آموزش علوم

مثلثات ویژه کانکور

تألیف: استاد رمضان "حیدری"

تحت‌نظر: استاد انجنیر بختیاری "بختیار"

سرمربی فزیک

ویژگی‌ها:

- ✓ جامع و مفهومی
- ✓ مسلسل و منطقی
- ✓ متناسب با نصاب تعلیمی جدید و کانکور سراسری

سال: ۱۳۹۷ هـ ش

حیدری، رمضان. ۱۳۹۷
مثلثات ویژه‌کانکور، مولف: رمضان حیدری، کابل: انتشارات تمدن‌شرق
چاپ اول ۱۳۹۷

مشخصات کتاب

نام کتاب:	مثلثات ویژه‌کانکور
تألیف:	استاد رمضان "حیدری"
نظارت بر تألیف:	استاد انجنیر بختیاری "بختیار" سرمربی فزیک
ویراستار:	رمضان "حیدری"
ناشر:	انتشارات تمدن‌شرق
سال چاپ:	۱۳۹۷
نوبت چاپ:	چاپ اول
قیمت:	۱۵۰ افغانی
تیراژ:	۱۰۰۰ جلد
ارتباط با مولف:	۰۷۸۶۸۶۶۰۱۱

Email:Ramazan.Haidari786@yahoo.com

انتشارات تمدن‌شرق
نشانی: کابل، بین چهارراهی دهبوری و چوک کوته سنگی.
شماره تماس: ۰۷۰۸۲۱۵۱۱۳ / ۰۷۷۳۲۹۴۰۰۱


بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم:

این اثر را به پیشگاه ارمغان آور مهر و رحمت برای جهانیان حضرت خاتم پیامبران که گفت: «من معلم برگزیده شده‌ام تا مکارم اخلاق را تمام کنم». تقدیم می‌کنم.

پیشگفتار

در جهان متمدن امروز که علم و تکنالوژی ابزار مهم برای رشد و انکشاف جوامع بشری محسوب می‌شود، در صورتِ این دو عامل ارزش و جایگاه اساسی خود را می‌یابد، که علم و تکنالوژی در خدمت ارزش‌های والای انسانی، تکامل و رساندن بشر به آرامش و آسایش قرار گیرد. ما علم و تکنالوژی را بدون باورهای دینی و احساس مِلی کافی ندانسته و معرفت دینی مبتنی بر معارف اسلامی، تعقل و درک صحیح از حقایق را نسبت به علوم تجربی و تجربه‌گرایی ضروری‌تر و مهم دانسته و هدف ما ارائه خدمات علمی و اکادمیک مبتنی بر احساس دینی و ملی است. و از برادر دانشمند و محقق محترم استاد رمضان "حیدری" که سیستمِ را تحت نام (آموزش علوم ریاضیات) در شهر غزنی یعنی مرکز تمدن اسلامی بنیان‌گذاری نموده، تلاش و خدمات علمی ایشان در بخش علوم ساینسی و خصوصاً تهیه و تدوین (مثلثات‌ویژه‌کانکور)، یک گام مثبت در راستای ترقی سطح علمی هم‌وطنان و دانش‌آموزان عزیز، می‌باشد.

استاد انجنیر بختیاری "بختیار"
سرمربی فزیک

فهرست مطالب

مقدمه

بنام خداوند مهر آفرین، آفریننده سپهر برین. درود بی‌پایان بر پیامبر رحمت، ارمغان آور مهر و سعادت برای جهانیان و درود بر اهلبیت او که مرکز ثقل فضیلت و معیار حق و حقیقت‌اند.

اما بعد: روح حقیقت‌جویی و میلِ به کمال، اساسی‌ترین انگیزه بشر در طول تاریخ برای جستجوی علمی او بوده است. بر این اساس هر انسانی با کنجکاوی ذاتی‌اش به دنبال کشف اسرار هستی بوده است. هر چند که جستجوهای علمی و کشفیات به تسلط او بر طبیعت و در نتیجه رفاه زندگی نیز شده است. اما باید گفت: انگیزه بشر در رفتن بسُوی دانش و حقیقت فراتر از اهداف مادی است و حقیقت‌جویی نیاز عالی روح انسانی است.

جستجوهای از حقیقت همواره بر ابزارهای که خداوند(ج) در اختیار بشر قرار داده است صورت می‌گیرد. این ابزارها را می‌توان در چهار دسته زیر خلاصه کرد.

- ابزار حسی
- ابزار عقل
- ابزار دل
- استفاد از منبع وحی

هر چهار مورد فوق ابزار رسیدن به حقایق است، اما کلی‌ترین و جامع‌ترین روش برای رسیدن به حقیقت تعالیم وحی و دستورات پیامبران و معصومین (ع) خصوصاً دستورات پیامبر اسلام(ص) می‌باشد.

و در مسائل علمی و تجربی و برای شناخت جزئیات هستی و روابط دقیق پدیده‌های عالم از ابزار حس و روش دانش‌تجربی استفاده می‌کنیم و

دانش‌تجربی بدون دانستن ریاضیات که به حیث زبان قوانین علوم تجربی استفاده می‌شود کاری است که به نتیجه مطلوب نخواهد رسید. و خصوصاً در علوم طبیعی رشته‌های میخانیک، احتمالات و استرونومی که علوم ریاضی و فزیک نامیده شده، و حد اوسط میان ریاضیات و فزیک است که، برای تقویه اصول ریاضیات دانش‌آموزان، ریاضیات بسا ارزنده و نهایت مهم تلقی می‌شود. لذا تصمیم بر آن شد که ممد درسی ریاضیات تحت نام (آموزش علوم ریاضیات) که روابط بین عناوین و موضوعات آن مسلسل و منطقی باشد. تهیه نمایم تا در فهم مسائل علوم تجربی دانش‌آموزان به مشکل مواجه نشوند.

کتابِ (مثلثات ویژه کانکور) را که به رهنمایی محترم استاد بختیاری "بختیار" تهیه نموده‌ام، امید است که باعث رضایت پروردگار مهربان، و مورد استفاده هم‌وطنان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد. و اِدعا نمی‌شود که کتاب تهیه شده خالی از نواقص می‌باشد، و از پیشنهادات سالم دانش‌دوستان، استقبال می‌شود.

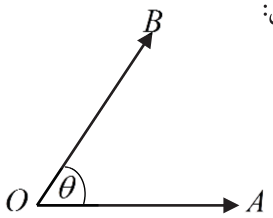
رمضان " حیدری "

Email:Ramazan.Haidari786@yahoo.com

فصل اول
سیستم‌های اندازه‌گیری زوایا

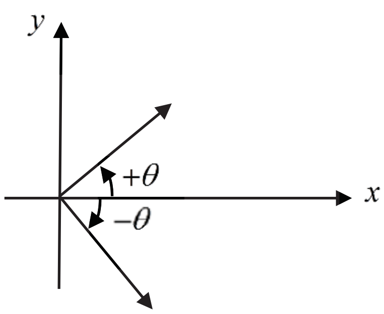
مثلثات: علم است که از روابط، بین اضلاع و زوایای مثلث بحث می‌کند.

زاویه: شکل است که از اتحاد دو نیم خط یا دو شعاع که دارای مبدأ مشترک باشند به‌دست می‌آید. و زاویه دارای دو ضلع یک راس می‌باشد، مانند زاویه $\hat{\theta}$ که به‌شکل $\angle AOB$ نیز نشان می‌دهند. مانند شکل ذیل:



برای اندازه‌گیری زاویه از نقاله استفاده می‌کنیم، و در علم مثلثات هرگاه زاویه خلاف عقربه ساعت دوران کند $(+)$ و اگر موافق عقربه ساعت دوران کند $(-)$ حساب می‌گردد.

زاویه استندرد: زاویه‌ای که راس آن در مبدأ سیستم کمیات وضعیه و ضلع اول آن منطبق به جهت محور مثبت x باشد، بنام زاویه استندرد یاد می‌گردد. مانند:

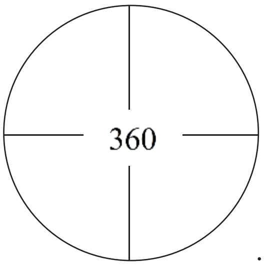


سیستم‌های اندازه‌گیری زاویه: در علم مثلثات برای اندازه‌گیری یک زاویه سه سیستم وجود دارد، و هر یک عبارت‌اند از:

سیستم‌های اندازه‌گیری

سیستم درجه(شصتی) — سیستم گراد(صدی) — سیستم رادیان(دایروی)

درجه: هرگاه محیط یک دایره را به 360 حصه مساوی تقسیم نمائیم، زاویه مرکزی که در مقابل $\frac{1}{360}$ حصه محیط دایره قرار داشته باشد، درجه می‌نامند. طوری که 1 درجه مساوی به 60 دقیقه و 1 دقیقه مساوی به 60 ثانیه می‌باشد، عموماً درجه را با گذاشتن (°) و دقیقه را با گذاشتن (/)و ثانیه را با گذاشتن (//) به توان عدد نمایش می‌دهند. یعنی:



$$1^\circ = \frac{1}{360}\angle\theta \qquad 1^\circ = 60' \qquad 1' = 60''$$

<u>نوت</u>: منظور از $\angle\theta$ در سطر فوق زاویه مرکزی می‌باشد.

مثال۱: $70^\circ\ 30'\ 54''$ را به شکل اعشاری درجه بنویسید.

$$70^\circ\ 30'\ 54'' = 70^\circ + \left(\frac{30}{60}\right)^\circ + \left(\frac{54}{3600}\right)^\circ$$

$$70^\circ\ 30'\ 54'' = 70^\circ + 0.5^\circ + 0.015^\circ$$

$$70^\circ\ 30'\ 54'' = 70.515^\circ$$

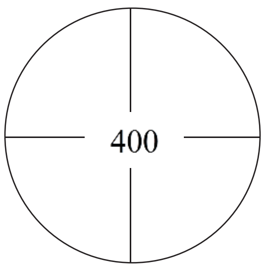
مثال۲: $(9.6725)^\circ$ را به درجه و ثانیه تبدیل نمائید.

$$(9.6725)^{\circ} = 9^{\circ} + 0.6725^{\circ} = 9^{\circ} + (0.6725 \times 60)^{\prime} = 9^{\circ} + 40.35^{\prime}$$

$$(9.6725)^{\circ} = 9^{\circ} + 40^{\prime} + 0.35^{\prime} = 9^{\circ} + 40^{\prime} + (0.35 \times 60)^{\prime\prime} = 9^{\circ} + 40^{\prime} + 21^{\prime\prime}$$

$$(9.6725)^{\circ} = 9^{\circ} + 40^{\prime} + 21^{\prime\prime}$$

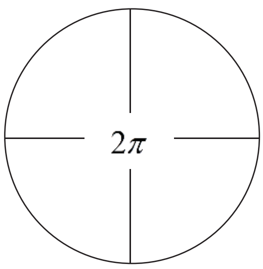
گراد: هرگاه محیط یک دایره را به 400 حصه مساوی تقسیم نمائیم، زاویه‌ای مرکزی که در مقابل $\frac{1}{400}$ حصه محیط دایره قرار داشته باشد، گراد می‌نامند. طوری که 1 گراد مساوی به 100 دقیقه‌گراد و 1 دقیقه‌گراد مساوی است به 100 ثانیه‌گراد می‌باشد. عموماً گراد را به حرف g و دقیقه‌گراد را به حرف $g^{\prime}$ و ثانیه‌گراد را به حرف $g^{\prime\prime}$ نشان می‌دهند. یعنی:



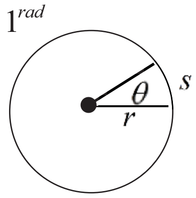
$$1^{g} = \frac{1}{400} \angle\theta \qquad 1^{g} = 100^{g^{\prime}} \qquad 1^{g^{\prime}} = 100^{g^{\prime\prime}}$$

نوت: منظور از $\angle\theta$ در سطر فوق زاویه مرکزی می‌باشد.

رادیان: عبارت از وسعت زاویه‌مرکزی است که طول قوسِ مقابل آن مساوی به شعاع دایره باشد. در این سیستم یک دایره را به 2π حصه مساوی تقسیم می‌کند که هر حصه آن‌را رادیان می‌نامند و π یک عدد غیرناطق بوده قیمت تقریبی آن 3.14 می‌باشد. یعنی:



$$\theta^{rad} = \frac{s}{r} \qquad if: s = r \Rightarrow \theta^{rad} = 1^{rad}$$



مثال۱: طول قوسِ مقابل زاویه‌ی مرکزی $\frac{\pi}{4}$ را معلوم کنید، اگر قطر دایره $16m$ باشد.

$$S = r\theta \qquad \Rightarrow S = \frac{\pi}{4} 8m = 2\pi m = 6.28m \qquad \because d = 2r$$

مثال۲: اگر طول ثانیه‌گرد یک ساعت $6cm$ باشد، در 40 ثانیه، ثانیه‌گرد چند سانتی‌متر فاصله را طی می‌کند؟

$$\frac{40}{60}\mathrm{Re}v = \frac{2}{3}\mathrm{Re}v \qquad \Rightarrow \frac{2}{3}\mathrm{Re}v = \frac{2}{3}\times 2\pi = \frac{4\pi}{3}^{Rad} \qquad \Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}^{Rad}$$

$$S = r\theta \qquad \Rightarrow S = 6cm \cdot \frac{4\pi}{3}^{Rad} = 8\pi cm$$

رابطه بین درجه، گراد و رادیان: برای تبدیل زاویه از یک سیستم به سیستم دیگر، درجه را به d، گراد را به g و رادیان به R^{rad} نشان دهیم با در نظر داشت تقسیمات قبلی از فورمول ذیل استفاده می‌کنیم.

$$\frac{d}{360} = \frac{g}{400} = \frac{R}{2\pi} \ /\cdot 2 \ \Rightarrow \boxed{\frac{d}{180} = \frac{g}{200} = \frac{R}{\pi} \qquad (1)}$$

مثال۱: 50 گراد را به درجه و رادیان تبدیل نمائید.

$$\theta = 50^g \qquad \frac{d}{180} = \frac{g}{200} \qquad \Rightarrow \frac{d}{180} = \frac{50}{200} \Rightarrow d = 45^\circ$$

$$\theta = 50^g \qquad \frac{R}{\pi} = \frac{g}{200} \qquad \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{50}{200} \quad \Rightarrow R = \frac{\pi}{4}$$

مثال۲: 90° را به گراد و رادیان تبدیل نمائید.

$$\theta = 90^\circ \qquad \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{d}{180} \qquad \Rightarrow \frac{R}{\pi} = \frac{90}{180} \quad \Rightarrow R = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = 90^\circ \qquad \Rightarrow \frac{g}{200} = \frac{d}{180} \qquad \Rightarrow \frac{g}{200} = \frac{90}{180} \ \Rightarrow g = 100^g$$

مثال۳: $\frac{\pi}{3}^{rad}$ را به درجه و گراد تبدیل نمائید.

$$\theta=\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{R}{\pi}=\frac{g}{200}\Rightarrow\frac{\frac{\pi}{3}}{\pi}=\frac{g}{200}\Rightarrow g=66.6^{g}$$

<u>نوت</u>: برای تبدیل رادیان به درجه صرف قیمت π را وضع می‌کنیم.

$$\frac{\pi}{3}=\frac{180}{3}=60^{\circ}\Rightarrow\frac{\pi}{3}^{rad}=60^{\circ}$$

مثال۴: 4° را به رادیان تبدیل نمائید.

$$4^{\circ}=4\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{45}^{rad}$$

محاسبه زاویه بین دو عقربه ساعت: برای محاسبه زاویه بین دو عقربه ساعت از فورمول ذیل استفاده می‌کنیم.

$$\boxed{\alpha=\left|\frac{11m-60h}{2}\right| \qquad (2)}$$

طوری که α زاویه، h ساعت و m دقیقه را نشان می‌دهد.

مثال۱: زاویه بین دو عقربه ساعت در ساعت $03:15$ چند است؟

$$\alpha=\left|\frac{11m-60h}{2}\right| \qquad \Rightarrow\alpha=\left|\frac{11(15)-60(3)}{2}\right|=7.5^{\circ}$$

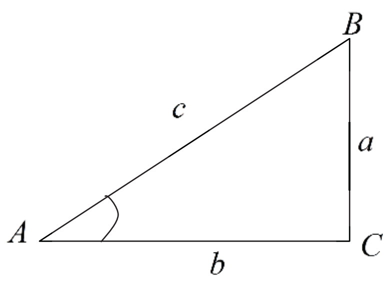
مثال۲: ساعت $10:50$ زاویه بین دو عقربه ساعت، چند است؟

$$\alpha=\left|\frac{11m-60h}{2}\right| \qquad \Rightarrow\alpha=\left|\frac{11(50)-60(10)}{2}\right|=25^{\circ}$$

فصل دوم نسبت‌های مثلثاتی زوایا

نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه: تقسیم نمودن، ضلع بر ضلع مثلث را نسبت مثلثاتی گویند. از آنجایی که مثلث از سه ضلع تشکیل شده بناً سه ضلع را مستقیماً و معکوساً با یکدیگر تقسیم نموده، شش نسبت مثلثاتی زیر نام‌های: ساین$(sine)$، کوساین$(cosine)$، تانجانت$(tangent)$، کوتانجانت$(cotangent)$، سیکنت$(secant)$ و کوسیکنت$(cosecant)$ به وجود می‌آید که این شش نسبت از اهمیت خاص در علم مثلثات برخوردار است. طوری‌که پایه و اساس علم مثلثات را تشکیل می‌دهد.

تعریف نسبت‌های مثلثاتی: جهت تعریف نسبت‌های مثلثاتی شش‌گانه، برای یک زوایه کیفی، مثلث قایم‌الزاویه $\overset{\Delta}{ABC}$ را در نظر می‌گیریم و برای زاویه حاده‌ای این مثلث (A)، شش نسبت فوق را چنین تعریف می‌کنیم.



$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot A = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{b}{a}$$

$$\sec A = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{c}{b}$$

$$\csc A = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{c}{a}$$

طوری‌که در نسبت‌های فوق دیده می‌شود، نسبت‌های مذکور دو به دو از اول به اخیر معکوس یکدیگر اند. یعنی:

$$\sin A = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot A = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{b}{a}$$

$$\sec A = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{c}{b}$$

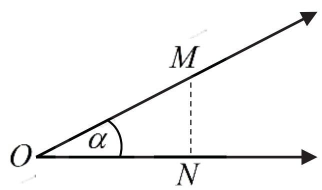
$$\csc A = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{c}{a}$$

$$\sin A \times \csc A = \frac{a}{c} \times \frac{c}{a} = 1 \qquad \Rightarrow \sin A \times \csc A = 1$$

$$\cos A \times \sec A = \frac{b}{c} \times \frac{c}{b} = 1 \qquad \Rightarrow \cos A \times \sec A = 1$$

$$\tan A \times \cot A = \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1 \qquad \Rightarrow \tan A \times \cot A = 1$$

بناً هرگاه خواسته باشیم نسبت‌های مثلثاتی را برای یک زاویه کیفی تعریف نمائیم، اولاً زاویه مربوط را ترسیم نموده بعداً از یک نقطه ضلع نهایی زاویه کیفی عمود بر ضلع ابتدایی آن ترسیم نموده تا در شکلِ یک مثلث قایم‌الزاویه درآید. سپس نظر به تعریفات فوق نسبت‌های مثلثاتی آن‌را چنین به‌دست می‌آوریم.



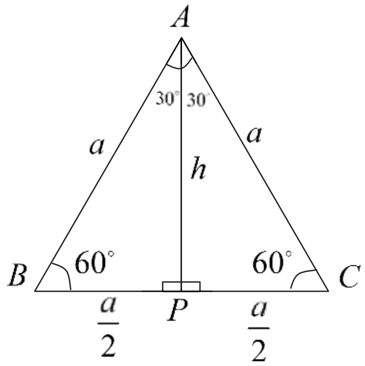
$$\sin\alpha = \frac{\overline{mn}}{\overline{om}} \qquad \cos\alpha = \frac{\overline{on}}{\overline{om}} \qquad \tan\alpha = \frac{\overline{mn}}{\overline{on}}$$

$$\cot\alpha = \frac{\overline{on}}{\overline{mn}} \qquad \sec\alpha = \frac{\overline{om}}{\overline{on}} \qquad \csc\alpha = \frac{\overline{om}}{\overline{mn}}$$

توجه: وسعت و بزرگی یک زاویه به طول اضلاع زاویه هیچ ارتباط ندارد.

دریافت نسبت‌های مثلثاتی زاویه 30° و 60°

برای دریافت نسبت‌های مثلثاتی زاویه 30° و 60° با استفاده از مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان چنین دریافت نمود.



$$\overline{AB} = a\,, \qquad \overline{BP} = \frac{a}{2}, \qquad h = ?$$

$$h^2 = \left(\overline{AB}\right)^2 - \left(\overline{BP}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \qquad \Rightarrow \boxed{h^2 = \frac{\sqrt{3}a}{2}}$$

اکنون با دریافت قیمت h در مثلث $\overset{\Delta}{APC}$ می‌توان چنین نوشت:

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{PC}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{a}{2}}{\cancel{a}/1} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \boxed{\sin 30^\circ = \frac{1}{2}}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{h}{\overline{AC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\cancel{a}/1} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \times \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{\overline{PC}}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{a}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{h}{\overline{PC}} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}a}{2} \times \frac{2}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\cot 30^\circ = \sqrt{3}}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{\overline{AC}}{h} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{a}{1} \times \frac{2}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{\sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

$$\csc 30^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{PC}} = \frac{\frac{a}{1}}{\frac{a}{2}} = \frac{a}{1} \times \frac{2}{a} = 2 \Rightarrow \boxed{\csc 30^\circ = 2}$$

اکنون نسبت‌های زاویه 60° را در مثلث $\overset{\Delta}{ABP}$ به‌دست می‌آوریم.

$$\sin 60^\circ = \frac{\overline{h}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{1}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\cos 60^\circ = \frac{1}{2}}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\overline{h}}{\overline{BP}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \boxed{\tan 60^\circ = \sqrt{3}}$$

$$\cot 60^\circ = \frac{\overline{Bp}}{\overline{h}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \boxed{\cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

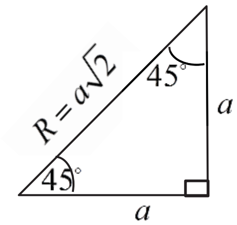
$$\sec 60^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{BP}} = \frac{a/1}{\frac{a}{2}} = 2 \quad \Rightarrow \boxed{\sec 60^\circ = 2}$$

$$\csc 60^\circ = \frac{\overline{AB}}{\overline{h}} = \frac{a/1}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \boxed{\csc 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه 45°

جهت به‌دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی زاویه 45° از مثلث قایم‌الزاویه متساوی‌الساقین چنین استفاده می‌کنیم.

$$R^2 = a^2 + a^2 \quad \Rightarrow R^2 = 2a^2 \quad \Rightarrow R = \sqrt{2}a$$



$$\sin 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \boxed{\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \boxed{\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{a}{a} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{\tan 45^\circ = 1}$$

$$\cot 45^\circ = \frac{a}{a} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{\cot 45^\circ = 1}$$

$$\sec 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \qquad \Rightarrow \boxed{\sec 45^\circ = \sqrt{2}}$$

$$\csc 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \qquad \Rightarrow \boxed{\csc 45^\circ = \sqrt{2}}$$

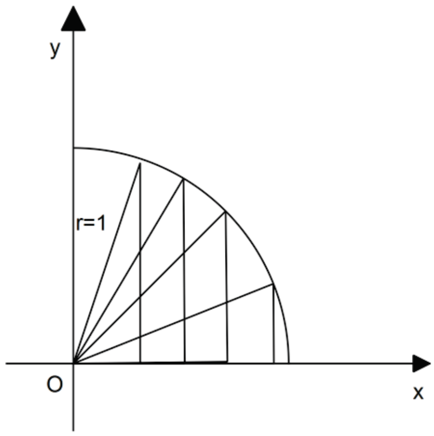
دایره‌ای مثلثاتی: دایره‌ای که مرکز آن در مبدأ سیستم کمیات وضعیه قایم و شعاع آن یک واحد طول داشته باشد، دایره‌ای مثلثاتی گفته می‌شود.

نسبت‌های مثلثاتی زوایایی 0° و 90°

با توجه به دایره‌ای مثلثاتی وقتی‌که زاویه صفر می‌گردد، ضلع مقابل به طرف صفر رفته و ضلع مجاور مساوی به وتر می‌شود. یعنی:

$\text{ضلع مقابل} \to 0 \qquad \Rightarrow \text{ضلع مجاور} \to \text{وتر} = 1$

در دایره مثلثاتی ذیل دقت نمائید.



$$\sin 0^\circ = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cos 0^\circ = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\tan 0^\circ = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\cot 0^\circ = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$\sec 0^\circ = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\csc 0^\circ = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{1}{0} = \infty$$

وقتی‌که زاویه 90° می‌گردد، ضلع مجاور به طرف صفر می‌رود و ضلع مقابل مساوی به وتر می‌شود. یعنی:

وتر $=1 \to$ ضلع مقابل $\Rightarrow$ ضلع مجاور $\to 0$

$$\sin 90^\circ = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cos 90^\circ = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\tan 90^\circ = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{1}{0} = \infty \qquad \cot 90^\circ = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\sec 90^\circ = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{1}{0} = \infty \qquad \csc 90^\circ = \frac{\text{وتر}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{1}{1} = 1$$

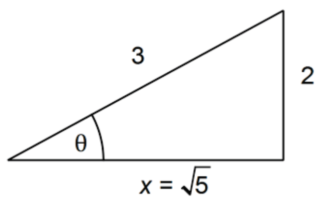
نکته: برای دریافت نسبت‌های مثلثاتی زوایایی مشهور به‌طور ساده می‌توان چنین عمل کرد.

	0°	30°	45°	60°	90°	
	0	1	2	3	4	$/ \div 4$
	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{4}$	$/ \sqrt{\ }$
	$\sqrt{\frac{0}{4}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}}$	$\sqrt{\frac{2}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{4}{4}}$	
$\sin$	$=0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	
$\cos$	$=1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\rightleftarrows$

مثال: اگر $\sin\theta = \frac{2}{3}$ باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی آن‌را دریابید.

حل: نظر به مثلث قایم‌الزاویه می‌توان دریافت نمود.

