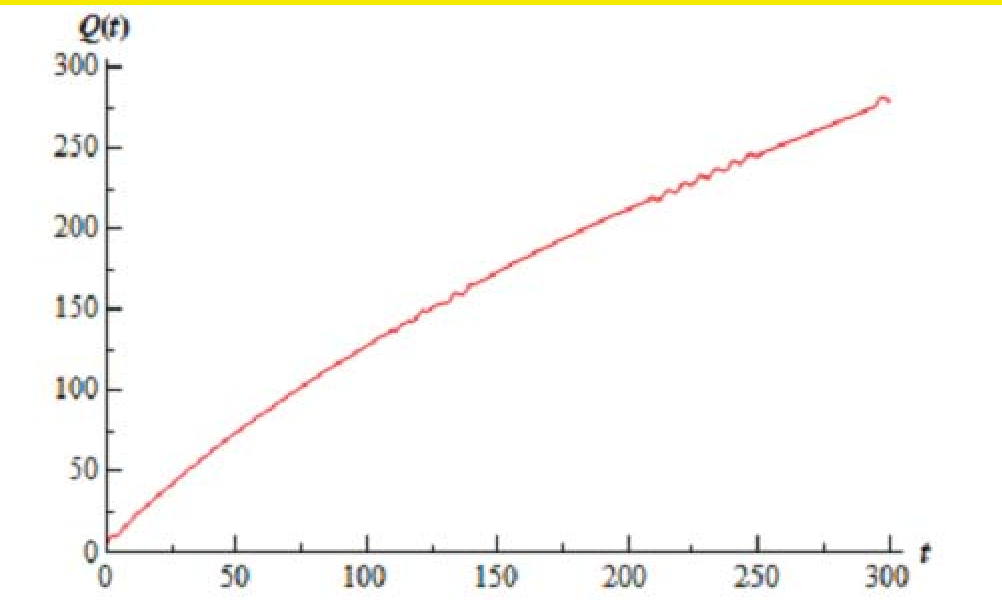
پس مقدار نمک در مخزن در هر زمانی از t مطابق زیر است.

$$Q(t)=\frac{9}{5}\left(\frac{1}{3}(200+t)+\sin(t)+\frac{2\cos(t)}{200+t}-\frac{2\sin(t)}{(200+t)^2}\right)-\frac{4600720}{(200+t)^2}$$

با رسم نمودار توسط نرم افزار ، مخزن در $t = ۳۰۰$ ساعت ، لبریز می شود. مقدار نمک در مخزن در آن زمان مطابق زیر است.

$$Q(300)=279.797 \text{ lbs}$$

این هم نمودار نمک در مخزن قبل از لبریز شدن.



توجه داشته باشید که در تمام قسمت های نمودار ، باید نوسان هایی داشته باشیم. ، همانطور که بین ۲۰۰ و ۲۵۰ مشاهده می شود.

مثال ۳

جمعیت حشرات در یک منطقه ، به نسبت جمعیت حاضر ، رشد می کنند. در صورت عدم عوامل خارجی ، جمعیت این حشرات در مدت دو هفته ، سه برابر می شود. هر روز تعداد ۱۵ حشره وارد منطقه می شود و ۱۶ حشره توسط دیگر حشرات خورده می شوند ، ۷ حشره هم به علت های طبیعی می میرند. اگر در ابتدا ۱۰۰ حشره وجود داشته باشد ، آیا این جمعیت پایدار می ماند و اگر پایدار نمی ماند ، چه زمانی این جمعیت از بین می رود؟

حل

ابتدا به میزان یا نرخ تولد می پردازیم. گفته شده است که حشرات به نسبت جمعیت حاضر متولد می شوند. این یعنی نرخ تولد را می توان به صورت زیر نوشت.

$$rP$$

اینجا r یک عدد ثابت مثبت است که باید پیدا کنیم. حالا با این اطلاعات ، مساله با مقدار اولیه را می نویسیم.

$$P' = (rP+15)-(16+7) \qquad P(0)=100$$
$$P' = rP-8 \qquad P(0)=100$$

ملاحظه می کنید که در خط اول اعداد را در پرانتز گذاشتیم تا مشخص شود کدام فقره وارد جمعیت می شود و کدام خارج می شود. همچنین ، اینجا سه برابر شدن جمعیت را هنوز بکر نبرده ایم. عدم عامل خارجی ، یعنی تنها چیزی که باید مورد توجه قرار دهیم ، میزان زاد و ولد است.

حالا ، سه برابر شدن جمعیت ، چه نقشی بازی می کند؟ خوب ، بدون پیدا کردن r نمی توانیم مساله را حل کنیم. سه برابر شدن جمعیت در مدت دو هفته را برای پیدا کردن r بکار می بریم. در صورت عدم عامل خارجی ، معادله دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$P' = rP \qquad P(0)=100 \qquad P(14)=300$$

ملاحظه می کنید که دو هفته را ۱۴ روز حساب کرده ایم. در این صورت ، تغییرات در هفته می شود ۵۶− بجای ۸− هر روز. زیرا در خط اول در فرمول بالا ، تغییرات را به روز حساب کردیم.

بر می گردیم به معادله دیفرانسیل و با توجه به عدم عوامل خارجی ، این معادله دیفرانسیل ، خطی و تفکیک پذیر است. یعنی معادله زیر

$$P' = rP$$

معادله بالا را به هر طریق که حل کنید ، خواهید داشت.

$$P(t) = c\mathbf{e}^{rt}$$

مقدار اولیه را یعنی $P(0)=100$ بکار می بریم. پس داریم. $c = 100$

حالا شرط دوم را یعنی $P(14)=300$ بکرر می بریم ، پس داریم.

$$300 = P(14) = 100\mathbf{e}^{14r} \qquad 300 = 100\mathbf{e}^{14r}$$

باید r را پیدا کنیم. ابتدا طرفین را بر ۱۰۰ تقسیم می کنیم و سپس نمایی می کنیم.

$$3 = e^{14r}$$
$$\ln 3 = \ln e^{14r}$$
$$\ln 3 = 14r$$
$$r = \frac{\ln 3}{14}$$

در بالا از این حقیقت که $\ln e^{g(x)} = g(x)$ استفاده کردیم. حالا که r را داریم ، به معادله دیفرانسیل اصلی بر می گردیم و به صورت زیر باز نویسی می کنیم.

$$P' - \frac{\ln 3}{14}P = -8 \qquad\qquad P(0) = 100$$

حل معادله بالا آسان است. ابتدا μ را پیدا می کنیم.

$$\mu(t) = e^{\int -\frac{\ln 3}{14}dt} = e^{-\frac{\ln 3}{14}t}$$

حالا معادله را حل می کنیم.

$$\int \left(Pe^{-\frac{\ln 3}{14}t}\right)' dt = \int -8e^{-\frac{\ln 3}{14}t}\, dt$$
$$Pe^{-\frac{\ln 3}{14}t} = -8\left(-\frac{14}{\ln 3}\right)e^{-\frac{\ln 3}{14}t} +$$
$$P(t) = \frac{112}{\ln 3} + ce^{\frac{\ln 3}{14}t}$$

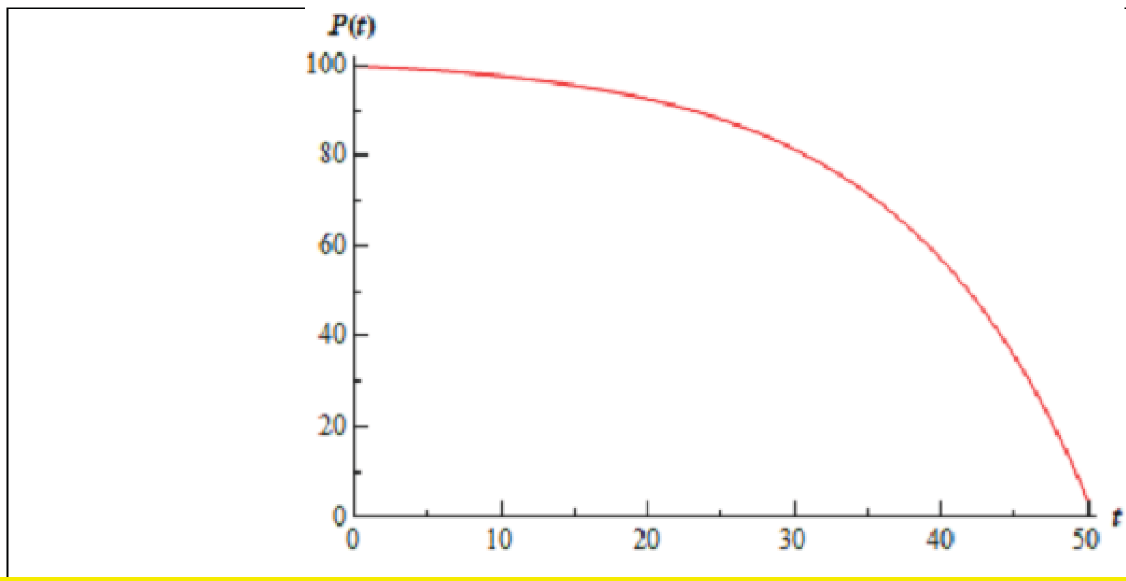
با استفاده از شرط اولیه داریم.

$$P(t) = \frac{112}{\ln 3} + \left(100 - \frac{112}{\ln 3}\right)e^{\frac{\ln 3}{14}t} = \frac{112}{\ln 3} - 1.94679e^{\frac{\ln 3}{14}t}$$

توان مثبت داریم. پس به طرف $+\infty$ می رود. اما ضریب منفی است ، پس تمام جمعیت در نهایت به طرف منفی می رود. مسلم است که جمعیت نمی تواند منفی باشد ، اما برای این که جمعیت به طرف منفی برود باید از صفر عبور کند. به عبارت دیگر ، تمام حشرات می میرند. پس زنده نمی مانند. پس معادله زیر را داریم ، تا پیدا کنیم چه زمانی همه حشرات می میرند.

$$0 = \frac{112}{\ln 3} - 1.94679e^{\frac{\ln 3}{14}t} \qquad \Rightarrow \qquad t = 50.4415\,\text{days}$$

پس حشرات تقریبا هفت هفته دوام می آورند. این هم نمودار



شئی در حال سقوط Falling Object

اگر بخاطر داشته باشید در ابتدای این دفتر در مورد سقوط اجسام صحبت کردیم. در بخش میدان های راستا قانون دوم حرکت نیوتن ذکر کدیم. یعنی

$$mv' = F\left(t, v\right)$$

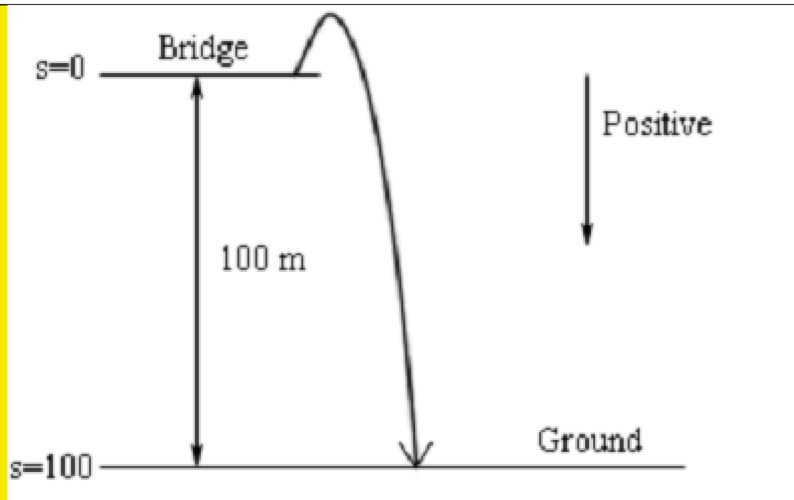
دو نیرویی که مورد توجه قرار می دهیم ، نیروی جاذبه و مقاومت هوا است. باید مشخص کنیم کدام نیرو را مثبت و کدام را منفی تلقی کنیم.

