لیسه عالی خصوصی مبین

ریاضیات (۳)

(الجبر)

تألیف: استاد رمضان‌مهران "حیدری"

تحت‌نظر: استاد انجنیر بختیاری "بختیار"

سرمربی فزیک

موضوعات:

- ✓ معادلات
- ✓ متریکس
- ✓ نامساوات
- ✓ لوگاریتم
- ✓ ترادف‌ها

ویژگی‌ها:

- ✓ جامع و مفهومی
- ✓ مسلسل و منطقی
- ✓ متناسب با نصاب تعلیمی جدید و کانکور سراسری

حیدری، رمضان‌مهران. ۱۳۹۶
ریاضیات۳ (الجبر)، مولف: رمضان‌مهران حیدری، غزنی: آموزشگاه عالی مبین، ۱۳۹۶
چاپ اول ۱۳۹۶

مشخصات کتاب

نام کتاب:	ریاضیات۳ (الجبر)
تألیف:	استاد رمضان‌مهران "حیدری"
نظارت بر تألیف:	استاد انجنیر بختیاری "بختیار"سرمربی فزیک
ویراستار:	رمضان‌مهران " حیدری "
ناشر:	آموزشگاه عالی مبین
سال چاپ:	۱۳۹۶
نوبت چاپ:	چاپ اول
قیمت:	۱۰۰، افغانی
تیراژ:	۱۰۰۰ جلد
ارتباط با مولف:	۰۷۶۴۰۳۷۴۳۸
	Email:Ramazan_Haidari@yahoo.com

آموزشگاه عالی مبین

نشانی: غزنی، جاده فیض‌محمد کاتب، چهار راهی شهید زین الله، منزل دوم

شماره تماس: ۰۷۶۴۰۳۷۴۳۸

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم:

این اثر را به پیشگاه ارمغان آور مهر و رحمت برای جهانیان حضرت خاتم پیامبران که گفت: «من معلم برگزیده شده‌ام تا مکارم اخلاق را تمام کنم». تقدیم می‌کنم.

پیشگفتار

در جهان متمدن امروز که علم و تکنالوژی ابزار مهم برای رشد و انکشاف جوامع بشری محسوب می‌شود، در صورت این دو عامل ارزش و جایگاه اساسی خود را می‌یابد، که علم و تکنالوژی در خدمت ارزشهای والای انسانی، تکامل و رساندن بشر به آرامش و آسایش قرار گیرد. ما علم و تکنالوژی را بدون باورهای دینی و احساس مِلیِ کافی ندانسته و معرفت دینی مبتنی بر معارف اسلامی، تعقل و درک صحیح از حقایق را نسبت به علوم تجربی و تجربه گرایی ضروری‌تر و مهم دانسته و هدف ما ارائه خدمات علمی و اکادمیک مبتنی بر احساس دینی و ملی است. و از برادر دانشمند و محقق محترم استاد رمضان مهران"حیدری" که سیستم را تحت نام (آموزش علوم ریاضیات) در شهر غزنی یعنی مرکز تمدن اسلامی بنیان‌گزاری نموده، تلاش و خدمات علمی ایشان در بخش علوم ساینسی و خصوصاً تهیه و تدوین (ریاضیات۳)، یک گام مثبت در راستای ترقی سطح علمی هم‌وطنان و دانش‌آموزان عزیز، می‌باشد.

استاد انجنیر بختیاری "بختیار"
سرمربی فزیک

فهرست مطالب

فصل اول: معادلات	۱۰
انواع معادلات	۱۱
خواص معادلات	۱۲
معادلات یک مجهوله درجه اول	۱۲
کمیات وضعیه قایم	۱۵
معادلات دو مجهوله درجه اول	۱۷
معادلات سه مجهوله درجه اول	۲۴
معادلات یک مجهوله درجه دوم	۲۷
تشکیل معادله یک مجهوله درجه دوم	۳۹
معادلات پارامتریک	۴۱
معادلات قیمت مطلقه	۴۴
کسور قسمی	۴۹
فصل دوم: متریکس	۵۶
انواع متریکس	۵۸
متریکس ترانسپوز	۶۴
دترمنانت	۶۵
متریکس الحاقی	۶۹
متریکس و معادلات	۷۱
فصل سوم: نامساوات	۷۵
تعیین اشاره دو جمله ای	۷۵
خواص نامساوات	۸۰

نامساوات یک مجهوله درجه اول	۸۲
نامساوات یک مجهوله درجه دوم	۸۶
نامساوات قیمت مطلقه	۸۹
سیستم نامساوات یک مجهوله درجه اول	۹۱
نامساوات دو مجهوله درجه اول	۹۱
سیستم نامساوات دو مجهوله درجه اول	۹۲
فصل چهارم: لوگاریتم	۹۴
انواع لوگاریتم	۹۵
قوانین لوگاریتم	۹۶
افاده‌های لوگاریتمی	۹۹
معادلات لوگاریتمی	۱۰۲
نامساوات لوگاریتمی	۱۰۵
کرکترستیک و مانتیس	۱۰۶
دریافت لوگاریتم اعداد	۱۰۸
انتی لوگاریتم	۱۰۹
فصل پنجم: ترادف و سلسه‌ها	۱۱۱
انواع ترادف	۱۱۲
سلسله‌ها	۱۱۹
ترکیب	۱۲۴
سوالات	۱۲۶
مآخذ	۱۳۹
کلید جوابات	۱۴۰

مقدمه

بنام خداوند مهر آفرین، آفرننده سپهر برین. درود بی‌پایان بر پیامبر رحمت، ارمغان آور مهر و سعادت برای جهانیان و درود بر اهلبیت او که مرکز ثقل فضیلت و معیار حق و حقیقت اند.

اما بعد: روح حقیقت‌جویی و میلِ به کمال اساسی‌ترین انگیزه بشر در طول تاریخ برای جستجوی علمی او بوده است. بر این اساس هر انسانی با کنجکاوی ذاتی‌اش به دنبال کشف اسرار هستی بوده است. هرچند که جستجوهای علمی و کشفیات به تسلط او بر طبیعت و در نتیجه رفاه زندگی نیز شده است. اما باید گفت: انگیزه بشر در رفتن بسوی دانش و حقیقت فراتر از اهداف مادی است و حقیقت‌جویی نیاز عالی روح انسانی است.

جستجوهای از حقیقت همواره بر ابزارهای که خداوند (ج) در اختیار بشر قرار داده است صورت می‌گیرد. این ابزارها را می‌توان در چهار دسته زیر خلاصه کرد.

- ابزار حسی
- ابزار عقل
- ابزار دل
- استفاد از منبع وحی

هر چهار مورد فوق ابزار رسیدن به حقایق است، اما کلی‌ترین و جامع‌ترین روش برای رسیدن به حقیقت تعالیم وحی و دستورات پیامبران و معصومین (ع) خصوصاً دستورات پیامبر اسلام(ص) می‌باشد.

و در مسائل علمی و تجربی و برای شناخت جزئیات هستی و روابط دقیق پدیده‌های عالم از ابزار حس و روش دانش‌تجربی استفاده می‌کنیم و

دانش‌تجربی بدون دانستن ریاضیات که به حیث زبان قوانین علوم تجربی استفاده می‌شود کاری است که به نتیجه مطلوب نخواهد رسید. و خصوصاً در علوم طبیعی رشته‌های میخانیک، احتمالات و استرونومی که علوم ریاضی و فزیک نامیده شده، و حد اوسط میان ریاضیات و فزیک است. و برای تقویه اصول ریاضیات دانش‌آموزان، ریاضیات بسا ارزنده و نهایت مهم تلقی می‌شود. لذا تصمیم بر آن شد که ممد درسی ریاضیات تحت نام (آموزش علوم ریاضیات) که روابط بین عناوین و موضوعات آن مسلسل و منطقی باشد. تهیه نمایم تا در فهم مسائل علوم تجربی دانش‌آموزان به مشکل مواجه نشوند.

کتاب ریاضیات۳ را که به رهنمایی محترم استاد بختیاری "بختیار" تهیه نموده‌ام، امید است که باعث رضایت پروردگار مهربان، و مورد استفاده هم‌وطنان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد. و اِدعا نمی‌شود که کتاب تهیه شده خالی از نواقص می‌باشد، و از پیشنهادات سالم دانش‌دوستان، استقبال می‌شود.

رمضان‌مهران " حیدری "

Email:Ramazan_Haidari@yahoo.com

فصل اول

معادلات

در پرسش‌های علمی، مرجعیت هزاران نفر، ارزش استدلال خاضعانه یک فرد را ندارد. (گالیله)

بوده

آشنایی: فصل اول ریاضیات (۳) شامل معادلات و کسور قسمی می‌باشد و هدف از حل یک معادله دریافت قیمت مجهول (جذر معادله) می‌باشد که در این فصل در مورد آن بحث می‌کنیم.

معادلات: به آن مساوات الجبری گفته می‌شود که دو طرف مساوات به قیمت‌های معیین و مشخص متحول‌ها (مجهول‌ها) باهم مساوی شود. ند مثلاً در معادله $3x+2=4x$ که صرف به قیمت (2) دو طرف معادله باهم برابر می‌شود.

یعنی: $3x+2=4x \quad \Rightarrow 3(2)+2=4(2) \quad \Rightarrow \quad 8=8$

مجهول در معادله: به حرف یا حروف گفته می‌شود که پیدا نمودن قیمت آن مطلوب باشد. مانند:

در معادله $ax-b_1=b_2$، x مجهول می‌باشد.

در معادله $ax+y=b$، x و y مجهول می‌باشد.