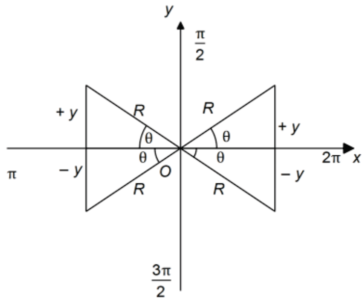
$$x^2 = 3^2 - 2^2 \quad \Rightarrow x^2 = 5 \quad \Rightarrow x = \sqrt{5}$$



$$\sin\theta=\frac{2}{3}\qquad \cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}\qquad \tan\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

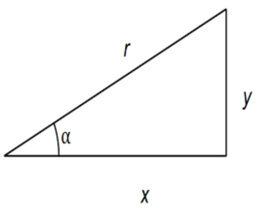
$$\cot\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}\qquad \sec\theta=\frac{3\sqrt{5}}{5}\qquad \csc\theta=\frac{3}{2}$$

تعیین‌اشاره نسبت‌های مثلثاتی: هرگاه نسبت‌های مثلثاتی را توسط مثلث قایم‌الزاویه روی سیستم کمیات وضعیه در نظر بگیریم، می‌توان چنین نوشت:



$\sin\theta=\frac{y}{R}=\frac{+}{+}=+$	$\sin\theta=\frac{y}{R}=\frac{+}{+}=+$
$\cos\theta=\frac{x}{R}=\frac{-}{+}=-$	$\cos\theta=\frac{x}{R}=\frac{+}{+}=+$
$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{+}{-}=-$	$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{+}{+}=+$
$\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{-}{+}=-$	$\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{+}{+}=+$
$\sec\theta=\frac{R}{x}=\frac{+}{-}=-$	$\sec\theta=\frac{R}{x}=\frac{+}{+}=+$
$\csc\theta=\frac{R}{y}=\frac{+}{+}=+$	$\csc\theta=\frac{R}{y}=\frac{+}{+}=+$
$\sin\theta=\frac{y}{R}=\frac{-}{+}=-$	$\sin\theta=\frac{y}{R}=\frac{-}{+}=-$
$\cos\theta=\frac{x}{R}=\frac{-}{+}=-$	$\cos\theta=\frac{x}{R}=\frac{+}{+}=+$
$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-}{-}=+$	$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-}{+}=-$
$\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{-}{-}=+$	$\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{+}{-}=-$
$\sec\theta=\frac{R}{x}=\frac{+}{-}=-$	$\sec\theta=\frac{R}{x}=\frac{+}{+}=+$
$\csc\theta=\frac{R}{y}=\frac{+}{-}=-$	$\csc\theta=\frac{R}{y}=\frac{+}{-}=-$

ساحه تحول نسبت‌های مثلثاتی: برای دریافت ساحه تحول نسبت‌های مثلثاتی زاویه کیفی مانند: α نظر به شکل ذیل می‌توان روابط آن‌را چنین نوشت:



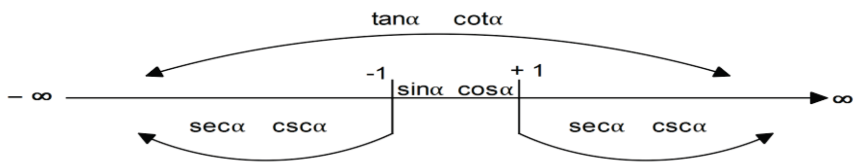
$$|y|\le r \ \Rightarrow -r\le y\le r \quad /\div r \quad \Rightarrow \frac{-r}{r}\le\frac{y}{r}\le\frac{r}{r} \qquad \Rightarrow \boxed{-1\le \sin\le 1}$$

$$|x|\le r \ \Rightarrow -r\le x\le r \quad /\div r \quad \Rightarrow \frac{-r}{r}\le\frac{x}{r}\le\frac{r}{r} \qquad \Rightarrow \boxed{-1\le \cos\le 1}$$

$$|x|\le r \ \Rightarrow -r\le x\le r \quad /(\ )^{-1} \ \Rightarrow \frac{1}{-r}\ge\frac{1}{x}\ge\frac{1}{r} \quad /\cdot r \quad \Rightarrow \frac{r}{-r}\ge\frac{r}{x}\ge\frac{r}{r}$$
$$\Rightarrow \boxed{-1\ge \sec\ge 1}$$

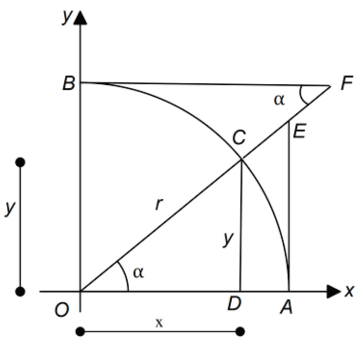
$$|y|\le r \ \Rightarrow -r\le y\le r \quad /(\ )^{-1} \ \Rightarrow \frac{1}{-r}\ge\frac{1}{y}\ge\frac{1}{r} \quad /\cdot r \quad \Rightarrow \frac{r}{-r}\ge\frac{r}{y}\ge\frac{r}{r}$$
$$\Rightarrow \boxed{-1\ge \csc\ge 1}$$

در مورد ساحه تحول *tangente* و *cotange*. زوایا باید گفت که چون *tangente* و *cotangen*. مربوط به مرکبه‌های x و y اند. بناً ساحه تحول این دو نسبت مثلثاتی بین $[-\infty,+\infty]$ می‌باشد. یعنی:



خطوط مثلثاتی: هر نسبت مثلثاتی یک زاویه دارای یک خط مشخص و معیین می‌باشد، که جهت دریافت خطوط مثلثاتی دایره‌ای مثلثاتی را در نظر گرفته و به روی آن سیستم کمیاتِ وضعیه قایم را طوری قرار می‌دهیم که مبدأ سیستم کمیات وضعیه قایم در مرکز دایره قرار بگیرد، بعداً زاویه کیفی را در

حالت استندرد قرار می‌دهیم که ضلع نهایی این زاویه، دایره‌ای مثلثاتی را در نقطه C قطع کند، از نقطه C عمود CD را بر محور x ترسیم می‌نمائیم، هم‌چنان در نقاط تقاطع محورات کمیات وضعیه با دایره‌ای مثلثاتی بالترتیب مماس‌های AE و BF را رسم می‌کنیم، بعداً در شکل مذکور با استفاده از تعریف نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قایم‌الزاویه ODC داریم که:



$$\sin\alpha = \frac{CD}{OC} = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = y \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = y}$$

$$\cos\alpha = \frac{OD}{OC} = \frac{x}{r} = \frac{x}{1} = x \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = x}$$

در نتیجه y محور ساین‌ها و x محور کوساین‌ها می‌باشد.

$$\tan\alpha = \frac{AE}{OA} = \frac{AE}{1} = AE \Rightarrow \boxed{\tan\alpha = AE}$$

$$\because \overset{\Delta}{ODC} \sim \overset{\Delta}{OBF} \Rightarrow \frac{OD}{CD} = \frac{BF}{OB}$$

$$\cot\alpha = \frac{BF}{OB} = \frac{BF}{1} = BF \Rightarrow \boxed{\cot\alpha = BF}$$

$$\because \overset{\Delta}{ODC} \sim \overset{\Delta}{OAE}$$

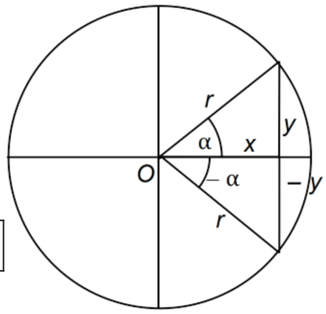
$$\sec\alpha = \frac{OC}{OD} = \frac{OE}{OB} = \frac{OE}{1} = OE \Rightarrow \boxed{\sec\alpha = OE}$$

$$\csc\alpha = \frac{OC}{CD} = \frac{OF}{OB} = \frac{OF}{1} = OEF \Rightarrow \boxed{\csc\alpha = OF}$$

فصل سوم: مناسبت بین نسبت‌های مثلثاتی بعضی از زوایا

مناسبت بین نسبت‌های مثلثاتی بعضی از زوایا: نسبت‌های مثلثاتی هر زاویه را از جنس نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه حاده مثبت می‌توان دریافت کرد، چنین روابط را رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه حاده مثبت می‌نامند، که ذیلاً این روابط را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱ نسبت‌های مثلثاتی زوایای مقابل(متضاد): برای دریافت نسبت‌های مثلثاتی زوایای مقابل (متضاد) با استفاده از تعریف زوایای $(+)$ و زوایای $(-)$ در نسبت‌های مثلثاتی می‌توان چنین نوشت:



$$\because \begin{cases} \sin(+\alpha) = \dfrac{+y}{r} & \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{y}{r} \\ \sin(-\alpha) = \dfrac{-y}{r} & \Rightarrow -\sin(-\alpha) = \dfrac{y}{r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\sin(-\alpha) = \sin\alpha \quad \Rightarrow \boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha}$$

$$\because \begin{cases} \cos(+\alpha) = \dfrac{+x}{r} & \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{x}{r} \\ \cos(-\alpha) = \dfrac{+x}{r} & \Rightarrow \cos(-\alpha) = \dfrac{x}{r} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$$

$$\because\begin{cases}\tan(+\alpha)=\dfrac{+y}{x} & \Rightarrow \tan\alpha=\dfrac{y}{x}\\ \tan(-\alpha)=\dfrac{-y}{x} & \Rightarrow -\tan(-\alpha)=\dfrac{y}{x}\end{cases}$$

$$\Rightarrow -\tan(-\alpha)=\tan\alpha \qquad \Rightarrow \boxed{\tan(-\alpha)=-\tan\alpha}$$

$$\because\begin{cases}\cot(+\alpha)=\dfrac{+x}{+y} & \Rightarrow \cot\alpha=\dfrac{x}{y}\\ \cot(-\alpha)=\dfrac{+x}{-y} & \Rightarrow -\tan(-\alpha)=\dfrac{x}{y}\end{cases}$$

$$\Rightarrow -\cot(-\alpha)=\cot\alpha \qquad \Rightarrow \boxed{\cot(-\alpha)=-\cot\alpha}$$

$$\because\begin{cases}\sec(+\alpha)=\dfrac{r}{x} & \Rightarrow \sec\alpha=\dfrac{r}{x}\\ \sec(-\alpha)=\dfrac{r}{x} & \Rightarrow \sec(-\alpha)=\dfrac{r}{x}\end{cases}$$

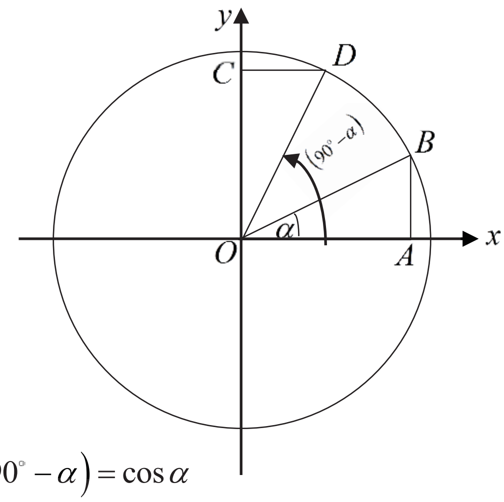
$$\Rightarrow \boxed{\sec(-\alpha)=\sec\alpha}$$

$$\because\begin{cases}\csc(+\alpha)=\dfrac{r}{+y} & \Rightarrow \csc\alpha=\dfrac{r}{y}\\ \csc(-\alpha)=\dfrac{r}{-y} & \Rightarrow -\csc(-\alpha)=\dfrac{r}{y}\end{cases}$$

$$\Rightarrow -\csc(-\alpha)=\csc\alpha \qquad \Rightarrow \boxed{\csc(-\alpha)=-\csc\alpha}$$

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه که مجموع شان 90° یا $\frac{\pi}{2}$ گردد

اگر زاویه اولی αباشد، پس زاویه دومی $90^\circ-\alpha$ خواهد بود.



$$\overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{COD}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha = AB \\ \cos\alpha = OA \\ \sin\left(90^\circ - \alpha\right) = OC \\ \cos\left(90^\circ - \alpha\right) = CD \end{cases}$$

$$\overline{OC} = \overline{OA} \qquad \Rightarrow \sin\left(90^\circ - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\overline{CD} = \overline{AB} \qquad \Rightarrow \cos\left(90^\circ - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(90^\circ - \alpha\right) = \frac{\sin\left(90^\circ - \alpha\right)}{\cos\left(90^\circ - \alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha \ \Rightarrow \tan\left(90^\circ - \alpha\right) = \cot\alpha$$

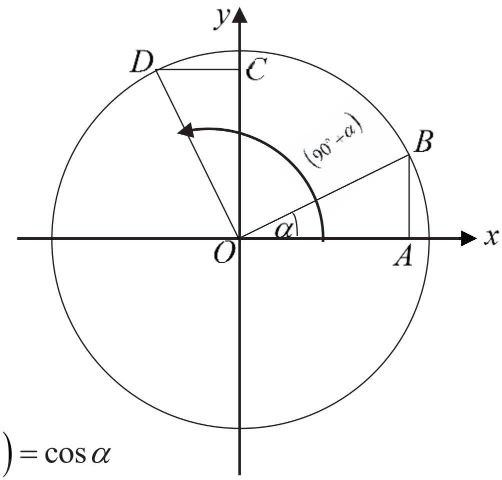
$$\cot\left(90^\circ - \alpha\right) = \frac{\cos\left(90^\circ - \alpha\right)}{\sin\left(90^\circ - \alpha\right)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \ \Rightarrow \cot\left(90^\circ - \alpha\right) = \tan\alpha$$

$$\sec\left(90^\circ - \alpha\right) = \frac{1}{\cos\left(90^\circ - \alpha\right)} = \frac{1}{\sin\alpha} = \csc\alpha \ \Rightarrow \sec\left(90^\circ - \alpha\right) = \csc\alpha$$

$$\csc\left(90^\circ - \alpha\right) = \frac{1}{\sin\left(90^\circ - \alpha\right)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha \ \Rightarrow \csc\left(90^\circ - \alpha\right) = \sec\alpha$$

رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه که فرق شان $\frac{\pi}{2}$ گردد

هرگاه زاویه اولی α باشد، پس زاویه دومی آن $\left(90^\circ + \alpha\right)$ خواهد بود. به شکل ذیل دقت نمائید.



$$\overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{COD}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha = AB \\ \cos\alpha = OA \\ \sin\left(90^\circ+\alpha\right) = OC \\ \cos\left(90^\circ+\alpha\right) = CD \end{cases}$$

$$\overline{OC} = \overline{OA} \qquad \Rightarrow \sin\left(90^\circ+\alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\left|\overline{CD}\right| = \overline{AB} \qquad \Rightarrow \cos\left(90^\circ+\alpha\right) = -\sin\alpha \qquad \because -\overline{CD} = \overline{AB}$$

$$\tan\left(90^\circ+\alpha\right) = \frac{\sin\left(90^\circ+\alpha\right)}{\cos\left(90^\circ+\alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -\cot\alpha$$

$$\Rightarrow \underline{\tan\left(90^\circ-\alpha\right) = \cot\alpha|}$$

$$\cot\left(90^\circ+\alpha\right) = \frac{\cos\left(90^\circ+\alpha\right)}{\sin\left(90^\circ+\alpha\right)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \underline{\cot\left(90^\circ-\alpha\right) = -\tan\alpha|}$$

$$\sec\left(90^\circ+\alpha\right) = \frac{1}{\cos\left(90^\circ+\alpha\right)} = \frac{1}{-\sin\alpha} = -\csc\alpha$$

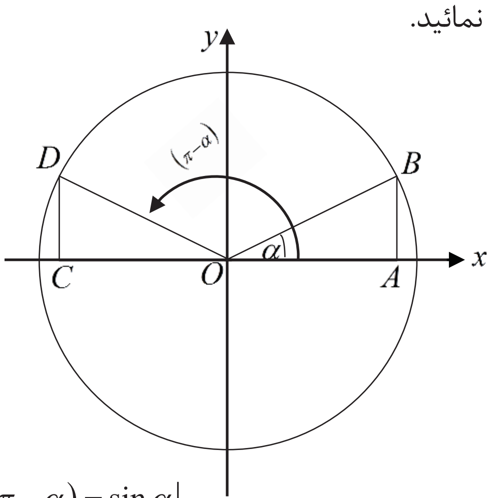
$$\Rightarrow \underline{\sec\left(90^\circ-\alpha\right) = -\csc\alpha|}$$

$$\csc\left(90^\circ+\alpha\right) = \frac{1}{\sin\left(90^\circ+\alpha\right)} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$$

$$\Rightarrow \underline{\csc\left(90^\circ-\alpha\right) = \sec\alpha|}$$

رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی که حاصل جمع شان π گردد

اگر زاویه اولی α باشد، پس زاویه دومی $\pi-\alpha$ خواهد بود. به شکل ذیل دقت نمائید.



$$\overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{COD}$$
$$\overline{CD} = \overline{AB}$$
$$\left|\overline{OC}\right| = \overline{OA}$$
$$\begin{cases} \sin\alpha = \overline{AB} \\ \cos\alpha = \overline{OA} \\ \overline{CD} = \sin(\pi-\alpha) \\ \overline{OC} = \cos(\pi-\alpha) \end{cases}$$

$$\because \overline{CD} = \overline{AB} \qquad \Rightarrow \underline{\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha}|$$
$$\because \left|\overline{OC}\right| = \overline{OA} \qquad \Rightarrow \underline{\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha}|$$

$$\tan(\pi-\alpha) = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha$$
$$\Rightarrow \underline{\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha}|$$

$$\cot(\pi-\alpha) = \frac{\cos(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\cot\alpha$$
$$\Rightarrow \underline{\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha}|$$

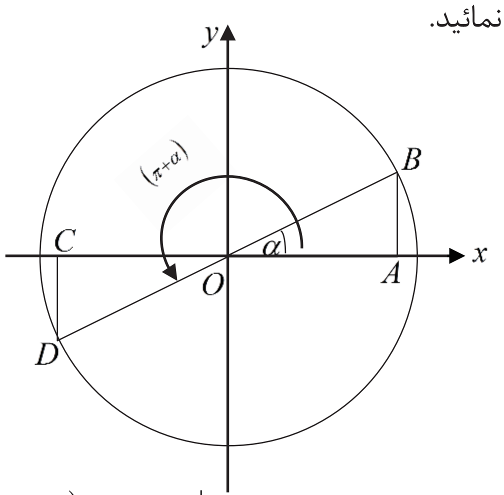
$$\sec(\pi-\alpha) = \frac{1}{\cos(\pi-\alpha)} = \frac{1}{-\cos\alpha} = -\sec\alpha$$
$$\Rightarrow \underline{\sec(\pi-\alpha) = -\sec\alpha}|$$

$$\csc(\pi-\alpha)=\frac{1}{\sin(\pi-\alpha)}=\frac{1}{\sin\alpha}=\csc\alpha$$

$$\Rightarrow \underline{\csc(\pi-\alpha)=\csc\alpha}|$$

رابطه بین نسبت‌های مثلثاتی که حاصل تفریق شان π گردد

اگر زاویه اولی α باشد، پس زاویه دومی $\pi+\alpha$ خواهد بود. به شکل ذیل دقت نمائید.



$$\overset{\Delta}{AOB}\cong\overset{\Delta}{COD}$$

$$\left|\overline{CD}\right|=\overline{AB}$$

$$\left|\overline{OC}\right|=\overline{OA}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha=\overline{AB}\\ \cos\alpha=\overline{OA}\\ \overline{CD}=\sin(\pi+\alpha)\\ \overline{OC}=\cos(\pi+\alpha)\end{cases}$$

$$\because \left|\overline{CD}\right|=\overline{AB} \qquad \Rightarrow \underline{\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha}|$$

$$\because \left|\overline{OC}\right|=\overline{OA} \qquad \Rightarrow \underline{\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha}|$$

$$\tan(\pi+\alpha)=\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha}=\tan\alpha$$

$$\Rightarrow \underline{\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha}|$$

$$\cot(\pi+\alpha)=\frac{\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha}{-\sin\alpha}=\cot\alpha$$

$$\Rightarrow \underline{\cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha}|$$

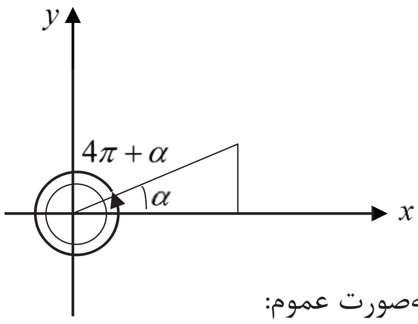
$$\sec(\pi+\alpha)=\frac{1}{\cos(\pi+\alpha)}=\frac{1}{-\cos\alpha}=-\sec\alpha$$
$$\Rightarrow \sec(\pi+\alpha)=-\sec\alpha$$

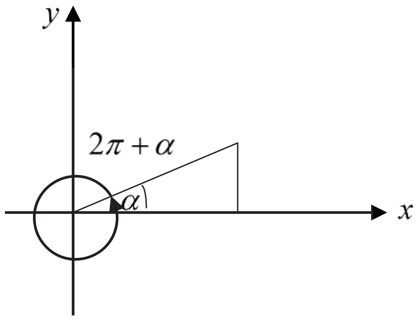
$$\csc(\pi+\alpha)=\frac{1}{\sin(\pi+\alpha)}=\frac{1}{-\sin\alpha}=-\csc\alpha$$
$$\Rightarrow \csc(\pi+\alpha)=-\csc\alpha$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای کوترمینل

زاویای که بعد از n دورِ یک دایره، دوباره ضلع نهایی‌اش در موقعیت اصلی خویش قرار گیرد، زوایه کوترمینل نامیده می‌شود. مانند زوایای:
$$(2\pi+\alpha),\qquad (4\pi+\alpha),\ldots\quad (2n\pi+\alpha).$$

بخاطر داشته باشید چون α یک زاویه حاده بوده و نظر به زوایای فوق ضلع مجاور $(\cos\alpha)$ و ضلع مقابل $(\sin\alpha)$ نظر به موقعیت محور x و y عیناً موقعیت خود را داشته و کدام تغییر رُخ نمی دهد از جانب دیگر همه نسبت‌ها در ناحیه اول قرار می‌گیرند، بناً اشاره نسبت‌های مثلثاتی زوایای فوق‌الذکر نیز مثبت می‌باشد. پس نظر به اشکال ذیل نسبت‌های مثلثاتی زوایای کوترمینل را چنین می‌توان نوشت:





به‌صورت عموم:

$$\sin(2n\pi+\alpha)=\sin\alpha \qquad \cos(2n\pi+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(2n\pi+\alpha)=\tan\alpha \qquad \cot(2n\pi+\alpha)=\cot\alpha$$
$$\sec(2n\pi+\alpha)=\sec\alpha \qquad \csc(2n\pi+\alpha)=\csc\alpha$$

مثال‌ها: نسبت‌های مثلثاتی زوایای ذیل را دریابید.

1) $\alpha=-30^\circ$

$$\sin(-30^\circ)=-\sin30^\circ=-\frac{1}{2} \qquad \cos(-30^\circ)=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan(-30^\circ)=-\tan30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot(-30^\circ)=-\cot30^\circ=-\sqrt{3}$$
$$\sec(-30^\circ)=\sec30^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \csc(-30^\circ)=-\csc30^\circ=-2$$

2) $\alpha=120^\circ=(90^\circ+30^\circ)$

$$\sin120^\circ=\sin(90^\circ+30^\circ)=\cos30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos120^\circ=\cos(90^\circ+30^\circ)=-\sin30^\circ=-\frac{1}{2}$$
$$\tan120^\circ=\tan(90^\circ+30^\circ)=-\cot30^\circ=-\sqrt{3}$$
$$\cot120^\circ=\cot(90^\circ+30^\circ)=-\tan30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\sec120^\circ=\sec(90^\circ+30^\circ)=-\csc30^\circ=-2$$
$$\csc120^\circ=\csc(90^\circ+30^\circ)=\sec30^\circ=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

3) $\alpha=315^\circ=(270^\circ+45^\circ)$

$$\sin315^\circ=\sin(270^\circ+45^\circ)=-\cos45^\circ=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315^\circ = \cos\left(270^\circ + 45^\circ\right) = \ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 315^\circ = \tan\left(270^\circ + 45^\circ\right) = -\cot 45^\circ = -1$$

$$\cot 315^\circ = \cot\left(270^\circ + 45^\circ\right) = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\sec 315^\circ = \sec\left(270^\circ + 45^\circ\right) = \ \csc 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\csc 315^\circ = \csc\left(270^\circ + 45^\circ\right) = -\sec 45^\circ = -\sqrt{2}$$

4) 750°

$$\begin{array}{r|l} 750 & 360 \\ \cline{2-2} \underline{-720} & \ 2 \\ 30 & \end{array} \quad \Rightarrow 750 = 2 \times 360 + 30$$

$\sin 750^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\quad\quad \cos 750^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 750^\circ = \tan 30^\circ = \sqrt{3} \quad\quad \tan 750^\circ = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cot 750^\circ = \cot 30^\circ = \sqrt{3} \quad\quad \sec 750^\circ = \sec 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$

5) $\alpha = 210^\circ = \left(180^\circ + 30^\circ\right)$

$$\sin\left(180^\circ + 30^\circ\right) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(180^\circ + 30^\circ\right) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(180^\circ + 30^\circ\right) = \ \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\left(180^\circ + 30^\circ\right) = \ \cot 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\sec\left(180^\circ+30^\circ\right)=-\sec 30^\circ=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc\left(180^\circ+30^\circ\right)=-\csc 30^\circ=-2$$

6) $\alpha=150^\circ=\left(180^\circ-30^\circ\right)$

$$\sin\left(180^\circ-30^\circ\right)=\quad \sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(180^\circ-30^\circ\right)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(180^\circ-30^\circ\right)=-\tan 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot\left(180^\circ-30^\circ\right)=-\cot 30^\circ=-\sqrt{3}$$

$$\sec\left(180^\circ-30^\circ\right)=-\sec 30^\circ=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc\left(180^\circ-30^\circ\right)=\quad \csc 30^\circ=2$$

روابط زوایای تکمیل کننده

هرگاه حاصل جمع یک زاویه با زاویه دیگر 90° گردد، نسبت‌های مثلثاتی آن معکوس یک‌دیگر می‌باشد، یعنی ساین زاویه اول با کوساین زاویه دوم و کوساین آن با ساین زاویه دوم،... مساوی است.

$\sin 15^\circ=\cos 75^\circ$	$\sin 60^\circ=\cos 30^\circ$	$\sin 10^\circ=\cos 80^\circ$
$\cos 15^\circ=\sin 75^\circ$	$\cos 60^\circ=\sin 30^\circ$	$\cos 10^\circ=\sin 80^\circ$
$\tan 15^\circ=\cot 75^\circ$	$\tan 60^\circ=\cot 30^\circ$	$\tan 10^\circ=\cot 80^\circ$
$\cot 15^\circ=\tan 75^\circ$	$\cot 60^\circ=\tan 30^\circ$	$\cot 10^\circ=\tan 80^\circ$
$\sec 15^\circ=\csc 75^\circ$	$\sec 60^\circ=\csc 30^\circ$	$\sec 10^\circ=\csc 80^\circ$
$\csc 15^\circ=\sec 75^\circ$	$\csc 60^\circ=\sec 30^\circ$	$\csc 10^\circ=\sec 80^\circ$

مثال۱: قیمت عددی افاده‌ی $\sin 135^\circ + \cos 45^\circ + \tan 22^\circ$: را دریابید.

$$\sin 135^\circ + \cos 45^\circ + \tan 225^\circ + \cot 315^\circ$$

$$\sin\left(90^\circ + 45^\circ\right) + \cos 45^\circ + \tan\left(180^\circ + 45^\circ\right) + \cot\left(270^\circ + 45^\circ\right)$$

$$\cos 45^\circ + \cos 45^\circ + \tan 45^\circ - \cot 45^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - 1 = \sqrt{2}$$

مثال۲: حاصل افاده‌ی ذیل را دریابید.

$$\sin\left(\pi - x\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\pi + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\sin x + \sin x - \sin x - \sin x$$

$$2\sin x - 2\sin x = 0$$

مثال۳: حاصل افاده‌ی $\dfrac{2\sin\left(\alpha - 3\pi\right) + \cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$ را دریابید.

$$\frac{2\sin\left(\alpha - 3\pi\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \frac{2\sin\left[-\left(3\pi - \alpha\right)\right] + \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right]}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$$

$$= \frac{-2\sin\left(3\pi - \alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{-\cos\alpha} = \frac{-2\sin\alpha + \sin\alpha}{-\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

مثال۴: اگر $B = \tan 1^\circ \cdot \tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \ldots \cdot \tan 88^\circ \cdot \tan 89^\circ$، پس قیمت B را دریابید.

حل: هرگاه $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ باشد، پس:

$$\tan 1^\circ \times \tan 89^\circ = \tan 1^\circ \times \cot 1^\circ = 1$$

$$\tan 2^\circ \times \tan 88^\circ = \tan 2^\circ \times \cot 2^\circ = 1$$

$$\vdots$$

$$\tan 44^\circ \times \tan 46^\circ = \tan 44^\circ \times \cot 44^\circ = 1$$

$$\tan 45^\circ = 1$$

$$\Rightarrow \left(\tan 1^\circ \times \tan 89^\circ\right)\left(\tan 2^\circ \times \tan 88^\circ\right)\cdot \ldots \cdot \tan 45^\circ = 1$$

پس حاصل افاده‌ی فوق 1 می‌گردد.

مثال۵: اگر $\sin\alpha=\frac{-2\sqrt{2}}{3}$ و ضلع دومی زاویه در ناحیه‌ی چهارم باشد، پس $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ را دریابید.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=-\sqrt{1-\frac{8}{9}}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sqrt{\frac{1}{9}}=-\frac{1}{3}$$

مثال۶: قیمت عددی $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}$ را دریابید.

$$\because \cos^2\frac{3\pi}{8}=\sin^2\frac{\pi}{8} \qquad \Rightarrow \cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}=1$$

فصل چهارم
روابط اساسی و فرعی مثلثاتی

روابط اساسی مثلثات

بعضی از روابط در مثلثات به حیث روابط اساسی و اصلی شناخته شده که سایر روابط مثلثاتی به قاعده آن استوار می‌باشد و این روابط را چنین به‌دست می‌آوریم.

دایره‌ای مثلثاتی را طوری در نظر می‌گیریم که بر روی آن سیستم کمیات وضعیه قایم رسم گردیده و زاویه کیفی α را در حالت استندرد مطابق شکل ذیل در نظر می‌گیریم.

در مثلث قایم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OBA}$ با در نظر داشت قضیه فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}\qquad \Rightarrow \sin\alpha=\frac{y}{1}\quad \Rightarrow \underline{\sin\alpha=y}$$

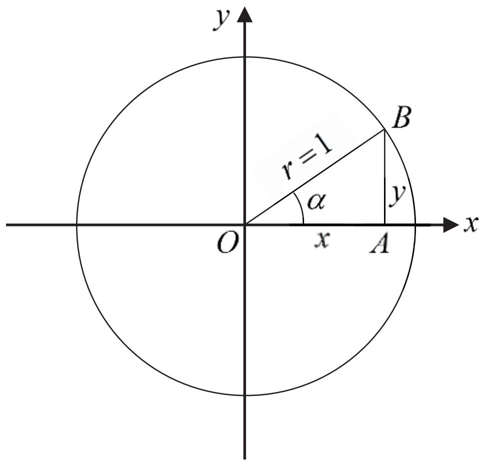
$$\cos\alpha=\frac{x}{r}\qquad \Rightarrow \cos\alpha=\frac{x}{1}\quad \Rightarrow \underline{\cos\alpha=x}$$

$$\left(\overline{OA}\right)^2+\left(\overline{AB}\right)^2=\left(\overline{OB}\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=r^2$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=1$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 ....\text{I}$$



برای دریافت سایر روابط اساسی از تعریف نسبت‌های مثلثاتی استفاده نموده داریم که:

$$\because \tan\alpha = \frac{y}{x} \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}......\text{II}$$

$$\because \cot\alpha = \frac{x}{y} \qquad \Rightarrow \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.......\text{III}$$

$$\because \sec\alpha = \frac{r}{x} = \qquad \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}.........IV$$

$$\because \csc\alpha = \frac{r}{y} \qquad \Rightarrow \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.......V$$

پنج رابطه فوق را بنام رابطه اساسی مثلثاتی می‌نامند.