مثال ۴

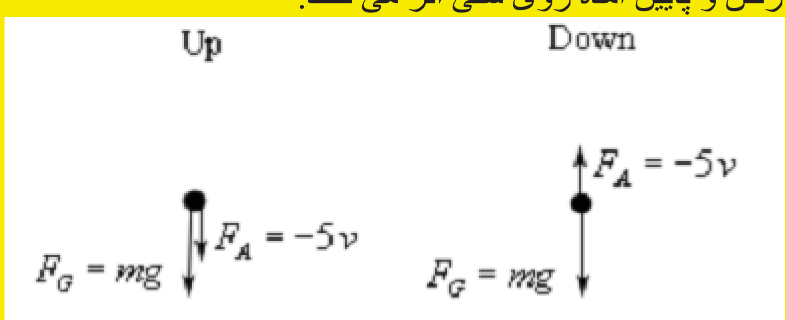
یک شئی به وزن ۵۰ کیلو گرم از دهانه یک توپ بطور مستقیم به طرف بالا پرتاب می شود. اگر سرعت اولیه این شئی ۱۰ متر در ثانیه و محل پرتاب شئی روی یک پل به ارتفاع ۱۰۰ باشد و مقاومت هوا $5v$ باشد. سرعت شئی هنگام بر خورد با زمین چقدر است؟

حل

ابتدا توجه داشته باشید ، وقتی می گوییم بطور مستقیم پرتاب می شود ، منظور این است که هنگام برگشت شئی به طرف زمین ، با بدنه پل بر خورد نمی کند. این هم تصویر این مساله



معنی لغات انگلیسی که در تصویر بالا آمده به شرح زیر است.
زمین Ground
مثبت Positive
پل Bridge
متر Meter
موقعیت Situation
ضمنا m حرف اول $meter$ است و s حرف اول $situation$ است.
حالا به فرض هایی که کرده ایم می پردازیم.
چون بیشتر حرکت شئی به طرف زمین است ، پس هر نیرویی که به طرف پایین اثر می کند ، مثبت است.
همچنین توجه کنید که موقعیت یا مکان روی پل را صفر فرض کردیم. پس مکان روی زمین ۱۰۰ است.
در حقیقت دو موقعیت داریم. یکی هنگامی که شئی به طرف بالا می رود و دیگری ، هنگامی که شئی به طرف پایین حرکت می کند.
پس باید برای هر کدام یک مساله با مقدار اولیه بسازیم. موقعیت اول هنگامی است که شئی در حال بالا رفتن است و موقعیت دوم هنگامی است که شئی به طرف پایین حرکت می کند. باید هر دو را در نظر بگیریم و برای هر کدام یک مساله با مقدار اولیه بسازیم. این دو را با هم انجام می دهیم. در زیر نیرو هایی که در راه بالا رفتن و پایین آمده روی شئی اثر می کنند.



توجه دارید که مقاومت هوا ، باید در هر دو حالت منفی باشد. هنگامی که شئی به طرف بالا می رود سرعت یعنی v که حرف اول $velocity$ است ، منفی است. بطوری که روی هم رفته نتیجه اثر دو

نیرو به طرف پایین مثبت می شود. به همین طریق ، هنگامی که شئی به طرف پایین حرکت می کند سرعت و در نتیجه v مثبت است ، لذا مقاومت هوا باید منفی باشد تا نشان داده شود که به طرف بالا عمل می کند. پس مساله با مقدار اولیه هر دو حالت به صورت زیر است.

Up	Down
$mv' = mg - 5v$	$mv' = mg - 5v$
$v(0) = -10$	$v(t_0) = 0$

کلمه Up یعنی به طرف بالا و $Down$ یعنی به طرف پایین. در مساله با مقدار اولیه در سمت راست ، t_0 زمانی است که شئی در بالا ترین نقطه است و آماده برای حرکت به طرف پایین. ملاحظه می کنید که در این لحظه ، سرعت صفر است. همچنین در مساله با مقدار اولیه سمت چپ ، سرعت یعنی v باید منفی باشد ، چون سرعت اولیه به طرف بالا است.

در این حالت معادله دیفرانسیل هر دو یکی است ، همانطور که در بالا ملاحظه می کنید.

پس اجازه دهید اعداد را در معادله ها بگذاریم. توجه دارید که قبلا هم در ابتدای این دفتر گفتیم نیروی جاذبه $g = ۹ / ۸$ متر در مربع ثانیه است یعنی $\frac{m}{s^{۲}}$

در ضمن ، طرفین را بر جرم جسم تقسیم می کنیم. زیرا در هر حال برای عملیات بعدی این کار را انجام دهیم.

$$v' = 9.8 - \frac{5v}{50} = 9.8 - \frac{v}{10} \qquad v(0) = -10$$

معادله بالا یک معادله دیفرانسیل خطی ساده است. پس مراحل حل آن به خواننده و گذار می شود. با حل معادله به معادله زیر می رسیم که سرعت شئی در زمان t نشان می دهد.

$$v(t) = 98 - 108\mathbf{e}^{-\frac{t}{10}}$$

خوب ، حالا می خواهیم سرعت شئی هنگامی که به زمین می رسد ، پیدا کنیم. البته قبل از پاسخ به این سئوال ، باید بدانیم شئی در چه زمانی به زمین می‌رسد. برای این کار باید تابع مکان یا موقعیت Situation را پیدا کنیم.

$$s(t) = \int v(t)\,dt = \int 98 - 108\mathbf{e}^{-\frac{t}{10}}\,dt = 98t + 1080\mathbf{e}^{-\frac{t}{10}} + c$$

حالا $s(0) = 0$ را بکار می بریم تا c پیدا شود. پس داریم $c = -۱۰۸۰$ پس موقعیت در هر زمان مطابق زیر است. موقعیت یعنی مکان

$$s(t) = 98t + 1080\mathbf{e}^{-\frac{t}{10}} - 1080$$

برای پیدا کردن زمانی که شئی به زمین می رسد ، باید معادله زیر را حل کنیم.

$$100 = 98t + 1080\mathbf{e}^{-\frac{t}{10}} - 1080 \qquad t = -3.32203,\ 5.98147$$

اینجا دو جواب پیدا کردیم. اما چون در $t = 0$ شروع کردیم ، پس جواب منفی صحیح نیست . پس شئی در $t = ۵ / ۹۸۱۴۷$ به زمین می رسد. و در نهایت ، سرعت شئی هنگامی که به زمین می رسد مطابق زیر است.

$$v(5.98147) = 38.61841$$

مدار های برقی Electrical Circuits

یک مولد برق ، مثلا یک باطری یا جنراتور ، ایجاد جریان برق در یک مدار بسته می کند ، و این جریان ایجاد افت ولتاژ Voltage Drop سر تا سرهر مقاوم Resistor القا گر Inductor و خازن Capacitor در مدار می شود. قانون مدار کامل کرشهف Kirchhoff's Loop Rule می گوید در هر شبکه حلقه بسته، کل ولتاژ حلقه برابر با مجموع تمام افت ولتاژهای موجود در آن است. به عبارت دیگر، مجموع تمام ولتاژ های حلقه باید برابر با صفر باشد.

۱ – افت ولتاژ در یک مقاوم مطابق زیر است.

$$E_R = R_i$$

اینجا R عدد ثابت تناسب است ، بنام مقاومت. و i جریان برق است.

۲ – افت ولتاژ سرتاسر القا گر مطابق زیر است.

$$EL = Li'$$

اینجا L عدد ثابت تناسب است بنام القا گر و i جریان برق است.

۳ – افت ولتاژ در خازن ، مطابق زیر است.

$$E_C = \frac{۱}{C}q$$

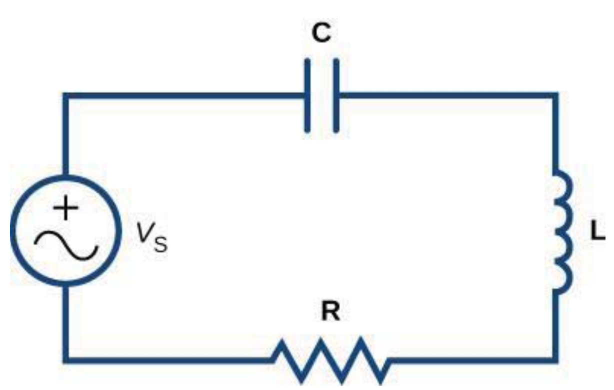
اینجا C عدد ثابت تناسب است بنام ظرفیت خازن Capacitance و q شارژ لحظه ای در خازن است.

رابطه بین i و q مطابق زیر است.

$$i = q'$$

برای اندازه گیری ولتاژ E ولت v, برای جریان برق آمپر A, برای شارژ q کولن C, برای اندازه گیری مقاومت R اهم Ω و برای اندازه گیری القا L هنری H و برای ظرفیت خازن فراد F بکار می بریم.

مدار زیر را ملاحظه کنید.



با استفاده از قانون مدار کامل کر شهف برای مدار بالا ، فرض می کنیم E نیروی موله برق توسط جنراتور باشد ، پس داریم.

$$E_L + E_R + E_C = E$$

با جایگزین کردن عبارت های E_L, E_i, E_R در معادله بالا داریم.

$$Li' + Ri + \frac{۱}{C} q = E$$

اگر خازن در مدار نباشد ، داریم.

$$Li' + R_i = E$$

معادله بدست آمده بالا ، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول بر حسب i است. به این مدار گفته می شود یک مدار L

حالا فرض می کنیم در مدار ، القا گر نباشد اما یک خازن و یک مقاوم وجود داشته باشد. پس $L = 0$ و $R \neq 0$ و $C \neq 0$ است. لذا می توان معادله را به صورت زیر نوشت.

$$Rq' + \frac{۱}{C} q = E$$

معادله بالا یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول است. به آن می گویند **مدار RC** در هر دو حالت ، می توانیم یک مساله با مقدار اولیه بسازیم.