در معادله $a^b=\left(\frac{a}{c}\right)^z$، z مجهول می‌باشد.

جذر معادله: قیمت‌های عددی مجهول، که دو طرف معادله را باهم برابر سازند، به عبارت دیگر، قیمت‌های که معادله را صدق نماید بنام جذر معادله یاد می‌کنند.

مثال: جذر این معادله $4x-2=6$ عبارت از $x=2$ است.

درجه معادله: عبارت از بلندترین توان مجهول همان معادله می‌باشد. مانند:

درجه اول $ax+b=0$، درجه nام $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+...+dx^1+e=0$

درجه دو $ax^2+bx+c=0$، درجه سه $ax^3+bx^2+cx+d=0$

انواع معادلات

معادلات از لحاظ تعداد مجهول‌ها، درجه و شکل تقیسم می‌گردد.

انواع معادلات از لحاظ درجه: یک معادله می‌تواند دارای توان‌های $\{1,2,3,4...n...\}$ باشد. مانند مثال‌های فوق.

انواع معادله از لحاظ تعداد مجهول‌ها

یک معادله می‌تواند دارای یک مجهول، دو مجهول، سه مجهول و یا چند مجهول باشد. مانند:

یک مجهوله $ax+b=0$، دومجهوله $ax+by=c$، سه مجهوله $ax-by=z$ و n مجهوله $x_1+x_2+x_3+...+x_n=b$.

انواع معادلات از لحاظ شکل

انواع معادلات از لحاظ شکل قرار ذیل می‌باشد.

- معادلات پولینومی $ax+b=0$ $\quad ax^2+bx+c=0$
- معادلات کسری $ax-b=\frac{x}{a}$
- معادلات جذری $\sqrt{x-a}=b$
- معادلات حرفی $E=mc^2$
- معادلات نمایی $a^x=b$
- معادلات قیمت مطلقه $|x-a|=b$
- معادلات لوگاریتمی $\log_a x=b$
- معادلات مثلثاتی $a\tan x=d$

خواص معادلات: برای حل معادلات الجبری می‌توان از خواص ذیل استفاده نمود.

۱. خاصیت انعکاسی: مطلقاً $m=m$ است، یعنی هیچگاه $3=2$ نمی‌شود.

۲. خاصیت تناظری: رابطه $a=b$ و $b=a$ صادق می‌باشد.

۳. خاصیت انتقالی: رابطه $\left.\begin{matrix} x=z \\ y=z \end{matrix}\right\} x=y$ حاصل می‌گردد. درست شود

۴. اطراف معادله را می‌توان با یک مقدار مساوی جمع و تفریق نمود.

۵. اطراف معادله را به‌صورت کل از یک طرف علامه مساوی به طرف دیگر آن انتقال دهیم، علامه هیج یک از آن تغییر نمی‌کند. هیچ

۶. اطراف یک معادله را می‌توان با مقدار مساوی (عدد) خلاف صفر، ضرب و تقسیم نمائیم.

۷. به‌صورت کُل اطراف معادلات را می‌توان ضرب خودش نمائیم.

معادلات یک مجهوله درجه اول: این نوع معادلات به شکل $ax+b=0$ و $a\neq 0$ می‌باشد، x مجهول در معادله و a,b عدد ثابت می‌باشد، که جذر آن $x=\dfrac{-b}{a}$ می‌باشد. یعنی: $ax+b=0 \Rightarrow ax=-b \Rightarrow x=\dfrac{-b}{a}$

معادلات یک مجهوله درجه اول پولینومی: برای دریافت مجهول این نوع معادلات از خواص ضرب و تقسیم استفاده می‌کنیم.

مثال اول: جذر معادله $3x-4=2x+10$ را دریابید.

درنتیجه

$$3x-4=2x+10 \rightarrow \quad 3x-2x=10+4 \rightarrow \quad x=14$$

جذر معادله فوق 14 است. و برای امتحان نمودن یک معادله جذر معادله را به مجهول معادله وضع نموده و دو طرف معادله باید برابر شود.

$$3x-4=2x+10 \rightarrow \quad 3(14)-4=2(14)+10 \rightarrow 38=38$$

مثال دوم: جذر معادله $3(x-2)=2+(2+x)$ را دریابید.

$$3(x-2)=2+(2+x)\Rightarrow 3x-6=2+2+x\Rightarrow 3x-x=2+2+6$$
$$\Rightarrow 2x=10\Rightarrow x=5$$

مثال سوم: جذر معادله $21-3x=3(x+5)$ را دریابید.

$$21-3x=3(x+5)\Rightarrow 3(7-x)=3(x+5)/\div 3\Rightarrow 7-x=x+5$$
$$\Rightarrow -x-x=5-7\Rightarrow -2x=-2\Rightarrow x=1$$

معادلات یک مجهوله درجه اول کسری

برای دریافت جذر این نوع معادلات ابتدا دو طرف را به یک کسر تبدیل نموده و بعداً طرفین و وسطین می‌کنیم.

مثال اول: جذر معادله $\frac{x}{2}+4=\frac{3x}{5}+2$ را دریابید.

$$\frac{x}{2}+4=\frac{3x}{5}+2\Rightarrow \frac{x+8}{2}=\frac{3x+10}{5}\Rightarrow 6x+20=5x+40$$
$$\Rightarrow 6x-5x=40-20\Rightarrow x=20$$

مثال دوم: جذر معادله $\frac{-2x}{5}+\frac{x}{2}=1$ را دریابید.

$$\frac{-2x}{5}+\frac{x}{2}=1\Rightarrow \frac{x}{2}-\frac{2x}{5}=1\Rightarrow \frac{5x-4x}{10}=1\Rightarrow \frac{x}{10}=1\Rightarrow x=10$$

مثال سوم: جذر معادله $2x+6\left(\frac{x}{2}+4\right)=14$ را دریابید.

$$2x+6\left(\frac{x}{2}+4\right)=14\Rightarrow 2x+3x+24=14\Rightarrow 5x=14-24\Rightarrow x=-2$$

معادلات یک مجهوله درجه اول جذری ای

برای حل و دریافت قیمت مجهول این نوع معادلات، افاده که تحت جذر می‌باشد، به یک طرف معادله قرار داده و بعداً اطراف معادله را به نمایی درجه جذر بلند می‌بریم و سپس توسط ساده‌سازی قیمت مجهول را بدست می‌آوریم.

مثال اول: جذر معادله $\sqrt{3x-4}+2=6$ را دریابید.

$$\sqrt{3x-4}+2=6 \Rightarrow \sqrt{3x-4}=6-2 \Rightarrow \sqrt{3x-4}=4 \Rightarrow \left(\sqrt{3x-4}\right)^2=(4)^2$$

$$\Rightarrow 3x-4=16 \Rightarrow 3x=16+4 \Rightarrow 3x=20 \Rightarrow x=\frac{20}{3}$$

مثال دوم: جذر معادله $\sqrt{3x-1}=5$ را دریابید.

$$\sqrt{3x-1}=5 \Rightarrow \left(\sqrt{3x-1}\right)^2=(5)^2 \Rightarrow 3x-1=25 \Rightarrow 3x=25+1 \Rightarrow x=\frac{26}{3}$$

مثال سوم: جذر معادله $\sqrt{2x+12}-2=4$ را دریابید.

$$\sqrt{2x+12}-2=4 \qquad \Rightarrow \sqrt{2x+12}=4+2 \qquad \Rightarrow \sqrt{2x+12}=6$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{2x+12}\right)^2=(6)^2 \qquad \Rightarrow 2x+12=36 \qquad \Rightarrow 2x=36-12$$

$$\Rightarrow 2x=24 \qquad \Rightarrow x=12$$

معادلات درجه اول حرفی

برای دریافت حروف معیین و حل این نوع معادله از خواص معادلات، مطابقت‌ها، تجزیه و توان استفاده می‌کنیم، و برای حرف معیین به‌دست می‌آوریم.

مثال اول: معادله $\frac{v_1}{v_2}=\frac{s_2}{s_1}$ را برای v_1 دریافت نمائید.

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{s_2}{s_1} \Rightarrow v_1 s_1=s_2 v_2 \Rightarrow v_1=\frac{s_2 v_2}{s_1}$$

مثال دوم: معادله $h=\frac{1}{2}gt^2$ را برای g دریافت نمائید.

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 2h=gt^2 \Rightarrow g=\frac{2h}{t^2}$$

معادلات یک مجهوله درجه اول نمایی

معادلات که مجهول به حیث توان قرار گیرد، بنام معادلات نمایی یاد می‌گردد و برای دریافت قیمت مجهول این نوع معادلات از خواص طاقت استفاده می‌کنیم، طوری که قاعده باهم مساوی شوند.

مثال اول: جذر معادله $4^{x+1}+4^{x}=320$ را دریابید.

$$4^{x+1}+4^{x}=320 \Rightarrow 4^{x}\cdot 4+4^{x}=320 \Rightarrow 4^{x}(4+1)=320 \Rightarrow 4^{x}(5)=320$$

$$\Rightarrow 4^{x}=64 \Rightarrow 4^{x}=4^{3} \Rightarrow x=3$$

مثال دوم: جذر معادله $34\cdot 7^{x}-34\cdot 5^{2x}=0$ را دریابید.

$$34\cdot 7^{x}-34\cdot 5^{2x}=0 \Rightarrow 34\cdot 7^{x}=34\cdot 5^{2x} \Rightarrow 7^{x}=5^{2x} \Rightarrow 7^{x}=25^{x}$$

$$\Rightarrow \frac{7^{x}}{7^{x}}=\frac{25^{x}}{7^{x}} \Rightarrow 1=\left(\frac{25}{7}\right)^{x} \Rightarrow \left(\frac{25}{7}\right)^{0}=\left(\frac{25}{7}\right)^{x} \Rightarrow x=0$$

مثال سوم: جذر معادله $5^{2x-1}+4^{x}=5^{2x}-4^{x+1}$ را دریابید.