روابط فرعی مثلثاتی

روابط که از اثر عملیات الجبری از روابط اساسی به‌دست می‌آید به‌نام روابط فرعی مثلثاتی یاد می‌گردد و با استفاده از روابط اساسی روابط فرعی را به‌دست می‌آوریم:

$$\because \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha......\text{I}$$

$$\because \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha......\text{II}$$

$$\because \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \ \ / \ \div \cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \Rightarrow \tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha = \sec^2\alpha - 1......\text{III}$$

$$\because \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \ \ / \ \div \sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad \Rightarrow 1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

$$\Rightarrow \cot^2\alpha = \csc^2\alpha - 1......IV$$

$$\because \tan^2\alpha = \sec^2\alpha - 1 ......III \qquad \Rightarrow \sec^2\alpha = \tan^2\alpha + 1 ......V$$

$$\because \cot^2\alpha = \csc^2\alpha - 1 ......IV \qquad \Rightarrow \csc^2\alpha = \cot^2\alpha + 1 ......VI$$

دریافت نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه از جنس نسبت‌های دیگر

گاهی ضرورت می‌شود که یک نسبت مثلثاتی زاویه داده شده باشد و سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه مذکور مطلوب باشد، بناً روابط وجود دارد که در حال معلوم بودن یک نسبت می‌توان سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه مذکور را دریافت نماییم.

۱ دریافت همه نسبت‌های مثلثاتی از جنس $\sin\alpha$

اگر $\sin\alpha$ داده شده باشد سایر نسبت‌های آن زاویه را چنین به‌دست می‌آوریم.

$$\sin\alpha = \sin\alpha ......I$$

$$\because \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} ....II$$

$$\because \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} ......III$$

$$\because \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \Rightarrow \cot\alpha = \frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha} .....IV$$

$$\because \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} ......V$$

$$\because \sec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} ....VI$$

مثال: نسبت‌های مثلثاتی زاویه α را دریابید طوریکه $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ بوده و در ناحیه اول قرار داشته باشد.

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}\qquad \Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\qquad \Rightarrow \tan\alpha=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

$$\cot\alpha=\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}\qquad \Rightarrow \cot\alpha=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\qquad \Rightarrow \sec\alpha=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}\qquad \Rightarrow \csc\alpha=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۲ دریافت همه نسبت‌های مثلثاتی از جنس $\cos\alpha$

در روابط مثلثاتی دقت نمائید.

$$\because \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha\qquad \Rightarrow \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\text{......I}$$

$$\because \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\qquad \Rightarrow \tan\alpha=\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}\text{......II}$$

$$\because \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\qquad \Rightarrow \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}\text{.......III}$$

$$\because \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \text{.......}IV$$

$$\because \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad \Rightarrow \csc\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \text{.......}V$$

مثال: نسبت‌های مثلثاتی زاویه α را دریابید طوری‌که $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ بوده و در ناحیه اول قرار داشته باشند.

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \qquad \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \qquad \Rightarrow \cot\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \sec\alpha = \frac{1/1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} \qquad \Rightarrow \csc\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۳ دریافت همه نسبت‌های مثلثاتی از جنس $\tan\alpha$

اگر $\tan\alpha$ داده شده باشد سایر نسبت‌های آن زاویه را چنین به‌دست می‌آوریم.

$$\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad /_{\div}\cos^2\alpha \qquad \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha} \qquad \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{\tan^2\alpha+1}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}}........\mathrm{I}$$

$$\because \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2}}...........\mathrm{II}$$

$$\because \tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}$$

$$\Rightarrow \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}...............\mathrm{III}$$

$$\because \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \sec\alpha=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}}$$

$$\Rightarrow \sec\alpha=\sqrt{1+\tan^2\alpha}.......\mathrm{I}V$$

$$\because \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha} \qquad \Rightarrow \csc\alpha=\frac{1}{\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}}$$

$$\Rightarrow \csc\alpha=\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}......V$$

مثال: $\tan\alpha=1$ سایر نسبت‌های زاویه α را دریابید.

$$\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2}} \qquad \Rightarrow \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}} \qquad \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha} \qquad \Rightarrow \cot\alpha=\frac{1}{1}=1$$

$$\sec\alpha=\sqrt{1+\tan^2\alpha} \qquad \Rightarrow \sec\alpha=\sqrt{1+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\csc\alpha=\frac{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}{\tan\alpha} \qquad \Rightarrow \csc\alpha=\frac{\sqrt{1+1^2}}{1}=\sqrt{2}$$

۴ دریافت همه نسبت‌های مثلثاتی از جنس $\cot\alpha$

اگر $\cot\alpha$ داده شده باشد سایر نسبت‌های آن زاویه را چنین به‌دست می‌آوریم.

$$\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \quad /_{\div}\sin^2\alpha \qquad \Rightarrow \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$$\Rightarrow 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha} \qquad \Rightarrow \sin^2\alpha=\frac{1}{\cot^2\alpha+1}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{\cot^2\alpha+1}}........\text{I}$$

$$\because \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \qquad \Rightarrow \cos\alpha=\cot\alpha\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\cot\alpha}{\sqrt{\cot^2\alpha+1}}.........\text{II}$$

$$\because \tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha} \qquad \Rightarrow \tan\alpha=\frac{1}{\cot\alpha}.....\text{III}$$

$$\because \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \sec\alpha=\frac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha}....\text{I}V$$

$\because \csc\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha} \qquad \Rightarrow \csc\alpha = \sqrt{1+\cot^2\alpha}.....V$

مثال: نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ را دریابید طوری‌که $\cot\theta = -\sqrt{3}$ بوده و در ناحیه چهارم قرار داشته باشند.

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{\cot^2\alpha+1}} \qquad \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{3+1}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\cot\alpha}{\sqrt{\cot^2\alpha+1}} \qquad \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+1}} = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec\alpha = \frac{\sqrt{1+\cot^2\alpha}}{\cot\alpha} \qquad \Rightarrow \sec\alpha = \frac{\sqrt{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2}}{-\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc\alpha = \sqrt{1+\cot^2\alpha} \qquad \Rightarrow \csc\alpha = \sqrt{1+\left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\Rightarrow \csc\alpha = -2$$

۵ دریافت همه نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه از جنس $\sec\alpha$

اگر $\sec\alpha$ داده شده باشد سایر نسبت‌های آن زاویه را چنین به‌دست می‌آوریم.

$$\because \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad \Rightarrow \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = 1-\frac{1}{\sec^2\alpha} \qquad \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{\sec^2\alpha-1}{\sec^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha} ....\mathrm{I}$$

$$\because \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} \qquad \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} .....\mathrm{II}$$

$$\because \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha}}{\frac{1}{\sec\alpha}} = \sqrt{\sec^2\alpha - 1}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{\sec^2\alpha - 1} ......\mathrm{III}$$

$$\because \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} \qquad \Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}} ....\mathrm{I}V$$

$$\because \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} \qquad \Rightarrow \csc\alpha = \frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}} .....V$$

مثال: نسبت‌های مثلثاتی زاویه α را دریابید طوری‌که $\sec\alpha = 2$ باشد.

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}}{\sec\alpha} \qquad \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{2^2 - 1}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha} \qquad \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\tan\alpha = \sqrt{\sec^2\alpha - 1} \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}} \qquad \Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\sqrt{2^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\csc\alpha = \frac{\sec\alpha}{\sqrt{\sec^2\alpha - 1}} \qquad \Rightarrow \csc\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۶ دریافت همه نسبت‌های مثلثاتی از جنس $\csc\alpha$

اگر $\csc\alpha$ داده شده باشد سایر نسبت‌های آن زاویه را چنین به‌دست می‌آوریم.

$$\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \Rightarrow \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha=1-\frac{1}{\csc^2\alpha} \qquad \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{\csc^2\alpha-1}{\csc^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha}\text{.......I}$$

$$\because \sin\alpha=\frac{1}{\csc\alpha} \qquad \Rightarrow \sin\alpha=\frac{1}{\csc\alpha}\text{.............II}$$

$$\because \tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \tan\alpha=\frac{\frac{1}{\csc\alpha}}{\frac{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}{\csc\alpha}}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}\text{.......III}$$

$$\because \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha} \qquad \Rightarrow \cot\alpha=\sqrt{\csc^2\alpha-1}\text{......I}V$$

$$\because \sec\alpha=\frac{1}{\sin\alpha} \qquad \Rightarrow \sec\alpha=\frac{\csc\alpha}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}}\text{......}V$$

مثال: نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ای α را دریابید طوری‌که $\csc\alpha=2$ باشد.

$$\sin\alpha=\frac{1}{\csc\alpha} \qquad \Rightarrow \sin\alpha=\frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{\csc\alpha^2-1}}{\csc\alpha} \qquad \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{2^2-1}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{\csc^2\alpha-1}} \qquad \Rightarrow \tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

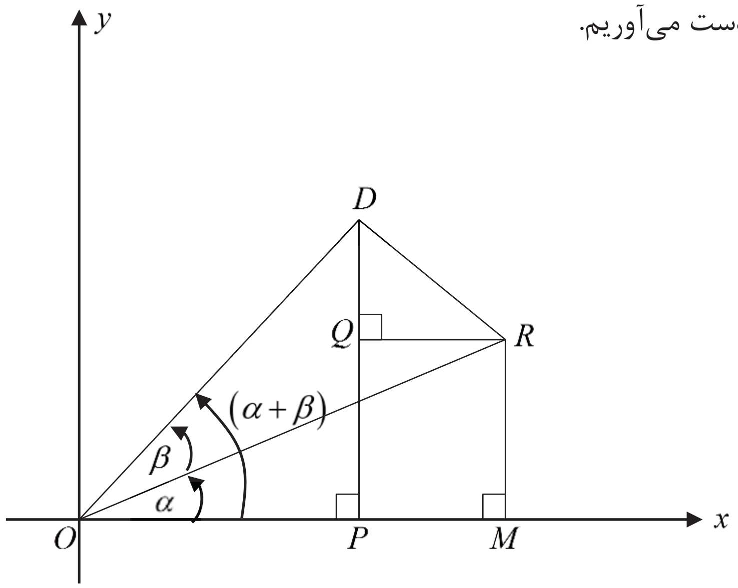
$$\cot\alpha=\sqrt{\csc^2\alpha-1} \qquad \Rightarrow \cot\alpha=\sqrt{2^2-1}=\sqrt{3}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\sin\alpha} \qquad \Rightarrow \sec\alpha=\frac{2}{\sqrt{2^2-1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

فصل پنجم
عملیه‌های اساسی زوایا در نسبت‌های مثلثاتی

نسبت‌های مثلثاتی حاصل جمع دو زاویه

برای دریافت نسبت‌های مثلثاتی حاصل جمع دو زاویه بالای سیستم کمیات وضعیه دو زاویه α و β را انتخاب نموده طوری‌که این دو زاویه در مجاورت یک‌دیگر قرار داشته باشد بعداً بالای اضلاع‌ای نهایی این دو زاویه به ترتیب نقاط α و β را انتخاب نموده و از آن عمودهای RM و DP را بالای محور x رسم می‌کنیم، هم‌چنان از نقاط D بالای OR عمود DR رسم می‌کنیم و از نقطه R بالای DP عمود RP را رسم می‌نمائیم، اکنون نظر به شکل به‌دست آمده می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زوایایی $\alpha+\beta$ را که حاصل جمع دو زاویه است چنین به‌دست می‌آوریم.



در مثلث قایم‌الزاویه OPD داریم که:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{DP}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{DQ}+\overline{PQ}}{OD}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{DQ}}{\overline{OD}}+\frac{\overline{PQ}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{DQ}}{\overline{OD}}+\frac{\overline{RM}}{\overline{OD}}$$

نظر به عمل معادل سازی کسرها و این‌که جمع دارای خاصیت تبدیلی است، می‌توانیم بنویسیم که:

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{RM}}{\overline{OD}}\cdot\frac{\overline{OR}}{\overline{OR}}+\frac{\overline{DQ}}{\overline{OD}}\cdot\frac{\overline{DR}}{\overline{DR}}$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{\overline{RM}}{\overline{OR}}\cdot\frac{\overline{OR}}{\overline{OD}}+\frac{\overline{DQ}}{\overline{DR}}\cdot\frac{\overline{DR}}{\overline{OD}}$$

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \qquad (3)}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OP}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{OM}-\overline{PM}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{OM}}{\overline{OD}}-\frac{\overline{PM}}{\overline{OD}}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OM}}{\overline{OD}}\cdot\frac{\overline{OR}}{\overline{OR}}-\frac{\overline{PM}}{\overline{OD}}\cdot\frac{\overline{DR}}{\overline{DR}}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{\overline{OM}}{\overline{OR}}\cdot\frac{\overline{OR}}{\overline{OD}}-\frac{\overline{QR}}{\overline{DR}}\cdot\frac{\overline{DR}}{\overline{OD}} \qquad \because \overline{PM}=\overline{QR}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (4)}$$

$$\because \tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

صورت و مخرج را تقسیم $(\cos\alpha\cos\beta)$ می‌نمائیم.

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{(\cos\alpha\cos\beta)}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{(\cos\alpha\cos\beta)}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{(\cos\alpha\cos\beta)}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{(\cos\alpha\cos\beta)}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \qquad (5)}$$

نسبت‌های مثلثاتی حاصل تفریق دو زاویه

برای دریافت نسبت‌های مثلثاتی حاصل تفریق دو زاویه مانند $(\alpha+\beta)$ از روابط (3)،(4) و (5) حاصل جمع را با در نظر داشت روابط بین نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه مقابل می‌توان بنویسیم یعنی به عوض زاویه β زاویه $-\beta$ را وضع می‌کنیم.

$$\because \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha+(-\beta))=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \qquad (6)}$$

$$\because \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha+(-\beta))=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \qquad (7)}$$

$$\because \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\Rightarrow \tan(\alpha+(-\beta))=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\cdot\tan(-\beta)}$$

$$\boxed{\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta} \qquad (8)}$$

مثال ۱: نسبت‌های 75° را دریافت نمائید.

حل: می‌دانیم که: $75^\circ=\left(30^\circ+45^\circ\right)$

$$\sin\left(30^\circ+45^\circ\right)=\sin 30^\circ\cdot\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\cdot\sin 45^\circ$$

$$\sin\left(30^\circ+45^\circ\right)=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(30^\circ+45^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos\left(45^\circ+30^\circ\right)=\cos 45^\circ\cdot\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\cdot\sin 30^\circ$$

$$\cos\left(45^\circ+30^\circ\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(45^\circ+30^\circ\right)=\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\tan\left(45^\circ+30^\circ\right)=\frac{\tan 45^\circ+\tan 30^\circ}{1-\tan 45^\circ\cdot\tan 30^\circ}$$

$$\tan\left(45^\circ+30^\circ\right)=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$\tan\left(45^\circ+30^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\times\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}+2$$

مثال ۲: نسبت‌های مثلثاتی 15° را دریابید.

حل: چون $30-45=15$ می‌دانیم پس داریم که:

$$\sin 15^\circ=\sin\left(45^\circ-30^\circ\right)$$

$$\sin\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\because \cos 15^\circ = \cos\left(45^\circ - 30^\circ\right)$$

$$\cos\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$$

$$\Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \qquad \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\because \tan 15^\circ = \tan\left(45^\circ - 30^\circ\right)$$

$$\tan\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ}$$

$$\tan\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}}$$

$$\tan\left(45^\circ - 30^\circ\right) = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$$

نسبت‌های مثلثاتی دو چند زاویه

برای دریافت نسبت‌های مثلثاتی دو چند زوایا که به‌نام فورمول های مضاعف نیز یاد می‌گردد، در روابط (3)، (4) و (5) به عوض زاویه β زاویه α را تعویض نموده و چنین محاسبه می‌نمائیم.

$$\because \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta \qquad \alpha=\beta$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos\alpha\cdot\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha+\alpha)=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\boxed{\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \qquad (9)}$$

$$\because \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\cos\beta \qquad \alpha=\beta$$

$$\therefore \cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\boxed{\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \qquad (10)}$$

هم‌چنان برای دریافت $\cos(2\alpha)$ از جنس $\cos\alpha$ داریم که:

$$\because \cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \quad \Rightarrow \cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)$$

$$\Rightarrow \cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-1+\cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(2\alpha)=2\cos^2\alpha-1}$$

هم‌چنان برای دریافت $\cos(2\alpha)$ از جنس $\sin\alpha$ داریم که:

$$\because \cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \quad \Rightarrow \cos(2\alpha)=(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos(2\alpha)=1-2\sin^2\alpha}$$

به همین ترتیب:

$$\because \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\therefore \tan(\alpha+\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\boxed{\tan(2\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad (11)}$$

مثال: نسبت‌های مثلثاتی زاویه 120° را از جنس نسبت‌های مثلثاتی 60° دریابید.

$$\because \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \sin 120 = 2\sin 60^\circ \cos 60^\circ = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Rightarrow \sin 120=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\because \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \cos 120=\cos^2 60^\circ-\sin^2 60^\circ$$

$$\Rightarrow \cos 120=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \cos 120=-\frac{1}{2}$$

$$\because \tan\alpha 2=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan 120=\frac{2\tan 60^\circ}{1-\tan^2 60^\circ}=\frac{2\left(\sqrt{3}\right)}{1-\left(\sqrt{3}\right)^2} \qquad \Rightarrow \tan 120=-\sqrt{3}$$

دریافت نسبت‌های مثلثاتی سه‌چند زاویه

دریافت نسبت‌های مثلثاتی سه چند زاویه با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی دو چند زاویه می‌توان نوشت که:

$$\because \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\therefore \sin(\alpha+2\alpha)=\sin\alpha\cos(2\alpha)+\cos\alpha\sin(2\alpha)$$
$$\Rightarrow \sin 3\alpha=\sin\alpha\left(1-2\sin^2\alpha\right)+\cos\alpha 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\Rightarrow \sin 3\alpha=\sin\alpha-2\sin^3\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha$$
$$\Rightarrow \sin 3\alpha=\sin\alpha-2\sin^3\alpha+2\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)$$
$$\Rightarrow \sin 3\alpha=\sin\alpha-2\sin^3\alpha+2\sin\alpha-2\sin^3\alpha$$
$$\Rightarrow \sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$
$$\boxed{\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha \qquad (12)}$$

برای دریافت کوساین سه‌چند یک‌زاویه مانند ساین آن در فورمول حاصل جمع، به عوض زاویه β زاویه 2α را تعویض نموده و بعداً $\cos 2\alpha$ و $\sin 2\alpha$ را تعویض نموده داریم که:

$$\because \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \qquad \beta=2\alpha$$
$$\therefore \cos(\alpha+2\alpha)=\cos\alpha\cdot\cos(2\alpha)-\sin\alpha\cdot\sin(2\alpha)$$
$$\Rightarrow \cos 3\alpha=\cos\alpha\left(2\cos^2\alpha-1\right)-\sin\alpha\left(2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\right)$$
$$\Rightarrow \cos 3\alpha=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha$$
$$\Rightarrow \cos 3\alpha=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)$$
$$\Rightarrow \cos 3\alpha=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha$$
$$\Rightarrow \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$
$$\boxed{\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha \qquad (13)}$$

برای دریافت $\tan 3\alpha$ داریم که:

$$\because \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \qquad \because \beta=2\alpha$$

$$\therefore \tan(\alpha+2\alpha)=\frac{\tan\alpha+\tan 2\alpha}{1-\tan\alpha\cdot\tan 2\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan 3\alpha=\frac{\tan\alpha+\left(\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\right)}{1-\tan\alpha\cdot\left(\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\right)} \qquad \because \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\Rightarrow \tan 3\alpha=\frac{\dfrac{\tan\alpha-\tan^3\alpha+2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{1-\dfrac{2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

$$\Rightarrow \tan 3\alpha=\frac{\dfrac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-\tan^2\alpha}}{\dfrac{1-\tan^2\alpha-2\tan^2\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

$$\Rightarrow \tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} \qquad \boxed{\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} \qquad (14)}$$

دریافت نسبت‌های مثلثاتی از جنس نصف زاویه

هرگاه زاویه مورد نظر α و مطلوب، نسبت‌های مثلثاتی α را از جنس $\frac{\alpha}{2}$ چنین به‌دست می‌آوریم.

$$\because \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

از اطراف مساوات، زوایایی مربوطه را نصف می‌کنیم.

$$\therefore \sin 2\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \qquad \Rightarrow \sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\boxed{\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} \qquad (15)}$$

$$\because \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\therefore \cos 2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad (16)}$$

$$\because \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\therefore \tan 2\frac{\alpha}{2} = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (17)}$$

دریافت نسبت‌های مثلثاتی از جنس $\cos 2\alpha$

در صورت ضرورت می‌توان از فورمول و روابط ذیل استفاده نمود.

$$\because \cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha - 1 = -2\sin^2\alpha \qquad / \cdot(-1)$$

$$\Rightarrow 1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\boxed{\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \qquad (18)}$$

$$\because \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\Rightarrow \cos 2\alpha + 1 = 2\cos^2\alpha$$
$$\Rightarrow 2\cos^2\alpha = \cos 2\alpha + 1$$
$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}} \qquad (19)}$$

$$\because \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} \qquad (20)}$$

دریافت نسبت‌های مثلثاتی نصف زاویه از جنس $\cos\alpha$

برای دریافت نسبت‌های مثلثاتی نصف زاویه از جنس $\cos\alpha$ از روابط دو چند نسبت‌ها استفاده می‌کنیم.

$$\because \sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 2\frac{\alpha}{2}}{2}} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad (21)}$$

$$\because \cos\alpha = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos 2\frac{\alpha}{2} + 1}{2}} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos\alpha + 1}{2}}$$

$$\boxed{\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}} \qquad (22)}$$

$$\because \tan\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} \Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 2\frac{\alpha}{2}}{1+\cos 2\frac{\alpha}{2}}} \Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\boxed{\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \qquad (23)}$$

دریافت نسبت‌های مثلثاتی از جنس $\tan\frac{\alpha}{2}$

به روابط زیر دقت نمائید داریم که:

$$\because \sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \sin\alpha=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}} \qquad / \ \div\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} \qquad \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (24)}$$

برای کوساین زاویه نیز بطور ذیل به‌دست می‌آوریم.

$$\because \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}} \quad / \ \div \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (25)}$$

$$\because \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (26)}$$

مثال ۱: $\sin 180^\circ$ را از جنس $\sin 60^\circ$ به‌دست آورید.

$$\because \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha \quad \Rightarrow \sin\left(3\cdot 60^\circ\right) = 3\sin 60^\circ - 4\sin^3 60^\circ$$

$$\Rightarrow \sin 180^\circ = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{12\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$$

مثال ۲: $\cos 180^\circ$ را از جنس $\cos 60^\circ$ دریابید.

$$\because \cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \quad \Rightarrow \cos\left(3\cdot 60^\circ\right) = 4\cos^3 60^\circ - 3\cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow \cos\left(3\cdot 60^\circ\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

مثال ۳: $\tan 135^\circ$ را از جنس $\tan 45^\circ$ دریابید.

$$\because \tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} \quad \wedge \tan 135^\circ = \tan\left(3\cdot 45^\circ\right)$$

$$\Rightarrow \tan 3\cdot 45^\circ = \frac{3\tan 45^\circ - \tan^3 45^\circ}{1-3\tan^2 45^\circ} = \frac{3\cdot 1 - 1^3}{1-3\cdot 1} = -1$$

فورمول‌های حاصل ضرب

برای دریافت فورمول‌های حاصل ضرب از فورمول‌های حاصل جمع زاویه‌ها داریم که:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta \; ....I$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta \; ....II$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta ....III$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta ....IV$$

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$$
$$\Rightarrow 2\sin\alpha\cdot\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$
$$\boxed{\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] \qquad (27)}$$

$$\mathrm{I}-\mathrm{II}=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\Rightarrow 2\cos\alpha\cdot\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$$
$$\boxed{\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right] \qquad (28)}$$

$$\mathrm{III}-\mathrm{I}V=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\Rightarrow -2\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)$$
$$\boxed{\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right] \qquad (29)}$$

$$\mathrm{III}+\mathrm{I}V\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta$$
$$\Rightarrow 2\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$
$$\boxed{\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right] \qquad (30)}$$

فورمول‌های تحویل یا ضربی

جهت به‌دست آوردن فورمول‌های ضربی از فورمول‌های حاصل جمع زاویه‌ها استفاده نموده داریم که:

در صورتِ‌که $A=(\alpha+\beta)$ و $B=(\alpha-\beta)$ را تعویض نمائیم داریم که:

$$\left.\begin{array}{ll}(\alpha+\beta)=A & \alpha=A-\beta \\ (\alpha-\beta)=B & \alpha=B+\beta\end{array}\right\} \Rightarrow 2\alpha=A+B \quad \Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{A+B}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{ll}(\alpha+\beta)=A & \beta=A-\alpha \\ (\alpha-\beta)=B & \beta=-B+\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow 2\beta=A-B \quad \Rightarrow \boxed{\beta=\frac{A-B}{2}}$$

اکنون قیمت‌های به‌دست آمده را در روابط ذیل تعویض می‌کنیم.

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$$

$$\boxed{\sin A+\sin B=2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad (31)}$$

$$\mathrm{I}-\mathrm{II}\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\boxed{\sin A-\sin B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad (32)}$$

$$\mathrm{III}-\mathrm{I}V\Rightarrow \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\boxed{\cos A-\cos B=-2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad (33)}$$

$$\mathrm{III}+\mathrm{I}V\Rightarrow \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cdot\cos\beta$$

$$\boxed{\cos A+\cos B=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad (34)}$$

$$\because \tan A+\tan B=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}$$

$$\Rightarrow \tan A+\tan B=\frac{\sin A\cdot\cos B+\cos A\cdot\sin B}{\cos A\cdot\cos B}=\frac{\sin\left(A+B\right)}{\cos A\cdot\cos B}$$

$$\boxed{\tan A+\tan B=\frac{\sin\left(A+B\right)}{\cos A\cdot\cos B} \qquad (35)}$$

$$\because \tan A-\tan B=\frac{\sin A}{\cos A}-\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin A\cdot\cos B-\cos A\cdot\sin B}{\cos A\cdot\cos B}$$

$$\Rightarrow \tan A-\tan B=\frac{\sin\left(A-B\right)}{\cos A\cdot\cos B}$$

$$\boxed{\tan A-\tan B=\frac{\sin\left(A-B\right)}{\cos A\cdot\cos B} \qquad (36)}$$

شش فورمول فوق را بنام فورمول‌های تحویل یا ضربی یاد می‌کنند.

مثال ۱: حاصل $\cos 165^\circ \cos 105^\circ$ را دریابید.

$$\cos 165^\circ \cos 105^\circ=\frac{1}{2}\left[\cos\left(165^\circ+105^\circ\right)+\cos\left(165^\circ-105^\circ\right)\right]$$

$$\cos 165^\circ \cos 105^\circ=\frac{1}{2}\left[\cos\left(270^\circ\right)+\cos\left(60^\circ\right)\right]$$

$$\cos 165^\circ \cos 105^\circ=\frac{1}{2}\left[0+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}$$

مثال ۲: $\sin 165^\circ \sin 105^\circ$ را دریابید.

$$\sin 165^\circ \sin 105^\circ=-\frac{1}{2}\left[\cos\left(165^\circ+105^\circ\right)-\cos\left(165^\circ-105^\circ\right)\right]$$

$$\sin 165^\circ \sin 105^\circ=-\frac{1}{2}\left[\cos\left(270^\circ\right)-\cos\left(60^\circ\right)\right]$$

$$\sin 165^{\circ} \sin 105^{\circ} = -\frac{1}{2}\left[0-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}$$

مثال‌ها:

1) $$\frac{\sin 7\theta + \sin 3\theta}{\cos 7\theta + \cos 30} = \tan 5\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\sin 7\theta + \sin 3\theta}{\cos 7\theta + \cos 30} = \frac{2\sin\left(\frac{7\theta+3\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{7\theta-3\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{7\theta+3\theta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{7\theta-3\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin 5\theta \cos 2\theta}{\cos 5\theta \cos 2\theta} = \tan 5\theta$$

2) $$\sin 3x + \sin x = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$$

$$\Rightarrow \sin 3x + \sin x = 2\sin\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right) = 2\cdot\sin 2x\cdot\cos x$$

3) $$\frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \tan(\beta-\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \frac{-2\sin\left(\frac{2\theta+2\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{2\theta-2\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{2\theta+2\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{2\theta-2\beta}{2}\right)}$$

$$= \frac{-2\sin(\theta+\beta)\sin(\theta-\beta)}{2\sin(\theta+\beta)\cos(\theta-\beta)} = -\frac{\sin(\theta-\beta)}{\cos(\theta-\beta)} = -\tan(\theta-\beta)$$

$$\Rightarrow \frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\theta + \sin 2\beta} = \tan(\beta-\theta)$$

4) $\cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin 3\theta \sin\theta$

$$\Rightarrow \cos 4\theta - \cos 2\theta = -2\sin\left(\frac{4\theta+2\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{4\theta-2\theta}{2}\right)$$
$$= -2\sin 3\theta \sin\theta$$

5) $\dfrac{\sin 8x+\sin 5x+\sin 2x}{\cos 8x+\cos 5x+\cos 2x} = \tan 5x$

$$\Rightarrow \frac{\sin 8x+\sin 5x+\sin 2x}{\cos 8x+\cos 5x+\cos 2x} = \frac{2\sin\left(\frac{8x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{8x-2x}{2}\right)+\sin 5x}{2\cos\left(\frac{8x+2x}{2}\right)\cos\left(\frac{8x-2x}{2}\right)+\cos 5x}$$

$$= \frac{2\sin 5x\cos 3x+\sin 5x}{2\cos 5x\cos 3x+\cos 5x} = \frac{\sin 5x\left(2\cos 3x+1\right)}{\cos 5x\left(2\cos 3x+1\right)} = \tan 5x$$

مطابقت‌های مثلثاتی

مطابقت به آن مساوات الجبری گفته می‌شود که به تمام قیمت‌های مجهول دو طرف مساوات باهم برابر شوند. مانند: $\left(a-b\right)^2 = a^2-2ab+b^2$ یک مطابقت الجبری می‌باشد؛ زیرا برای a و b هر مقدار که داده شود دو طرف مساوات باهم برابر می‌شوند.

$$\left(a-b\right)^2 = a^2-2ab+b^2$$
$$a=3 \wedge b=4 \quad \Rightarrow \left(3-4\right)^2 = 3^2-2\times3\times4+4^2$$
$$\Rightarrow 1=1$$

به همین ترتیب رابطه $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$ یک مطابقت مثلثاتی می‌باشد زیرا برای زاویه (θ) هر مقدار که وضع شود دو طرف مساوات باهم مساوی می‌شوند.