مثال ۵

یک مدار سری ، شامل یک مولد برق با قدرت $E = ۵۰ \sin ۲۰ tV$ ، یک مقاوم $۵\ \Omega$ و یک القاگر $۰/۴ H$ است. اگر جریان اولیه 0 باشد ، مطلوب است جریان در $t > ۰$

حل

در مدار ، یک مقاوم و یک القاگر داریم. پس معادله را بکار می بریم. افت ولتاژدر مقاوم مطابق زیر است.

$$E_R = R_i = ۵$$

افت ولتاژ در القاگر مطابق زیر است.

$$E_L = Li' = ۰/۴ i'$$

پس معادله به صورت زیر است.

$$0.4i' + 5i = 50 \sin 20t.$$

طرفین در بر $۰/۴$ تقسیم می کنیم.

$$i' + 12.5i = 125 \sin 20t.$$

چون جریان اولیه صفر است ، پس داریم. $i(0) = 0$ لذا می توانیم معادله را در پنج مرحله حل کنیم.

۱ – معادله دیفرانسیل را به صورت زیر می نویسیم.

$$i' + 12.5i = 125 \sin 20t$$

پس $p(t) = 12.5$ و $q(t) = 125 \sin 20t$ است.

۲ – عامل انتگرال گیری مطابق زیر است.

$$\mu(t) = e^{\int 12.5 dt} = e^{12.5t}$$

۳ – طرفین را در $\mu(t)$ ضرب می کنیم.

$$e^{12.5t}i' + 12.5e^{12.5t}i = 125e^{12.5t}\sin 20t$$

$$\frac{d}{dt}[ie^{12.5}t] = 125e^{12.5t}\sin 20t\,.$$

۴ – از طرفین انتگرال می گیریم.

$$\int \frac{d}{dt}[ie^{12.5t}]dt = \int 125e^{12.5t}\sin 20t dt$$

$$ie^{12.5t} = \left(\frac{250\sin 20t - 400\cos 20t}{89}\right)e^{12.5t} + C$$

$$i(t) = \frac{250\sin 20t - 400\cos 20t}{89} + Ce^{-12.5t}\,.$$

۵ – با استفاده از $v(0) = ۲$ مقدار C را پیدا می کنیم.

$$i(t) = \frac{250\sin 20t - 400\cos 20t}{89} + Ce^{-12.5t}$$

$$i(0) = \frac{250sin20(0) - 400cos20(0)}{89} + Ce^{-12.5(0)}$$

$$0 = -\frac{400}{89} + C$$

$$C = \frac{400}{89}.$$

پس جواب مساله با مقدار اولیه مطابق زیر است.

$$i(t) = \frac{250\sin 20t - 400\cos 20t + 400e^{-12.5t}}{89} = \frac{250\sin 20t - 400\cos 20t}{89} + \frac{400e^{-12.5t}}{89}.$$

جمله اول را می توان به صورت یک تابع کسینووس باز نویسی کرد . ابتدا در عبارت زیر ضرب و تقسیم می کنیم.

$$\sqrt{250^2 + 400^2} = 50\sqrt{89}$$

پس داریم.

$$\frac{250\sin 20t - 400\cos 20t}{89} = \frac{50\sqrt{89}}{89}\left(\frac{250\sin 20t - 400\cos 20t}{50\sqrt{89}}\right) = -\frac{50\sqrt{89}}{89}\left(\frac{8\cos 20t}{\sqrt{89}} - \frac{5\sin 20t}{\sqrt{89}}\right.$$

حالا زاویه حاد φ تعریف می کنیم بطوری که داشته باشیم.

$$\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{89}}$$

پس

$$\sin\varphi = \frac{5}{\sqrt{89}}$$

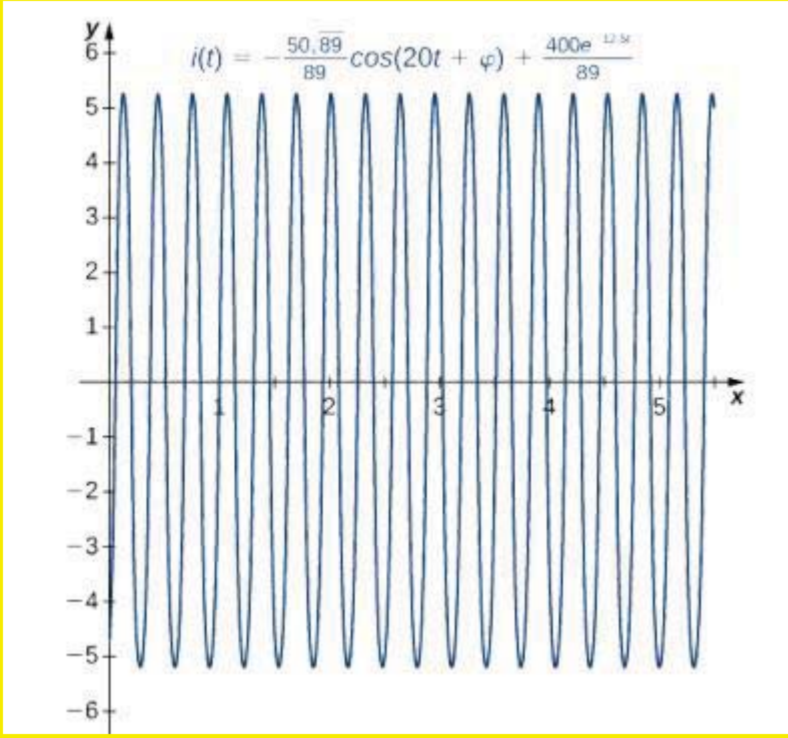
و

$$-\frac{50\sqrt{89}}{89}\left(\frac{8\cos 20t}{\sqrt{89}}-\frac{5\sin 20t}{\sqrt{89}}\right)=-\frac{50\sqrt{89}}{89}(\cos\varphi\cos 20t-\sin\varphi\sin 20t)=-\frac{50\sqrt{89}}{89}\cos(20t+\varphi).$$

لذا ، جواب را می توان به صورت زیر نوشت.

$$i(t)=-\frac{50\sqrt{89}}{89}cos(20t+\varphi)+\frac{400e^{-12.5t}}{89}$$

جمله دوم را جمله میرانی می گویند ، زیرا همین که t بیشتر می شود ، این جمله از بین می رود. گام جا بجا یی φ است و دامنه نوسان $\frac{50\sqrt{89}}{89}$ است. در زیر هم نمودار جواب ملاحظه می کنید.

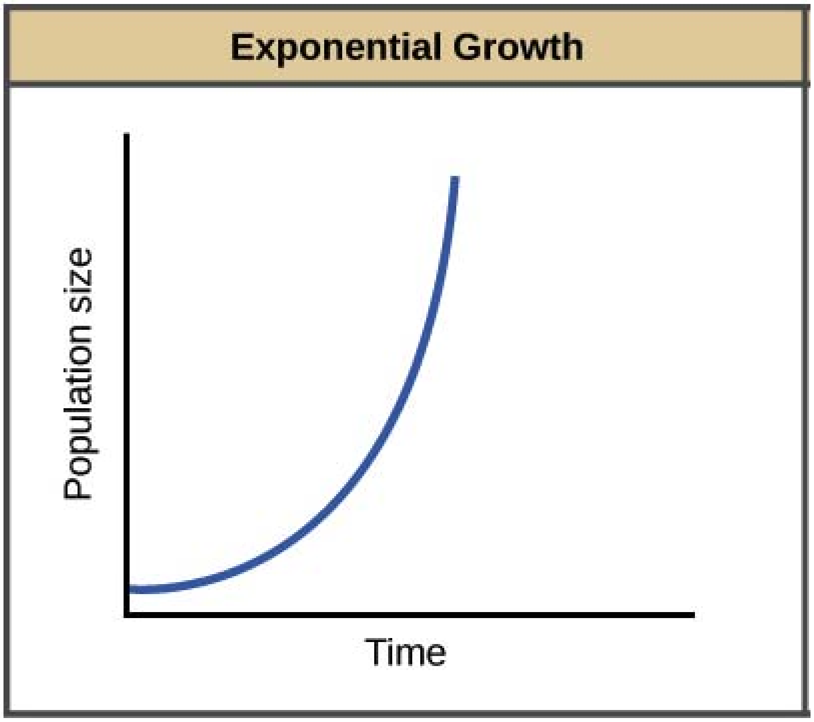


بخش ۲.۹ معادله تعادل جمعیت Population Balance Equation

در بخش ۲.۳ در مورد قانون رشد طبیعی و یا قانون رشد نمایی صحبت کردیم و گفتیم رشد جمعیت یک گروه ، انسان ، حیوان ، باکتری و غیرو بر اساس فرمول زیر رشد می کند.

$$y = P_0 e^{kl}$$

در فرمول بالا P_0 تعداد اولیه جمعیت است و k عدد ثابت است که باید بر اساس اطلاعات داده شده ، پیدا کنیم و به نرخ افزیش موسوم است. در بعضی از کتب ، بجای k حرف r و یا هر حرف دیگری ممکن است بکار برده شود. در رشد طبیعی و یا نمایی ، نمودار ، به صورت زیر است که تا بی نهایت ادامه دارد ، و نمودار به صورت حرف J لاتین است.



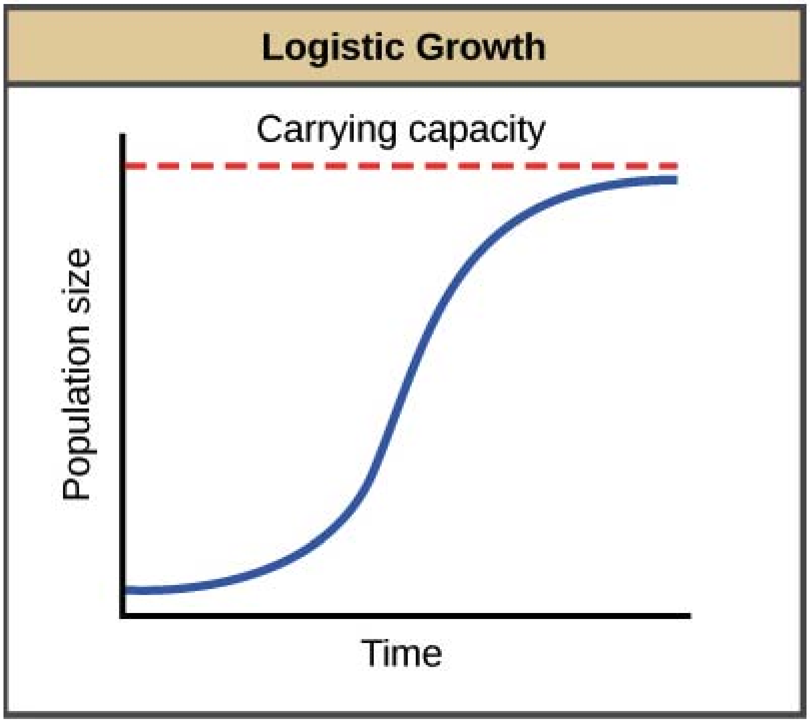
اما در زندگی حقیقی ، این قانون ، منطقی به نظر نمیرسد. مسلم است که رشد جمعیت نمی تواند تا مدت طولانی ادامه پیدا کند. کمبود مواد حیاتی ، مسکن ، بیماری های همه گیر و غیرو باعث می شوند که رشد جمعیت تا حد معینی افزایش یابد و سپس متوقف شود. به این نوع رشد ، می گویند **رشد منطقی** یا **Logistic growth**

متاسفانه استادن محترم مولفین کتب فارسی و سایت ها زحمت ترجمه کلمه logistic به خود هموار نمی کنند و همان کلمه را با حروف فارسی یا بهتر بگویم عربی می نویسند و می نویسند **رشد لجیستیکی**

نمودار رشد منطقی به صورت S است. یعنی تا حد معینی افزایش پیدا می کند و سپس این رشد متوقف می شود و نمودار ، تقریبا افقی می شود. معادله تعادل جمعیت و یا معادله رشد منطقی مطابق زیر است.

$$P' = r\left(۱ - \frac{P}{k}\right)P$$

در فرمول بالا r همان نرخ رشد است که در فرمول رشد نمایی دیدیم. یعنی r نرخ رشد است در غیاب عوامل محدود کننده. k **حد گنجایش Carrying Capacity** یا **سطح اشباع Saturation Level** نامیده می شود. در زیر نمودار معادله رشد منطقی را ملاحظه می کنید. خط قرمز افقی هم سطح اشباع است.