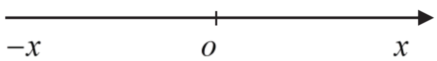
$$5^{2x-1}+4^{x}=5^{2x}-4^{x+1} \Rightarrow 4^{x}+4^{x+1}=5^{2x}-5^{2x-1} \Rightarrow 4^{x}+4^{x}\cdot 4=5^{2x}-\frac{5^{2x}}{5}$$

$$\Rightarrow 4^{x}(1+4)=5^{2x}\left(1-\frac{1}{5}\right) \Rightarrow 5\cdot 4^{x}=5^{2x}\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow 5\cdot 5\cdot 4^{x}=5^{2x}\cdot 4$$

$$\Rightarrow \frac{25}{4}\times\frac{4^{x}}{4^{x}}=\frac{5^{2x}}{4^{x}} \Rightarrow \frac{25}{4}=\frac{5^{2x}}{4^{x}} \Rightarrow \frac{25}{4}=\frac{25^{x}}{4^{x}} \Rightarrow \frac{25}{4}=\left(\frac{25}{4}\right)^{x} \Rightarrow x=1$$

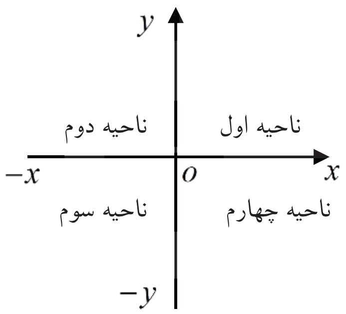
کمیات وضعیه قایم

تعریف: خط مستقیم غیرمحدود که دارای جهت باشد، بنام محور یاد می گردد. بالای هر محور نقطه ثابتی مانند o بنام مبدأ قرار می‌دهیم، تا بتوانیم موقعیت نقاط دیگر محور را نسبت آن در نظر گرفت. اگر محور را افقی مانند $-x,o,x$ در نظر بگیریم، می‌توان جهت مثبت را روی آن از طرف چپ به طرف راست در نظر گرفت.



سیستم کمیات وضعیه قایم

دو محور $-x,o,x$ و $-y,o,y$ که در نقطه o برهم عمود اند، در یک صفحه رسم می‌کنیم. مانند شکل ذیل:



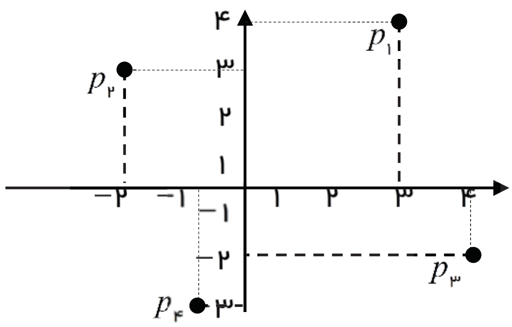
این دو محور یک سیستم کمیات وضعیه قایم را تشکیل می‌دهند. طوری که معلوم می‌شود مستوی را به چهار ناحیه {اول، دوم، سوم و چهارم} تقسیم می‌کنند. محور $-x,o,x$ را محور طول و محور $-y,o,y$ را محور عرض یاد می‌کنند.

تعیین یک نقطه در سیستم وضعیه قایم

برای تعیین موقعیت هر نقطه در سیستم کمیات وضعیه قایم، نظر به محورهای x و y با استفاده از جوره‌های مرتب (x,y) نشان می‌دهیم.

مثال: نقاط ذیل را در سیستم کمیات وضعیه قایم تعیین نمائید.

$p_1(3,4)$ $\quad$ $p_2(-2,3)$ $\quad$ $p_3(4,-2)$ $\quad$ $p_4(-1,-3)$



معادلات دو مجهوله درجه اول

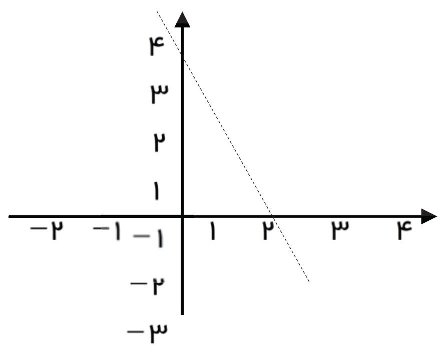
شکل عمومی این نوع معادلات $ax+by=c$ است، طوری که a,b,c اعداد حقیقی ثابت بوده، c را ثابت معادله و a,b را ضرایب معادله می‌نامند. و x,y مجهولِ درجه اول می‌باشند. و همچنان این معادلات را بنام معادلات خطی نیز یاد می‌کنند. چون گراف آن یک خط مستقیم را می سازد، و این معادلات بی‌نهایت حل را دارا می‌باشد، مانند: $2x+y=2$

$x=x$	$2(x)+y=2 \Rightarrow y=y$	(x,y)
$x=2$	$2(2)+y=2 \Rightarrow y=-2$	$(2,-2)$
$x=1$	$2(1)+y=2 \Rightarrow y=0$	$(1,0)$
$x=0$	$2(0)+y=2 \Rightarrow y=2$	$(0,2)$
$x=-1$	$2(-1)+y=2 \Rightarrow y=4$	$(-1,4)$
$x=-2$	$2(-2)+y=2 \Rightarrow y=6$	$(-2,6)$

برای رسم گراف این معادلات صرف نقاط تقاطع خط مستقیم را با محورات دریافت می‌نمائیم. که برای به‌دست آوردن آن به x صفر (0) قیمت داده تا نقطه تقاطع با محور y دریافت گردد. و برای y صفر قیمت داده تا نقطه با محور x دریافت گردد. و با حل این دو نقطه گراف آن رسم می‌گردد.

مثال: گراف معادله $2x+y=4$ را رسم نمائید.

$2x+y=4$	$2x+y=4$
$2(0)+y=4$	$2x+(0)=4$
$y=4$	$2x=4$
$(0,4)$	$x=2 \Rightarrow (2,0)$



سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول

شکل عمومی سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول عبارتند از:

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

در معادلات فوق a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 اعداد ثابت، x,y مجهول‌های درجه اول می باشند. و برای حل این نوع معادلات از روش‌ی: مساوات، تعویضی، افنا، دترمنانت و گراف استفاده می‌نمائیم.

۱) حل توسط مساوات

در این طریقه قیمت یکی از مجهول را از هر دو معادله دریافت نموده، بعداً نظر به این که یکطرف مساوات باهم مساوی است، پس طرف دیگر معادله نیز مساوی است، که با مساوی قرار دادن این دو معادله قیمت یکی از مجهول به‌دست آمده، و قیمت حاصله را به یکی از معادلات اولی وضع نموده تا قیمت مجهول دیگر نیز دریافت گردد.

مثال اول: سیستم معادلات ذیل را به طریقه مساوات حل نمائید.

$$2x+y=7......\text{I} \qquad 2x+y=7......\text{I} \qquad x-2y=-4....\text{II}$$
$$x-2y=-4....\text{II} \qquad 2x=7-y \quad /\div 2 \qquad x=-4+2y......B$$
$$x=\frac{7-y}{2}......A$$

از روابط معادلات فوق رابطه A,B قرار ذیل حاصل می‌گردد.

$$\frac{7-y}{2}=\frac{-4+2y}{1}\Rightarrow 7-y=-8+4y\Rightarrow 7+8=4y+y\Rightarrow 15=5y$$
$$\Rightarrow y=3$$

حال قیمت y را در یکی از معادلات اصلی وضع می‌نمائیم.

$$2x+y=7......\text{I}\Rightarrow 2x+(3)=7\Rightarrow 2x=7-3\Rightarrow 2x=4\Rightarrow x=2$$

مثال دوم: سیستم معادلات ذیل را به طریقه مساوات حل نمائید.

$3x+2y=7$.......I

$4x-y=2$........II

$3x+2y=7$.......I $\qquad$ $4x-y=2$........II

$3x=7-2y \quad /\div 3$ $\qquad$ $4x=2+y \quad /\div 4$

$x=\dfrac{7-2y}{3}......A$ $\qquad$ $x=\dfrac{2+y}{4}.........B$

از روابط معادلات فوق رابطه A,B قرار ذیل حاصل می‌گردد.

$$\frac{7-2y}{3}=\frac{2+y}{4}\Rightarrow 28-8y=6+3y\Rightarrow 28-6=3y+8y\Rightarrow y=2$$

حال قیمت y را در یکی از معادلات اصلی وضع می‌نمائیم.

$4x-y=2$........II $\Rightarrow 4x-(2)=2\Rightarrow 4x=2+2\Rightarrow x=1$

مثال سوم: سیستم معادلات ذیل را به طریقه مساوات حل نمائید.

$x+2y=4$......I

$2x+y=5$......II

۲) حل به طریقه تعویضی

در این طریقه قیمت یکی از مجهول را از یک معادله از جنس مجهول دیگر اش دریافت نموده، و در معادله دیگر وضع می‌نمائیم. در این صورت معادله یک مجهوله به‌دست می‌آید که با حل آن، مجهول بعدی را نیز می‌توان دریافت نمود.

مثال اول: سیستم معادلات ذیل را به طریقه تعویضی حل نمائید.