$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$

$$\theta = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \cos^2 60^\circ = 1 - \sin^2 60^\circ$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4} = 1 - \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

برای ساده سازی مطابقت‌های مثلثاتی از روابط اساسی، فرعی و مطابقت‌های الجبری استفاده می‌کنیم عموماً در محاسبات مطابقت‌های مثلثاتی، افاده یک جهت مساوات را از جهت دیگرش به‌دست می‌آوریم.

مثال‌ها:

1) $$\frac{\tan a + \tan b}{\cot a + \cot b} = \tan a \cdot \tan b$$

$$\Rightarrow \frac{\tan a + \tan b}{\cot a + \cot b} = \frac{\tan a + \tan b}{\frac{1}{\tan a} + \frac{1}{\tan b}} = \frac{\tan a + \tan b}{\frac{\tan b + \tan a}{\tan a \cdot \tan b}} = \frac{\frac{(\tan a + \tan b)}{1}}{\frac{(\tan b + \tan a)}{\tan a \cdot \tan b}}$$

$$= \tan a \cdot \tan b \qquad \Rightarrow \frac{\tan a + \tan b}{\cot a + \cot b} = \tan a \cdot \tan b$$

2) $$\sin^2 \alpha \left(1 + \cot^2 \alpha\right) = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 \alpha \left(1 + \cot^2 \alpha\right) = \sin^2 \alpha \left(1 + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right)$$

$$= \sin^2 \alpha \left(\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}\right) = \sin^2 \alpha \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) = 1$$

3) $$\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{1 + \sin x \cdot \cos x} = \cos x - \sin x$$

با استفاده از مطابقت $\left(a^3-b^3\right)=\left(a-b\right)\left(a^2+ab+b^2\right)$ ساده می‌سازیم.

$$\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{1+\sin x\cdot\cos x}=\frac{\left(\cos x-\sin x\right)\left(\underbrace{\cos^2 x+\sin^2 x}_{1}+\sin x\cos x\right)}{1+\sin x\cdot\cos x}$$

$$=\frac{\left(\cos x-\sin x\right)\left(1+\sin x\cdot\cos x\right)}{1+\sin x\cdot\cos x}=\cos x-\sin x$$

4) $$\frac{\sin 3\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}-\cos 3\alpha=2\cos\alpha$$

$$\Rightarrow\frac{\sin 3\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha}-\cos 3\alpha=\frac{\sin 3\alpha\cdot\cos\alpha-\cos 3\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

با استفاده از فورمول $\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ داریم که:

$$\frac{\sin 3\alpha\cdot\cos\alpha-\cos 3\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\left(3\alpha-\alpha\right)}{\sin\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\cos\alpha$$

5) $$\frac{3\sin x+\sin 2x}{1+3\cos x+\cos 2x}=\tan x$$

$$\Rightarrow\frac{3\sin x+\sin 2x}{1+3\cos x+\cos 2x}=\frac{3\sin x+\left(2\sin x\cos x\right)}{1+3\cos x+\left(2\cos^2 x-1\right)}$$

$$=\frac{\sin x\left(3+2\cos x\right)}{\cos x\left(3+2\cos x\right)}=\tan x$$

6) $$-3\cot^2 x-3=-3\csc^2 x$$

$$-3\cot^2 x-3=-3\left(\cot^2 x+1\right)=-3\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}+1\right)$$

$$=-3\left(\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)=-3\left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)=-3\csc^2 x$$

7) $$2+\frac{4}{2\cot^2 x}=2\sec^2 x$$

$$2+\frac{4}{2\cot^2 x}=2+\frac{2}{\cot^2 x}=2+\frac{\frac{2}{1}}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}}=2+\frac{2\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{2\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{2\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)}{\cos^2 x}=\frac{2}{\cos^2 x}=2\sec^2 x$$

8) $$\sin^4 x+\cos^4 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x-2\sin^2 x\cos^2 x$$

$$\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-2\sin^2 x\cos^2 x$$

9) $$\sin^6 x+\cos^6 x=1-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$\sin^6 x+\cos^6 x=\left(\sin^2\right)^3 x+\left(\cos^2\right)^3 x$$

$$=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)\left(\left(\sin^2\right)^2 x-\sin^2 x\cos^2 x+\left(\cos^2\right)^2 x\right)$$

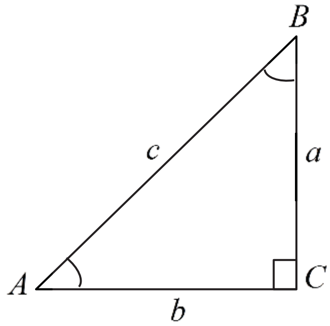
$$\left(\left(\sin^2\right)^2 x+\left(\cos^2\right)^2 x-\sin^2 x\cos^2 x\right)$$

$$\left(1-2\sin^2 x\cos^2 x-\sin^2 x\cos^2 x\right)=1-3\sin^2 x\cos^2 x$$

فصل ششم

روابط بین اضلاع و زوایای مثلث و دایره

قانون ساین: قانون ساین را می‌توان از سه نوع مثلث ثبوت نمود که، بهترین نوع آن از مثلث قایم‌الزاویه می‌باشد.



$$\boxed{\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c} \qquad (37)}$$

$$\sin A=\frac{a}{c} \qquad \Rightarrow \frac{\sin A}{a}=\frac{1}{c} \;.......(\mathrm{I})$$

$$\sin B=\frac{b}{c} \qquad \Rightarrow \frac{\sin B}{b}=\frac{1}{c} \;.......(\mathrm{II})$$

$$\sin C=\frac{c}{c} \qquad \Rightarrow \frac{\sin C}{c}=\frac{1}{c} \;.......(\mathrm{II})$$

از مقایسه روابط (I)، (II) و (III) چنین نتیجه می‌گیریم.

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

قانون کوساین: بیان می‌کند که در هر مثلث کیفی رابطه بین اضلاع و زوایایی آن از جنس کوساین چنین وجود دارد:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B&=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \qquad (38) \\ \cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{aligned}}$$

ثبوت: قضیه کوساین را نیز می‌توان در سه نوع مثلث ثبوت نمود که بهترین آن را در مثلث قایم‌الزاویه می‌توان ثبوت کرد. جهت اثبات این قضیه با در نظر داشت مثلث قایم‌الزاویه و رابطه فیثاغورث می‌توانیم بنویسیم که:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad A = 90^\circ \Rightarrow \cos 90^\circ = 0$$

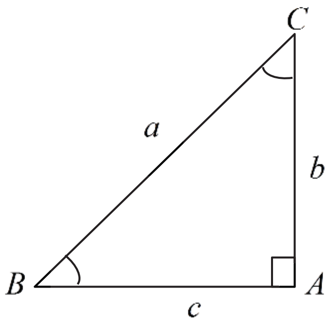
$$a^2 = b^2 + c^2 - 0$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot 0$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$2bc \cdot \cos A = b^2 + c^2 - a^2 \qquad / \div 2bc$$

$$\boxed{\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}$$



قضیه تانجانت: قضیه تانجانت در هر مثلث چنین بیان می‌کند که:

$$\boxed{\begin{aligned} \tan\left(\frac{A-B}{2}\right) &= \frac{a-b}{a+b}\cot\left(\frac{C}{2}\right) \\ \tan\left(\frac{A-C}{2}\right) &= \frac{a-c}{a+c}\cot\left(\frac{B}{2}\right) \\ \tan\left(\frac{B-C}{2}\right) &= \frac{b-c}{b+c}\cot\left(\frac{A}{2}\right) \end{aligned} \qquad (39)}$$

برای اثبات قضیه تانجانت، قانون ساین را در یک مثلث در نظر گرفته بعداً نظر به خواص تناسب می‌توان نوشت که:

$$\because \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

نظر به خاصیت تناسب داریم که:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B}$$

از فورمول‌های حاصل ضرب داریم که:

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\cot\left(\frac{A+B}{2}\right)\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{1}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}\cdot\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{a-b}{a+b}\cdot\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

از طرف دیگر داریم که:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A}+\hat{B}=180^\circ-\hat{C} \qquad / \div 2$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}=90^\circ-\frac{\hat{C}}{2} \qquad / \tan(\ )$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)=\tan\left(90^\circ-\frac{\hat{C}}{2}\right)=\cot\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)$$

با در نظر داشت روابط فوق داریم که:

$$\boxed{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)=\frac{a-b}{a+b}\cdot\cot\left(\frac{\hat{C}}{2}\right)}$$

قضیه مولوئید

این قضیه در هر مثلث روابط بین اضلاع و زوایای آن را چنین بیان می‌کند:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{a-b}{c}&=\frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{C}{2}\right)}\\ \frac{a+b}{c}&=\frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{C}{2}\right)}\end{aligned}\qquad (40)}$$

جهت اثبات قضیه فوق توسط قانون ساین از مثلث‌ها استفاده نموده با در نظر داشت خصوصیات تناسب می‌توان بیان کرد.

$$\because \frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{\sin A-\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{c}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{c}=\frac{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)} \qquad \because \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)=\sin\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\left(\frac{C}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2}\right)} \qquad \boxed{\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\left(\frac{C}{2}\right)}}$$

قضیه: در هر مثلث، روابط بین اضلاع و زوایای آن را می‌توان چنین بیان می‌کرد:

$$\boxed{\begin{cases} a = b\cdot\cos\hat{C} + c\cos\hat{B} \\ b = a\cdot\cos\hat{C} + c\cos\hat{A} \\ c = a\cdot\cos\hat{B} + b\cos\hat{A} \end{cases} \qquad (41)}$$

برای ثبوت روابط فوق مثلث ABC را ترسیم نموده و ارتفاع H را از زاویه A در نظر می‌گیریم، چنین خواهیم داشت:

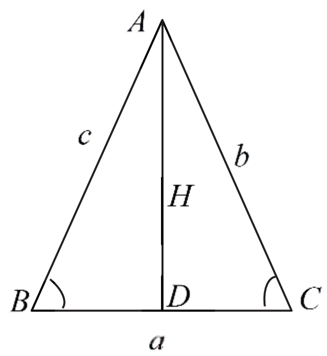
$$\cos B = \frac{\overline{BD}}{c} \quad \Rightarrow \overline{BD} = c\cos B.........i$$

$$\cos C = \frac{\overline{CD}}{b} \quad \Rightarrow \overline{CD} = b\cos C.........ii$$

$$(i)+(ii): \quad \overline{BD} + \overline{CD} = c\cos B + b\cos C$$

$$\because \overline{BD} + \overline{CD} = a$$

$$\Rightarrow \boxed{a = c\cos B + b\cos C}$$



مثال۱: طول یک ضلع مثلث $10cm$ و زاویه مجاور آن 45° و ضلع دیگر آن $4cm$ با زاویه مجاور 60° داده شده باشد، طول ضلع سوم را دریابید.

$$\hat{B} = 45^\circ \wedge c = 10cm, \qquad \hat{C} = 60^\circ \wedge b = 4cm$$

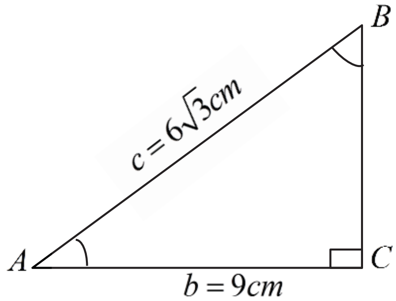
$$a = 10cm\cdot\cos 45^\circ + 4cm\cdot\cos 60^\circ$$

$$a = 10cm\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 4cm\cdot\frac{1}{2}$$

$$a = \left(5\sqrt{2} + 2\right)cm$$

مثال۲: در مثلث قایم‌الزاویه زیر قیمت یک ضلع و دو زاویه آن‌را دریافت نمائید در صورتِ‌که قیمت یک ضلع یک زاویه و دو ضلع آن قرار زیر داده شده باشند.

$B = 60^\circ$

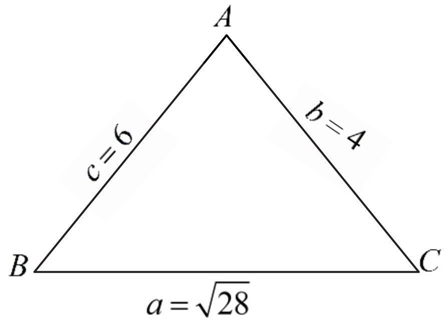


حل: با در نظر داشت قانون ساین می‌توان نوشت که:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{6\sqrt{3}}{\sin C} = \frac{9}{\sin 60} \qquad \Rightarrow \sin C = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin 60}{9}$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin 60}{9} = \frac{6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}}{9} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{C = 90^\circ}$$

مثال۳: در مثلث ABC اندازه سه ضلع آن قرار زیر داده شده است، اندازه زاویه A را تعیین کنید.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$\left(\sqrt{28}\right)^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6\cos A$$

$$28 = 16 + 36 - 48\cos A$$

$$28 = 52 - 48\cos A \qquad \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2}$$

مثال۴: در مثلث ABC ، $\frac{b-c}{b+c} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ و $\angle A = 90^\circ$ داده شده است، زوایای B و C را دریابید.

حل: می‌دانیم که $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ است.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \qquad \Rightarrow 90^\circ+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{B}+\hat{C}=90^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2}=45^\circ$$

$$\because \frac{b-c}{b+c}=\frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{B+C}{2}\right)} \qquad \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\tan 45^\circ} \qquad \because \tan 45^\circ=1$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

طوری‌که می‌دانیم $\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ است. بنابرین وقتی تانجانت دو زاویه باهم مساوی است که، خود زوایا نیز باهم مساوی می‌باشند.

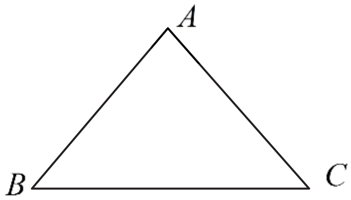
$$\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \Rightarrow \tan 30^\circ=\tan\left(\frac{B-C}{2}\right) \qquad \Rightarrow \frac{B-C}{2}=30^\circ$$

$$\Rightarrow B-C=60^\circ \ \wedge \ B+C=90^\circ \qquad \Rightarrow B=75^\circ$$

حالا قیمت زاویه C را دریافت می‌نمائیم، پس بجای زاویه B قیمت را وضع می‌کنیم.

$$\hat{B}-\hat{C}=60^\circ \qquad \Rightarrow 75^\circ-\hat{C}=60^\circ \qquad \Rightarrow C=15^\circ$$

مثال۵: در یک مثلث ABC حاصل تفریق $\hat{A}-\hat{B}=90^\circ$ و حاصل جمع دو ضلع $a+b=\sqrt{3}+1$ و ضلع $c=1$ می‌باشد اندازه هر سه زاویه آن را دریافت نمائید.



$$\because \frac{a+b}{c}=\frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{C}{2}\right)} \qquad \Rightarrow \frac{\sqrt{3}+1}{1}=\frac{\cos\left(\frac{90^\circ}{2}\right)}{\sin\left(\frac{C}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}+1=\frac{\cos 45^\circ}{\sin\left(\frac{C}{2}\right)} \quad \Rightarrow \sin\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{\cos 45^\circ}{\sqrt{3}+1} \quad \Rightarrow \sin\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}+1}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}+1} \qquad \Rightarrow \sin\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{C}}{2}=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \qquad \Rightarrow \frac{\hat{C}}{2}=15^\circ \quad \Rightarrow \hat{C}=30^\circ$$

$$A+B+C=180^\circ \qquad \Rightarrow A+B+30^\circ=180^\circ \quad \Rightarrow A+B=150^\circ$$

$$\begin{cases} A+B=150^\circ \\ A-B=90^\circ \end{cases} \Rightarrow A=120^\circ \quad \wedge B=30^\circ$$

طول قوس

می‌دانیم که منظور از طول قوس، همان قوس مقابل زاویه‌ای مرکزی است، و با در نظر داشت محاسبه زاویه مرکزی در سیستم رادیان داریم که:

$$\theta=\frac{s}{r} \quad \Rightarrow s=r\theta^{rad}$$

چون طول را به L نشان دهیم خواهیم داشت:

$$s=r\theta^{rad} \qquad \Rightarrow \boxed{L=r\theta^{rad} \qquad (42)}$$

و برای تبدیل در سیستم درجه داریم که:

$$\boxed{L=\pi r\frac{\theta^\circ}{180} \qquad (42)}$$

مثال۱: طول قوسی را که در مقابل زاویه مرکزی $\frac{\pi}{4}$ قرار داشته باشد، اگر شعاع دایره $28cm$ باشد.

$$L = r\theta^{rad} \qquad \Rightarrow L = 28cm \cdot \frac{\pi}{4} \qquad \Rightarrow L \approx 22cm$$

مثال۲: مقدار زاویه مثبت را به رادیان دریابید، در صورتِ که ثانیه‌گرد ساعت 30 ثانیه دوران کرده باشد.

حل: چون 60 ثانیه یک دور مکمل یا 2π رادیان می‌شود، پس $\frac{30}{60} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}v$ است. طوریکه یک دوران $2\pi^{rad}$ می‌باشد، پس $\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi^{rad}$ می‌گردد.

قطاع‌دایره

قسمت از دایره که توسط دو شعاع جدا شده باشد بنام قطاع‌دایره یاد می‌کنند و برای دریافت مساحت قطاع‌دایره چنین عمل می‌کنیم.

$$\begin{matrix} 2\pi^R & = \pi R^2 \\ \theta^R & = S \end{matrix} \quad \Rightarrow S = \frac{\pi R^2 \cdot \theta}{2\pi} \qquad \Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{2} R^2 \theta \qquad (43)}$$

در سیستم درجه:

$$\begin{matrix} 360^\circ & = \pi R^2 \\ \theta & = S \end{matrix} \quad \Rightarrow S = \frac{\pi R^2 \cdot \theta}{360} \qquad \Rightarrow \boxed{S = \frac{\pi R^2 \cdot \theta}{360} \qquad (43)}$$

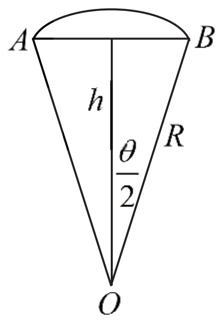
مثال: اگر شعاع یک دایره د $10cm$ باشد، مساحت قطاع را دریابید. در صورتِ‌که زاویه قطاع $\theta = 90^\circ$ باشد.

$$S = \frac{\pi R^2 \theta}{360} \qquad \Rightarrow S = \frac{\pi (10cm)^2 \cdot 90^\circ}{360^\circ} = 25\pi cm^2$$

قطعه‌دایره

قسمت از دایره که توسط وتر دایره جدا می‌گردد بنام قطعه‌دایره یاد می‌کنند و مساحت قطعه‌دایره را چنین دریافت می‌کنیم.

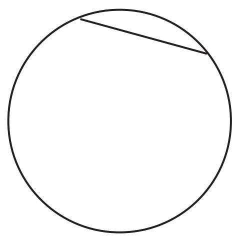
$$S = \text{مساحت قطعه‌دایره} = \text{مساحت قطاع} - \text{مساحت مثلث}$$



$$\cos\frac{\theta}{2} = \frac{h}{R} \qquad \Rightarrow h = R\cos\frac{\theta}{2} \quad \text{ارتفاع مثلث}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)}{R} \qquad \Rightarrow AB = 2R\sin\frac{\theta}{2} \quad \text{قاعده مثلث}$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{\text{قاعده ضرب ارتفاع}}{2} = h\frac{\overline{AB}}{2}$$



$$\because \sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت مثلث} = \frac{R\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2R\sin\frac{\theta}{2}}{2} = \frac{1}{2}R^2\sin\theta$$

چون مساحت مثلث $S = \frac{R^2\sin\theta}{2}$ بوده و مساحت قطاع $A = \frac{1}{2}R^2\theta$ می‌باشد. پس:

$$\text{مساحت قطعه} = \frac{1}{2}R^2\theta - \frac{1}{2}R^2\sin\theta = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta)$$

$$\boxed{S_{\text{قطعه دایره}} = \frac{1}{2}R^2(\theta - \sin\theta) \qquad (44)}$$

مثال: مساحت قطعه‌ای از دایره را دریابید که شعاع آن $6cm$ بوده و توسط وتر $6cm$ جدا شده باشد.

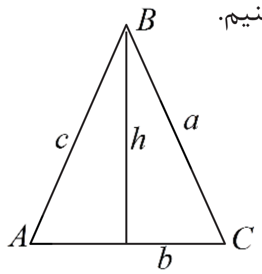
حل: چون قوسِ قطعه $\frac{\pi}{3}^R$ است.

$$\because S=\frac{1}{2}R^2\left(\theta-\sin\theta\right)\ \Rightarrow S=\frac{1}{2}(6cm)^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$S=3.27cm^2$$

مساحت مثلث از جنس دو ضلع و زاویه بین این دوضلع

مثلث ABC را در نظر بگیریم و از رأس B ارتفاع h را بر ضلع $\overline{AC}$ رسم می‌کنیم.



$$\because \sin A=\frac{h}{c}\qquad \Rightarrow h=c\sin A$$

از هندسه می‌دانیم که مساحت یک مثلث:

$$S=\frac{\text{ف اع ق اعده}}{2}$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{b\cdot h}{2}\qquad \Rightarrow S=\frac{1}{2}bc\sin A\qquad \because h=c\sin A$$

$$\boxed{S=\frac{1}{2}bc\sin A\qquad\qquad (45)}$$

مثال: مساحت مثلثی را دریابید که طول ضلع $a=3.5cm$ و $c=6cm$ بوده وسعت زاویه $B=47.5^\circ$ باشد.

$$S=\frac{1}{2}ac\sin B\ \Rightarrow S=\frac{1}{2}(6cm)(3.5cm)\sin 47^\circ\qquad \Rightarrow S\approx 7.74cm^2$$

دریافت $\sin\frac{\alpha}{2}$ از جنس اضلاع مثلث

برای این کار $\sin\frac{\alpha}{2}$ را از جنس طول اضلاع مثلث به‌دست می‌آوریم در هر مثلث ABC روابط زیر صدق می‌کند.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} & \\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} & (46) \\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} & \end{array}}$$

طوری‌که a,b,c اضلاع مثلث و p نصف محیط مثلث می‌باشد.

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

در دروس قبلی بررسی نمودیم که:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},\qquad \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos B}{2}},\qquad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos C}{2}}$$

در هر مثلث $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ می باشد که با وضع نمودن قیمت $\cos A$ در فورمول فوق داریم که:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)}{2bc}}{2}}\qquad \Rightarrow\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{a^2-\left(b^2-2bc+c^2\right)}{4bc}}\qquad \Rightarrow\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$\Rightarrow\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}}\qquad \because a+b+c=2p$$

$$a-b+c=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$$

$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$$

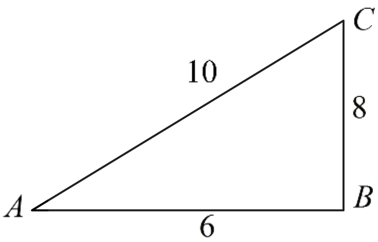
اکنون قیمت‌های به‌دست آمده را در روابط فوق وضع نموده داریم که:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2(p-b)2(p-c)}{4bc}}\quad\Rightarrow\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

مثال: در مثلث ذیل $\sin\frac{A}{2}$ را دریابید.

$$p=\frac{10+8+6}{2}\quad\Rightarrow P=12$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(12-10)(12-6)}{6\cdot10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$



شکل (K)

دریافت $\cos\frac{\alpha}{2}$ از جنس اضلاع مثلث

برای این کار، $\cos\frac{\alpha}{2}$ را از جنس طول اضلاع مثلث به‌دست می‌آوریم. در هر مثلث ABC روابط زیر صدق می‌کنند.

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}\end{aligned}\qquad(47)}$$

ثبوت: چون $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ پس قیمت $\cos A$ را وضع نموده داریم که:

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}{2}} \qquad \because \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

$$\because b+c+a-2a=2p-2a \qquad \Rightarrow b+c-a=2p-2a$$

در نتیجه داریم که:

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{2p2(p-a)}{4bc}} \qquad \Rightarrow \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

مثال: به شکل (K) دقت نموده $\cos\frac{A}{2}$ را دریابید.

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{12(12-8)}{12\cdot 6}}=\sqrt{\frac{48}{60}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

دریافت $\tan\frac{\alpha}{2}$ از جنس اضلاع مثلث

در هر مثلث رابطه بین اضلاع و نسبت‌زاویه آن قرار ذیل می‌باشد.

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$
$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \qquad (48)$$
$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

ثبوت:

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

مثال: به شکل (K) دقت نموده $\tan\frac{A}{2}$ را دریابید.

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(12-10)(12-6)}{12(12-8)}}=\sqrt{\frac{2\times6}{12\times4}}=\frac{1}{2}$$

دریافت $\sin\alpha$ از جنس اضلاع آن مثلث

روابط بین اضلاع و نسبت ساین مثلث قرار ذیل است.

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$\sin B=\frac{2}{ac}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (49)$$
$$\sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ثبوت:

$$\because \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{bc}} \qquad \wedge \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\Rightarrow \sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$$

$$\Rightarrow \sin A = 2\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)p(p-a)}{(bc)^2}}$$

$$\Rightarrow \sin A = \frac{2}{(bc)}\sqrt{p(p-a)(p-c)(p-b)}$$

مثال: $\sin A$ را دریابید طوری‌که $a=8,\ b=10,\ \ c=6$ داده شده باشد.

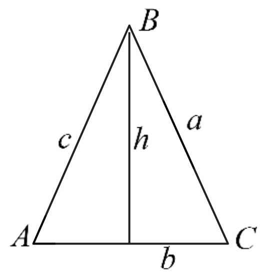
$p=12$

$$\sin A = \frac{2}{10\cdot 6}\sqrt{12(12-10)(12-6)(12-8)}$$

$$\sin A = \frac{2}{60}\sqrt{12(2)(6)(4)}=\frac{4}{5}$$

دریافت مساحت مثلث از جنس طول اضلاع آن

برای ثبوت این قضیه مثلث ABC را در نظر گرفته و ارتفاع راس B آن را رسم می‌نمائیم و نظر به فورمول عمومی مساحت مثلث می‌توان نوشت:



$$S=\frac{1}{2}bh$$

$$\because \sin A=\frac{h}{c} \qquad \Rightarrow h=\sin A\cdot c$$

$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}bc\sin A \qquad \Rightarrow S=\frac{bc}{2}\sin A$$

اکنون قیمت $\sin A$ را از جنس اضلاع مثلث که قبلاً دریافت نمودیم در رابطه فوق تعویض نموده داریم که:

$$S=\frac{bc}{2}\cdot\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

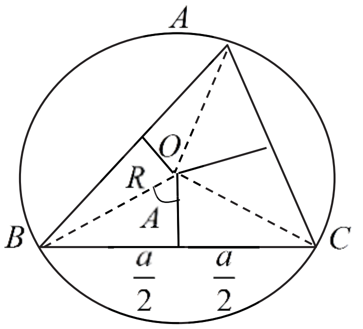
$$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (50)}$$

مثال: مساحت مثلث را دریابید طوری‌که $a=8,\ b=10,\ \ c=6$ داده شده باشد.

$$\because p=12 \qquad \sin A=\sqrt{12(12-10)(12-6)(12-8)}=24cm^2$$

دریافت شعاع دایره محیطی مثلث

دایره محیطی، دایره‌ای است که مثلث در داخل دایره واقع بوده و دایره با هر سه راس مثلث مماس بوده و مرکز دایره محیطی نقطه تقاطع هر سه ناصف‌عمودی اضلاع مثلث می باشد.