گفتیم معادله

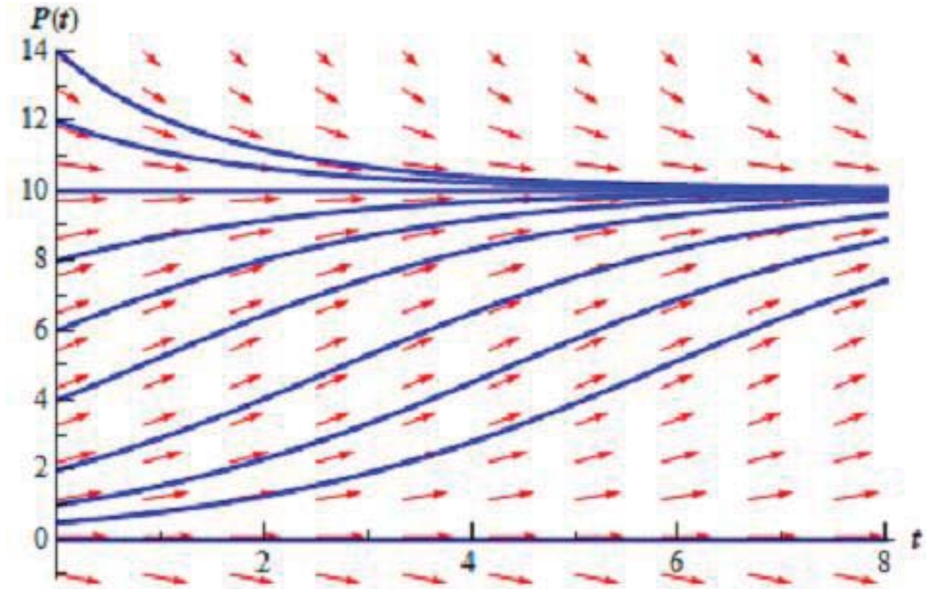
$$P' = r\left(۱ - \frac{P}{k}\right)P$$

یک معادله واقعی تر, ومنطقی تر برای رشد جمعیت است. برای این که ببینید این ادعا صحیح است ، اجازه دهید فرض کنیم $r = \frac{۱}{۲}$ و $k = ۱۰$ باشد. پس برای این مقادیر ، معادله منطقی می شود.

$$P' = \frac{۱}{۲}\left(۱ - \frac{P}{۱۰}\right)P$$

ملاحظه می کنید که مشتق بالا برای $P = 0$ و $P = ۱۰$ صفر است. این ها در حقیقت جواب های معادله دیفرانسیل هستند. این دو مقادیر یعنی $P = 0$ و $P = ۱۰$ را **جواب های تعادل** یا **جواب های موازنه** می گویند. **Equilibrium Solutions**

این هم میدان راستا برای این دو مقادیر.



ملاحظه می کنید که یک قسمت کوچک از P' منفی هم در نمودار آورده ایم. اما می دانید که مشتق منفی یا به عبارتی جمعیت منفی مصداق ندارد. همچنین در محور عمودی یعنی $P(t)$ یا به عبارتی ، جمعیت در زمان t عدد ۸ آمده ، که در حقیقت باید هزار یا میلیون فرض کرد.

اگر با جمعیت صفر شروع کنیم ، واضح است که رشد جمعیت هم نخواهیم داشت. همان طور که در $t = 0$ رشد جمعیت صفر است.

هچنین اگر با جمعیت $0 < P(0) < ۱۰$ شروع کنیم ، جمعیت رشد می کند ، اما همگامی که به ۱0 نزدیک می شود ، نمودار تقریبا افقی می شود

اگر با $P = ۱۰$ شروع کنیم ، جمعیت در همان حدود ۱۰ باقی می مأند.

اگر با جمعیت بیش از ۱۰ شروع کنیم ، جمعیت به طرف ۱۰ متمایل می شود و در ۱۰ متوقف می شود.

این موضوع به حقیقت نزدیک است. جمعیت نمی تواند برای همیشه ، بدون کران رشد کنند.

در نهایت ، جمعیت به حدی می رسد که منابع موجود در محیط ، دیگر کافی نیستند ، جمعیت را حفظ کنند و لذا رشد جمعیت کند می شود تا به آستانه و حد خود برسد.

همچنین اگر با جمعیتی شروع کنیم که بیش از توانایی محیط باشد ، جمعیت شروع به کاهش می کند تا به آستانه برسد.

در مثال و نمودار بالا ، آستانه ۱۰ است و همچنین مقدار k ۰ این همان نامی است که به k دادیم ، یعنی حد گنجایش یا حد اشباع. حد اشباع یک ناحیه ، حد اکثر جمعیت قابل تحمل برای آن ناحیه است.

پس معادله منطقی یا همان لجستیکی ، برای مسائل در مورد رشد جمعیت ، بهترین مدل است.

معادله منطقی یا لجستیکی ، یک نمونه از معادلات دیفرانسیل مستقل است. معادله های دیفرانسیل مستقل به شکل زیر هستند.

معادله دیفرانسیل مستقل Autonomous Differential Equation

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

تنها جایی که متغیر مستقل یعنی t ظاهر می شود ، در مشتق است.

تعریف

اگر $\frac{dy}{dt} = f(t,y)$ باشد ، پس برای بدست اوردن جوابهای تعادل ، $\frac{dy}{dt} = 0$ قرار می دهم و سپس معادله بدست امده را برای y حل می کنیم.

مثال ۱

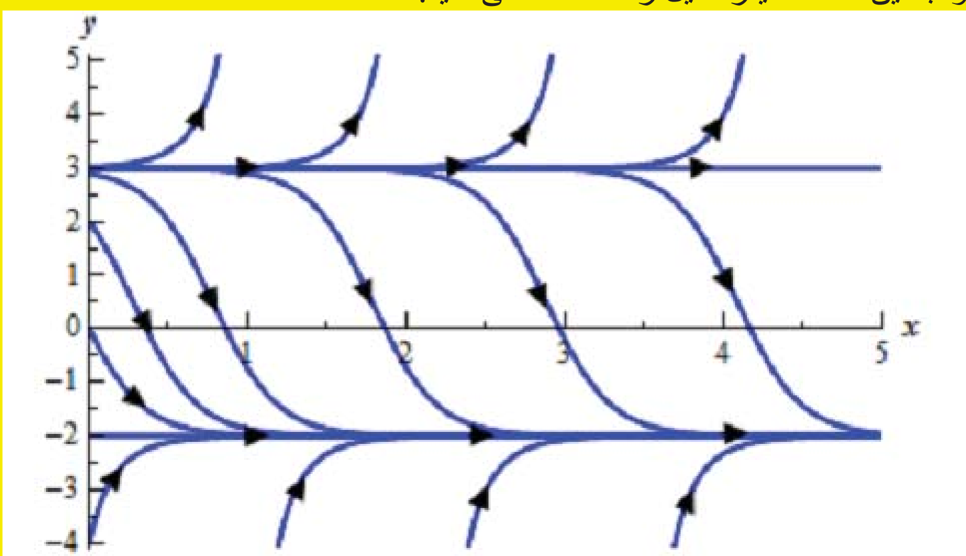
تمام جوابهای تعادل معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید و آنها را طبقه بندی کنید.

$$y' = y^{۲} - y - ۶$$

ابتدا ، جوابهای تعادل را پیدا می کنیم. برای این کار طرف راست را مساوی صفر قرار می دهیم.

$$y^{۲} - y - ۶ = (y - ۳)(y + ۲) = 0$$

پس دو جواب تعادل پیدا کردیم. هم $y = -۲$ و هم $y = ۳$ جوابهای تعادل هستند. در تصویر زیر ، نمودار دو جواب این معادله دیفرانسیل را ملاحظه می کنید.



نمودار چند جواب یک معادله دیفرانسیل ، مراحل طبقه بندی جواب ها را آسان می کند.

در این نمودار ، ملاحظه می کنید که جوابهایی که نزدیک $y = -۲$ هستند همگی به طرف آن حرکت می کنند و لذا $y = -۲$ خط مجانب جوابهای تعادل پایدار است .

جوابهایی که نزدیک $y = ۳$ هستند ، همگی از آن دور می شوند ، و لذا $y = ۳$ یک جواب تعادل نا پایدار است.

مثال ۲

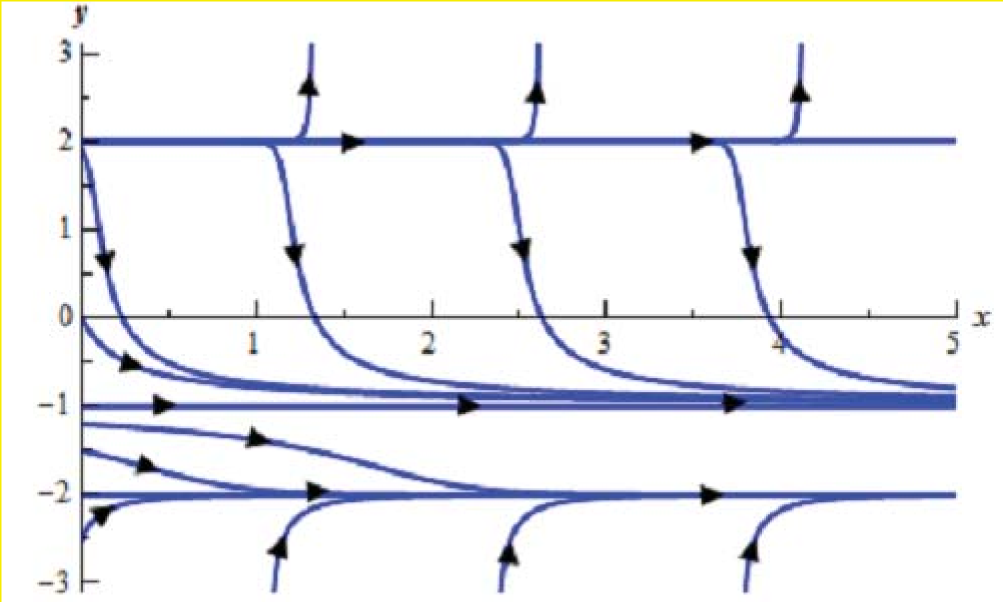
جواب های تعادل معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید و آنها را طبقه بندی کنید.

$$y' = \left(y^{۲} - ۴\right)\left(y + ۱\right)^{۲}$$

حل

جواب های تعادل این معادله دیفرانسیل $y = -۲$ و $y = ۲$ و $y = -۱$ هستند. تصویر زیر هم

نمودار جوابها هستند.