$3x-y=0$......I $\qquad$ $3x-y=0$......I $\Rightarrow 3x=y\Rightarrow x=\dfrac{y}{3}$

$2x+y=5$......II

حال قیمت x را به معادله دومی وضع می‌نمائیم.

$$2x+y=5......\text{II}\Rightarrow 2\left(\frac{y}{3}\right)+y=5\Rightarrow \frac{2y}{3}+y=5\Rightarrow 2y+3y=15$$

$$\Rightarrow \underline{y=3}$$

قیمت حاصله عددی y را به یکی از معادلات وضع می‌نمائیم.

$$3x-y=0.....\text{I}\Rightarrow 3x-(3)=0\Rightarrow 3x=3\Rightarrow \underline{x=1}$$

مثال دوم: سیستم معادلات ذیل را به طریقه تعویضی حل نمائید.

$$x-2y=-1.......\text{I} \qquad 2x-3=0.........\text{II}\Rightarrow 2x=3y\Rightarrow \underline{x=\frac{3y}{2}}$$

$$2x-3y=0.........\text{II}$$

حال قیمت x را به معادله دومی وضع می‌نمائیم.

$$x-2y=-1......\text{I}\Rightarrow\left(\frac{3y}{2}\right)-2y=-1\Rightarrow\frac{3y-4y}{2}=-1\Rightarrow \underline{y=2}$$

قیمت حاصله عددی y را به یکی از معادلات وضع می‌نمائیم.

$$x-2y=-1......\text{I}\Rightarrow x-2(2)=-1\Rightarrow x-4=-1\Rightarrow x=-1+4\Rightarrow \underline{x=3}$$

مثال سوم: سیستم معادلات ذیل را به طریقه تعویضی حل نمائید. (وظیفه دانش‌آموزان)

$$x-2y=-8.......\text{I}$$

$$2x+3y=19......\text{II}$$

۳) حل به طریقه افنا

در این طریقه ضرایب یکی از مجهول را در هر دو معادله باهم مساوی می‌سازیم، طوری که ضریب از معادله اولی به معادله دومی و از معادله دومی را به معادله اولی، ضرب نموده تا ضرایب آن مجهول باهم مساوی گردد. و بعداً هر دو معادله را طرف به طرف جمع و یا تفریق می‌کنیم و در این صورت یکی از

مجهول حذف گردیده و قیمت عددی مجهول به‌دست آمده را در یکی از معادلات سیستم، وضع می‌نمائیم تا قیمت مجهول بعدی به‌دست آید.

مثال اول: سیستم معادله ذیل را به طریقه افنا حل نمائید.

$3x-2y=7$.......I

$5x+y=16$.......II

$5\cdot/ \quad 3x-2y=7$.......I $\Rightarrow 15x-10y=35 \qquad 15x-10y=35$

$3\cdot/ \quad 5x+y=16$.......II $\Rightarrow 15x+3y=48 \qquad \dfrac{\pm15x\pm3y=\pm48}{-13y=-13}$

$\Rightarrow \underline{y=1}$

در این حالت قیمت عددی y را در یکی از معادلات وضع نموده تا قیمت x حاصل گردد.

$3x-2y=7$.....I $\Rightarrow 3x-2(1)=7 \Rightarrow 3x-2=7 \Rightarrow 3x=7+2 \Rightarrow \underline{x=3}$

مثال دوم: سیستم معادله ذیل را به طریقه افنا حل نمائید.

$2x-2y=-2$....I

$x+3y=7$........II

$3\cdot/ \quad 2x-2y=-2$....I $\Rightarrow 6x-6y=-6 \qquad 6x-6y=-6$

$2\cdot/ \quad x+3y=7$........II $\Rightarrow 2x+6y=14 \qquad \dfrac{2x+6y=14}{8x=8} \quad \Rightarrow \underline{x=1}$

در این حالت قیمت عددی x را در یکی از معادلات وضع نموده تا قیمت y حاصل گردد.

$x+3y=7$.......II $\Rightarrow (1)+3y=7 \Rightarrow 3y=7-1 \Rightarrow 3y=6 \Rightarrow \underline{y=2}$

مثال سوم: سیستم معادلات ذیل را به طریقه افنا حل نمائید. (وظیفه دانش‌آموزان)

$x-y=1$........I $\qquad 2x+y=8$.......II

۴) حل توسط گراف

برای حل سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول توسط گراف، هر یک از معادلات که گراف آن یک خط مستقیم است در سیستم کمیات وضعیه قایم رسم نموده، و نقطه تقاطع این دو خط حل هم‌زمان این سیستم معادلات می‌باشد.

مثال اول: سیستم معادلات ذیل را به طریقه گراف حل نمائید.

$2x-y=1 ......\text{I}$

$x+y=5 ....\text{II}$

$2x-y=1 ......\text{I}$

x	y
0	−1
0.5	0

$p_1(0,-1)$

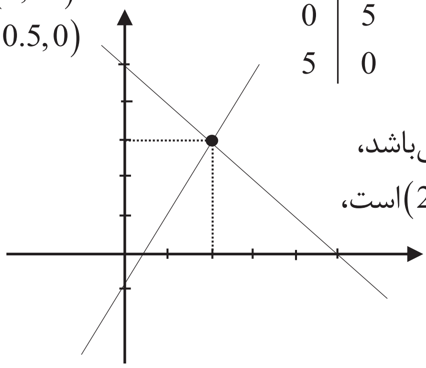
$p_2(0.5,0)$

$x+y=5 ....\text{II}$

x	y
0	5
5	0

$p_1(0,5)$

$p_2(5,0)$



نقطه تقاطع $(2,3)$ می‌باشد،

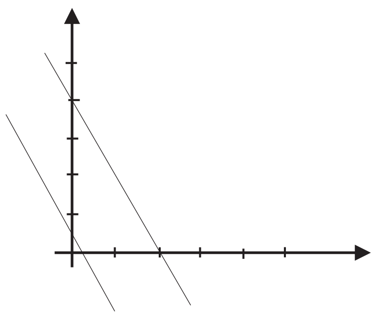
پس حل هم‌زمان $(2,3)$است،

یعنی: $x=2, y=3$

مثال دوم: سیستم معادلات ذیل را به طریقه گراف حل نمائید.

$2x+y=8 ....\text{I}$

$6x+3y=3 .....\text{II}$



$$6x+3y=3 \ldots\ldots\text{II}$$

x	y
0	1
0.5	0

$p_1(0,1)$
$p_2(0.5,0)$

$$2x+y=8 \ldots\ldots\text{I}$$

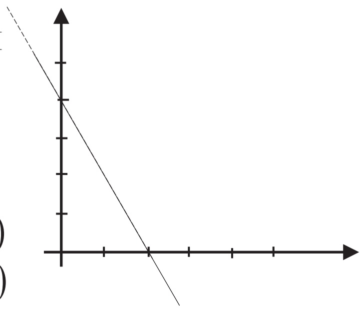
x	y
0	8
4	0

$p_1(0,8)$
$p_2(4,0)$

در گراف فوق هیچ نقطه تقاطع وجود ندارد، از این نتیجه می‌گیریم که اگر خطوط موازی باشند، پس هیچ حل ندارد.

مثال سوم: سیستم معادلات ذیل را به طریقه گراف حل نمائید.

$$4x+2y=8 \ldots\ldots\text{I}$$
$$2x+y=4 \ldots\ldots\text{II}$$



$$4x+2y=8 \ldots\ldots\text{I}$$

x	0	2
y	4	0

$p_1(0,4)$
$p_2(2,0)$

$$2x+y=4 \ldots\ldots\text{II}$$

x	0	2
y	4	0

$p_1(0,4)$
$p_2(2,0)$

از گراف فوق نتیجه می‌گیریم که هر دو معادله باهم مساوی‌اند، (منطبق‌اند) پس بی‌نهایت حل دارد.

خواص سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول

حالت اول: اگر $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ باشد، سیستم معادلات مورد نظر دارای حل معیین و مشخص است. که گراف آن دو معادله متقاطع می‌باشد.

حالت دوم: اگر $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ باشد، سیستم معادلات مورد نظر هیچ حل ندارد. که گراف آن دو معادله دو خط موازی می‌باشد.

حالت سوم: اگر $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ باشد، سیستم معادلات مورد نظر دارای بی نهایت حل می‌باشد. که گراف آن منطبق می‌باشد.

سیستم معادلات سه مجهوله درجه اول

شکل عمومی سیستم معادلات سه مجهوله درجه اول عبارت از:

$$a_1x+b_1y+c_1=d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2=d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3=d_3$$

طوری که $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3,c_1,c_2,c_3,d_1,d_2,d_3$ اعداد حقیقی ثابت بوده و حروف x,y,z مجهول‌ها می‌باشد، و حل این معادلات مانند سیستم معادلات دو مجهوله درجه اول می‌باشد، که به طریقه‌های افنا، تعویضی، و دترمنانت مطالعه می‌نمائیم.

حل به طریقه افنا

برای حل سیستم معادلات سه مجهوله به طریقه افنا یکی از مجهول‌ها را از معادلات II و I حذف نموده که این رابطه را A می‌نامیم، و بعداً همین مجهول را از معادله III توسط معادله I یا II حذف نموده که این رابطه را B می‌نامیم. در این صورت رابطه A و B یک سیستم معادلات دو مجهوله را تشکیل می‌دهد. که به روش حل آن آشنا هستید.