ثبوت: برای ثبوت این قضیه مثلث ABC را در نظر گرفته برای دریافت شعاع دایره محیطی آن، ناصف‌های عمودی مثلث را ترسیم تا یکدیگر را در نقطه O قطع کند، O مرکز دایره محیطی است، برای دریافت طول شعاع این دایره محیطی O را به نقاط ABC وصل نموده داریم که:

$$\sin A=\frac{\frac{a}{2}}{R}=\frac{a}{2R} \qquad \Rightarrow a=\sin A\cdot 2\cdot R\Rightarrow \boxed{R=\frac{a}{2\cdot\sin A} \qquad (51)}$$

$$\because \sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow R=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sin A}=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

$$\Rightarrow R=\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\frac{2}{bc}S}=\frac{a}{\frac{4S}{cb}}$$

$$\boxed{R=\frac{abc}{4S} \qquad (52)}$$

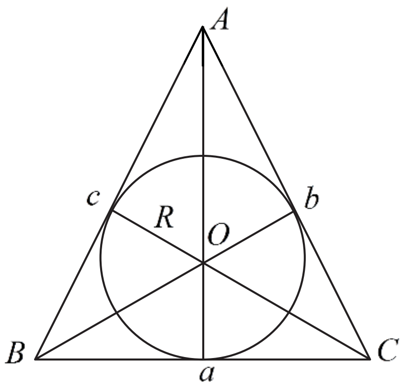
مثال: شعاع دایره محیطی مثلث ABC را دریابید که اضلاع آن $a=9$، $b=10$ و $c=11$ باشد.

$$p=\frac{9+10+11}{2}=15,\quad R=\frac{abc}{4s} \qquad \Rightarrow R=\frac{9\times10\times11}{4\sqrt{15\times4\times6}}\approx 13cm$$

شعاع دایره محاطی مثلث

دایره محاطی یک مثلث عبارت از دایره‌ای است که دایره در داخل مثلث واقع بوده و دایره در داخل با سه ضلع مثلث مماس بوده و مرکز دایره محاطی تقاطع هر سه ناصف‌الزاویه مثلث می‌باشد.

ثبوت: نظر به فورمول مساحت مثلث داریم که:



$$S=\frac{1}{2}aR+\frac{1}{2}bR+\frac{1}{2}cR$$

$$S=\frac{1}{2}R(a+b+c)$$

$$S=\frac{1}{2}R(2p)$$

$$S=Rp \qquad \Rightarrow R=\frac{S}{p}$$

$$\because S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\boxed{R=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} \qquad (53)}$$

مثال: شعاع دایره محاطی مثلث را که طول اضلاع آن $7cm$، $8cm$ و $9cm$ باشد، دریابید.

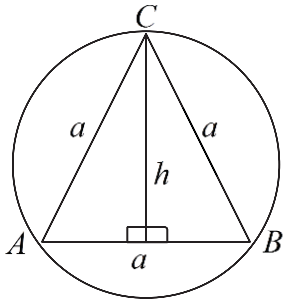
$$p=\frac{7+8+9}{2}=12cm$$

$$S=\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}\approx 28.83cm^2$$

$$R=\frac{S}{p}\ \Rightarrow R=\frac{28.83cm^2}{12cm}=2.23cm$$

دریافت ارتفاع، مساحت، شعاع‌دایره محیطی و شعاع دایره محاطی مثلث متساوی‌الاضلاع

نظر به شکل ذیل و قضیه فیثاغورث داریم که:



$$\sin 60^\circ=\frac{h}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$or \qquad h^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2 \ h^2=a^2-\frac{a^2}{4}$$

$$\Rightarrow h^2=\frac{3a^2}{4} \qquad \boxed{h=\frac{\sqrt{3}}{2}a}$$

مساحت:

$$S=\frac{1}{2}a\cdot h=\frac{1}{2}a\left(\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}a}_{h}\right) \qquad \Rightarrow \boxed{S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \qquad (54)}$$

شعاع‌دایره محیطی:

$$\because R=\frac{abc}{4S}=\frac{a^3}{4\left(\frac{a^2}{4}\sqrt{3}\right)}=\frac{a^3}{a^2\sqrt{3}}=\frac{a}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\boxed{R=\frac{a\sqrt{3}}{3} \qquad (55)}$$

شعاع دایره محاطی:

$$R=\frac{S}{p}=\frac{\frac{a^2}{4}\sqrt{3}}{\frac{3a}{2}}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\boxed{R=\frac{a\sqrt{3}}{6} \qquad (56)}$$

مثال: محیط یک مثلث متساوی الاضلاع $21cm$ است، مساحت، ارتفاع، شعاع دایره محیطی و محاطی این مثلث را دریابید.

$$a=\frac{1}{3}\times p \qquad \Rightarrow a=\frac{1}{3}\times 21cm \qquad \Rightarrow a=7cm$$

$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \qquad \Rightarrow S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(7cm^2\right) \qquad \Rightarrow S=21.21cm^2$$

$$h=\frac{\sqrt{3}}{2}a \qquad \Rightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 7cm \qquad \Rightarrow h=\frac{7\sqrt{3}}{2}cm$$

$R=\frac{a\sqrt{3}}{3} \qquad \Rightarrow R=\frac{7\sqrt{3}}{3}cm$:شعاع دایره محیطی

$R=\frac{a\sqrt{3}}{6} \qquad \Rightarrow R=\frac{7\sqrt{3}}{6}cm$:شعاع دایره محاطی

فصل هفتم

معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی

آن مساوات مثلثاتی که برای بعضی از قیمت‌های زاویه دو طرف مساوات باهم مساوی باشند، بنام معادله مثلثاتی یاد می‌شود.

قبل از اینکه به حل معادلات بپردازیم لازم است تا قیمت‌های یکسان قوس‌ها را بررسی نمائیم.

قوس‌ها و زوایایی که دارای ساین‌های مساوی اند

هرگاه یک زاویه معلوم مانند α را در نظر بگیریم که $\sin\alpha = a$ گردد، زوایایی مجهول دیگری نیز موجود است که ساین آن‌ها بقدر a باشد و اگر این زاویه مجهول را $\hat{x}$ بنامیم داریم که $\sin\hat{x} = a$ بناً برای دریافت زاویه مجهول $\hat{x}$ از مقایسه دو رابطه فوق می‌یابیم که:

$$\left.\begin{matrix}\sin\alpha = a\\ \sin x = a\end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad \sin x = \sin\alpha \quad \Rightarrow \sin x - \sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \left(\frac{x+\alpha}{2}\right) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x+\alpha = (2n+1)\pi \quad \Rightarrow \boxed{x = (2n+1)\pi - \alpha}$$

و یا اینکه

$$\sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \frac{x-\alpha}{2} = n\pi \quad \Rightarrow x-\alpha = 2n\pi \quad \boxed{x = 2n\pi + \alpha}$$

از ترکیب روابط فوق با در نظر داشت اینکه فورمول اعداد جفت تام $2n$ بوده و فورمول اعداد تاق تام $(2n+1)$ بوده و اگر اعداد جفت با اعداد تام جمع گردد، اعداد تام n را حاصل میدهند، یعنی:

$$x = n\pi \pm \alpha \qquad \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \cdot \alpha \qquad \boxed{\begin{array}{ll} x = n\pi + (-1)^n \cdot \alpha & (57) \\ for\, sine & \end{array}}$$

قوس‌ها و زوایایی که دارای کوساین‌های مساوی اند

اگر α یک زاویه معلوم باشد و کوساین آن مساوی به b باشد می‌دانیم که زوایایی مجهول دیگری نیز وجود دارد که کوساین آن b است، یعنی $\cos x = b$ است که از مقایسه روابط فوق می‌توانیم بنویسیم که:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = b \\ \cos x = b \end{array}\right\} \Rightarrow \cos x = \cos\alpha \qquad \Rightarrow \cos x - \cos\alpha = 0$$

$$\Rightarrow -2\cdot\sin\left(\frac{x+\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \frac{x+\alpha}{2} = n\pi \qquad \Rightarrow x+\alpha = 2n$$

$$\Rightarrow x = 2n\pi - \alpha \quad ....(i)$$

$$\because \sin\left(\frac{x-\alpha}{2}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \frac{x-\alpha}{2} = n\pi \qquad \Rightarrow x-\alpha = 2n$$

$$\Rightarrow x = 2n\pi + \alpha \quad ....(ii)$$

در نتیجه زوایایی که دارای کوساین‌های مساوی‌اند، عبارت‌اند از:

$$\boxed{\begin{array}{ll} x = 2n\pi \pm \alpha & (58) \\ for\ \ cosine & \end{array}}$$

قوس‌ها و زوایایی که دارای تانجانت‌های مساوی‌اند

هرگاه $\tan\alpha = c$ باشد، واضح است که زوایایی دیگری نیز وجود دارد که:

$$\left.\begin{matrix}\tan\alpha = c\\ \tan x = c\end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \tan x = \tan\alpha \qquad \Rightarrow \tan x - \tan\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x-\alpha)}{\cos x \cdot \cos\alpha} = 0$$

وقتی یک معادله مساوی به صفر است که صورت آن صفر گردد.

$$\Rightarrow \sin(x-\alpha) = 0 \qquad \Rightarrow x-\alpha = n\pi \qquad \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = n\pi + \alpha & (59) \\ \textit{for tangent} & \end{matrix}}$$

$n = 0,1,2,3,...$

حل معادلات درجه اول مثلثاتی

برای دریافت جواب معادله مثلثاتی درجه اول از جنس $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha$ ابتدا یک طرف معادلات را نظر به نسبت مثلثاتی در می‌یابیم سپس قیمت قوس‌ها را وضع نموده تا زاویه مجهول را به‌دست آوریم.

حالت اول:

$a\sin x + b = 0$

$$ex: \quad 2\sin x - 1 = 0 \quad \Rightarrow 2\sin x = 1 \quad \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \quad \because \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \qquad \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

نوت: هدف از حل این معادله دریافت تمام قوس‌های است که ساین آن $\frac{1}{2}$ است و کوچک‌ترین زاویه آن عبارت از $\frac{\pi}{6}$ می‌باشد که ست حل آن چنین دریافت می‌گردد.

$$x = n\pi + (-1)^n\theta \quad \because \theta = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow x = \left\{\pi - \frac{\pi}{6}, 2\pi + \frac{\pi}{6}, 3\pi - \frac{\pi}{6}, ...\right\}$$

شرط حالت اول چنین می‌باشد.

$$a\sin x+b=0 \Rightarrow a\sin x=-b \Rightarrow \sin x=-\frac{b}{a} \qquad \boxed{-1\le -\frac{b}{a}\le 1}$$

حالت دوم:

$$a\cos x+b=0$$

$$ex: \quad 2\cos x=\sqrt{3} \Rightarrow \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \because \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x=\cos\frac{\pi}{6} \qquad \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{6}}$$

برای دریافت سایر زوایا از کوساین‌های مساوی می‌توان چنین دریافت کرد.

$$x=2n\pi\pm\alpha \qquad \Rightarrow x=\left\{2\pi+\frac{\pi}{6},2\pi-\frac{\pi}{6},4\pi+\frac{\pi}{6},4\pi-\frac{\pi}{6},...\right\}$$

مثال۲: معادله $2\cos x+\sqrt{2}=0$ در انتروال $[0,2\pi]$ چند حل دارد؟

$$2\cos x=-\sqrt{2} \Rightarrow \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \because \cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x=\cos\frac{3\pi}{4} \qquad \Rightarrow \boxed{x=\frac{3\pi}{4}}$$

برای دریافت سایر قیمت‌ها در فاصله فوق چنین دریافت می‌کنیم.

$$x=2n\pi\pm\alpha \qquad \Rightarrow x=\left\{\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right\}$$

حالت سوم:

$$a\tan x+b=0$$

$$ex: \quad \tan x-\sqrt{3}=0 \qquad \Rightarrow \tan x=\sqrt{3} \qquad \because \tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan x=\tan\frac{\pi}{3} \qquad \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{3}}$$

برای دریافت سایر زوایا می‌توان از تانجانت‌های مساوی چنین به‌دست آورد.

$$x = n\pi + \alpha \qquad \Rightarrow x = \left\{ \frac{\pi}{3}, \pi + \frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3}, \ldots \right\}$$

معادله یک مجهوله درجه دوم مثلثاتی

شکل عمومی این معادلات به‌صورت

$$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$$

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$$

$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$$

می‌باشد که در آن a، b و c اعداد ثابت می‌باشد و برای دریافت جذر معادله تعویض را انجام می‌دهیم.

مثال ۱: معادله $6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ را حل نمائید.

$$6\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0 \qquad \to \sin x = y \quad \Rightarrow 6y^2 - 5y + 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac \quad \Rightarrow \Delta = (-5)^2 - 4\cdot 6\cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow y_1, y_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \Rightarrow y_1 = \frac{5+1}{2\cdot 6} = \frac{1}{2} \qquad y_2 = \frac{5-1}{2\cdot 6} = \frac{1}{3}$$

با وضع نمون قیمت تعویض می‌توانیم بنویسیم که:

$$\sin x = y_1 = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

$$\sin x = y_2 = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow x = 19.3^\circ$$

<u>نوت</u>: وقتی تعداد جواب‌های یک معادله در یک انتروال معین خواسته شود، ابتدا جواب‌ها را یافته و سپس با وضع مقادیر صحیح $(\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots), n \in \mathbb{Z}$ جواب‌های قابل قبول معادله را می‌یابیم.

مثال: حل معادله را دریابید.

$$2\cos^2 x-\cos x-1=0 \qquad \to \cos x=y \quad \Rightarrow 2y^2-y-1=0$$

$$\Rightarrow (y-1)(2y+1)=0 \qquad \Rightarrow y_1=1 \ \wedge y_2=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos x=y_1=1 \qquad \Rightarrow \cos x=\cos 0^\circ \qquad \Rightarrow \boxed{x_1=0^\circ}$$

$$\Rightarrow \cos x=y_2=-\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \cos x=\cos\frac{2\pi}{3} \qquad \Rightarrow \boxed{x_2=\frac{2\pi}{3}}$$

سیستم معادلات دو مجهوله مثلثاتی

سیستم معادلات دو مجهوله نظر به شکل آن به چند بخش تقسیم گردیده است که هر یک را به‌صورت جداگانه بررسی می‌کنیم.

نوع اول (جمع و تفریق دو نسبت ساین و کوساین)

این نوع معادلات دارای شکل عمومی ذیل بوده و با استفاده از فورمول‌های ضرب قابلیت حل را دارا اند.

$$\langle 1\rangle.......\begin{cases}\sin x+\sin y=a\\ x+y=\alpha\end{cases} \qquad \langle 2\rangle.......\begin{cases}\sin x-\sin y=a\\ x-y=\alpha\end{cases}$$

$$\langle 3\rangle.......\begin{cases}\cos x+\cos y=a\\ x+y=\alpha\end{cases} \qquad \langle 4\rangle.......\begin{cases}\cos x-\cos y=a\\ x-y=\alpha\end{cases}$$

جهت حل این سیستم معادلات، ابتدا از فورمول‌های تحویل استفاده نموده بعداً آن‌را در سیستم معادلات خطی تطبیق می‌کنیم.

$$\sin x+\sin y=a \quad .....\mathrm{I}$$

$$x+y=\alpha \quad ....\mathrm{II}$$

قیمت معادله I را بر حسب فورمول‌های ضرب چنین می‌نویسیم.

$$2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=a \ ....\mathrm{I} \quad \wedge \quad x+y=\alpha \ ......\mathrm{II}$$

اکنون قیمت $x+y$ را از معادله II در معادله I به‌جای آن قرار می‌دهیم.

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=a.......\mathrm{I} \qquad \Rightarrow \cos\frac{x-y}{2}=\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

می‌دانیم ساحه تحول کوساین‌ها در انتروال $[-1,+1]$ می‌باشد و برای دریافت شرط حل آن چنین می‌نویسیم.

$$-1\le\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\le 1$$

شرط‌حل: با استفاده از قوانین نامساوات دو طرف نامساوات را مربع می‌سازیم.

$$-1\le\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\le 1 \qquad \Rightarrow \frac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\le 1 \qquad \Rightarrow a^2\le 4\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\boxed{a^2-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\le 0}$$

معادله اخیر فوق شرط حل سیستم فوق می‌باشد.

مثال۱: سیستم معادلات زیر را حل کنید.

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=1\\ x+y=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

حل: سیستم فوق $a=1$ و $\alpha=\frac{\pi}{2}$ می‌باشد، می‌بینیم که آیا شرط حل را صدق می‌کند یا خیر؟

قیمت a و α را در رابطه $a^2-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\le 0$ قرار می‌دهیم.

$$a^2-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\le 0 \qquad \Rightarrow 1-4\sin^2\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)\le 0 \quad \Rightarrow 1-4\sin^2\frac{\pi}{4}\le 0$$

$$\Rightarrow 1-4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\le 0 \qquad \Rightarrow 1-4\left(\frac{2}{4}\right)\le 0 \qquad \Rightarrow -1\le 0$$

لذا سیستم فوق قابل حل است. بناً سیستم معادله فوق را با استفاده از فورمول‌های ضرب تغییر شکل می‌دهیم.

$$\begin{cases}\sin x+\sin y=1\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}\end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases}2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}=1\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\because x+y=\frac{\pi}{2} \qquad /_{\div 2}\Rightarrow \frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{x-y}{2}=1 \quad \Rightarrow 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cos\frac{x-y}{2}=1 \quad \Rightarrow \sqrt{2}\cos\frac{x-y}{2}=1$$

$$\Rightarrow \cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \because \frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4} \qquad \Rightarrow \cos\frac{x-y}{2}=\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \frac{x-y}{2}=\frac{\pi}{4} \qquad \Rightarrow x-y=\frac{\pi}{2} \qquad \begin{cases}x-y=\dfrac{\pi}{2}\text{.........}*\\ x+y=\dfrac{\pi}{2}\text{........}**\end{cases}$$

و حل سیستم چنین به‌دست می‌آید.

$$\hat{x}=\frac{\pi}{2}\wedge\ \hat{y}=0$$

نوع دوم (حاصل ضرب دو نسبت ساین و کوساین)

شکل عمومی این نوع سیستم معادلات عبارت‌اند از:

$\langle 1\rangle.....\begin{cases}\sin x\cdot\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$ $\langle 2\rangle.....\begin{cases}\cos x\cdot\cos y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$

$\langle 3\rangle.....\begin{cases}\sin x\cdot\sin y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$

برای حل این سیستم معادلات از فورمول‌های لوگاریتمیک استفاده می‌کنیم و شرط حل آن قرار ذیل می‌باشد.

$$-\cos^2\frac{\alpha}{2}\le a\le\sin^2\frac{\alpha}{2}\qquad\Rightarrow\boxed{0\le a+\cos^2\frac{\alpha}{2}\le 1}$$

مثال: سیستم معادلات ذیل را حل نمائید.

$$\begin{cases}x+y=\pi\\ \sin x\cdot\sin y=1\end{cases}$$

حل: در سیستم فوق $a=1$ و $\alpha=\pi$ می‌باشد. شرط امکان حل این معادلات عبارت است از:

$$0\le a+\cos^2\frac{\alpha}{2}\le 1\qquad\Rightarrow 0\le 1+\cos^2\frac{\pi}{2}\le 1\quad 0\le 1+0^2\le 1$$

$$0\le 1\le 1$$

لذا سیستم قابل حل است. طرف چپ معادله II نظر به فورمول‌های تحویل شکل ذیل را دارد.

$$2\sin x\cdot\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y)$$

$$\cos(x-y)-\cos(x+y)=2\qquad\because\sin x\cdot\sin y=1$$

$$\cos(x-y)-\cos\pi=2\qquad\because x+y=\pi$$

$$\cos(x-y)-(-1)=2\qquad\because\cos\pi=-1$$

$$\cos(x-y)+1=2$$

$$\Rightarrow\cos(x-y)=1\qquad\because\cos 0^\circ=1$$

$$\Rightarrow\cos(x-y)=\cos 0^\circ\qquad\Rightarrow x-y=0\quad\Rightarrow x=y$$

از معادله اول قیمت x را دریافت می‌کنیم.

$$x+y=\pi \qquad \because x=y \Rightarrow x+x=\pi \quad \Rightarrow 2x=\pi \quad \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x=y=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$$

نوع سوم (حاصل تقسیم نسبت سا‌ین‌ها و کوساین‌ها)

شکل عمومی این سیستم عبارت است از:

$$i........\begin{cases}\dfrac{\sin x}{\sin y}=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases} \qquad ii........\begin{cases}\dfrac{\cos x}{\cos y}=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

این سیستم با استفاده از خواص تناسب و تطبیق فورمول‌های تحویل قابلیت حل را دارند.

مثال: معادله ذیل را حل نمائید.

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{\sin x}{\sin y}=\sqrt{3}\end{cases}$$

نظر به خاصیت تناسب می‌توان صورت و مخرج را جمع کرده در مخرج بنویسیم و از صورت مخرج مخرج را تفریق کرده در صورت قرار دهیم که تناسب جدید به‌دست می‌آید.

$$\frac{\sin x-\sin y}{\sin x+\sin y}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

طرف راست معادله را با استفاده از فورمول تحویل به حالت ضرب می‌نویسیم.

$$\frac{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\qquad \because x+y=\frac{\pi}{2}\qquad \Rightarrow \frac{x+y}{2}=\frac{\pi}{4}$$

$$\cot\frac{\pi}{4}\cdot\tan\left(\frac{x-y}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\qquad \because \cot\frac{\pi}{4}=1$$

$$\tan\left(\frac{x-y}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\qquad \because \tan\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\tan 15^\circ$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{x-y}{2}\right)=\tan 15^\circ\qquad \Rightarrow \frac{x-y}{2}=15^\circ$$

$$\Rightarrow x-y=30^\circ=\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{2} \\ x-y=\frac{\pi}{6} \end{cases}\quad \Rightarrow x=\frac{\pi}{3}\wedge y=\frac{\pi}{6}$$

نوع چهارم (حاصل جمع و تفریق تانجانت‌ها)

شکل عمومی این معادلات عبارت از:

$$i..........\begin{cases} \tan x+\tan y=a \\ x\pm y=\alpha \end{cases}\qquad ii..........\begin{cases} \tan x-\tan y=a \\ x\pm y=\alpha \end{cases}$$

شرط حل این معادلات عبارت از:

$$a^2-4+4a\cot\alpha\geq 0$$

مثال: سیستم معادلات ذیل را حل نمائید.

$$\begin{cases} \tan x-\tan y=-2\sqrt{3} \\ x-y=\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

حل: نظر به معادله اول می‌توانیم بنویسیم.

$$\because\ x-y=\frac{\pi}{3} \qquad \Rightarrow \tan(x-y)=\tan\frac{\pi}{3}$$

با استفاده از فورمول‌های حاصل تفریق طرف چپ معادله را می‌نویسیم.

$$\tan(x-y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y} \qquad \because\ \tan(x-y)=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\cdot\tan y} \qquad \because\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}=\frac{-2\sqrt{3}}{1+\tan x\cdot\tan y} \quad /\div\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad 1=\frac{-2}{1+\tan x\cdot\tan y}$$

$$\Rightarrow \quad 1+\tan x\cdot\tan y=-2$$

$$\Rightarrow \quad \tan x\cdot\tan y=-3$$

$$\therefore \begin{cases} \tan x\cdot\tan y=-3.....\text{I} \\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3}.....\text{II} \end{cases}$$

قیمت $\tan x$ را از معادله II این سیستم به‌دست آورده در معادله I قرار می‌دهیم.

$$(\tan x)=-2\sqrt{3}+\tan y......\text{I} \quad \Rightarrow\left(-2\sqrt{3}+\tan y\right)\tan y=-3.......\text{II}$$

$$\Rightarrow \tan^2 y-2\sqrt{3}\tan y+3=0 \qquad \Rightarrow\left(\tan y-\sqrt{3}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow \tan y-\sqrt{3}=0 \qquad \Rightarrow \tan y=\sqrt{3} \qquad \because\ \tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan y=\tan\frac{\pi}{3} \qquad \Rightarrow \boxed{y=\frac{\pi}{3}}$$

اکنون قیمت x را از معادله I به‌دست می‌آوریم.

$$\tan x\cdot\tan y=-3 \qquad \Rightarrow \tan x\sqrt{3}=-3 \qquad \Rightarrow \tan x=-\frac{3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$$

$$\because \tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3} \qquad \Rightarrow \tan x=\tan\frac{2\pi}{3} \qquad \Rightarrow \boxed{x=\frac{2\pi}{3}}$$

نوع پنجم (حاصل ضرب تانجانت‌ها)

شکل عمومی این معادلات قرار ذیل می‌باشد.

$$\begin{cases}\tan x\cdot\tan y=a\\ x\pm y=\alpha\end{cases}$$

شرط حل این سیستم عبارت است از:

$$-1\le\frac{1+a}{1-a}\le 1$$

مثال:

$$\begin{cases}x+y=\dfrac{7\pi}{6}\\ \tan x\cdot\tan y=0\end{cases}$$

با در نظر داشت فورمول‌های حاصل ضرب داریم که:

$$\because \sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right]......\text{I}$$

$$\because \cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right]......\text{II}$$

$$\because (x+y)=\frac{7\pi}{6}$$

$$\therefore \tan x\cdot\tan y=\frac{\left[\cos(x-y)-\cos\frac{7\pi}{6}\right]}{\left[\cos(x-y)+\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right]}=0$$

از معادله فوق دیده می‌شود که صورت کسر صفر است، زیرا وقتی‌که صورت کسر صفر شود، کسر برابر صفر می‌شود.

$$\cos(x-y)-\cos\frac{7\pi}{6}=0 \qquad \because \cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\because \cos(x-y)+\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \qquad \Rightarrow \cos(x-y)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(x-y)=\cos\frac{7\pi}{6} \qquad \Rightarrow x-y=\frac{7\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x-y=\frac{5\pi}{6} \ldots\ldots i \\ x+y=\frac{7\pi}{6} \ldots\ldots ii \end{cases} \qquad \Rightarrow x=\pi \wedge y=\frac{\pi}{6}$$

نوع ششم (حاصل تقسیم تانجانت‌ها)

شکل عمومی این سیستم عبارت است از:

$$\begin{cases} \frac{\tan x}{\tan y}=a \\ x\pm y=\alpha \end{cases} \qquad -1\le\frac{a-1}{a+1}\sin\alpha\le 1$$

مثال: سیستم معادلات ذیل را حل نمائید.

$$\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{2} \\ \frac{\tan x}{\tan y}=-3 \end{cases}$$

حل: نظر به خاصیت تناسب داریم که:

$$\frac{\tan x-\tan y}{\tan x+\tan y}=\frac{-3-1}{-3+1}=2 \qquad \because \tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{\dfrac{\sin x\cos y-\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos x\cos y}}=\frac{\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}}=2 \quad \Rightarrow \frac{\sin(x-y)}{\sin(x+y)}=2$$

$$\Rightarrow \sin(x-y)=2\sin(x+y) \qquad \because x-y=\frac{\pi}{2} \quad \wedge \sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$\Rightarrow 2\sin(x+y)=1 \qquad \Rightarrow \sin(x+y)=\frac{1}{2} \qquad \because \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin(x+y)=\sin\frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow x+y=\frac{\pi}{6}$$

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{6} \\ x-y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \quad \Rightarrow x=\frac{\pi}{3} \ \wedge y=-\frac{\pi}{6}$$

فصل هشتم توابع مثلثاتی

توابع مثلثاتی: توابع که در آن متحول به‌صورت نسبت‌های مثلثاتی باشد، توابع مثلثاتی می‌نامند.

قبل از اینکه به توابع مثلثاتی بپردازیم لازم است تا تابع متناوب را بررسی نمائیم.

تابع متناوب: تابع f را متناوب گوئیم، هرگاه $t \neq 0$ وجود داشته باشد که:

$$\forall x \in D_f \qquad \Rightarrow x+t \in D_f \ , \ \ f\left(x+t\right)=f\left(x\right)$$

کوچک‌ترین مقدار مثبت t را در صورت وجود با T نمایش داده به آن دوره‌ای متناوب اصلی یا اساسی یا کوچک‌ترین متناوب f گوئیم.

برای مثال: $y=\sin x$ را در نظر بگیریم داریم که:

$$\sin\left(x+2\pi\right)=\sin x$$

یعنی تابع $y=\sin x$ یک تابع متناوب با دوره تناوب 2π است.

اگر تابع $y=\sin nx$ را در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\sin\left(nx+2\pi\right)=\sin nx$$

دوره تناوب nx برابر 2π است، لذا دوره تناوب x برابر $\frac{2\pi}{n}$ است. یعنی شکل این تابع در انتروال $\frac{2\pi}{n}$ تکرار می‌شود.