با توجه به نمودار بالا ، ملاحظه می کنید که $y = ۲$ یک جواب تعادل نا پایدار است. و $y = -۲$ یک خط مجانب جواب تعادل پایدار است.
اما ، $y = -۱$ رفتاری متفاوت دارد. جواب هایی که بالای آن شروع می شوند ، به طرف $y = -۱$ حرکت می کنند. در صورتی که جواب هایی که زیر $y = -۱$ هستند ،از خط $y = -۱$ دور می شوند. به این نوع جوابها ، می گویند ، جواب تعادل نیمه پایدار.

مثال ۳

جواب های تعادل معادله دیفرانسیل زیر را پیدا کنید و آنها را طبقه بندی کنید.

$$\frac{dy}{dt} = y^{۲} - ۹$$

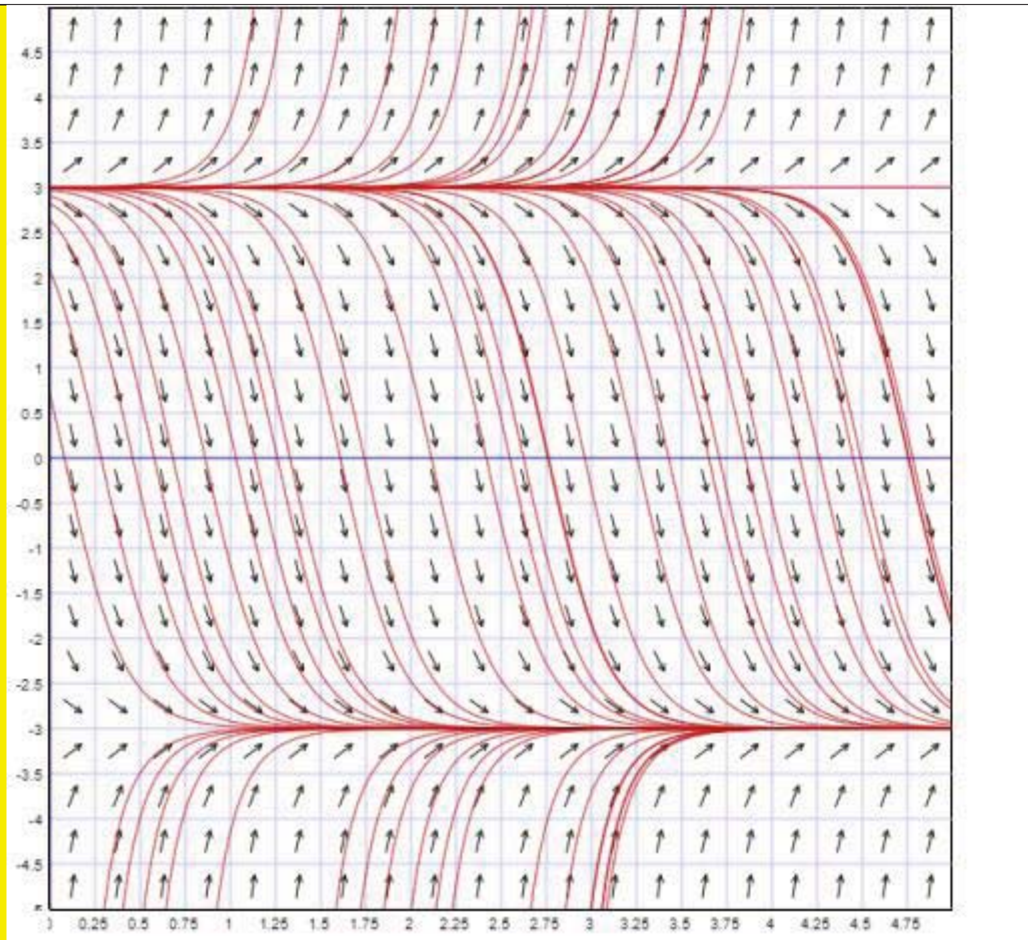
حل

$$\frac{dy}{dt} = (y + ۳)(y - ۳)$$

پس

$$\frac{dy}{dt} = 0$$

است ، اگر $y = -۳$ یا $y = ۳$ باشد. این مقادیر ، جواب های تعادل هستند. با توجه به میدان راستای زیر



ملاحظه می کنید که $y = -3$ خط مجانب پایدار است ، زیرا نمودار های ی اطراف آن به این خط نزدیک می شوند. اما ، نمودار ها از خط $y = 3$ از این خط دور می شوند ، پس $y = 3$ خط مجانب نا پایدار است.

بخش ۲.۱۰ روش اویلر Euler's Method

تا کنون ، معادله های دیفرانسیلی را که ارائه داده ایم ، قابل حل بوده اند. اما تعداد زیادی از معادله های دیفرانسیل مرتبه اول ، قابل حل نیستند.

تا کنون ، معادله های مرتبه اول را به معادله های خطی ، تفکیک پذیر ، کامل ، همگن تقسیم کرده ایم که قابل حل بودند. اما ، بیشتر معادله های دیفرانسیل نوع اول در این طبقه بندی نمی گنجند. حتی ، برای معادله های تفکیک پذیر و کامل هم همیشه نمی توانیم جواب تلویحی پیدا کنیم. بدون جواب های تلویحی ، بدست آوردن اطلاعاتی در مورد جواب خیلی مشکل است.

پس چه باید کرد؟ جواب ، بستگی به این دارد که در جستجوی چه هستیم. اگربه دنبال رفتار دراز مدت جواب هستیم ، همیشه می توان میدان راستا را رسم کرد. این کار را می توانیم به اسانی در مورد معادله های دیفرانسیل پیچیده انجام دهیم.

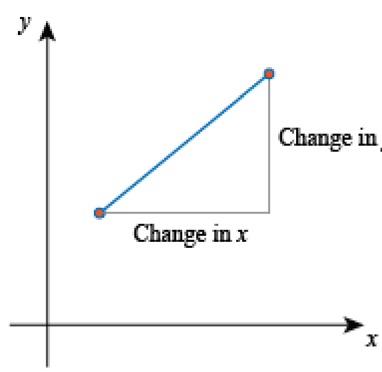
اما همان طور که گفته شد ، رسم میدان راستا برای هنگامی است که می خواهیم رفتار معادله را در دراز مدت پیدا کنیم.

روش هایی موجود است که بوسیله آنها می توان جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل را بدست آورد. یکی از این روش ها ، روش اویلر است. برای این که ببینیم روش اویلر چگونه کار می کند ، اجازه دهید کمی به عقب برگردیم. و کمی در مورد شیب و خط مماس صحبت کنیم.

شیب Slope

می دانیم که فرمول شیب مطابق زیر است.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{تغییر متغیر وابسته}}{\text{تغییر متغیر مستقل}} = \frac{\text{جابجائی عمودی}}{\text{جابجائی افقی}} = \text{شیب}$$



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$\Delta y = m * \Delta x$$

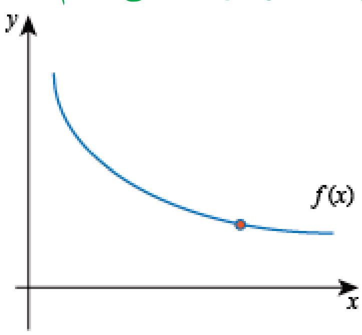
پس اگر شیب یک خط بدانیم و به اندازه Δx تغییر مکان دهیم ، می توانیم مقدار تغییر y را پیدا کنیم.

محاسبه تقریبی خط مماس Tangent Line Approximation

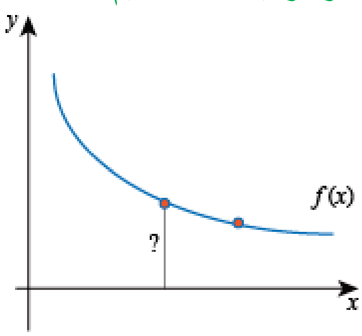
هنگام محاسبه تقریبی خط مماس ، در حقیقت یک خط را برای محاسبه یک منحنی بکار می بریم.

محاسبه تقریبی خط مماس چگونه کار می کند؟

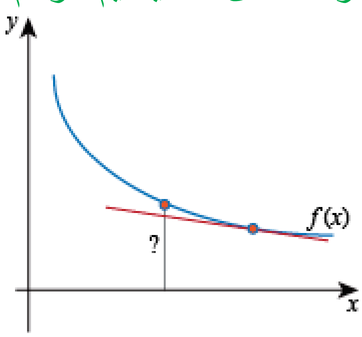
فرض کنید مقدار f برای یک مقدار مخصوص x می دانیم.



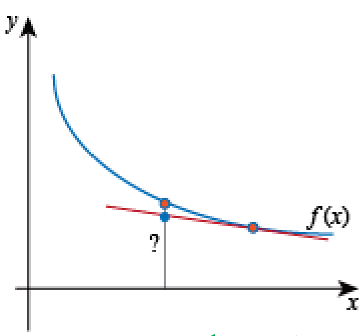
حالا می خواهیم مقدار f در یک مقدار نزدیک x بدانیم.



برای این کار ، خط مماس بر f در نقطه ای که میدانیم ، رسم می کنیم.

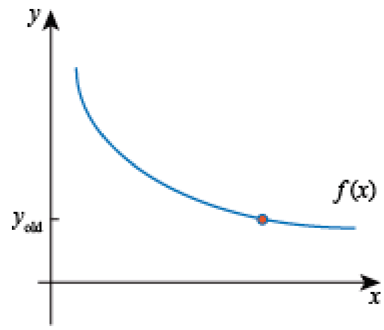


سپس مقدار f نقطه نزدیک مقدار x روی خط مماس را پیدا می کنیم. یعنی مقدار f نقطه آبی رنگ.