مثال اول: سیستم معادلات ذیل را به طریقه افنا حل نمائید.

$$3x-y+2=-1......\text{I}$$
$$x+3y-z=8........\text{II}$$
$$2x-2y+3z=-5....\text{III}$$

$$\begin{array}{lll} 1\cdot/ & 3x-y+2z=-1.....\text{I} & \\ 3\cdot/ & x+3y-z=8........\text{II} & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 3x-y+2z=-1.....\text{I} \\ 3x+9y-3z=24....\text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x-y+2z=-1 \\ \underline{\pm 3x \pm 9y \mp 3z = \pm 24} \\ -10y+5z=-25......A \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2\cdot/ & x+\ \ 3y-z\ =8.....\text{II} \\ 1\cdot/ & 2x-2y+3z=-5....\text{III} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} 2x+\ \ 6y-2z\ =16.....\text{II} \\ 2x-2y+3z=-5....\text{III} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2x+6y-2z\ =16.....\text{II} \\ \underline{\pm 2x \mp 2y \pm 3z = \mp 5....\text{III}} \\ 8y-5z=21......B \end{array}$$

رابطه و یک سیستم معادله دو مجهوله می‌باشد که باز هم به روش افنا حل می‌نمائیم.

$$\begin{array}{r} -10y+5z=-25.....A \\ \underline{8y-5z=21......B} \\ -2y=-4 \Rightarrow \boxed{y=2} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 8y-5z=21......B \\ 8(2)-5z=21 \\ 16-5z=21 \Rightarrow \boxed{z=-1} \end{array}$$

$$3x-y+2z=-1.....\text{I} \quad 3x-(2)+2(-1)=-1 \ \Rightarrow 3x-2-2=-2$$

$$3x-4=-1 \qquad 3x=-1+4 \Rightarrow 3x=3 \qquad \boxed{x=1}$$

مثال دوم: سیستم معادلات ذیل را حل نمائید.

$$x+2-3z=7$$
$$2y+x-z=5$$
$$x+2z-y=-1$$

حل این سوال مربوط دانش‌آموزان می‌باشد.

حل به طریقه تعویضی

برای حل سیستم معادلات سه مجهوله به طریقه تعویضی به این صورت عمل می‌نمائیم: اولاً قیمت یکی از مجهول‌ها را از یک معادله به‌دست آورده و در دو معادله دیگر وضع می‌نمائیم که در این صورت دو رابطه A و B به‌دست می‌آید که به روش حل آن آشنایی دارید.

مثال اول: سیستم معادلات سه مجهوله ذیل را حل نمائید.

$$x+2y+z=8.....\text{I}$$
$$2x+y+3z=13...\text{II}$$
$$2x-y+z=3.......\text{III}$$

$$x+2y+z=8.....\text{I} \qquad \boxed{x=8-2y-z}$$

$$\begin{cases}2x+y+3z=13.....\text{II}\\ 2(8-2y-z)+y+3z=13.....\text{II}\\ -3y+z=-3.......A\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-y+z=3..........\text{III}\\ 2(8-2y-z)-y+z=3..........\text{III}\\ -5y-z=-13.......B\end{cases}$$

$$-3y+z=-3.......A$$
$$-5y-z=-13.......B$$

اکنون معادلات A و B را حل می‌کنیم.

$$-3y+z=-3.......A \qquad \boxed{z=-3+3y} \qquad A\,to\,B\ -5y-(-3+3y)=-13$$

$$-5y+3-3y=-13 \qquad \Rightarrow \boxed{y=2}$$

$$-3y+z=-3.......A \qquad -3\underset{y}{(2)}+z=-3\Rightarrow -6+z=-3\Rightarrow \boxed{z=3}$$

$$x+2y+z=8.....\text{I} \qquad x+2\underset{y}{(2)}+\underset{z}{(3)}=8 \qquad x+4+3=8\Rightarrow \boxed{x=1}$$

مثال دوم: سیستم معادلات سه مجهوله ذیل را حل نمائید.

$$x+6y+3z=4$$
$$2x+y+2z=3$$
$$3x-2y+z=0$$

حل این سوال مربوط دانش‌آموزان می‌باشد.

معادلات یک مجهوله درجه دوم

شکل عمومی این معادلات $ax^2+bx+c=0$ بوده طوریکه $a\neq 0$ و a,b,c اعداد ثابت حقیقی بوده و x مجهول در معادله می‌باشد. و هر معادله درجه دوم دارای دو جذر می‌باشد که به x_1 و x_2 نمایش می‌دهند.

حالات خصوصی معادلات درجه دوم

هرگاه در این معادله یکی از ضرایب (a,b,c) صفر باشد، معادله حالات ذیل را اختیار می‌کند.

۱) اگر $a=0$ باشد، معادله شکل $bx+c=0$ را اختیار می‌کند. که جذر آن $x=-\frac{c}{b}$ می‌باشد.

۲) هرگاه $b=0$ باشد، معادله شکل $ax^2+c=0$ را اختیار می‌کند. که جذر آن زمانی در ساحه اعداد حقیقی است که a و c مختلف العلامه باشد، در صورت که هم علامه باشد جذور حقیقی ندارد. و جذور آن موهومی می‌باشد.

۳) هرگاه $c=0$ باشد، معادله شکل $ax^2+bx=0$ را اختیار می‌کند، که یکی از جذور آن $x_1=0$ و جذر دومی آن $x_2=-\frac{b}{a}$ می‌باشد.

مثال‌ها: جذور معادلات ذیل را دریابید.

1) $98-2x^2=0 \quad a=-2, \qquad b=0, \qquad c=98$

$98-2x^2=0 \quad \Rightarrow 98=2x^2 \quad /\div 2 \quad \Rightarrow 49=x^2 \quad \Rightarrow \sqrt{49}=\sqrt{x^2}$

$\Rightarrow x=\pm 7 \quad \Rightarrow x_1=7, \quad x_2=-7$

2) $3x^2+27=0 \qquad a=3, \quad b=0, \quad c=27$

$3x^2+27=0 \quad \Rightarrow 3x^2=-27 \quad /\div 3 \quad \Rightarrow x^2=-9 \quad \Rightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{-9}$

$x=\sqrt{(-1)(9)} \quad \Rightarrow x=\pm 3i \quad \Rightarrow \boxed{x_1=3i} \quad \boxed{x_2=-3i}$

چون a,c هم علامه است. پس معادله فوق دارای جذر حقیقی نمی‌باشد.

3) $3x+6=0 \quad a=0, \quad b=3, \quad c=6$

$3x+6=0 \quad \Rightarrow 3x=-6 \quad \Rightarrow \boxed{x=-2}$

4) $8x-40=0 \qquad a=0, \quad b=8, \quad c=-40$

$8x-40=0 \quad \Rightarrow 8x=40 \quad \Rightarrow \boxed{x=5}$

5) $2x^2+8x=0 \quad a=2, \quad b=8, \quad c=0$

$2x^2+8x=0 \quad \Rightarrow x(2x+8)=0 \quad \Rightarrow \boxed{x_1=0} \Rightarrow 2x+8=0 \Rightarrow \boxed{x_2=-4}$

6) $\dfrac{x^2}{2}-10x=0 \quad a=\dfrac{1}{2}, \quad b=-10, \quad c=0$

$\dfrac{x^2}{2}-10x=0 \quad /\cdot 2 \Rightarrow x^2-20x=0 \quad \Rightarrow x(x-20)=0 \quad \Rightarrow \boxed{x_1=0}$

$x-20=0 \quad \Rightarrow \boxed{x_2=20}$

حل معادلات یک مجهوله درجه دوم

برای حل و دریافت جذر این نوع معادلات از روش‌های تجزیه، فورمول، تکمیل مربع و هندسی استفاده می‌کنیم. اما به‌صورت عموم از روش‌های تجزیه و فورمول استفاده می‌نمائیم، هر یک از روش‌ها را مورد بحث قرار می‌دهم.

معادلات یک مجهوله درجه دوم پولینومی

معادلات درجه دوم که به حالت معیاری، معادله یک مجهوله درجه دوم باشد بنام معادلات پولینومی یاد می‌گردد.

۱) حل معادلات یک مجهوله درجه دوم توسط تجزیه

در این روش اولاً تمام حدود معادلات را به یک طرف مساوات قرار داده و آن‌را تجزیه می‌کنیم و هر یک از عوامل را به‌صورت جداگانه مساوی به صفر قرار داده تا جذور معادلات به‌دست آید.

مثال‌ها: جذور معادلات ذیل را به‌دست آورید.

1) $x^2-6x+5=0 \qquad x^2-6x+5=0 \Rightarrow (x-1)(x-5)=0$

$\Rightarrow x-1=0,\ x-5=0 \Rightarrow \boxed{x_1=1},\ \boxed{x_2=5}$

2) $2x^2-9x+4=0 \qquad 2x^2-9x+4=0 \Rightarrow (2x-1)(x-4)=0$

$\Rightarrow 2x-1=0,\ x-4=0 \Rightarrow \boxed{x_1=\frac{1}{2}},\ \boxed{x_1=4}$

3) $3m+5m-2=0 \qquad 3m+5m-2=0 \Rightarrow (3m-1)(m+2)=0$

$\Rightarrow 3m-1=0,\ m+2=0 \Rightarrow \boxed{m_1=\frac{1}{3}},\ \boxed{m_2=-2}$

۲) حل معادلات یک مجهوله درجه دوم توسط فورمول

برای حل معادلات یک مجهوله درجه دوم از فورمول ذیل که بنام فورمول محمد بن موسی یاد می‌کنند استفاده می‌نمائیم.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

برای سهولت در انجام عملیه‌ها بجای b^2-4ac سمبول Δ را وضع نموده داریم که: $\Delta=b^2-4ac$ و فورمول فوق را چنین دریافت می‌نمائیم.

$$ax^2+bx+c=0$$
$$\frac{ax^2}{a}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=\frac{0}{a}$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$
$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$
$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

حالا بجای b^2-4ac سمبول Δ را وضع می‌کنیم و جذور را جدا گانه دریافت می‌کنیم.