تابع $y=\sin x$

تابع $y=\sin x$ یک تابع پریودیکی دورانی بوده که پریود آن $\left[0,2\pi\right]$ می‌باشد، بدین معنی که تابع $\sin x$ بعد از یک پریود مکمل خویش به‌قدر 2π یا یک

دور مکمل دو باره قیمت‌های اولی خویش را اختیار می‌کند، هرگاه به زاویه قیمت‌های مختلف داده خواهیم داشت:

$$y=\sin x$$

$$x=0^\circ \quad \Rightarrow \sin 0^\circ = 0$$

$$x=\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$x=\pi \quad \Rightarrow \sin\pi=0$$

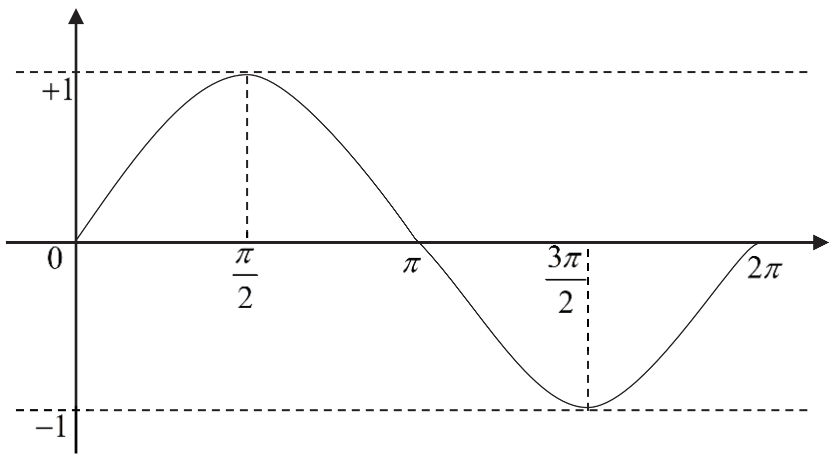
$$x=\frac{3\pi}{2} \quad \Rightarrow \sin\frac{3\pi}{2}=-1$$

$$x=2\pi \quad \Rightarrow \sin 2\pi=0$$

از تحولات فوق به صراحت دیده می‌توانیم که تابع $y=\sin x$ از یک پریود خویش به اندازه 2π دو باره قیمت‌های اولی خویش را تکراراً اختیار می‌کند.

گراف تابع $y=\sin x$

برای ترسیم گراف تابع $y=\sin x$، زاویه x را از 0° تا 360° قیمت‌های مختلف داده تا قیمت‌های ساین آن مشخص گردد، سپس قیمت‌های دریافت شده را روی سیستم کمیات وضعیه درج نموده گراف آن‌را رسم می‌کنیم.



طوری‌که دیده می‌شود تابع $y=\sin x$ در انتروال $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ یک تابع متزاید و در $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ یک تابع متناقص و در $\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ باز هم متزاید است، در نتیجه تابع مذکور یک تابع (متزاید، متناقص و متزاید) می‌باشد، هم‌چنان این تابع یک تابع متمادی است، و تعداد نقاط اعظمی، اصغری و انعطاف را تعیین چنین می‌کنیم یعنی: یک نقطه اعظمی، یک نقطه اصغری و سه نقطه انعطاف را در یک دور کامل استندرد دارا می‌باشد.

ناحیه تعریف و ناحیه قیمت تابع $y=\sin x$

می‌دانیم که تابع $y=\sin x$ صرف در انتروال $[-1,+1]$ تحول می‌کند. بناً با در نظر داشت این اصل نقاط دومین و کودومین را به‌دست می‌آوریم.

$y=a\sin x$

$domin=(-\infty,+\infty)$

$codomin=[-a,+a]$

$T=\frac{2\pi}{m}$

$\min=\{\sin x=-1\}$

$\max=\{\sin x=1\}$

$In=\{\sin x=0\}$

توجه: تابع $y=\sin mx$ در فاصله $0\le x\le 2\pi$ دارای نقاط اعظمی، اصغری و انعطاف ذیل می‌باشد.

$y=\sin mx$

max	min	In
m	m	$2m+1$

مثال: تابع $y=2\sin 3x-4$ را در نظر گرفته نقاط دومین و کودومین را به‌دست آورید.

$$y=2\sin 3x-4$$

$$D_f=(-\infty,+\infty) \qquad R_f=[-6,-2] \qquad T=\frac{2\pi}{3}=120^\circ$$

$$\min\begin{cases}\sin 3x=-1\\ 3x=270^\circ\\ x=90^\circ\end{cases} \Rightarrow \min=(90^\circ,-6) \qquad \min=3$$

$$\max\begin{cases}\sin 3x=1\\ 3x=90^\circ\\ x=30^\circ\end{cases} \Rightarrow \max=(30^\circ,-2) \qquad \max=3$$

$$In\begin{cases}\sin 3x=0\\ 3x=0^\circ\\ x=0^\circ\end{cases} \Rightarrow In=(0,-4) \qquad In=2m+1=7$$

تابع $y=\cos x$

این تابع نیز مانند $\sin x$ بوده و پریود آن $0\le x\le 2\pi$ یا $[0,2\pi]$ بوده، که جهت مطالعه تحولات تابع $y=\cos x$ زاویه x را در مراحل مختلف تحول قیمت داده و در نتیجه قیمت تابع $y=\cos x$ را ملاحظه می‌کنیم.

$$y=\cos x$$

$$x=0^\circ \qquad \Rightarrow \cos 0^\circ=1$$

$$x=\frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2}=0$$

$$x=\pi \qquad \Rightarrow \cos\pi=-1$$

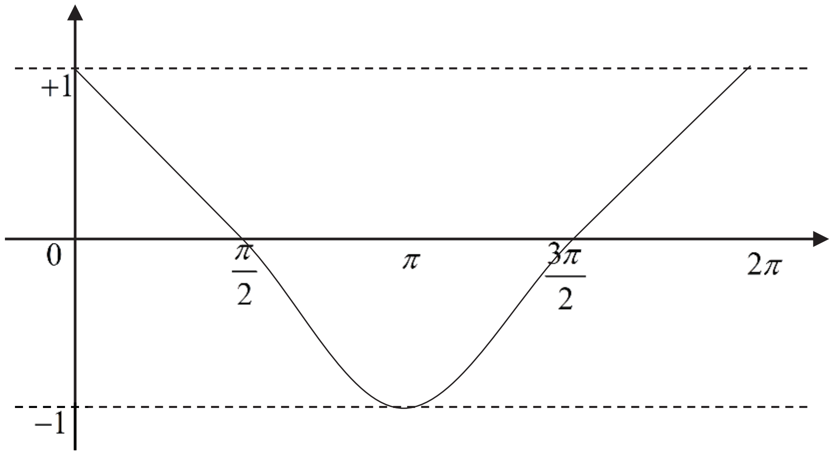
$$x=\frac{3\pi}{2} \qquad \Rightarrow \cos\frac{3\pi}{2}=0$$

$$x=2\pi \qquad \Rightarrow \cos 2\pi=1$$

از تحولات فوق به صراحت دیده می‌شود که تابع $y=\cos x$ از یک پریود خویش به‌قدر 2π دو باره قیمت‌های اولی خویش را تکراراً اختیار می‌کند.

گراف تابع $y=\cos x$

جهت ترسیم گراف تابع $y=\cos x$ زاویه را از 0° الی 360° قیمت‌های مختلف داده تا قیمت‌های کوساین حاصل گردد، سپس قیمت‌های حاصله را روی سیستم کمیات وضعیه درج نموده گراف آن‌را رسم می‌کنیم.



در شکل به وضاحت دیده می‌شود که تابع کوساین در یک پریود مکمل خود دارای دو قیمت اعظمی بوده که بنام نقاط اعظمی یاد می‌گردد و این نقاط عبارت‌اند از $\max(0,1)$ و $\max(2\pi,1)$ و هم‌چنان این تابع دارای یک نقطه اصغری بوده که پائین‌ترین قیمت را دارا است و عبارت است از $\min(\pi,-1)$ تابع کوساین در یک پریود مکمل خویش یک تابع متناقص، متزاید می‌باشد، که در نقاط $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ و $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$ نقاط انعطاف را تشکیل می‌دهد و یک تابع متمادی می‌باشد.

ناحیه تعریف و ناحیه قیمت تابع $y=\cos x$

می‌دانیم که $y=\cos x$ را در انتروال $[-1,+1]$ تحول می‌کند بناً با در نظر داشت این اصل ناحیه تعریف و ناحیه قیمت و نقاط آن‌را به‌دست می‌آوریم.

$y=a\cos mx$

$D_f=(-\infty,+\infty)$

$R_f=[-a,+a]$

$T=\dfrac{2\pi}{m}$

$\min=\{\cos mx=-1\}$

$\max=\{\cos mx=1\}$

$In=\{\cos mx=0\}$

توجه: تابع $y=a\cos mx$ در فاصله $0\le x\le 2\pi$ دارای نقاط اعظمی اصغری و انعطاف ذیل می‌باشد.

$y=a\cos mx$

max	min	In
$m+1$	m	$2m$

مثال: تابع $y=-3\cos 2x+2$ را در نظر گرفته ناحیه تعریف و ناحیه قیمت آن‌را به‌دست آورید.

$y=-3\cos 2x+2$

$D_f=(-\infty,+\infty)$

$R_f=[-1,5]$

$T=\pi=180^\circ$

$$\min\begin{cases}\cos 2x=-1\\ 2x=180^\circ\\ x=90^\circ\end{cases}\Rightarrow \min(90^\circ,5)\qquad m=2$$

$$\max\begin{cases}\cos 2x=1\\ 2x=0^\circ\\ x=0^\circ\end{cases}\quad \begin{matrix}\Rightarrow \max\left(0^\circ,-1\right)\\ \max=m+1=3\end{matrix}\qquad In\begin{cases}\cos 2x=0\\ 2x=90^\circ\\ x=45^\circ\end{cases}\quad \begin{matrix}\Rightarrow In\left(45^\circ,2\right)\\ In=2m=4\end{matrix}$$

تابع $y=\tan x$

تابع $y=\tan x$ نیز یک تابع پریودیک بوده و پریود آن $\left(0\le x\le \pi\right)$ می‌باشد. زیرا $\tan\left(x+\pi\right)=\tan x$.

می‌دانیم که: $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ است بناً تابع $y=\tan x$ یک تابع کسری بوده که مخرج تابع در برابر بعضی قیمت‌های متحول خویش صفر می‌گردد، که در نتیجه تابع در برابر همین قیمت نامعین می‌گردد، بناً تابع $y=\tan x$ در نقاط که مخرج صفر می‌گردد، دارای مجانب‌های عمودی است و تحولات تابع $y=\tan x$ را چنین بررسی می‌کنیم.

$$x=0^\circ \qquad \Rightarrow \tan 0^\circ=\frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ}=\frac{0}{1}=0 \qquad \Rightarrow \tan 0^\circ=0^\circ$$

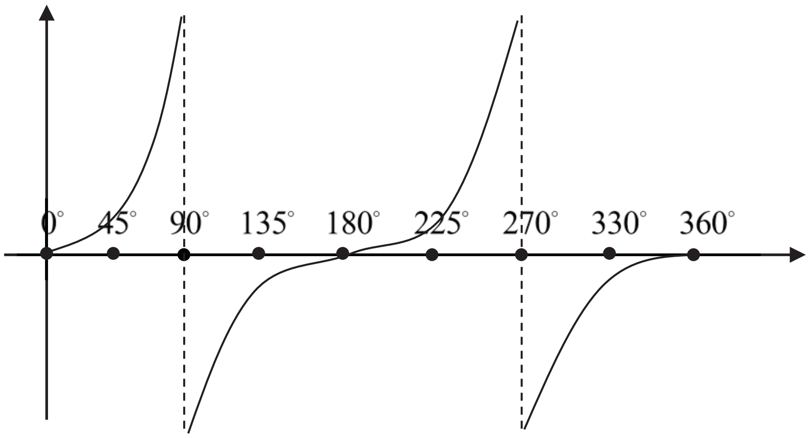
$$x=\frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \tan\frac{\pi}{2}=\frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ}=\frac{1}{0}=\infty \qquad \Rightarrow \tan 90^\circ=\infty$$

$$x=\pi \qquad \Rightarrow \tan \pi=\frac{\sin \pi}{\cos \pi}=\frac{0}{-1}=0 \qquad \Rightarrow \tan \pi=0$$

گراف تابع $y=\tan x$

برای رسم گراف $y=\tan x$ زاویه x را از 0° الی 360° قیمت‌های مختلف داده تا قیمت $\tan x$ به‌دست آید. سپس قیمت‌های حاصله را روی سیستم کمیات وضعیه درج نموده گراف آن‌را رسم می‌کنیم.

x	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	330°	360°
$y=\tan x$	0	1	∞	-1	0	1	∞	-1	0



تابع $y=\tan x$ یک تابع همیشه متزاید بوده بناً نقاط اعظمی و اصغری ندارد، ولی در نقاط $(0,0)$ و $(\pi,0)$ در پریود خویش دارای دو نقطه انعطاف است، قابل یاد آوری است که این تابع غیر متمادی می‌باشد.

ناحیه تعریف و ناحیه قیمت تابع $y=\tan x$

می‌دانیم که تابع $y=\tan x$ کسری بوده و جهت دریافت ناحیه تعریف آن جذر مخرج را دریافت می‌کنیم.

$$y=\tan mx=\frac{\sin mx}{\cos mx} \qquad \Rightarrow \cos mx=0 \qquad T=\frac{\pi}{m}$$

$$\Rightarrow \qquad D_f=(-\infty,+\infty)\setminus\frac{\pi}{2m}+n\pi$$

$$R_f=(-\infty,+\infty)$$

$$In=(\tan mx=0)$$

توجه: تابع $y=a\tan mx$ از فاصله $0\le x\le 2\pi$ دارای نقاط انعطاف $2m+1$ می‌باشد.

مثال: تابع $y=\tan 3x$ را در نظر گرفته نقاط ناحیه تعریف و ناحیه قیمت آن‌را به‌دست آورید.

$y=\tan 3x$

$$In=\begin{cases}\tan 3x=0\\ 3x=0\\ x=0\end{cases}\quad \Rightarrow In=\left(0^\circ,0\right)\qquad m=3,\ \Rightarrow In=2m+1=7$$

$$D_f,\quad \tan 3x=\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\quad \Rightarrow\begin{cases}\cos 3x=0\\ 3x=90^\circ\\ x=30^\circ\end{cases}\quad \Rightarrow D_f=\left(-\infty,+\infty\right)\setminus\frac{\pi}{6}+n\pi$$

$$R_f=\left(-\infty,+\infty\right)\qquad\qquad T=\frac{\pi}{3}=60^\circ$$

تابع $y=\cot x$

تابع $y=\cot x$ نیز پریودیک بوده و پریود آن مانند تابع $y=\tan x$ می‌باشد. زیرا: $\left[0,\pi\right]$

$y=\cot\left(\pi+x\right)=\cot x$

تابع $y=\cot x$ یک تابع کسری می‌باشد زیرا $y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ و اگر تحولات این تابع را بررسی کنیم. می‌بینیم که:

$$x=0^\circ\qquad \Rightarrow \cot 0^\circ=\frac{\cos 0^\circ}{\sin 0^\circ}=\frac{1}{0}=\infty$$

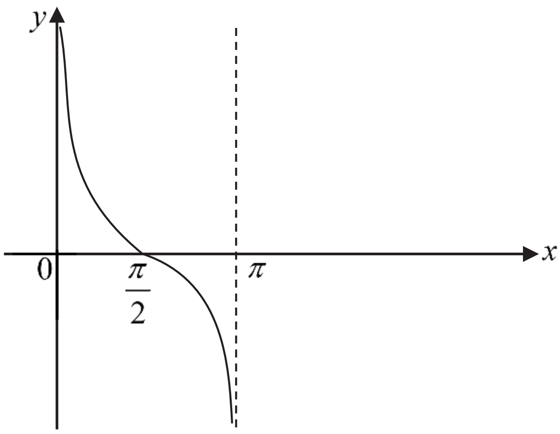
$$x=90^\circ\qquad \Rightarrow \cot 90^\circ=\frac{\cos 90^\circ}{\sin 90^\circ}=\frac{0}{1}=0$$

$$x=\pi\qquad \Rightarrow \cot \pi=\frac{\cos \pi}{\sin \pi}=\frac{-1}{0}=\infty\ \ or\ -\infty$$

بناً تابع $y=\cot x$ در یک پریود خویش در برابر قیمت‌های 0° و π مخرج خود را صفر ساخته که در نتیجه تابع غیر معین گردیده و در این نقاط دارای مجانب‌های عمودی می‌باشد.

گراف تابع $y=\cot x$

برای ترسیم گراف $y=\cot x$ زاویه x را از 0° الی 180° قیمت‌های مختلف داده تا قیمت $y=\cot x$ به‌دست آید. سپس قیمت‌های حاصله را روی سیستم کمیات وضعیه درج نموده گراف آن‌را رسم می‌کنیم.



تابع $y=\cot x$ برعکس تابع $y=\tan x$ یک تابع همیشه متناقص بوده بناً این تابع نیز نقاط اعظمی و اصغری نداشته و در نقطه $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ تنها یک نقطه انعطاف دارد. و این تابع نیز غیر متمادی می‌باشد.

ناحیه تعریف و ناحیه قیمت $y=\cot x$

می‌دانیم که تابع $y=\cot x$ یک تابع کسری می‌باشد، برای تعیین ناحیه تعریف آن مخرج تابع را مساوی به صفر قرار می‌دهیم.

$$y=a\cot mx$$

$$D_f\begin{cases}\dfrac{a\cos mx}{\sin mx}\end{cases} \Rightarrow \sin mx=0 \Rightarrow D_f=(-\infty,+\infty)\setminus n\pi$$

$$R_f=(-\infty,+\infty),\qquad T=\frac{\pi}{m},\qquad In=\{\cot mx=0\}$$

مثال: نقاط ناحیه تعریف و ناحیه قیمت تابع $y=\cot 3x$ را به‌دست آورید.

$$y=\cot 3x=\frac{\cos 3x}{\sin 3x} \quad \Rightarrow \sin 3x=0 \quad \Rightarrow 3x=0^{\circ} \quad \Rightarrow x=0^{\circ}$$

$$D_f=(-\infty,+\infty)\setminus n\pi$$

$$R_f=(-\infty,+\infty)$$

$$T=\frac{\pi}{m} \qquad T=\frac{\pi}{3}=60^{\circ}$$

$$In=\begin{cases}\cot 3x=0\\ 3x=90^{\circ}\\ x=30^{\circ}\end{cases} \qquad \Rightarrow In=\left(30^{\circ},0\right)$$

تابع $y=\sec x$

چون $y=\sec(2\pi+x)=\sec x$ می‌باشد، بناً پریود این تابع $[0,2\pi]$ بوده و یک تابع پریودیکی می‌باشد و نظر به روابط اساسی می‌توانیم بنویسیم که:

$$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$$

قیمت‌های مختلف تابع را بررسی می‌کنیم.

$$x=0^{\circ} \qquad \Rightarrow \frac{1}{\cos 0^{\circ}}=\frac{1}{1}=1$$

$$x=90^{\circ} \qquad \Rightarrow \frac{1}{\cos 90^{\circ}}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$x=\pi \qquad \Rightarrow \frac{1}{\cos \pi}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$x=\frac{3\pi}{2} \qquad \Rightarrow \frac{1}{\cos\frac{3\pi}{2}}=\frac{1}{0}=\infty$$

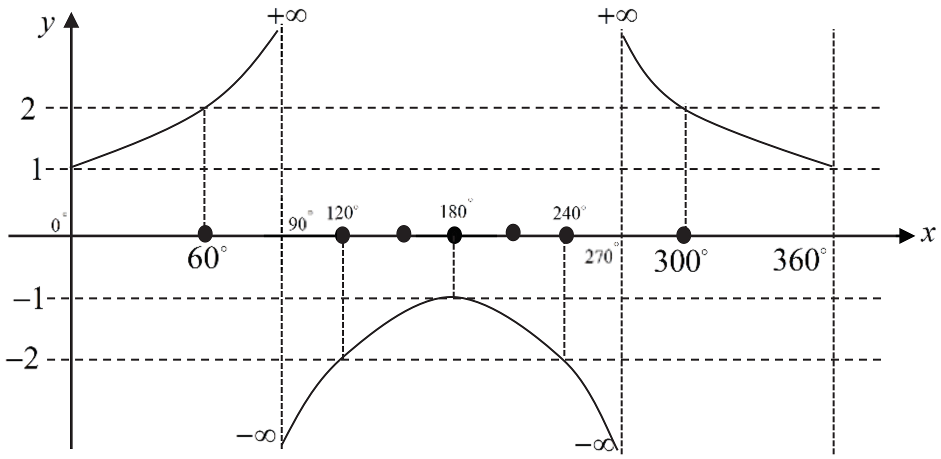
$$x=2\pi \qquad \Rightarrow \frac{1}{\cos 2\pi}=\frac{1}{1}=1$$

اگر به تحولات تابع فوق دقیقاً ملاحظه نمائیم، این تابع در قیمت‌های $\frac{\pi}{2}(2n+1)$ دارای مجانب‌های عمودی است.

ترسیم گراف $y=\sec x$

برای ترسیم گراف $y=\sec x$ زاویه x را از 0° الی 360° قیمت‌های مختلف داده تا قیمت‌های $y=\sec x$ به‌دست آید، قیمت‌های به‌دست آمده را روی سیستم کمیات وضعیه درج نموده گراف آن‌را رسم می‌کنیم.

x	0°	60°	90°	120°	180°	240°	270°	300	360°
$y=\sec x$	1	2	$\infty,-\infty$	-2	-1	-2	$\infty,-\infty$	2	1



طوری‌که دیده می‌شود تابع فوق در دو موقعیت $(0,1)$ و $(2\pi,1)$ بلندترین قیمت‌های خود را داشته بناً این نقاط به حیث min تابع می باشد، به همین ترتیب نقاط $(\pi,-1)$ نقطه اعظمی تابع است و این تابع در نیمه اول پریود خویش یعنی $0\prec x\prec\pi$ یک تابع متزاید و در نیمه دوم یعنی $\pi\prec x\prec 2\pi$ یک تابع متناقص می‌باشد، نظر به گراف این تابع دیده می‌شود که غیر متمادی است.

ناحیه تعریف و ناحیه قیمت تابع $y=\sec x$

تابع $y=\sec x$ نیز مانند تابع تانجانت یک تابع کسری می‌باشد که برای تعیین ناحیه تعریف آن مخرج کسر را مساوی به صفر قرار می‌دهیم.

$$y=a\sec mx=\frac{a}{\cos mx} \qquad \Rightarrow \cos mx=0 \qquad \because \cos\frac{\pi}{2}=0$$

$$\Rightarrow D_f=(-\infty,+\infty)\setminus n\pi+\frac{\pi}{2m}$$

$$R_f=(-\infty,+\infty)\setminus(-a,+a)$$

$$T=\frac{2\pi}{m} \qquad \max=\{\sec mx=-1\} \qquad \min=\{\sec x=1\}$$

مثال: تابع $y=2\sec 2x+7$ را در نظر گرفته نقاط ناحیه تعریف و ناحیه قیمت آن‌را به‌دست آورید.

$$y=2\sec 2x+7 \qquad T=\frac{2\pi}{m} \quad m=2\ ,\Rightarrow T=\frac{2\pi}{2}=\pi=180^\circ$$

$$D_f=? \quad \Rightarrow 2\sec 2x=\frac{2}{\cos 2x} \Rightarrow \cos 2x=0 \ \Rightarrow 2x=90^\circ \ \Rightarrow x=45^\circ$$

$$D_f=(-\infty,+\infty)\setminus n\pi+\frac{\pi}{4} \qquad R_f=(-\infty,+\infty)\setminus(5,7)$$

$$\max\begin{cases}\sec 2x=-1\\ \sec 2x=180^\circ\\ x=90^\circ\end{cases} \quad \Rightarrow \max=(90^\circ,5)$$

$$\min\begin{cases}\sec 2x=1\\ 2x=0^\circ\\ x=0^\circ\end{cases} \quad \Rightarrow \min=(0^\circ,9)$$

تابع $y=\csc x$

این تابع نیز پریودیکی بوده و پریود آن $[0,2\pi]$ است، زیرا: $\csc(2\pi+x)=\csc x$ که تحولات این تابع را در یک پریود چنین مطالعه می‌کنیم.

$$x=0^\circ \qquad \Rightarrow y=\frac{1}{\sin 0^\circ}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$x=90^\circ \qquad \Rightarrow y=\frac{1}{\sin 90^\circ}=\frac{1}{1}=1$$

$$x=\pi \qquad \Rightarrow y=\frac{1}{\sin \pi}=\frac{1}{0}=\infty$$

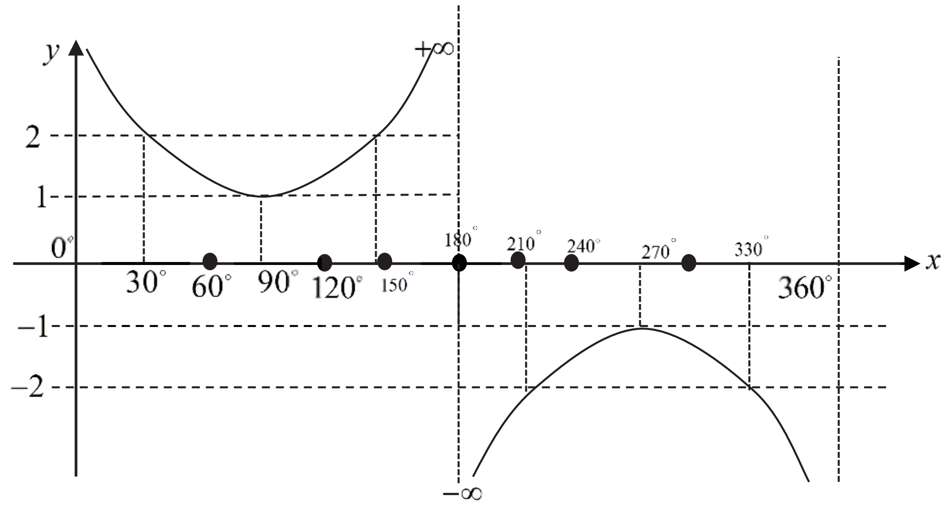
$$x=270^\circ \qquad \Rightarrow y=\frac{1}{\sin 270^\circ}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$x=2\pi \qquad \Rightarrow y=\frac{1}{\sin 2\pi}=\frac{1}{0}=\infty$$

گراف تابع $y=\csc x$

برای رسم گراف $y=\csc x$ زاویه x را از 0° الی 360° قیمت‌های مختلف داده تا قیمت‌های $y=\csc x$ به‌دست آید. قیمت‌های حاصله را روی سیستم کمیات وضعیه درج نموده گراف آن‌را رسم می‌کنیم.

x	0°	30°	90°	150°	180°	210°	270°	330	360°
$y=\csc x$	∞	2	1	2	$\infty,-\infty$	-2	-1	-2	$\infty,-\infty$



در نقاط $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ دارای یک نقطه اصغری و در $\left(-\frac{3\pi}{2},-1\right)$ یک اعظمی دارد و این تابع در ناحیه اول و چهارم متناقص و در ناحیه دوم و سوم متزاید است. هم‌چنان یک تابع غیرمتمادی است.

تعیین نقاط ناحیه تعریف و ناحیه قیمت تابع $y=\csc x$

از آن‌جایی که تابع $y=a\csc mx$ یک تابع کسری است، بناً برای تعیین ناحیه تعریف مخرج تابع را مساوی به صفر قرار داد می‌دهیم.

$$y=a\csc mx \qquad \because a\csc mx=\frac{a}{\sin mx} \quad \Rightarrow \sin mx=0$$

$$D_f=(-\infty,+\infty)\setminus n\pi \qquad R_f=(-\infty,+\infty)\setminus(-a,+a)$$

$$T=\frac{2\pi}{m} \qquad \max=\{\csc mx=-1\} \qquad \min=\{\csc x=1\}$$

مثال: تابع $y=2\csc 3x+2$ را در نظر گرفته نقاط ناحیه تعریف و ناحیه قیمت آن‌را به‌دست آورید.

$y = 2\csc 3x + 2 \qquad T = \frac{2\pi}{m} \qquad \Rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$

$D_f = (-\infty, +\infty) \setminus n\pi$

$R_f = (-\infty, +\infty) \setminus (0,4)$

$$\min = \begin{cases} \csc 3x = 1 \\ 3x = 90^\circ \\ x = 30^\circ \end{cases} \Rightarrow \min = (30^\circ, 4)$$

$$\max = \begin{cases} \csc 3x = -1 \\ 3x = 270^\circ \\ x = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \max = (90^\circ, 0)$$

گراف و خواص توابع معکوس مثلثاتی

هرگاه f تابعی یک‌به‌یک باشد، در این صورت معکوس‌پذیر است و معکوس آن‌را با f^{-1} نمایش می‌دهیم داریم که:

$x = f(y) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = y \qquad , \qquad D_{f^{-1}} = R_f\,,\ R_{f^{-1}} = D_f$

هم‌چنان گراف تابع f^{-1} قرینه‌ای گراف تابع f نسبت به ناصف ناحیه اول و سوم است. بنابرین برای توابع مثلثاتی نیز در فاصله‌های که یک‌به‌یک باشند، تابع معکوس قابل تعریف است. به‌عنوان مثال تابع $y = \sin x$ در انتروال $[0,\pi]$ یک‌به‌یک نیست و معکوس‌پذیر نخواهد بود، اما این تابع در انتروال $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر است و معکوس آن‌را با $\sin^{-1} x$ نمایش می‌دهیم. بنابرین وقتی می‌نویسیم $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$، یعنی قوسِ را باید دریافت کنیم که مقدار ساین آن $\frac{1}{2}$ است، پس معکوس یک تابع مثلثاتی زاویه‌ای مرکزی مربوط به آن نسبت‌مثلثاتی است.