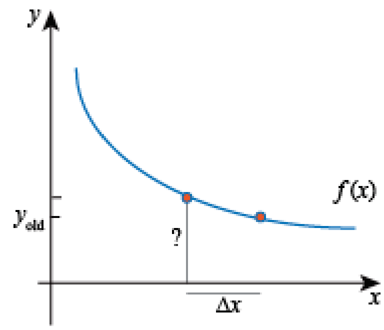


این مقدار f روی خط مماس ، یعنی نقطه آبی رنگ ، نزدیک مقدار f است که واقعا می خواهیم. یعنی نقطه قرمز رنگ. به عبارت دیگر هدف ما پیدا کردن مقدار f نقطه قرمز رنگ است ، اما چون راه دیگری نداریم ، مقدار f نقطه آبی رنگ را بدست می آوریم که خیلی نزدیک نقطه واقعی است.

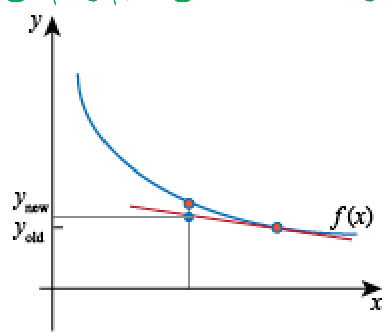
حالا به زبان دیگری صحبت می کنیم.
مقدار $y_{\text{قدیم}}$ را می دانیم. در تصویر زیر روی محور y نوشته شده y_{old}



حالا می خواهیم مقدار f را بدانیم ، اگر x به اندازه Δx تغییر کند.



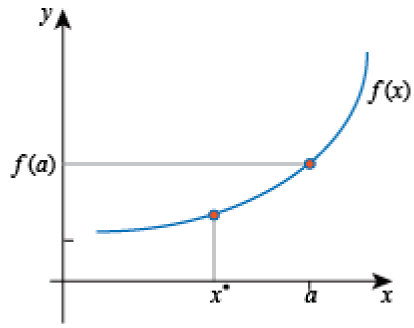
برای این کار یک خط مماس بر f در نقطه ای که می دانیم رسم می کنیم.



حالا این خط مماس را بکار می بریم تا $y_{\text{جدید}}$ را پیدا کنیم ، که نزدیک مقداری است که واقعا می خواهیم.

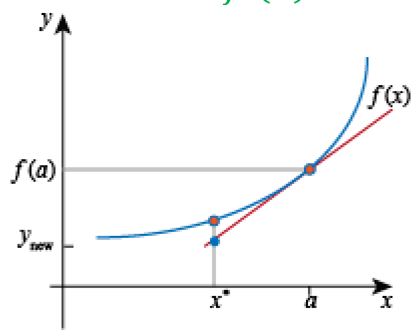
یک مثال

فرض کنید یک فرمول برای تابع f به شما داده شده است و از شما خواسته شده است از طریق یک خط مماس ، مقدار تقریبی f را برای یک مقدار معین x پیدا کنید.



برای این کار ، یک $x = a$ نزدیک x' انتخاب کنید. a را طوری انتخاب کنید که محاسبه $f(a)$ و $f'(a)$ آسان باشد ، پس داریم.

$$y_{old} = f(a)$$
$$\Delta x = x' - a$$
$$\text{شیب} = f'(a)$$



حالا می دانیم چگونه $y_{\text{جدید}}$ را پیدا کنیم، این همان تقریبی است که می خواستیم.

روش اویلر چگونه کار می کند؟

روش اویلر تعدادی خطوط مماس تقریبی است که به هم وصل می شوند. با یک معادله دیفرانسیل و یک نقطه شروع می کنید ، یک خط مماس تقریبی پیدا می کنید تا یک نقطه جدید پیدا شود. سپس این نقطه جدید را بکار می برید و یک خط مماس تقریبی دیگر پیدا می کنید. این کار را مکررا انجام می دهید تا به انتها یی که مساله گفته برسیم . البته با رسم اولین خط مماس ، بجای رسم مماس های دیگر ، تظاهر به رسم می کنید.

چند مثال می آوریم تا این موضوع روشن شود.

روش اویلر

می خواهیم سعی کنیم مساله به صورت $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ با مقدار اولیه $y(x_0) = y_0$ را حل کنیم.

در روش اویلر فرض بر این است که جواب ما به صورت **سری تایلر** **Taylor's Series** است.

یعنی تابعی به صورت زیر :

$$y(x+h) \approx y(x) + hy'(x) + \frac{h^2 y''(x)}{2!} + \frac{h^3 y'''(x)}{3!} + \frac{h^4 y^{\text{iv}}(x)}{4!} + \ldots$$

برای روش اویلر ، فقط دو جمله اول را بکار می بریم. یعنی

$$y(x+h) \approx y(x) + hy'(x)$$

جمله آخر یعنی h ضرب در عبارت $\frac{dy}{dx}$ و h هم **طول گام Step Size** است.

فرمول بالا یعنی $y(x+h) \approx y(x) + hy'(x)$ را چگونه بکار می بریم؟

با یک مقدار شناخته شده y که ما آنرا y_0 می نامیم شروع می کنیم. به عبارت دیگر با مقدار اولیه (x_0, y_0) شروع می کنیم.

نتیجه استفاده از این فرمول این است که مقدار y عبارت است از یک گام به طول h به طرف راست مقدار جاری. این مقدار را y_1 می نامیم. پس داریم.

$$y_1 \approx y_0 + hf(x_0, y_0)$$

در فرمول بالا y_1 مقدار تقریبی جواب بعدی است. y_0 مقدار جاری است. h فاصله بین گام ها است. و $f(x_0, y_0)$ مقدار مشتق در نقطه شروع (x_0, y_0) است.

مقدار بعدی

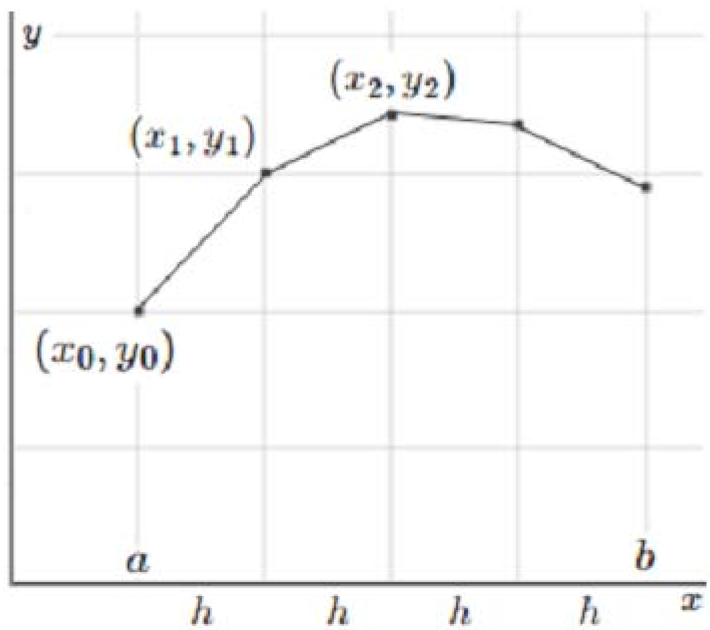
برای بدست آوردن مقدار بعدی ، یعنی y_2, مقداری که برای y_1 بدست آوردیم ، بکار می بریم. پس داریم.

$$y_2 \approx y_1 + hf(x_1, y_1)$$

در فرمول بالا ، $x_1 = x_0 + h$ است و $f(x_1, y_1)$ مقدار مشتق در نقطه جاری (x_1, y_1)

این مراحل را تا آنجا که لازم است انجام می دهیم.

نمودار زیر ، نمونه ای از چند گام فرضی است. یعنی از $x = a$ تا $x = b$ ، فاصله هر گام هم h است.



مثال ۱
با استفاده از روش اویلر مساله با مقدار اولیه زیر را حل کنید.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\ln y}{x} \qquad y(۲)=e$$

حل
قدم اول
با نقطه $(x_0,y_0)=(۲,e)$ شروع می کنیم ، با طول گام $h=۰/۱$ برای ۱۰ گام .
یعنی جواب تقریبی از $t=۲$ تا $t=۳$ برای معادله دیفرانسیل داده شده بدست می آوریم. به عبارت دیگر ، یک سری نقاط که نمایش جواب است به صورت اعداد بدست می آوریم.
مقدار اولیه را می دانیم ، $x_0=۲$ و $y_0=e$
حالا مقدار مشتق در این نقطه اولیه را محاسبه می کنیم.

$$\frac{dy}{dx}=f(2,e)=\frac{e\ln e}{2}=\frac{e}{2}\approx 1.3591409$$

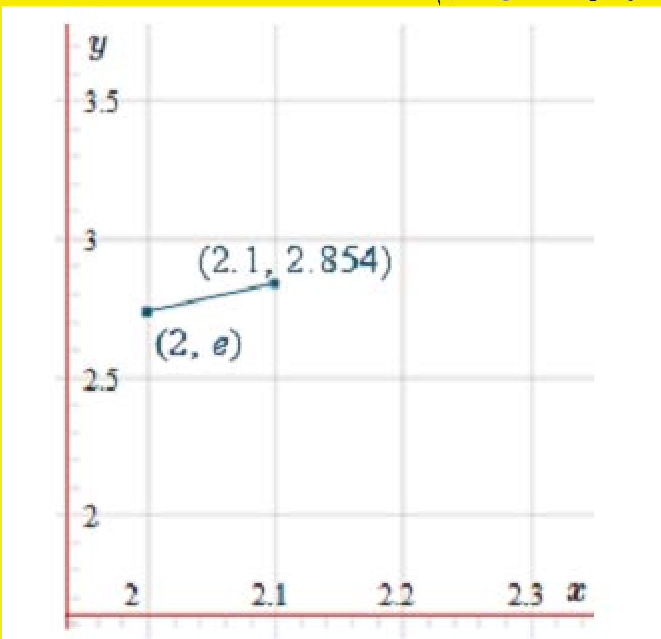
این یعنی شیب خط از $t=۲$ تا $t=۲.۱$ تقریبا 1.3591409. است.
قدم دوم
چون $h=۰/۱$ است ، پس نقطه بعدی $x+h=۲+۰/۱=۲/۱$ ، این مقادیر را در فرمول زیر می گذاریم.

$$y(x+h)\approx y(x)+hf(x,y)$$

پس داریم.

$$y_1=y(2.1)\approx e+0.1\left(\frac{e}{2}\right)=2.8541959$$

این یعنی مقدار تقریبی جواب هنگامی که $x=۲/۱$ است ، 2.8540959. می باشد. اجازه دهید آنچه تا کنون انجام داده ایم روی نمودار ، نشان دهیم.



حالا احتیاج به شیب در این نقطه داریم , تا بدانیم بعداً به کجا می رویم.

$$\frac{dy}{dx} = f(2.1, 2.8541959) = \frac{2.8541959 \ln 2.8541959}{2.1} = 1.4254536$$

این یعنی شیب خط از $x = ۲ / ۱$ تا $x = ۲ / ۲$ تقریبا 1.4254536 است. پس کمی شیب دار تر از اولی.