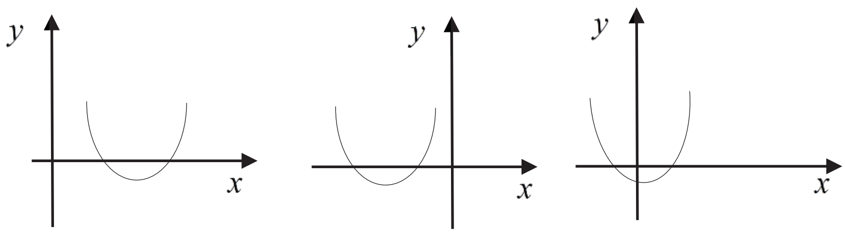
$$x_1=\frac{-b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\boxed{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$
$$x_2=\frac{-b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}=\boxed{\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

خواص معادلات یک مجهوله درجه دوم

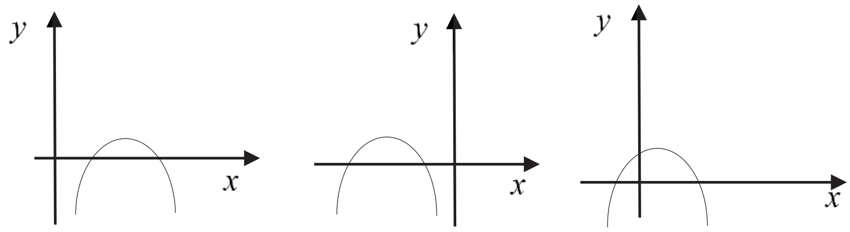
برای این که بدانیم معادلات مذکور چند جذر دارد و گراف آن چگونه است. سه حالت ذیل را توسط عبارت $\Delta=b^2-4ac$ بررسی می‌کنیم.

۱) هنگامی که $\Delta\succ 0$ باشد، معادله دارای دو جذر حقیقی می‌باشد، و گراف آن محور x را در دو نقطه قطع می‌نمائید. مانند شکل‌های ذیل:

1) $ax^2+bx+c=0 \quad if \ \ \Delta\succ 0$

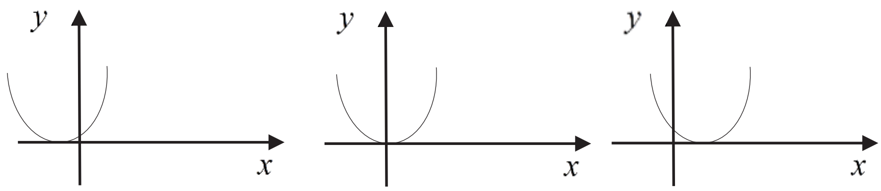


$$2)\qquad -ax^2+bx+c=0 \qquad if\ \ \Delta \succ 0$$

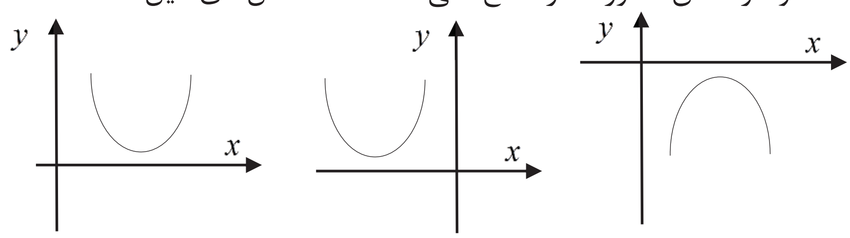


۲) هنگامی که $\Delta=0$ باشد، معادله دارای دو جذر مساوی (مضاعف) می‌باشد، و گراف آن محور x را در یک نقطه قطع می‌کند.مانند شکل‌های ذیل:

$$ax^2+bx+c=0 \qquad if\,\Delta=0$$



۳) هنگامی که $\Delta \prec 0$ باشد، معادله در ساحه اعداد حقیقی دارای جذر نمی‌باشد، و گراف آن محور x را قطع نمی‌کند. مانند شکل‌های ذیل:



مثال‌ها: معادلات ذیل را توسط فورمول محمد بن موسی حل نمایید.

1) $x^2 - x - 6 = 0 \qquad a = 1 \qquad b = -1 \qquad c = -6$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4\times1\times(-6) = 1 + 24 = 25$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{1+5}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times1} = \frac{1-5}{2} = -2$$

2) $2x^2 + 5x - 3 = 0 \qquad a = 2 \qquad b = 5 \qquad c = -3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4\times2\times(-3) = 25 + 24 = 49$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(5)+\sqrt{49}}{2\times2} = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(5)-\sqrt{49}}{2\times2} = \frac{-5-7}{4} = -3$$

3) $2x^2 - 2x - 24 = 0 \qquad a = 2 \qquad b = -2 \qquad c = -24$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4\times2\times(-24) = 4 + 192 = 196$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)+\sqrt{196}}{2\times2} = \frac{2+14}{2} = 4$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2)-\sqrt{196}}{2\times2} = \frac{2-14}{4} = -3$$

معادلات یک مجهوله درجه دوم کسری

برای دریافت جذور و حل این نوع معادلات اولاً دو طرف معادلات را به یک کسر تبدیل نموده بعداً با استفاده از خواص تناسب حل می‌نمائیم.

مثال‌ها: جذور معادلات ذیل را دریابید.

1) $\frac{2}{x}+\frac{x}{3}=\frac{5}{3} \qquad \Rightarrow \frac{2}{x}+\frac{x}{3}=\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{6+x^2}{3x}=\frac{5}{3} \Rightarrow 18+3x^2=15x$

$\Rightarrow 3x^2-15x+18=0 \Rightarrow x^2-5x+6=0 \Rightarrow (x-2)(x-3)=0$

$\Rightarrow x-2=0 \quad x-3=0 \Rightarrow \boxed{x_1=2} \quad \boxed{x_2=3}$

2) $\frac{x}{4}-\frac{2}{x}=\frac{-7}{4} \qquad \frac{x}{4}-\frac{2}{x}=\frac{-7}{4} \Rightarrow \frac{x^2-8}{4x}=\frac{-7}{4} \Rightarrow 4x^2-32=-28x$

$4x^2+28x-32=0 \Rightarrow x^2+7x-8=0 \Rightarrow (x-1)(x+8)=0$

$\Rightarrow x-1=0 \;\; x+8=0 \Rightarrow \boxed{x_1=1} \;\; \boxed{x_2=-8}$

3) $1+\frac{x}{2}+\frac{5}{x}=\frac{-9}{2} \qquad 1+\frac{x}{2}+\frac{5}{x}=\frac{-9}{2} \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{5}{x}=\frac{-9}{2}-1$

$\Rightarrow \frac{x^2+10}{2x}=\frac{-11}{2} \Rightarrow 2x^2+20=-22x \Rightarrow 2x^2+22x+20=0$

$\Rightarrow x^2+11x+10=0 \Rightarrow (x+1)(x+10)=0 \Rightarrow x+1=0 \;, x+10=0$

$\Rightarrow \boxed{x_1=-1} \; \boxed{x_2=-10}$

معادلات یک مجهوله درجه دوم جذری

برای حل و دریافت معادلات یک مجهوله درجه دوم جذری اولاً افاده که تحت جذر می‌باشد، به یک طرف معادله قرار داده و بعداً اطراف معادلات را به نمایی درجه جذر بلند می‌بریم که در این صورت معادله جذری به معادله پولینومی تبدیل گردیده و حل می‌نمائیم.

مثال‌ها: جذور معادلات ذیل را دریابید.

1) $2\sqrt{x^2-5x+3}+6=12 \qquad \Rightarrow 2\sqrt{x^2-5x+3}=12-6$

$2\sqrt{x^2-5x+3}=6 \;\; \Rightarrow \sqrt{x^2-5x+3}=3 \qquad \Rightarrow \left(\sqrt{x^2-5x+3}\right)^2=(3)^2$

$$x^2-5x+3=9 \Rightarrow x^2-5x+3-9=0 \Rightarrow x^2-5x-6=0$$
$$\Rightarrow (x+1)(x-6)=0 \Rightarrow x+1=0 \quad x-6=0 \Rightarrow \boxed{x_1=-1} \quad \boxed{x_2=6}$$

2)
$$x-5=\sqrt{x+7}$$
$$(x-5)^2=\left(\sqrt{x+7}\right)^2$$
$$x^2-10x+25=x+7$$
$$x^2-10x-x+25-7=0$$
$$x^2-11x+18=0$$
$$(x-2)(x-9)=0$$
$$x-2=0 \quad x-9=0$$
$$\boxed{x_1=2} \quad \boxed{x_2=9}$$

در معادله فوق x_1 معادله را صدق نمی‌کند. پس $x_1=2$ قابل قبول نیست.

3)
$$\sqrt{2x+7}=x-4$$
$$\left(\sqrt{2x+7}\right)^2=(x-4)^2$$
$$2x+7=x^2-8x+16$$
$$x^2-8x+16-2x-7=0$$
$$x^2-10x+9=0$$
$$(x-1)(x-9)=0$$
$$x-1=0 \quad x-9=0$$
$$\boxed{x_1=1} \quad \boxed{x_2=9}$$

در معادله فوق $x_1=1$ جذر معادله نیست. صرف $x_2=9$ جذر معادله می‌باشد.