معکوس تابع ساین

معکوس تابع $y=\sin x$ را در انتروال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$، به‌شکل $y=\arcsin x$ یا $y=\sin^{-1}x$ نمایش می‌دهند و ناحیه تعریف آن انتروال $[-1,1]$ و ناحیه قیمت آن انتروال $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ می‌باشد، هم‌چنان یک تابع تاق می‌باشد، یعنی:

$$\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x$$

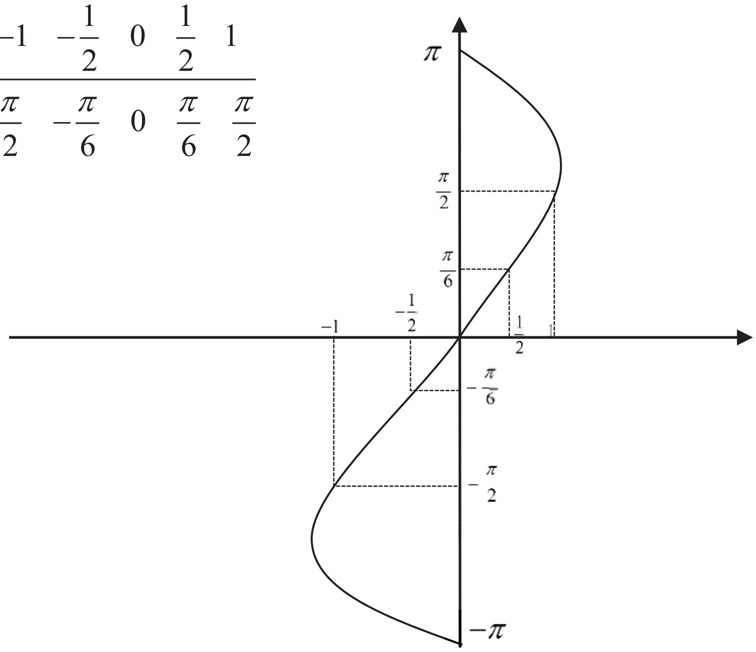
ترکیب معکوس تابع ساین عبارت از:

$$\sin^{-1}(\sin x)=x \qquad :-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$$

$$\sin\left(\sin^{-1}x\right)=x \qquad :-1\le x\le 1$$

برای ترسیم گراف این تابع، متحول تابع را قیمت‌های مختلف داده و نقاط آن‌را مشخص می‌کنیم.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y=\sin^{-1}x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$



معکوس تابع کوساین

معکوس تابع $y=\cos x$ را در انتروال $[0,\pi]$ به‌صورت $y=\cos^{-1}x$ یا $y=\arccos x$ نمایش می‌دهند. ناحیه تعریف آن انتروال $[-1,1]$ و ناحیه قیمت آن انتروال $[0,\pi]$ می‌باشد و این تابع نه تاق و نه جفت می‌باشد. یعنی:

$$\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}(x)$$

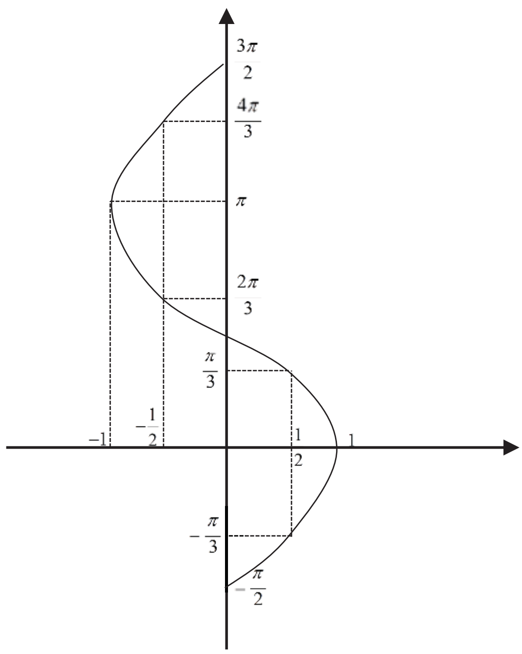
ترکیب این تابع قرار ذیل است.

$$\cos^{-1}(\cos x)=x \qquad :0\le x\le\pi$$

$$\cos(\cos^{-1}x)=x \qquad :-1\le x\le 1$$

برای ترسیم گراف این تابع، متحول تابع را قیمت‌های مختلف داده و نقاط آن‌را مشخص می‌کنیم.

x	$y=\cos^{-1}x$
-1	π
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$
1	0



معکوس تابع تانجانت

معکوس تابع $y=\tan x$ را در انتروال $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ به‌صورت $y=\tan^{-1}x$ یا $y=\arctan x$ نمایش می‌دهند.

ناحیه تعریف آن اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ و ناحیه قیمت آن انتروال $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ می‌باشد و این تابع تاق می‌باشد. یعنی:

$$\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$$

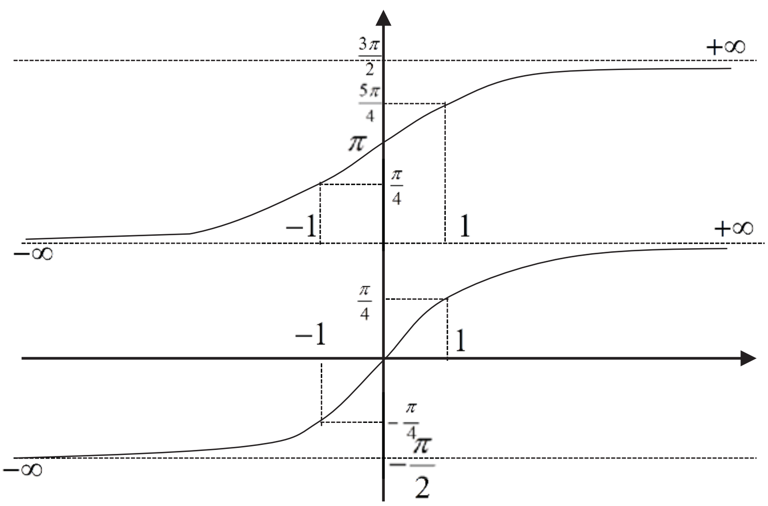
و ترکیب این تابع قرار ذیل می‌باشد.

$$\tan^{-1}(\tan x)=x \qquad : -\frac{\pi}{2}\prec x\prec\frac{\pi}{2}$$

$$\tan(\tan^{-1}x)=x \qquad : x\in\mathbb{R}$$

هم‌چنان برای ترسیم گراف این تابع متحول را قیمت‌های مختلف داده تا قیمت‌های حاصله را روی سیستم کمیات‌وضعیه مشخص کنیم. یعنی:

x	$-\infty$	-1	0	1	$\pm\infty$	-1	0	1	$\pm\infty$
y	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$



معکوس تابع کوتانجانت

معکوس تابع $y=\cot x$ را در انتروال $(0,\pi)$ به صورت $y=\cot^{-1}x$ یا $y=arc\cot x$ نشان می‌دهند. ناحیه تعریف آن اعداد حقیقی و ناحیه قیمت آن انتروال $\pi \succ x \succ 0$ می‌باشد و این تابع تاق می‌باشد. یعنی:

$$\cot^{-1}(-x)=\pi-\cot^{-1}(x)$$

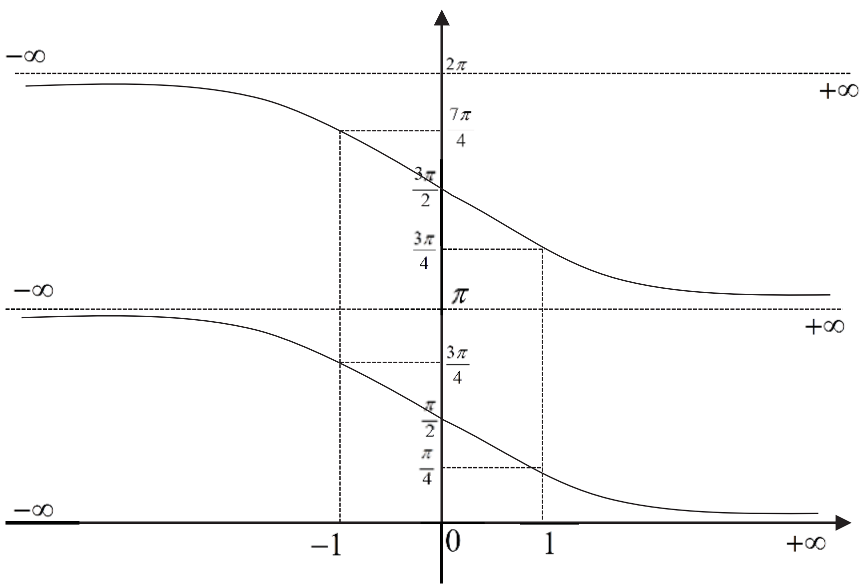
و ترکیب این تابع قرار ذیل می‌باشد.

$$\cot^{-1}(\cot x)=x \qquad :(0,\pi)$$

$$\cot\left(\cot^{-1}x\right)=x \qquad :x\in\mathbb{R}$$

و برای ترسیم گراف این تابع متحول را قیمت‌های مختلف داده تا نقاط را مشخص کنیم. یعنی:

x	$+\infty$	1	0	-1	$\pm\infty$	1	0	-1	$-\infty$
y	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π



نوت: برای تعیین مقدار معکوس یک نسبت‌مثلثاتی وقتی مقدار نسبت داده شده مربوط به زوایایی معلوم مانند: $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ, ...$ باشد می‌توانیم مستقیماً مقدار آن نسبت را با استفاده از تعریف تابع معکوس دریافت کنیم.

مثال: حاصل افاده‌های زیر را دریابید.

$$a)\ \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad b)\ \tan^{-1}\left(\cot\frac{\pi}{3}\right) \qquad c)\ \sin\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

حل a: باید قوسِ را در انتروال $[0,\pi]$ دریافت کنیم که مقدار کوساین آن $-\frac{1}{2}$ است، این قوس در ناحیه دوم و برابر است با $\frac{2\pi}{3}$ و یا استفاده از فورمول $\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$ داریم که:

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}$$

حل b: از آن‌جایی که $\cot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ است، پس $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ را می‌خواهیم، لذا زاویه‌ای را در انتروال $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ دریافت می‌کنیم که مقدار تانجانت آن $\frac{\sqrt{3}}{3}$ است که زاویه‌ای $\frac{\pi}{6}$ می‌گردد. یعنی:

$$\tan^{-1}\left(\cot\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$$

حل c: از آن‌جایی که $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$ است، پس $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

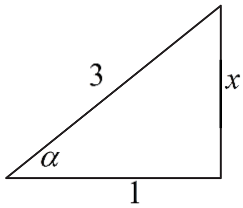
توجه: برای محاسبات نسبت‌های مثلثاتی و یا توابع معکوس مثلثاتی به زوایای مقابل می‌شویم که مشهور نیست مانند $\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$ و یا $\tan\left(\cot^{-1}\frac{1}{5}\right)$ و یا

$\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$ در این‌جا نمی‌توانیم مستقیماً با استفاده از تعریف تابع معکوس جواب را دریافت کنیم. روش دریافت جواب این افاده‌ها را در مثال زیر بررسی می‌کنیم.

مثال: حاصل $\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{3}\right)$ را دریافت کنید.

حل: با فرض $\cos^{-1}\frac{1}{3}=\alpha$، در این صورت $\cos\alpha=\frac{1}{3}$، مثلث قایم‌الزاویه را در نظر می‌گیریم که یکی از زوایای آن α و طول وتر آن 3 و ضلع مجاور زاویه α، 1 باشد، $\sin\alpha$ را در این مثلث دریافت می‌کنیم.

$$3^2=x^2+1^2 \qquad \Rightarrow x=2\sqrt{2}$$
$$\sin\alpha=\frac{x}{3} \qquad \Rightarrow \sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$



استفاده از روابط زیر (که مستقیماً می‌توان با استفاده از مطابقت‌های مثلثاتی، رسم گراف یا دایره‌ای مثلثاتی آن‌ها را اثبات کرد) در حل مسائل کمک زیادی می‌نماید.

$\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$	$: \ -1\le x\le 1$
$\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$	$: \ x\succ 0$
$\tan^{-1}a+\tan^{-1}b=\tan^{-1}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$	$: \ a\succ 0\ ,\ b\prec 1$

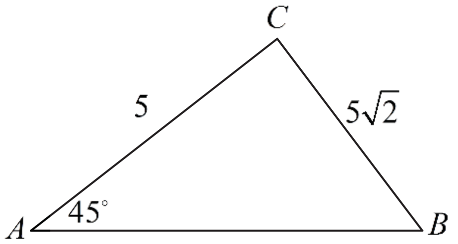
مثال: حاصل $\sin^{-1}\frac{1}{3}+\cos^{-1}\frac{1}{3}$ را دریافت کنید.

با استفاده از روابط فوق می‌دانیم که جواب این افاده $\frac{\pi}{2}$ می‌شود.

حل مثلث‌ها و کاربردهای آن

منظور از حل یک مثلث دریافت شش عنصر یک مثلث به‌صورت دقیق می‌باشد. برای دریافت عناصر نامعلوم یک مثلث از روی عناصر معلوم آن از رابطه‌های که قبلاً بررسی نمودیم استفاده می‌کنیم.

مثال۱: در شکل ذیل زاویه‌ای B چند درجه است؟

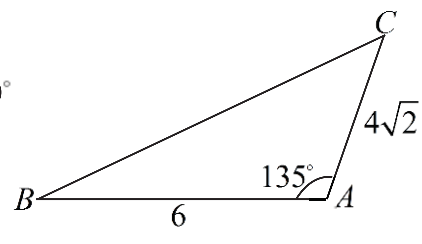


حل: نظر به قانون ساین می‌توان زاویه B را دریافت کرد!

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{a}{\sin A} \qquad \Rightarrow \frac{5}{\sin B}=\frac{5\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} \qquad \Rightarrow \sin B=\frac{1}{2}\ ,\ \ B=30^\circ$$

مثال۲: در شکل ذیل مقدار $\overline{BC}$ چند است؟

حل: نظر به قانون کوساین می‌توان چنین نوشت:



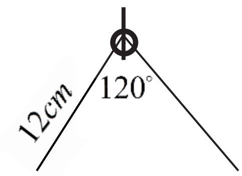
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$a^2=6^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2-2(6)\left(4\sqrt{2}\right)\cos 1350^\circ$$

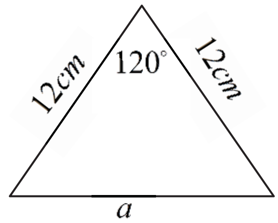
$$a^2=36+32-12\left(4\sqrt{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$a^2=36+32+48 \qquad \Rightarrow a=2\sqrt{29}$$

مثال۳: طول هر پایه‌ی پرگار $12cm$ و زاویه بین پایه‌ها 120° است. این پرگار دایره‌ای به طول چه اندازه شعاع رسم می‌کند.



حل: با توجه به مثلث ذیل و قانون کوساین داریم که:



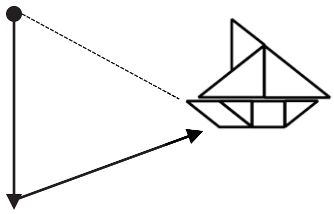
$$a^2 = 12^2 + 12^2 - 2(12)(12)(\cos 120^\circ)$$

$$a^2 = 144 + 144 - 2(144)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

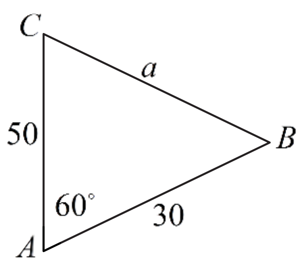
$$a^2 = 432 \qquad \Rightarrow a = 12\sqrt{13}$$

که این ضلع شعاع دایره خواهد بود.

مثال۴: یک کشتی از بندر به سمت جنوب حرکت کرده و $50km$ را طی می‌کند، سپس با زاویه 60° مسیری به طول $30km$ را طی می‌کند، فاصله کشتی در این نقطه از بندر چند کیلومتر است؟



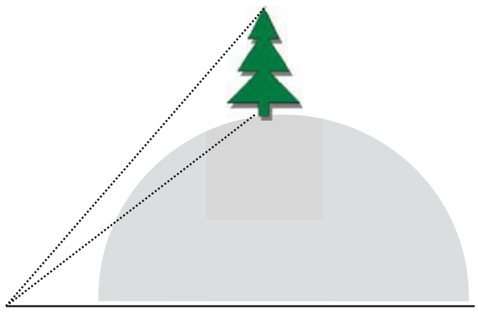
حل: با توجه به معلومات سوال باید BC را دریافت نمائیم، از قانون کوساین استفاده می‌کنیم.



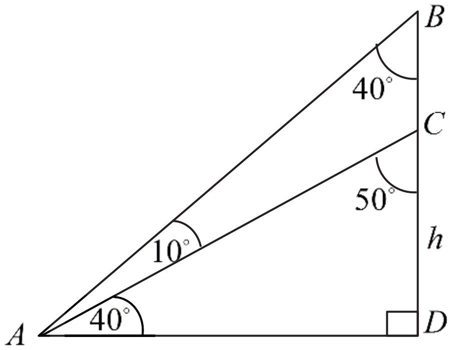
$$a^2 = (50)^2 + (30)^2 - 2(30)(50)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$a = 10\sqrt{19}$$

مثال۵: درختی به ارتفاع $6.5m$ روی یک تپه قرار گرفته است، از یک نقطه روی زمین، نوک درخت با زاویه‌ی 50° و پای درخت با زاویه‌ی 40° دیده می‌شود. ارتفاع تپه را به‌دست آورید.



حل: به‌شکل ذیل دقت نمائید.



$$In\ \overset{\Delta}{ABC} \qquad \frac{\sin 10^\circ}{6.5}=\frac{\sin 40^\circ}{AC} \qquad \Rightarrow AC \simeq 24.47m$$

$$In\ \overset{\Delta}{ACD} \qquad \frac{\sin 40^\circ}{CD}=\frac{\sin 90^\circ}{24.47} \qquad \Rightarrow CD \simeq 15.66m$$

سوالات چهار گزینه‌ی

۱	$\frac{5\pi}{36}$ رادیان چند درجه می‌شود؟ الف) 36° ب) 25° ج) 20° د) 18°
۲	$\frac{\pi}{4}$ رادیان چند گراد می‌شود؟ الف) 50^g ب) 60^g ج) 70^g د) 80^g
۳	8° چند رادیان می‌شود؟ الف) $\frac{2\pi}{45}$ ب) $\frac{3\pi}{50}$ ج) $\frac{6\pi}{32}$ د) $\frac{8\pi}{90}$
۴	در ساعت $4:20$ زاویه بین دو عقربه ساعت چند درجه است. الف) 12° ب) 5° ج) 20° د) 10°
۵	حاصل افاده‌ی $2\sin\alpha\csc\alpha$ عبارت است از: الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4
۶	در صورتِ‌که $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ باشد، پس حاصل افاده‌ی $\tan\alpha\tan\beta$ عبارت است از: الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4
۷	قیمت $\sin\frac{\pi}{6}$ مساوی است به: الف) 1 ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ج) $\frac{1}{3}$ د) $\frac{1}{2}$
۸	قیمت $\tan\frac{\pi}{3}$ مساوی است به: الف) $\sqrt{2}$ ب) $\sqrt{3}$ ج) 2 د) $\sqrt{5}$

۹	کدام‌یک از نامساوی‌های زیر بین زوایای $40^\circ, 50^\circ$ برقرار است؟ الف) $\sin 50^\circ \prec \sin 40^\circ$　ب) $\cos 50^\circ \prec \cos 40^\circ$ ج) $\tan 50^\circ \prec \tan 40^\circ$　د) $\cot 40^\circ \le \cot 50^\circ$
۱۰	اگر $\sin\alpha = a$ باشد، پس ساحه‌تحول a عبارت است از: الف) $a \le 1$　ب) $a \le -1$　ج) $a \ge 1$　د) $\|a\| \le 1$
۱۱	هرگاه $\sec(-\theta) = a$ باشد، در این‌صورت $\cos(\pi+\theta)$ مساوی است به: الف) $\frac{1}{a}$　ب) $-\frac{1}{a}$　ج) $-a$　د) a
۱۲	اگر $\csc\alpha = b$ باشد، پس ساحه تحول b عبارت است از: الف) $b \ge 1$　ب) $b \ge -1$　ج) $b \le -1$　د) $\|b\| \ge 1$
۱۳	حاصل افاده‌ی مثلثاتی $\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$ مساوی است به: الف) -2　ب) 2　ج) 1　د) -1
۱۴	حاصل افاده‌ی مثلثاتی $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ مساوی است به: الف) $-\frac{1}{2}$　ب) $\frac{1}{2}$　ج) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　د) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
۱۵	افاده‌ی مثلثاتی $\frac{\sec(-\theta) + \sec\theta}{\sec(-\theta)}$ مساوی است به: الف) 0　ب) 1　ج) 2　د) 3
۱۶	در حالت معیاری با زاویه 200° کدام زاویه زیر کوترمینل می‌باشد. الف) 2620°　ب) 2820°　ج) 2720°　د) 2800°
۱۷	اگر $\alpha = 60^\circ$ باشد، پس $2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$ مساوی است به:

	الف) $\frac{5}{8}$ ب) $\frac{3}{8}$ ج) $\frac{7}{8}$ د) $\frac{1}{8}$
۱۸	در حالت معیاری با زاویه 23° کدام زاویه زیر کوترمینل می‌باشد. الف) 7423° ب) 7223° ج) 7323° د) 7123°
۱۹	اگر $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=1$ باشد، پس قیمت θ مساوی است به: الف) 40° ب) 45° ج) 50° د) 60°
۲۰	حاصل افاده‌ی $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ مساوی است به: الف) 0 ب) 1 ج) 2 د) 3
۲۱	اگر زاویه θ به‌شکل معیاری رسم گردد، و $0\succ\theta\succ0, \cos\theta\succ0$ $\sin\theta\succ0, \cos\theta\succ0$ باشد، پس ضلع دوم زاویه θ در کدام ناحیه قرار دارد. الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4
۲۲	قیمت عددی افاده‌ی $\sqrt{\dfrac{\frac{5}{2}+\sin 30^\circ}{5+\cot 135^\circ}}$ عبارت است از: الف) 1 ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ د) $\sqrt{3}$
۲۳	حاصل افاده‌ی $\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)+5+\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ عبارت است از: الف) 3 ب) 4 ج) 5 د) 6
۲۴	به کدام یکی از قیمت‌های ذیل $\cot(4x)$ تعریف نشده است. الف) $\frac{\pi}{2}$ ب) $\frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{\pi}{6}$ د) $\frac{\pi}{8}$
۲۵	افاده‌ی مثلثاتی $\sqrt{4\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha}$ مساوی است به:

	الف) 1 ب) 2 ج) $\cos 2\alpha$ د) $\sin 2\alpha$
۲۶	هرگاه $\tan x = b$ باشد، پس $\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ به اساس b مساوی است به: الف) b ب) $-b$ ج) $-2b$ د) $2b$
۲۷	برای کدام قیمت p ، $\cot(x+p)=\cot x$ است. الف) π ب) $\frac{\pi}{2}$ ج) $\frac{\pi}{3}$ د) $\frac{\pi}{4}$
۲۸	قیمت عددی $\sin^2 5+\sin^2 15+\sin^2 25+\ldots+\sin^2 85$ مساوی است به: الف) 4 ب) 4.5 ج) 5 د) 5.5
۲۹	حاصل افاده‌ی $\sin x\cot^2 x\sec x\cot^2 x\csc x$ مساوی است به: الف) $\frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}$ ب) $\frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}$ ج) $\frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}$ د) $\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$
۳۰	حاصل افاده‌ی $\frac{-\left(\tan^2\sqrt{7}-1\right)}{-\left(\cot^2\sqrt{7}-1\right)}$ عبارت است از: الف) $-\cot^2\sqrt{7}$ ب) $-\tan^2\sqrt{7}$ ج) $\tan\sqrt{7}$ د) $\tan^2\sqrt{7}$
۳۱	حاصل افاده‌ی $\sec\frac{5}{13}\left(1+\sin\frac{5}{13}\right)+\cos\frac{5}{13}\left(1+\sin\frac{5}{13}\right)^{-1}$ مساوی است به: الف) $\frac{-2}{\cos\frac{5}{13}}$ ب) $\frac{-2}{\sin\frac{5}{13}}$

	ج) $\dfrac{2}{\cos\frac{5}{13}}$ د) $\dfrac{2}{\sin\frac{5}{13}}$
۳۲	اگر $\sin x=\frac{2}{3}$ باشد، پس $\sin^2 x+2\sin x+1$ مساوی است به: الف) $\frac{9}{4}$ ب) $\frac{4}{9}$ ج) $\frac{9}{25}$ د) $\frac{25}{9}$
۳۳	افاده‌ی مثلثاتی $\cos^2\frac{x}{10}-\sin^2\frac{x}{10}$ مساوی است به: الف) $\sin\frac{x}{5}$ ب) $\sin\frac{x}{10}$ ج) $\cos\frac{x}{10}$ د) $\cos\frac{x}{5}$
۳۴	اگر α زاویه حاده در $\sin\alpha=0$ باشد، در این‌صورت $\sin 2\alpha$ مساوی است به: الف) 0 ب) 1 ج) 2 د) 3
۳۵	هرگاه $\sin x=\frac{1}{2}$ و ضلع دوم x در ناحیه دوم باشد، پس قیمت $\tan x$ مساوی است به: الف) $\sqrt{3}$ ب) $-\sqrt{3}$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ د) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
۳۶	حاصل $\sin^4\frac{\pi}{12}+\cos^4\frac{\pi}{12}$ مساوی است به: الف) $\frac{5}{8}$ ب) $\frac{7}{8}$ ج) $\frac{9}{8}$ د) $\frac{11}{8}$
۳۷	اگر $\sin\theta=\frac{4}{5}$، ضلع اول روی محور x و ضلع دوم آن در ربع دوم قرار داشته باشد، $\cos\theta$ مساوی است به: الف) $\frac{3}{5}$ ب) $\frac{5}{3}$ ج) $-\frac{3}{5}$ د) $-\frac{5}{3}$

۳۸	اگر دو طرف $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ به $\cos^2\theta$ تقسیم شود رابطه ذیل حاصل می‌شود. الف) $1+\tan^2\theta=\csc^2\theta$ ب) $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$ ج) $1-\tan^2\theta=\sec^2\theta$ د) $1-\tan^2\theta=\csc^2\theta$
۳۹	افاده‌ی مثلثاتی $\sqrt{1-2\sqrt{\sin^2 x\left(1-\sin^2 x\right)}}$ مساوی است به: الف) $2\csc x$ ب) $2\sec x$ ج) $\sin x-\cos x$ د) $\sin x+\cos x$
۴۰	افاده‌ی مثلثاتی $\dfrac{\sec\theta-\csc\theta}{\sec\theta+\csc\theta}$ مساوی است به: الف) $2\tan\theta$ ب) $\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}$ ج) $\dfrac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$ د) $\dfrac{\tan\theta-1}{\tan\theta+1}$
۴۱	هرگاه $\sin x=\dfrac{1}{2}$ و ضلع دوم x در ناحیه دوم باشد، پس قیمت $2\cos x$ مساوی است به: الف) $-\sqrt{2}$ ب) $\sqrt{2}$ ج) $-\sqrt{3}$ د) $\sqrt{3}$
۴۲	حاصل $4\cos180^\circ-3\sec180^\circ-2\tan180^\circ$ مساوی است به: الف) -1 ب) 1 ج) 2 د) 3
۴۳	حاصل $4\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha$ مساوی است به: الف) $\cos2\alpha$ ب) $-4\cos\alpha$ ج) $4\cos\alpha$ د) $4\cos2\alpha$
۴۴	قیمت عددی $\dfrac{\cos30^\circ}{\cos10^\circ}-\dfrac{\sin30^\circ}{\sin10^\circ}$ مساوی است به: الف) 0 ب) 1 ج) 2 د) 3

۴۵	حاصل $(\sin x-\cos x)^2$ مساوی است به: الف) $\cos 2x$ ب) $\sin 2x$ ج) $1+2\sin x\cos x$ د) $1-2\sin x\cos x$
۴۶	حاصل $\sqrt{3}\csc 20^\circ-\sec 20^\circ$ مساوی است به: الف) 2 ب) 3 ج) 4 د) 5
۴۷	حاصل $3\sin x\cos x$ مساوی است به: الف) $\sin 2x$ ب) $\cos 2x$ ج) $\frac{3}{2}\sin 2x$ د) $3\sin 2x$
۴۸	حاصل $\sin 2^\circ\cos 88^\circ+\cos 2^\circ\sin 88^\circ$ مساوی است به: الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4
۴۹	افاده‌ی مثلثاتی $\frac{\tan\alpha\cos\alpha}{2}$ مساوی است به: الف) $\cos\alpha$ ب) $\sin\alpha$ ج) $\sin 2\alpha$ د) $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$
۵۰	حاصل $\frac{\tan 660^\circ-\sin 660^\circ}{\cos 750^\circ-\cot 750^\circ}$ مساوی است به: الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 5
۵۱	افاده‌ی مثلثاتی $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$ مساوی است به: الف) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ب) $\frac{1}{2}$ ج) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۵۲	حاصل $\cos 75^\circ-\cos 15^\circ$ مساوی است به: الف) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ج) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ د) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۵۳	مساوات $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$ چه نوع رابطه است؟ الف) نامساوی ب) مطابقت ج) معادله د) افاده