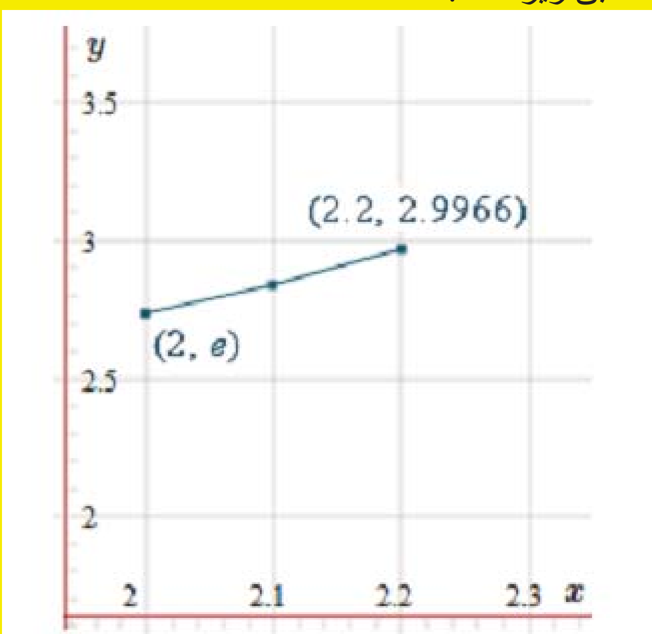
قدم سوم

حالا می خواهیم مقدار جواب ، هنگامی که $x = ۲ / ۲$ است ، پیدا کنیم. مقادیر ی که می دانیم جانشین می کنیم.

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x,y)$$

$$y(2.2) \approx 2.8540959 + 0.1(1.4254536) = 2.99664126$$

با مقدار جدید ، نمودار ما مطابق زیر است.



شیب جدید در این نقطه را لازم داریم. پس داریم.

$$f(2.2, 2.99664126) = \frac{2.99664126 \ln 2.99664126}{2.2} = 1.49490457$$

این یعنی شیب تقریبی از $x = ۲ / ۲$ تا $x = ۲ / ۳$ به صورت زیر است

$1.49490456.$

یعنی باز هم با شیب تند تر.

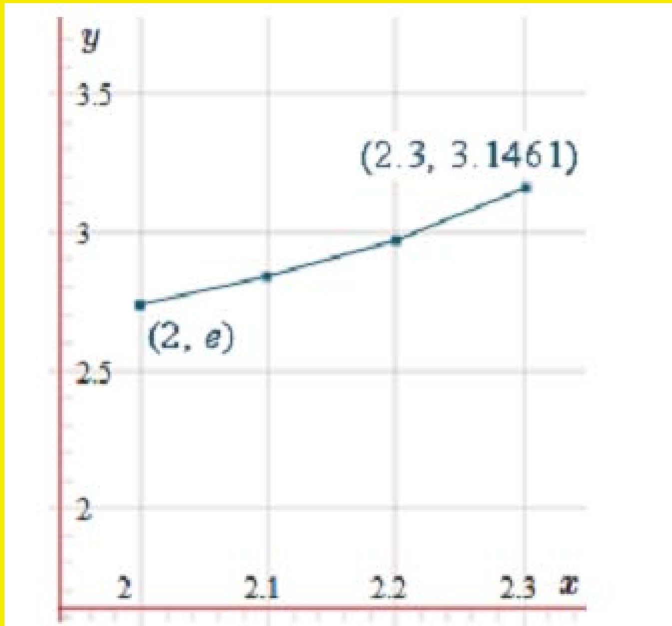
قدم چهارم

می خواهیم مقدار جواب هنگامی که $x = ۲ / ۳$ است ، پیدا کنیم.

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x,y)$$

$$y(2.3) \approx 2.99664126 + 0.1(1.49490456) = 3.1461317$$

این هم نمودار

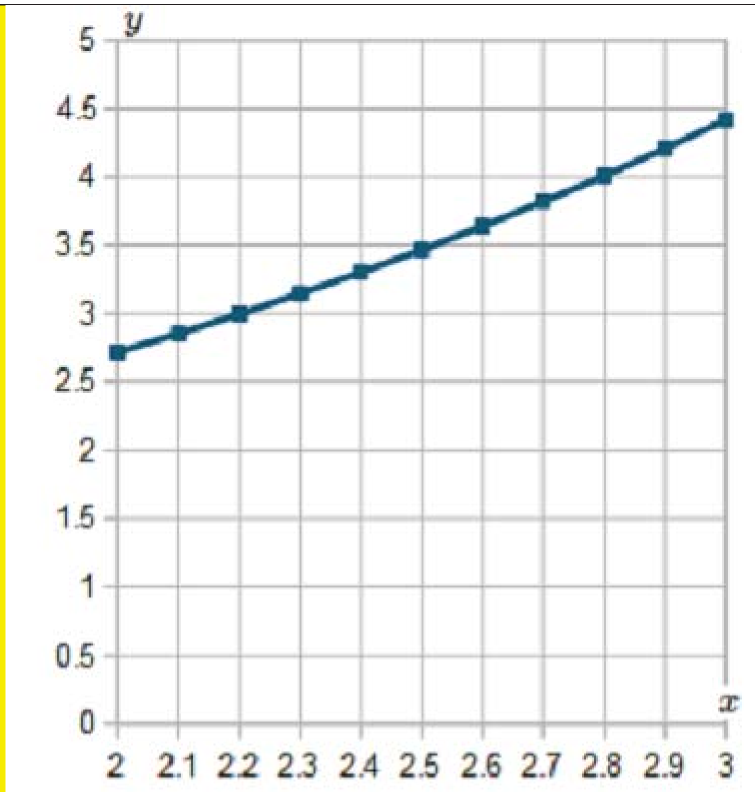


قدم های بعدی

قدم های بعدی را هم در جدول زیر می آوریم.

x	y	$\frac{dy}{dx}$
2.0	e = 2.7182818285	(e ln e)/2 = 1.3591409142
2.1	e+0.1(e/2) = 2.8541959199	(2.8541959199 ln 2.8541959199)/2 = 1.4254536226
2.2	2.9967412821	1.4949999323
2.3	3.1462412754	1.5679341197
2.4	3.3030346873	1.6444180873
2.5	3.4674764961	1.7246216904
2.6	3.6399386651	1.8087230858
2.7	3.8208109737	1.8969091045
2.8	4.0105018841	1.9893756448
2.9	4.2094394486	2.08632809
3.0	4.4180722576	

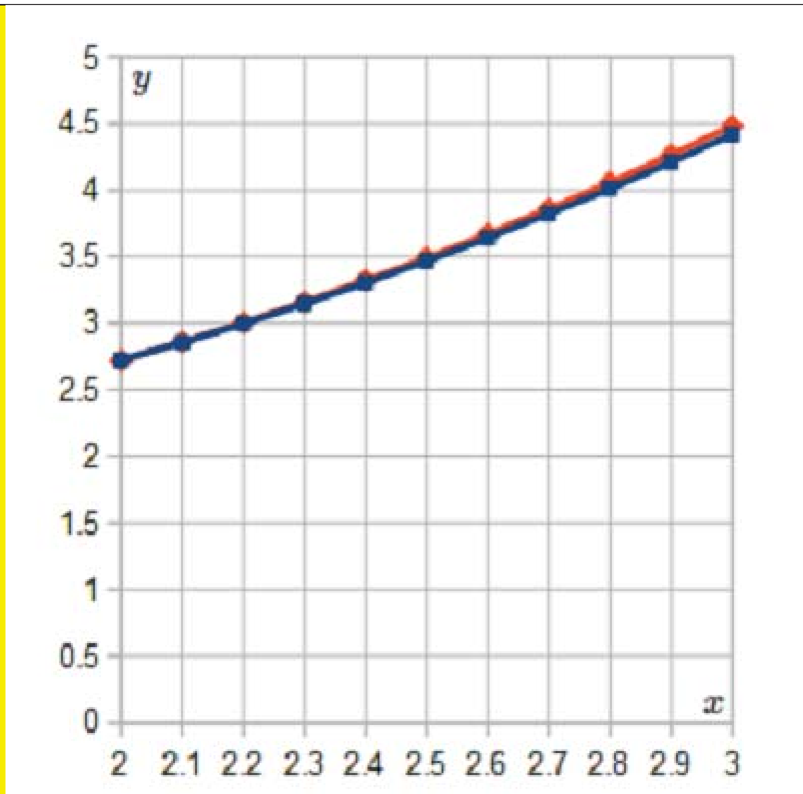
ملاحظه می کنید که مقدار جواب را در $x = ۳$ پیدا نکردیم ، زیرا ۱۰ قدم را انجام دادیم.
در زیر نمودار مقدار تقریبی جواب از $x = ۲$ تا $x = ۳$ ملاحظه می کنید.



معادله دیفرانسیل داده شده را ملاحظه کنید

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{x} \qquad y(۲) = e$$

این معادله ، یک معادله دیفرانسیل تفکیک پذیر است و اگر آنرا مطابق آنچه در بخش معادله های تفکیک پذیر گفتیم ، حل کنیم ، جواب $y = e^{\frac{x}{۲}}$ است. در زیر نمودار $y = e^{\frac{x}{۲}}$ به رنگ صورتی و جواب تقریبی از طریق روش اویلر به رنگ سیاه آمده است. ملاحظه می کنید که خیلی به هم نزدیک هستند.



مثال ۲

فرض کنید داشته باشیم.

$$\frac{dy}{dt} = ۲t + y \quad ، \quad y(۱) = ۵$$

با استفاده از روش اویلر و $h = ۰/۲$ مقدار تقریبی $y(۲)$ را پیدا کنید.

حل

$a)$ $f(1,5) = 2(1) + (5) = 7,$ پس $y(1.2) \approx 5 + 7(0.2) = 6.4.$

$b)$ $f(1.2, 6.4) = 2(1.2) + (6.4) = 8.8,$ پس $y(1.4) \approx 6.4 + 8.8(0.2) = 8.16.$

$c)$ $f(1.4, 8.16) = 2(1.4) + (8.16) = 10.96,$ پس $y(1.6) \approx 8.16 + 10.96(0.2) = 10.352.$

$d)$ $f(1.6, 10.352) = 2(1.4) + (10.352) = 13.552,$ پس $y(1.8) \approx 10.352 + 13.552(0.2) = 13.0624.$

$e)$ $f(1.8, 13.0624) = 2(1.4) + (13.0624) = 16.6624,$ پس $y(2) \approx 13.0624 + 16.6624(0.2) = 16.39488.$

این هم جدول محاسبات بالا

t	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
y	5	6.4	8.16	10.352	13.0624	16.39488

توضیحات :

جواب تلویحی این معادله از طریق حل معادله های خطی درجه یک ، مطابق زیر است.

$$y(t) = ۹e^{t-۱} - ۲(t+۱)$$

و ملاحظه می کنید که مقدار واقعی

$$y(2) = 9e - 6 \approx 18.4645.$$

است. خطای محاسبه ۲ است ، که زیاد است. اما اگر $h = ۰/۱$ در نظر بگیریم ، باید عملیات را در ۱۰ مرحله انجام دهیم و مقدار تقریبی زیر بدست می آوریم.

$$y(2) \approx 17.3437.$$

مثال ۳

برای مساله با مقدار اولیه زیر

$$y' + ۲y = ۲ - e^{-۴t} \qquad y(0) = ۱$$

با استفاده از روش اویلر و $h = ۰/۱$ مقدار تقریبی جواب در $t = 0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5$ پیدا کنید و آنها را با مقادیر واقعی در این نقاط مقایسه کنید.