4)
$$\sqrt{x+2}+\frac{3}{\sqrt{x+2}}=4$$
$$\sqrt{x+2}+\frac{3}{\sqrt{x+2}}=4 \quad /\cdot\sqrt{x+2}$$
$$x+2+3=4\sqrt{x+2}$$
$$x+5=4\sqrt{x+2} \quad /(\ )^2$$
$$(x+5)^2=\left(4\sqrt{x+2}\right)^2$$
$$x^2+10x+25=16(x+2)$$
$$x^2+10x+25=16x+32$$
$$x^2+10x+25-16x-32$$
$$x^2-6x-7=0$$
$$(x-7)(x+1)=0$$
$$x-7=0 \quad x+1=0$$
$$\boxed{x_1=-1} \quad \boxed{x_2=7}$$

توجه: در معادلات جذری، جذوری که شامل ناحیه تعریف معادلات نمی‌گردد، معادلات را صدق نمی‌کند.

معادلات یک مجهوله درجه دوم نمایی

برای دریافت قیمت مجهول و حل معادلات که مجهول به حیث توان قرار گیرد، از خواص معادلات و توان‌ها استفاده می‌نمائیم، طوری که توان یا قاعده‌ها در معادلات باهم مساوی شوند.

مثال‌ها: جذور معادلات ذیل را دریابید.

1)
$$\left(x^2+4x+3\right)2^{\sqrt{x+2}}=0$$
$$\left(x^2+4x+3\right)2^{\sqrt{x+2}}=0 \quad / \div 2^{\sqrt{x+2}}$$
$$x^2+4x+3=0$$
$$(x+1)(x+3)=3$$
$$x+1=0 \quad x+3=0$$
$$\boxed{x_1=-1} \quad \boxed{x_2=-3}$$

2)
$$2^{4-x}=12-2^{x+1}$$
$$2^4\cdot 2^{-x}=12-2^x\cdot 2^1$$
$$\frac{2^4}{2^x}=12-2^x\cdot 2^1$$

برای تعویض 2^x به y یعنی $2^x=y$ چنین می‌نویسیم.

$$\frac{2^4}{y}=12-y\cdot 2 \qquad \Rightarrow 2^4=12y-2y^2 \qquad \Rightarrow 2y^2-12y+16=0$$
$$\Rightarrow y^2-6y+8=0 \qquad \Rightarrow (y-2)(y-4)=0 \quad \Rightarrow \underline{y_1=2} \quad \underline{y_2=4}$$
$$2^x=2^1 \Rightarrow \boxed{x_1=1} \qquad 2^x=4=2^2 \Rightarrow \boxed{x_2=2}$$

3)
$$8\cdot 2^{2x}-9\cdot 2^x+1=0 \quad \Rightarrow 8\left(2^x\right)^2-9\cdot 2^x+1=0$$

برای تعویض 2^x به y یعنی $2^x=y$ چنین می‌نویسیم.

$$8y^2-9y+1=0 \qquad \Rightarrow (8y-1)(y-1)=0 \ \Rightarrow y_1=\frac{1}{8} \quad y_2=1$$

$$\Rightarrow y_1=2^x=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=2^{-3} \Rightarrow 2^x=2^{-3} \Rightarrow \boxed{x_1=-3}$$

$$\Rightarrow y_2=2^x=1=2^0 \Rightarrow 2^x=2^0 \Rightarrow \boxed{x_2=0}$$

معادلات که قابل تبدیل به معادله یک مجهوله درجه دوم اند

معادلات که قابل تبدیل به درجه دوم اند، دارای انواع زیادی‌اند، مانند: معادلات نمائی، معادلات کسری، معادلات جذری، که قبلاً مطالعه نمودیم. معادلات پولینومی‌که شکل معادلات یک مجهوله درجه دوم را دارند، با استفاده از تعویض آن‌را تبدیل نموده، سپس از حل معادله قیمت جذور اصلی معادله را از حسب روابط جذور فرضی معادله به‌دست می‌آوریم.

مثال‌ها: جذور معادلات ذیل را دریابید.

$$1) \qquad x^4-13x^2+36=0 \qquad \Rightarrow \{x^2=y \qquad \Rightarrow y^2-13y+36=0$$

$$(y-9)(y-4)=0 \qquad \Rightarrow y-9=0 \ \ y-4=0 \Rightarrow y_1=9 \quad y_2=4$$

$$\begin{cases} y_1=9 & y=x^2 \Rightarrow x^2=9 \qquad \Rightarrow \boxed{x_1=\pm 3} \\ y_2=4 & y=x^2 \Rightarrow x^2=4 \qquad \Rightarrow \boxed{x_2=\pm 2} \end{cases}$$

$$2) \qquad x-6\sqrt{x}+8 \qquad \Rightarrow x=y^2 \qquad \Rightarrow y^2-6y+8=0$$

$$\Rightarrow (y-2)(y-4)=0 \ \Rightarrow \quad y-2=0 \ , \ y-4=0 \ \Rightarrow y_1=2 \ , \ y_2=4$$

$$\begin{cases} y=\sqrt{x}=2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1=\pm\sqrt{2}} \\ y=\sqrt{x}=4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2=\pm 2} \end{cases}$$

معادلات یک مجهوله درجه دوم در ساحه اعداد مختلط

نظر به خواص معادلات که قبلاً بررسی نمودیم، هرگاه $\Delta \prec 0$ باشد، معادله در ساحه اعداد حقیقی دارای حل نمی‌باشد، اما در ساحه اعداد مختلط دارای حل می‌باشد.

مثال‌ها: جذور معادلات ذیل را دریابید.

$$1) \qquad x^2-2x+5=0 \qquad \Rightarrow a=1,\quad b=-2,\quad c=5$$

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(-2)^2-4\times1\times5=-16$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1=\frac{-(-2)+\sqrt{-16}}{2\times1}=\frac{2+4i}{2}=1+2i \Rightarrow \boxed{x_1=1+2i}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2=\frac{-(-2)-\sqrt{-16}}{2\times1}=\frac{2-4i}{2}=1-2i \Rightarrow \boxed{x_2=1-2i}$$

$$2) \qquad x^2+4x+13=0 \qquad \Rightarrow a=1,\quad b=4,\quad c=13$$

$$\Delta=b^2-4ac \Rightarrow \Delta=(4)^2-4\times1\times13=-36$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1=\frac{-(4)+\sqrt{-36}}{2\times1}=\frac{-4+6i}{2}=-2+3i \Rightarrow \boxed{x_1=3i-2}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_2=\frac{-4-\sqrt{-36}}{2\times1}=\frac{-4-6i}{2}=-2-3i \Rightarrow \boxed{x_2=-3i-2}$$

روابط بین جذور معادلات یک مجهوله درجه دوم

روابط بین جذور معادله $ax^2+bx+c=0$ به‌صورت ذیل می‌باشد، در صورتِ که $\Delta \succ 0$ $a\neq 0$ باشد. و جذور معادله را به x_1 و x_2 نشان دهیم.

- <u>حاصل جمع جذور:</u> $\boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

➢ <u>حاصل ضرب جذور:</u> $\boxed{x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}}$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - \left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

➢ <u>حاصل تفریق جذور:</u> $\boxed{x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}}$

$$x_1 - x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{\Delta}+b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

➢ <u>حاصل جمع معکوس جذور:</u> $\boxed{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c}}$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{\frac{-b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = -\frac{b}{c}$$

مثال اول: حاصل جمع جذور معادله $x^2 + 7x - 8 = 0$ را دریابید.

$$x^2 + 7x - 8 = 0 \qquad a = 1, \quad b = 7, \quad c = -8$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{7}{1}$$

مثال دوم: حاصل تفریق و حاصل ضرب جذور معادله $x^2-11x+18=0$ را دریابید.

$$a=1,\ \ b=-11,\ \ c=18$$

$$x_1-x_2=\frac{\sqrt{\Delta}}{a}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{a}=\frac{\sqrt{121-4\cdot1\cdot18}}{1}=7$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{18}{1}=18$$

تشکیل معادله یک مجهوله درجه دوم

- هرگاه جذور یک معادله درجه دوم و یا حاصل جمع و یا حاصل ضرب جذور معادله را داشته باشیم، برای تشکیل نمودن آن معادله از روابط ذیل استفاده می‌کنیم.

$$ax^2+bx+c=0 \quad /\div a$$

$$ax^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2-\left(\frac{-b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0$$

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a}=S$$

$$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=P$$

$$x^2-sx+p=0$$

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0$$

$$\underbrace{x^2-x_1\cdot x}_{x}-\underbrace{x_2\cdot x+x_1\cdot x_2}_{x_2}=0$$

$$x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=0$$

$$\boxed{(x-x_1)(x-x_2)=0}$$

مثال اول: هر گاه جذور معادله یک مجهوله درجه دوم $2,-3$ باشد، معادله آن‌را دریابید.

$$(x-x_1)(x-x_2)=0 \qquad x_1=2 \quad x_2=-3$$

$$(x-2)(x-(-3))=0 \quad \Rightarrow (x-2)(x+3)=0 \quad \Rightarrow x^2+3x-2x-6=0$$

$$x^2+x-6=0$$

مثال دوم: هرگاه حاصل جمع جذور معادله 3 و حاصل ضرب آن 4 باشد، معادله آن‌را دریابید.

$$x_1+x_2=S=3 \qquad x_1\cdot x_2=P=4$$
$$x^2-sx+p=0 \qquad \Rightarrow x^2-4x+3=0$$

- برای تشکیل معادله درجه دوم که جذرهای اش به اندازه k کم‌تر از جذرهای معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ باشد باید $(x+k)$را بجای x در معادله قرار دهیم.
- برای تشکیل معادله درجه دوم که جذرهایش به اندازه k بیش‌تر از جذرهای معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد باید $(x-k)$ را بجای x در معادله قرار دهیم.
- برای تشکیل معادله درجه دوم که جذرهایش $\frac{1}{k}$ برابر از جذرهای معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد، باید kx را بجای x در معادله قرار دهیم.
- برای تشکیل معادله درجه دوم که جذرهایش قرینه جذرهای معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد، باید $-x$ را بجای x در معادله قرار دهیم.
- برای تشکیل معادله درجه دوم که جذرهایش معکوس جذرهای معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد، باید $\frac{1}{x}$ را بجای x در معادله قرار دهیم.
- برای تشکیل معادله درجه دوم که جذرهایش معکوس قرینه جذرهای معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد، باید علامت b را تغییر داده و جای a و c را نیز تبدیل کنیم.
- برای تشکیل معادله درجه دوم که جذرهایش نصف جذرهای معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد، عدد ثابت c را نصف و عدد a را دو چند می‌کنیم.