۵۴	حاصل $\sin^6 x+\cos^6 x$ مساوی است به: الف) $\sin^2 x$ ب) $\cos^2 x$ ج) $1-3\sin^2 x\cos^2 x$ د) $1+3\sin^2 x\cos^2 x$
۵۵	هرگاه $\tan x=-\frac{1}{2}$ و $\csc x \prec 0$ باشد، پس قیمت $\sin x$ مساوی است به: الف) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ب) $-\frac{\sqrt{5}}{4}$ ج) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ د) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$
۵۶	افاده‌ی مثلثاتی $\frac{\sin 2x+2\sin x}{2\cos x+2}$ مساوی است به: الف) $\sin x$ ب) $\sin\frac{x}{2}$ ج) $\cos\frac{x}{2}$ د) $\cos x$
۵۷	افاده‌ی مثلثاتی $2\sin^4 x+4\cos^2 x$ مساوی است به: الف) $1+\cos^2 x$ ب) $2+2\cos^4 x$ ج) $1-\cos^2 x$ د) $2-2\cos^2 x$
۵۸	افاده‌ی مثلثاتی $\cos\frac{5\pi}{12}-\cos\frac{11\pi}{12}$ مساوی است به: الف) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ ب) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ د) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
۵۹	اگر $\tan x=\sqrt{7}$ باشد، افاده‌ی $\tan 3x$ مساوی است به: الف) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ ج) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ د) $\frac{\sqrt{7}}{5}$
۶۰	هرگاه $\tan\frac{\alpha}{2}=5$ باشد، پس $\sin\alpha$ مساوی است به: الف) $\frac{13}{5}$ ب) $\frac{5}{13}$ ج) $\frac{14}{5}$ د) $-\frac{5}{12}$

۶۱	اگر $\sin\alpha=\frac{3}{5}$ باشد، پس $\cos 2\alpha$ عبارت است از: الف) $\frac{4}{5}$ ب) $\frac{16}{25}$ ج) $\frac{7}{25}$ د) $-\frac{7}{25}$
۶۲	حاصل $\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}$ عبارت است از: الف) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) $-\frac{1}{4}$ د) $-\frac{1}{3}$
۶۳	حاصل $\cos^4\frac{\pi}{12}-\sin^4\frac{\pi}{12}$ مساوی است به: الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ج) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ د) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
۶۴	حاصل $\sin^4\frac{\pi}{12}+\cos^4\frac{\pi}{12}$ مساوی است به: الف) 1 ب) $\frac{3}{4}$ ج) $\frac{7}{8}$ د) $\frac{9}{16}$
۶۵	حاصل $\sin 10^\circ+\sin 50^\circ-\sin 70^\circ$ مساوی است به: الف) 0 ب) 1 ج) 2 د) 3
۶۶	حاصل افاده‌ی $\frac{\cos 20^\circ+\sqrt{3}\sin 20^\circ}{\cos 40^\circ}$ عبارت است از: الف) $\sqrt{2}$ ب) $\sqrt{3}$ ج) 2 د) 3
۶۷	حاصل $\cot\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}$ عبارت است از: الف) $\sin\frac{\alpha}{2}$ ب) $\cos\frac{\alpha}{2}$ ج) $\tan\frac{\alpha}{2}$ د) $\cot\frac{\alpha}{2}$
۶۸	اگر $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1}{5}$ باشد، پس $\tan 2\alpha$ عبارت است از: الف) $\frac{1}{5}$ ب) $\frac{1}{8}$ ج) $\frac{12}{4}$ د) $\frac{12}{5}$

۶۹	حاصل افاده‌ی $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$ عبارت است از: الف) $\cos\alpha-\sin\alpha$　ب) $\cos 2\alpha$ ج) $1+\sin 2\alpha$　د) $1-\sin 2\alpha$
۷۰	حاصل افاده‌ی $\frac{1}{2\sin a}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$ عبارت است از: الف) $\sin a$　ب) $\sin b$　ج) $\cos a$　د) $\cos b$
۷۱	حاصل $\frac{\sin 10x-\sin 6x}{\cos 10x+\cos 6x}$ عبارت است از: الف) $\tan 2x$　ب) $\cot 2x$　ج) $\cot 4x$　د) $\tan 4x$
۷۲	اگر شعاع دایره $5cm$ و زاویه قطاع 4° باشد، مساحت قطاع عبارت اس از: الف) $\frac{5\pi}{18}$　ب) $\frac{18\pi}{25}$　ج) $\frac{25\pi}{18}$　د) $\frac{\pi}{18}$
۷۳	محیط مثلث متساوی‌الاضلاع $10cm$ است، مساحت مثلث عبارت است از: الف) $\frac{100}{18}\sqrt{\frac{3}{4}}$　ب) $\frac{16}{36}\sqrt{3}$　ج) $\frac{100}{36}\sqrt{3}$　د) $\frac{100}{13}\sqrt{2}$
۷۴	اگر شعاع دایره $9cm$ و زاویه مرکزی 20° باشد، طول قوسی که در مقابل زاویه مذکور تشکیل می‌شود عبارت است از: الف) $\frac{\pi}{9}cm$　ب) πcm　ج) $\frac{\pi}{2}cm$　د) $\frac{\pi}{4}cm$
۷۵	اگر طول قوس مقابل زاویه مرکزی θ، $8\pi cm$ و طول شعاع آن $12cm$ باشد، پس اندازه زاویه مرکزی مساوی است به: الف) $\frac{\pi}{2}$　ب) $\frac{\pi}{8}$　ج) $\frac{\pi}{4}$　د) $\frac{2\pi}{3}$

۷۶	افاده‌ی مثلثاتی $\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$ مساوی است به: الف) $\dfrac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\frac{a-b}{2}}$ ب) $\dfrac{(a+b)\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{a-b}$ ج) $\dfrac{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{\frac{a-b}{2}}$ د) $\dfrac{(a-b)\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}{(a+b)}$
۷۷	هرگاه A، C زوایای داخلی یک مثلث a، c طول اضلاع مقابل آن باشد، پس $\frac{a-c}{a+c}$ مساوی است به: الف) $\dfrac{\cos(A+B)}{\cos(A-B)}$ ب) $\tan(A+C)$ ج) $\dfrac{\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A-C}{2}\right)}$ د) $\dfrac{\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\tan\left(\frac{A+B}{2}\right)}$
۷۸	محیط مثلث متساوی‌الاضلاع $84cm$ است، شعاع دایره محاطی آن عبارت است از: الف) $\frac{84}{18}\sqrt{3}$ ب) $\frac{28}{18}\sqrt{3}$ ج) $\frac{84}{6}\sqrt{3}$ د) $\frac{84}{3}\sqrt{3}$
۷۹	محیط مثلث متساوی‌الاضلاع $8cm$ است، ارتفاع مثلث عبارت است از: الف) $\frac{4}{6}\sqrt{3}$ ب) $\frac{8}{6}\sqrt{2}$ ج) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ د) $\frac{2}{3}\sqrt{12}$
۸۰	اگر ABC یک مثلث متساوی‌الساقین و a,b طول ساق‌ها، A,B

	بالترتیب زوایای مقابل ساق‌های مذکور باشد، کدام رابطه ذیل درست است: الف) $\frac{2a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ ب) $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ ج) $\frac{a}{\sin 2A}=\frac{c}{\sin C}$ د) $\frac{c}{\sin 2A}=\frac{a}{\sin C}$
۸۱	اگر A، B و C زوایای داخلی مثلث، a، b و c بالترتیب طول اضلاع آن باشد، پس $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{a+b+c}$ مساوی است به: الف) $\frac{\sin C}{c}$ ب) $\frac{\sin C}{2c}$ ج) $\frac{2\sin C}{c}$ د) $\frac{\sin 2C}{c}$
۸۲	ارتفاع درخت را معلوم نمائید، هرگاه زاویه ارتفاع آن 30° به 60° تبدیل شود، مشاهده‌کننده $74m$ به درخت نزدیک شود. الف) $74\sqrt{3}$ ب) $73\sqrt{3}$ ج) $37\sqrt{3}$ د) $37\sqrt{2}$
۸۳	یک حل معادله مثلثاتی $2\cot^2 x-4\cot x+2=0$ عبارت است از: الف) $\frac{\pi}{4}$ ب) $\frac{\pi}{2}$ ج) $\frac{\pi}{6}$ د) $\frac{\pi}{3}$
۸۴	برای کدام قیمت x معادله $2\sin^2 x-\sin x=0$ صدق می‌کند. الف) $\frac{\pi}{4}$ ب) $-\frac{\pi}{3}$ ج) $\frac{\pi}{3}$ د) $\frac{\pi}{6}$
۸۵	برای کدام قیمت a سیستم $\begin{cases}\sin x+\sin y=a\\ x+y=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ دارای حل می‌باشد. الف) $a\prec-\sqrt{2}$ ب) $-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$ ج) $-2\le a\le 2$ د) $a\succ-\sqrt{2}$
۸۶	یک حل معادله $5\sqrt{3}-10\cos x=0$ مساوی است به:

	الف) $\frac{25\pi}{4}$ ب) $\frac{25\pi}{7}$ ج) $\frac{11\pi}{4}$ د) $\frac{25\pi}{6}$
۸۷	معادله $\sqrt{2}-2\sin\alpha=0$ برای کدام قیمت ذیل α صحت است؟ الف) $\frac{\pi}{2}$ ب) $\frac{\pi}{3}$ ج) $\frac{\pi}{4}$ د) $\frac{\pi}{6}$
۸۸	به کدام یک از قیمت‌های ذیل x معادله $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ صدق می‌کند. الف) $\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{18}$ ب) $-\frac{2k\pi}{3}$ ج) $\frac{2k\pi}{3}$ د) $2k\pi+\frac{\pi}{18}$
۸۹	حل معادله $\cot\alpha-1=0$ عبارت است از: الف) $k\pi+\frac{\pi}{4}$ ب) $k\pi+\frac{\pi}{5}$ ج) $2k\pi+\frac{\pi}{18}$ د) $k\pi+\frac{\pi}{6}$
۹۰	یک جذر معادله $\sin x+3\cos 2x-1=0$ که $x\in[-\pi,\pi]$ باشد، مساوی است به: الف) $\frac{\pi}{6}$ ب) $-\frac{\pi}{6}$ ج) $\frac{\pi}{4}$ د) $-\frac{\pi}{4}$
۹۱	سیستم $\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4} \\ \tan x+\tan y=-2 \end{cases}$ چند حل دارد. الف) یک‌حل ب) دوحل ج) بی‌نهایت د) حل ندارد
۹۲	یک حل سیستم معادله $\begin{cases} x-y=\frac{\pi}{3} \\ \tan x-\tan y=-2\sqrt{3} \end{cases}$ عبارت است از:

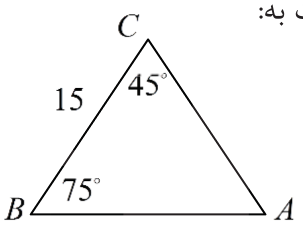
الف) $x=y=\frac{\pi}{3}$ ب) $x=y=\frac{\pi}{4}$ ج) $x=\frac{2\pi}{3}, y=\frac{\pi}{3}$ د) $x=y=\pi$	
ناحیه قیمت‌های تابع $y=\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}\right)$ عبارت است از: الف) $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$ ب) $\left[-\frac{1}{9},\frac{1}{9}\right]$ ج) $[-1,1]$ د) $\mathbb{R}$	۹۳
اگر $f(x)=\cos^2 x+5$ باشد، برای تمام قیمت‌های x کدام رابطه ذیل درست است. الف) $f(x)\geq 0$ ب) $f(x)\leq 0$ ج) $f(x)\succ 0$ د) $f(x)\prec 0$	۹۴
تابع $y=2\tan x$ در تمام ناحیه تعریف‌خود دارای خاصیت ذیل است. الف) متناقص ب) نه متناقص نه متزاید ج) ثابت است د) متزاید است.	۹۵
تابع $y=\sin x$ در انتروال $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ دارای چه نوع خاصیت است. الف) متناقص ب) نه متناقص نه متزاید ج) ثابت است د) متزاید است.	۹۶
ناحیه تعریف تابع $y=\sin\frac{25\pi}{6}$ عبارت است از: الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\mathbb{R}$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ د) $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$	۹۷
اگر $y=\tan(x+t)$ ، $t=-x$ باشد، پس قیمت y عبارت است از:	۹۸

	الف) 0 ب) 1 ج) بی‌نهایت د) $\tan x$
۹۹	نسبت‌مثلثاتی $\sin^{-1}(-1)$ عبارت است از: الف) $\frac{\pi}{4}$ ب) $\frac{3\pi}{2}$ ج) $\frac{\pi}{2}$ د) $\frac{\pi}{6}$
۱۰۰	قیمت $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ مساوی است به: الف) $\frac{5\pi}{3}$ ب) $-\frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{5\pi}{6}$ د) $\frac{\pi}{4}$
۱۰۱	حاصل $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)+\tan^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ مساوی است به: الف) $-\frac{\pi}{2}$ ب) $\frac{\pi}{2}$ ج) 0 د) π
۱۰۲	در مثلثی رابطه‌ی $\sin^2 A+\cos^2 A+\sin^2 A=2$ برقرار است، زاویه‌ی A کدام است؟ الف) $\frac{\pi}{2}$ ب) $\frac{\pi}{3}$ ج) $\frac{\pi}{4}$ د) $\frac{\pi}{6}$
۱۰۳	اگر $\sin x+\cos x=\frac{1}{3}$ باشد، پس $\sin 2x$ عبارت است از: الف) $\frac{8}{9}$ ب) $-\frac{8}{9}$ ج) $\frac{9}{8}$ د) $-\frac{9}{8}$
۱۰۴	حاصل $\sin^4 x-\cos^4 x+2\cos^2 x$ عبارت است از: الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4
۱۰۵	حاصل $\frac{1}{\tan x}+\frac{1}{\sin x}$ عبارت است از: الف) $\sin\frac{x}{2}$ ب) $\cos\frac{x}{2}$ ج) $\tan\frac{x}{2}$ د) $\cot\frac{x}{2}$

۱۰۶	اگر $\tan x+\cot x=4$ باشد، پس $\sin 2x$ عبارت است از: الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) $\frac{1}{4}$ د) $\frac{1}{6}$
۱۰۷	حاصل $\frac{1-\tan 18^\circ}{1+\tan 18^\circ}$ عبارت است از: الف) $\sin 27^\circ$ ب) $\tan 27^\circ$ ج) $\cos 27^\circ$ د) $\cot 27^\circ$
۱۰۸	اگر $\tan x+\cot x=2$ باشد، حاصل $\tan^3 x+\cot^3 x$ عبارت است از: الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4
۱۰۹	حاصل $\frac{\cos 3\alpha+\sin\alpha\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha-\sin 2\alpha\cos\alpha}$ عبارت است از: الف) $\tan\alpha$ ب) $\cot\alpha$ ج) $\sec\alpha$ د) $\csc\alpha$
۱۱۰	حاصل $\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)-\cos 2x\cos 2y$ مساویست به: الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4
۱۱۱	حاصل $\sin 50^\circ+\sqrt{3}\cos 50^\circ$ عبارت است از: الف) $2\sin 20^\circ$ ب) $2\cos 20^\circ$ ج) $\tan 20^\circ$ د) $\cot 60^\circ$
۱۱۲	حاصل $\cos 20^\circ-\cos 40^\circ$ عبارت است از: الف) $\cos 10^\circ$ ب) $\tan 10^\circ$ ج) $\sin 10^\circ$ د) $\cot 10^\circ$
۱۱۳	حاصل $\sin x\left(1+\tan x\tan\frac{x}{2}\right)$ عبارت است از: الف) $\tan x$ ب) $\cot x$ ج) $\sin x$ د) $\cos x$
۱۱۴	حاصل $\sin 65+\cos 65-\sqrt{2}\cos 20^\circ$ عبارت است از: الف) 0 ب) 1 ج) 2 د) 3
۱۱۵	حاصل $\frac{3\sin\alpha+\sin\alpha}{1+3\cos\alpha+\cos 2\alpha}$ عبارت است از: الف) $\tan\alpha$ ب) $\cot\alpha$ ج) $\sec\alpha$ د) $\csc\alpha$

۱۱۶	حاصل $\dfrac{\sin 10^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 20^\circ}$ عبارت است از: الف) $\sin 15^\circ$　ب) $\cos 15^\circ$　ج) $\tan 15^\circ$　د) $\sec 15^\circ$
۱۱۷	حاصل $\dfrac{1+\cos x}{\sin x} + \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ عبارت است از: الف) $2\sin x$　ب) $\cos 2x$　ج) $2\tan x$　د) $2\csc x$
۱۱۸	حاصل $\dfrac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$ عبارت است از: الف) $\tan\alpha$　ب) $\cot\alpha$　ج) $\sec\alpha$　د) $\csc\alpha$
۱۱۹	اگر $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، پس $\cos\dfrac{\pi}{8}$ عبارت است از: الف) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　ب) $\sqrt{2}$　ج) $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$　د) $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
۱۲۰	اگر $\tan\alpha = \dfrac{2}{3}$ و $\tan\beta = 1$ باشد، حاصل $\tan(\alpha+\beta)$ عبارت است از: الف) 5　ب) 6　ج) 7　د) 8
۱۲۱	حاصل $\cos\left[\sin^{-1}(1) + \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right]$ عبارت است از: الف) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ب) $\dfrac{1}{2}$　ج) $\dfrac{\pi}{2}$　د) $\dfrac{\pi}{6}$
۱۲۲	حاصل $\sin 70^\circ - \sin 20^\circ$ عبارت است از: الف) $2\sin 25^\circ$　ب) $2\sin 50^\circ$　ج) $\sqrt{2}\sin 25^\circ$　د) $\sqrt{2}\sin 50^\circ$
۱۲۳	حاصل $\cos^{-1}\left[\tan\left(\sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right]$ عبارت است از:

	الف) 0 ب) $\frac{\pi}{4}$ ج) $\frac{\pi}{2}$ د) π
۱۲۴	اگر $A-B=\frac{\pi}{4}$ باشد، حاصل $\cos B-\sin B$ عبارت است از: الف) $2\sqrt{2}\sin A$ ب) $\sqrt{2}\sin A$ ج) $2\sqrt{2}\cos A$ د) $\sqrt{2}\cos A$
۱۲۵	یک کاغذپران با طول $100m$ در هوا است اگر تار کاغذپران با سطح افق زمین زاویه 60° را بسازد، بلندی کاغذپران از سطح زمین مساوی است به: الف) $40\sqrt{3}m$ ب) $50m$ ج) $40m$ د) $50\sqrt{3}m$
۱۲۶	افاده‌ی مثلثاتی $\frac{1+\tan^2 900^\circ}{1+\cot^2 900^\circ}$ مساوی است به: الف) $\tan^2 900^\circ$ ب) $\sin^2 900^\circ$ ج) $\cot^2 900^\circ$ د) $\cos^2 900^\circ$
۱۲۷	افاده‌ی مثلثاتی $\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos xxosy-\sin x\sin y}$ مساوی است به: الف) $\cot(x+y)$ ب) $\tan(x+y)$ ج) $\tan(x-y)$ د) $\cot(x-y)$
۱۲۸	حاصل $\frac{2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}}{\sin^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}}$ مساوی است به: الف) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ج) $\sqrt{3}$ د) $\sqrt{2}$
۱۲۹	هرگاه $\sin 2\alpha=\cos 3\alpha$، پس $\cos\alpha$ مساوی است به: الف) $\frac{\sin x}{1-4\sin^2 x}$ ب) $\frac{\sin 2x}{1+4\sin^2 x}$

	ج) $\frac{\sin 2x}{1-4\sin^2 x}$ د) $\frac{1}{1-4\sin^2 x}$
۱۳۰	افاده‌ی $\frac{\sin 300^\circ}{1-\cos 240^\circ}$ مساوی است به: الف) $-\sqrt{3}$ ب) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ج) -1 د) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
۱۳۱	$\frac{3}{4}$ حصه یک دوران چند رادیان می‌شود. الف) $\frac{\pi}{3}$ ب) $\frac{2\pi}{3}$ ج) $\frac{3\pi}{2}$ د) $\frac{2\pi}{5}$
۱۳۲	یک حل معادله $\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}=0$ مساوی است به: الف) $x=0^\circ$ ب) $\frac{8\pi}{16}$ ج) π د) $\frac{3\pi}{11}$
۱۳۳	سیستم معادلات $\begin{cases}\sqrt{5}\sin x+\frac{5}{\sqrt{5}}\sin y=\sqrt{5}\\ 2x+2y=\pi\end{cases}$ قابل حل است زیرا: الف) $1-\sin^2\frac{\pi}{4}\le 0$ ب) $2-4\sin^2\frac{\pi}{4}\le 0$ ج) $2-\sin^2\frac{\pi}{4}\le 0$ د) $1-4\sin^2\frac{\pi}{4}\le 0$
۱۳۴	مطابق شکل ذیل طول AB مساوی است به:  الف) 2 ب) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ج) $5\sqrt{6}$ د) 1

۱۳۵	حاصل افاده‌ی $\left(\tan\sqrt{7}+1\right)\left(\tan\sqrt{7}-1\right)\left(1-\sin^2\sqrt{7}\right)$ عبارت است از: الف) $\sin^2\sqrt{7}$ ب) $\cos^2\sqrt{7}$ ج) $\sin\sqrt{7}-\cos\sqrt{7}$ د) $\sin^2\sqrt{7}-\cos^2\sqrt{7}$
۱۳۶	حاصل افاده‌ی $\sin 7.5\cos 7.5\left(\cos^4 7.5-\sin^4 7.5\right)$ مساوی است به: الف) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{8}$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ د) $\frac{\sqrt{3}}{8}$
۱۳۷	هرگاه $\cos\theta=\frac{4}{5}$ وضلع دوم θ در ناحیه اول باشد، $2\tan\frac{\theta}{2}$ مساوی است به: الف) 3 ب) $\frac{3}{2}$ ج) $\frac{1}{3}$ د) $\frac{2}{3}$
۱۳۸	حاصل $\frac{\tan\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)-\left(\sin\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)}{2\tan\left(\sqrt{2}+\sqrt{8}\right)}$ مساوی است به: الف) $1+\sin^2\frac{\sqrt{18}}{2}$ ب) $1+\cos^2\frac{\sqrt{18}}{2}$ ج) $1-\sin^2\frac{\sqrt{18}}{2}$ د) $1-\cos^2\frac{\sqrt{18}}{2}$
۱۳۹	حاصل $\frac{\tan(x+10)-\sin(x+10)}{2\tan(x+10)}$ مساوی است به: الف) $\cos^2\left(\frac{x+10}{2}\right)$ ب) $\sin^2\left(\frac{x+10}{2}\right)$ ج) $\csc^2\left(\frac{x+10}{2}\right)$ د) $\sec^2\left(\frac{x+10}{2}\right)$
۱۴۰	افاده‌ی مثلثاتی $\cos 70^\circ+\cos 20^\circ$ مساوی است به:

	الف) $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 25^\circ$ ب) $-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 25^\circ$ ج) $\sqrt{2}\cos 25^\circ$ د) $-\sqrt{2}\cos 25^\circ$
۱۴۱	اگر $n\neq 0$ و $\cot 18^\circ = n$ باشد، در این صورت $\tan 36^\circ$ مساوی است به: الف) $\frac{2n}{n^2-1}$ ب) $\frac{2n}{n^2+1}$ ج) $\frac{1}{n}$ د) $-\frac{1}{n}$
۱۴۲	اگر $180^\circ \prec \theta \prec 270^\circ$ و $\sin\theta = \frac{2}{3}$ باشد، پس $2\cos 2\theta$ مساوی است به: الف) $-\frac{1}{2}$ ب) $-\frac{2}{9}$ ج) $\frac{1}{9}$ د) $\frac{2}{9}$
۱۴۳	هرگاه $\sin 2x = \frac{5}{9}$ باشد، پس $\sin x - \cos x$ را دریابید. الف) $\frac{2}{3}$ ب) $\frac{2}{4}$ ج) 3 د) 3

هدف ما ارائه خدمات علمی و اکادمیک مبتنی بر احساس دینی و ملی است.

استاد انجنیر بختیاری "بختیار" استاد رمضان "حیدری"

مآخذ

۱) رستمی، محمدهاشم. (۱۳۸۰). **هندسه تحلیلی**. تهران: انتشارات مدرسه

۲) صیادی، نصرت‌الله. (۱۳۸۷). **ریاضیات تجربی از پایه تا کانکور**. تهران: انتشارات آسیم

۳) کاکر، عبدالغفار. (۱۳۵۹). **هندسه عالی**. کابل: انتشارات پوهنتون کابل

۴) گردلو، پیمان. (۱۳۸۷). **مثلثات**. تهران: انتشارات نسل نو اندیش

۵) محمدی‌راد، ناصر. (۱۳۸۶). **ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت۱**. تهران: انتشارات جنگل

۶) نیکوکار، مسعود و دیگران. (۱۳۸۷). **ریاضی عمومی (مقطع کاردانی)**. چاپ یازدهم، تهران: انتشارات گسترش علوم پایه

۷) و. لیتوینِنکو، آ. ماردکویچ. (۱۳۷۲). **مروری بر جبر و مثلثات**. مترجم: مسعود مشهوری، تهران: انتشارات گوتنبرگ

کلید جوابات

شماره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
جواب	ب	الف	الف	د	ب	الف	د	ب	ب	د
شماره	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
جواب	ب	د	ج	د	ج	ج	ب	ب	ب	الف
شماره	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
جواب	الف	ج	ج	ب	ب	ب	الف	ب	الف	ب
شماره	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
جواب	ج	د	د	الف	د	ب	ج	ب	ج	د
شماره	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
جواب	الف	الف	د	د	د	ج	ج	الف	د	الف
شماره	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
جواب	ج	ج	ب	ج	د	الف	ب	ب	د	د
شماره	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰
جواب	ج	ب	ب	ج	الف	ج	د	د	د	د
شماره	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
جواب	الف	الف	ج	ب	د	د	د	الف	د	ب
شماره	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
جواب	الف	ج	الف	د	ج	د	ج	د	الف	ب
شماره	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰
جواب	د	ج	الف	ج	د	الف	ب	الف	ب	ج
شماره	۱۰۱	۱۰۲	۱۰۳	۱۰۴	۱۰۵	۱۰۶	۱۰۷	۱۰۸	۱۰۹	۱۱۰
جواب	الف	الف	ب	الف	د	الف	ب	ب	ب	الف

شماره	۱۱۱	۱۱۲	۱۱۳	۱۱۴	۱۱۵	۱۱۶	۱۱۷	۱۱۸	۱۱۹	۱۲۰
جواب	ب	ج	الف	الف	الف	ج	د	ب	د	الف
شماره	۱۲۱	۱۲۲	۱۲۳	۱۲۴	۱۲۵	۱۲۶	۱۲۷	۱۲۸	۱۲۹	۱۳۰
جواب	الف	ج	الف	د	د	الف	ب	ب	ج	د
شماره	۱۳۱	۱۳۲	۱۳۳	۱۳۴	۱۳۵	۱۳۶	۱۳۷	۱۳۸	۱۳۹	۱۴۰
جواب	ج	ب	د	ج	د	ب	د	د	ب	ج
شماره	۱۴۱	۱۴۲	۱۴۳	۱۴۴	۱۴۵	۱۴۶	۱۴۷	۱۴۸	۱۴۹	۱۵۰
جواب	ب	د	الف							
شماره	۱۵۱	۱۵۲	۱۵۳	۱۵۴	۱۵۵	۱۵۶	۱۵۷	۱۵۸	۱۵۹	۱۶۰
جواب										
شماره	۱۶۱	۱۶۲	۱۶۳	۱۶۴	۱۶۵	۱۶۶	۱۶۷	۱۶۸	۱۶۹	۱۷۰
جواب										
شماره	۱۷۱	۱۷۲	۱۷۳	۱۷۴	۱۷۵	۱۷۶	۱۷۷	۱۷۸	۱۷۹	۱۸۰
جواب										
شماره	۱۸۱	۱۸۲	۱۸۳	۱۸۴	۱۸۵	۱۸۶	۱۸۷	۱۸۸	۱۸۹	۱۹۰
جواب										
شماره	۱۹۱	۱۹۲	۱۹۳	۱۹۴	۱۹۵	۱۹۶	۱۹۷	۱۹۸	۱۹۹	۲۰۰
جواب										
شماره	۲۰۱	۲۰۲	۲۰۳	۲۰۴	۲۰۵	۲۰۶	۲۰۷	۲۰۸	۲۰۹	۲۱۰
جواب										

آثار مولف:

- **ریاضیات ۱ (حساب‌کامل): عملیه‌های اعداد کامل، تجزیه اعداد طبیعی، کسرعام، کسراعشار، نسبت و تناسب، فیصد، سیستم شمارش اعداد، ست‌ها و اعداد.**
- **ریاضیات ۲ (مفاهیم الجبری): عملیه‌های اعداد الجبری، توان‌ها، جذر اعداد، عبارت‌های الجبری، مطابقت‌ها، تجزیه افاده‌ها، کسور الجبری و اعداد مختلط.**
- **ریاضیات ۳ (الجبر): معادلات، متریکس، نامساوات، لوگاریتم و ترادف.**
- **مثلثات ویژه کانکور (همین اثر)**