حل

با استفاده از روش های قبلی ، جواب معادله بالا مطابق زیر است.

$$y(t) = ۱ + \frac{۱}{۲}e^{-۴t} - \frac{۱}{۲}e^{-۲t}$$

برای استفاده از روش اویلر ، باید معادله را مطابق زیر باز نویسی کنیم.

$$y' = ۲ - e^{-۴t} - ۲y$$

پس داریم $f(t,y) = ۲ - e^{-۴t} - ۲y$ همچنین داریم $t_0 = 0$ و $y_0 = ۱$

حالا محاسبات را شروع می کنیم.

$$f_0 = f(0,1) = 2 - \mathbf{e}^{-4(0)} - 2(1) = -1$$
$$y_1 = y_0 + h f_0 = 1 + (0.1)(-1) = 0.9$$

پس مقدار تقریبی جواب در $t_1 = 0.1$ می شود $y_1 = 0.9$

در قدم بعدی داریم.

$$f_1 = f(0.1, 0.9) = 2 - \mathbf{e}^{-4(0.1)} - 2(0.9) = -0.470320046$$
$$y_2 = y_1 + h f_1 = 0.9 + (0.1)(-0.470320046) = 0.852967995$$

پس در $t_2 = 0.2$ داریم $y_2 = 0.852967995.$

به همین ترتیب داریم.

$$f_2 = -0.155264954 \qquad y_3 = 0.837441500$$
$$f_3 = 0.023922788 \qquad y_4 = 0.839833779$$
$$f_4 = 0.1184359245 \qquad y_5 = 0.851677371$$

در زیر یک جدول مقدار تقریبی همراه با مقدار واقعی جوابها در نقاط داده شده، ملاحظه می کنید.

Time, t_n	Approximation	Exact	Error
$t_0 = 0$	$y_0 = 1$	$y(0) = 1$	0 %
$t_1 = 0.1$	$y_1 = 0.9$	$y(0.1) = 0.925794646$	2.79 %
$t_2 = 0.2$	$y_2 = 0.852967995$	$y(0.2) = 0.889504459$	4.11 %
$t_3 = 0.3$	$y_3 = 0.837441500$	$y(0.3) = 0.876191288$	4.42 %
$t_4 = 0.4$	$y_4 = 0.839833779$	$y(0.4) = 0.876283777$	4.16 %
$t_5 = 0.5$	$y_5 = 0.851677371$	$y(0.5) = 0.883727921$	3.63 %

در جدول بالا $Approximation$ یعنی تقریب ، $Exact$ یعنی واقعی ، $Error$ یعنی خطا .
برای پیدا کردن در صد خطا از فرمول زیر استفاده می کنیم.

$$\text{در صد خطا} = ۱۰۰ \times \frac{\text{مقدار تقریبی} - \text{مقدار واقعی}}{\text{مقدار واقعی}}$$

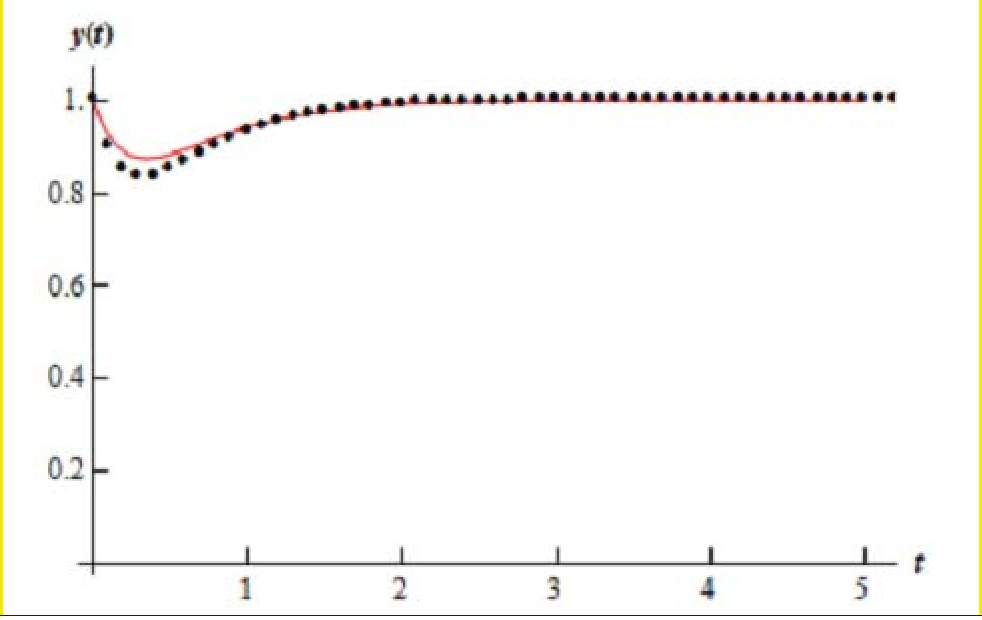
مثال ۴
مثال ۳ را برای $t = ۵$ ، $t = ۴$ ، $t = ۳$ ، $t = ۲$ ، $t = ۱$ با
$h = 0.1, h = 0.05, h = 0.01, h = 0.005$ | $h = 0.001$
تکرار کنید.
حل
در زیر دو جدول ملاحظه می کنید ، اولی مقدار تقریبی جواب

		Approximations				
Time	Exact	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	$h = 0.001$
$t = 1$	0.9414902	0.9313244	0.9364698	0.9404994	0.9409957	0.9413914
$t = 2$	0.9910099	0.9913681	0.9911126	0.9910193	0.9910139	0.9910106
$t = 3$	0.9987637	0.9990501	0.9988982	0.9987890	0.9987763	0.9987662
$t = 4$	0.9998323	0.9998976	0.9998657	0.9998390	0.9998357	0.9998330
$t = 5$	0.9999773	0.9999890	0.9999837	0.9999786	0.9999780	0.9999774

جدول دوم در صد خطا

Percentage Errors					
Time	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.01$	$h = 0.005$	$h = 0.001$
$t = 1$	1.08 %	0.53 %	0.105 %	0.053 %	0.0105 %
$t = 2$	0.036 %	0.010 %	0.00094 %	0.00041 %	0.0000703 %
$t = 3$	0.029 %	0.013 %	0.0025 %	0.0013 %	0.00025 %
$t = 4$	0.0065 %	0.0033 %	0.00067 %	0.00034 %	0.000067 %
$t = 5$	0.0012 %	0.00064 %	0.00013 %	0.000068 %	0.000014 %

در تصویر زیر ، نمودار قرمز رنگ ، نمودار جواب واقعی است و نقاط سیاه رنگ ، نمودار جواب تقریبی

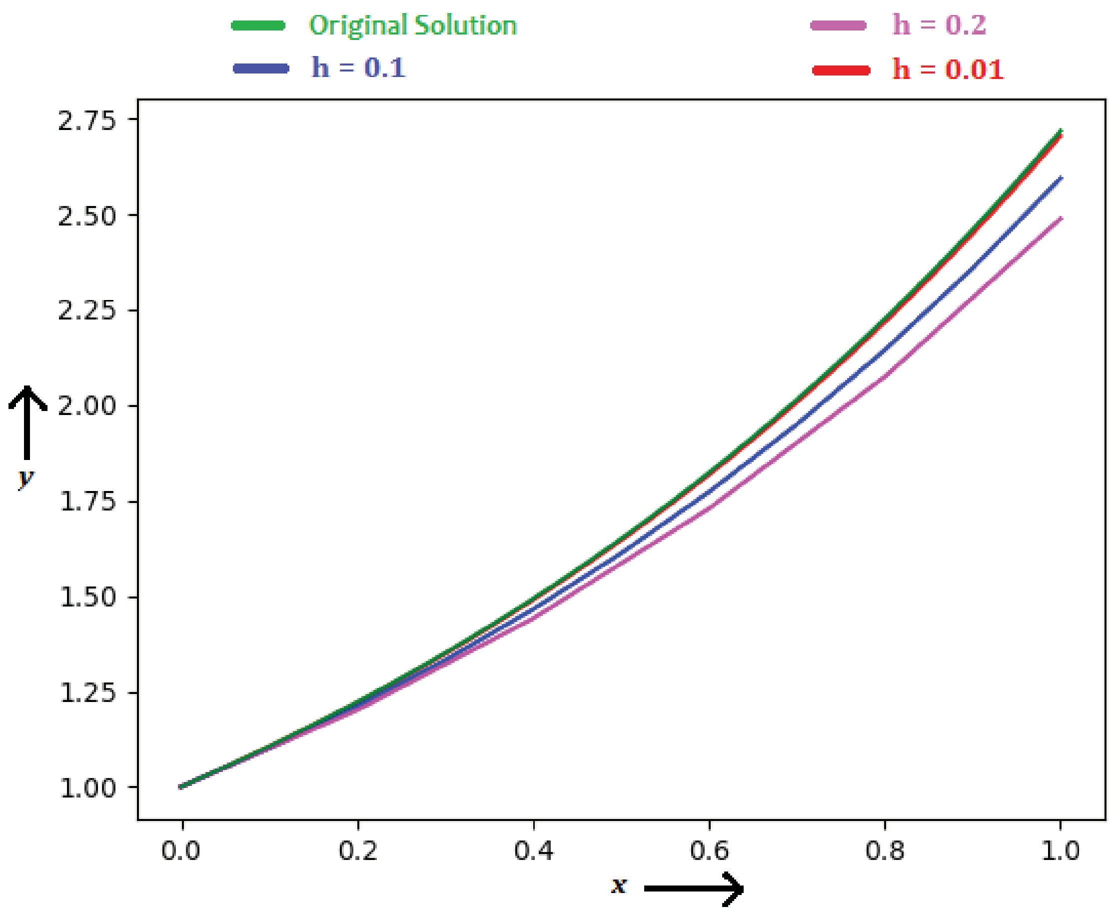


در خاتمه برای نشان دادن درجه دقت و صحت روش اویلر ، در زیر فقط نمودار معادله زیر را برای مقادیر مختلف h همراه با جواب واقعی تصویر می کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = y \;\text{،}\; y(0) = ۱$$

جواب واقعی $y = e^x$ است و $y(۱) = ۲/۷۱۸۲۸$ است.

نمودار سبز رنگ ، نمودار جواب واقعی است.


Original Solution
h = 0.2
h = 0.1
h = 0.01
2.75
2.50
2.25
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
y
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
x