- برای تشکیل معادله درجه دوم که جذرهایش kچند جذرهای معادله $ax^2+bx+c=0$ باشد، اسکالر را در b و مربع آنرا در c ضرب می‌کنیم.

معادلات پارامتریک یک مجهوله درجه دوم

معادلات که بر علاوه مجهول اصلی اش حروف دیگر مانند: $(m,k,l...)$ را نیز شامل باشد معادلات پارامتریک گفته می‌شود. مانند:

$(m-1)x^2+6mx+8=0$ در این معادله m پارامتر معادله می‌باشد، و برای دریافت قیمت پارامتر معادلات حالات ذیل را بررسی می‌کنیم.

❖ اگر برای تعیین پارامتر معادله یکی از جذور معادله داده شود، جذرها را در معادله وضع نموده و پارامتر معادله را به‌دست می‌آوریم.

مثال: پارامتر معادله $(m-2)x^2+(m-2)x+6=0$را طوری تعیین نمائید که یکی از جذور آن (-2) باشد.

$$(m-2)x^2+(m+2)x+6=0 \quad x=-2$$
$$(m-2)(-2)^2+(m+2)(-2)+6=0$$
$$(m-2)4+(-2m-2)+6=0$$
$$4m-8-2m-4+6=0 \qquad \Rightarrow \boxed{m=3}$$

❖ اگر برای تعیین پارامتر معادله، جذور معادله قرینه هم‌دیگر باشد، در این صورت b را مساوی به صفر قرار داده پارامترها را به‌دست می‌آوریم.

مثال: پارامتر معادله $mx^2+(m-1)x-4=0$ را تعیین نمائید که جذور معادله قرینه هم‌دیگر باشد.

$$mx^2+(m-1)x-4=0\ ,b=0\ \Rightarrow b=m-1=0\ ,\Rightarrow m=1$$

❖ هرگاه جذور مضاعف باشد، از رابطه $\Delta=0$ استفاده می‌کنیم.

❖ هرگاه یکی از جذور صفر باشد، از رابطه $c=0$ استفاده می‌کنیم.

❖ هرگاه جذور معکوس هم‌دیگرش باشد، از رابطه $a=c$ استفاده میکنیم.

❖ هرگاه جذور معکوس و قرینه هم‌دیگرش باشد، از رابطه $a=-c$ استفاده می‌کنیم.

قاعده دیکارت

برای تعیین اشاره جذور معادلات یک مجهوله درجه دوم، اگر معادله دارای دو جذر حقیقی باشد. یعنی $\Delta \geq 0$ باشد. می‌توان قبل از این که معادله را حل نمائیم علامه جذور را تعیین نمود، برای اجرای این عمل توسط قاعده دیکارت حالات ذیل را بررسی می‌کنیم.

۱. هرگاه بین حدود معادله هیچ تحول علامه نباشد، جذور معادله هم اشاره و منفی می‌باشد. مانند:

$$x^2+2x+1=0 \Rightarrow x_1=x_2=-1$$

$$x^2+3x+2=0 \Rightarrow x_1=-1,\ x_2=-2$$

۲. هر گاه بین حدود معادله یک تحول علامه باشد، یک جذر معادله مثبت و جذر دومی آن منفی می‌باشد. مانند:

$$x^2-3x-4=0 \Rightarrow x_1=-1 \qquad x_2=4$$

۳. هرگاه بین حدود معادله دو تحول علامه باشد، معادله دارای دو جذر مثبت می‌باشد. مانند:

$$x^2-5x+6=0 \Rightarrow x_1=2, \quad x_2=3$$

حل مسائل عبارتی توسط معادلات

عبارات الجبری که به صورت ساده و غیرالجبری بیان گردیده باشد بنام مسائل عبارتی یاد می‌کنند. و برای حل آن توسط معادلات الجبری ابتدا موضوع را بطور دقیق بررسی نموده بعداً با استفاده از حروف مانند: x, y, z و تعیین مجهول خواسته شده عبارات را حل می‌نمائیم.

برای حل این نَوع مسائل توسط معادلات، دانستن اِصطلاحات ذیل لازم است.

اعداد مسلسل طبیعی: $1,2,3,4,5...$ و به‌صورت الجبری $x, x+1, x+2...$

اعداد مسلسل طبیعی جفت: $2,4,6,8...$ به‌صورت الجبری $2x, 2x+2, 2x+4...$

اعداد مسلسل طبیعی تاق: $1,3,5...$ به‌صورت الجبری $2x+1, 2x+3, 2x+5...$

طبقه بندی اعداد: اگر ارقام یک عدد را به $(x, y, z...)$ نشان دهیم چنین می نویسیم: عدد یک رقمی x. عدد دو رقمی $x+10y$. عدد سه رقمی $x+10y+100z$. ربع عدد $\frac{x}{4}$، نصف عدد $\frac{x}{2}$.

مثال اول: اعداد را دریابید که حاصل جمع شان ۵ و حاصل تفریق شان ۱ می‌گردد.

$$\begin{array}{l} x+y=5 \\ \underline{x-y=1} \quad \Rightarrow x+y=5 \\ 2x=6 \Rightarrow x=3 \quad y=5-3=2 \end{array}$$

مثال دوم: حاصل جمع ۳ عدد مسلسل جفت ۶۶ است، آن اعداد را دریابید.

عدد اول $2x+2$ عدد دوم $2x+4$ عدد سوم $2x+6$

$$(2x+2)+(2x+4)+(2x+6)=66$$

$$6x+12=66 \quad \Rightarrow 6x=66-12=54 \Rightarrow x=9$$

$$9\times2+2=\underset{1}{20} \quad 9\times2+4=\underset{2}{22} \quad 9\times2+6=\underset{3}{24}$$

مثال سوم: فرق بین دو عدد مساوی به ۱ و فرق بین مربعات شان ۵ است. اعداد را دریابید.

$$x-y=1 \qquad x^2-y^2=5 \qquad \Rightarrow \underbrace{(x-y)}_{1}(x+y)=5$$

$$\begin{array}{l} (x+y)=5 \\ \underline{x-y=1} \\ 2x=6 \Rightarrow x=3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} (x+y)=5 \\ (3+y)=5 \end{array} \qquad \Rightarrow y=2$$

مثال چهارم: عدد را دریابید که با دو چند خودش جمع گردد مساوی به ۳۰ شود.
$x+2x=30 \quad 3x=30 \quad x=10$

مثال پنجم: نوید ۴۲ و فرید ۹ سال عمر دارد دریابید که چند سال بعد نوید ۴ برابر سن فرید می‌شود.

$N:42 \quad F:9 \quad 42+x=4(9+x) \quad x=2$

یعنی ۲ سال بعد عمر نوید ۴ برابر عمر فرید می‌شود.

معادلات قیمت مطلقه

برای حل معادلات که در آن‌ها قیمت مطلق وجود دارد با استفاده از تعریف و خواص آن از روش‌های ذیل استفاده می‌کنیم.

- استفاده از تعریف قیمت مطلق
- بالا بردن توان دو طرف معادله
- روش فاصله (انتروال)

معادلات یک مجهوله درجه اول قیمت مطلقه

برای دریافت قیمت مجهول و حل این نوع معادلات از تعریف قیمت مطلقه استفاده می‌کنیم که دارای دو جذر می‌باشد.

مثال اول: جذر معادله $|4x+10|=2$ را دریابید.

$(4x+10)=2 \quad -(4x+10)=2$
$4x=2-10 \quad -4x-10=2$
$4x=-8 \quad -4x=2+10 \Rightarrow -4x=12$
$x_1=-2 \quad x_2=-3$

مثال دوم: جذر معادله $|2x+3|=1$ را دریابید.

$(2x+3)=1 \Rightarrow 2x=1-3 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x_1=-1$
$-(2x+3)=1 \Rightarrow -2x-3=1 \Rightarrow -2x=1+3 \Rightarrow -2x=4 \Rightarrow x_2=-2$

مثال سوم: جذر معادله $|3x+5|=2$ را دریابید.

$$(3x+5)=2\Rightarrow 3x=2-5 \qquad -(3x+5)=2\Rightarrow -3x-5=2$$

$$3x=-3\Rightarrow x_1=-1 \qquad -3x=2+5\Rightarrow -3x=7\Rightarrow x_2=-\frac{7}{3}$$

مثال چهارم: جذر معادله $\left|\frac{x-2}{x+3}\right|=2$ را دریابید.

$$\left|\frac{x-2}{x+3}\right|=2\Rightarrow \frac{x-2}{x+3}=\pm 2$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{x+3}=2\Rightarrow x-2=2x+6\Rightarrow x-2x=6+2\Rightarrow -x=8\Rightarrow x_1=-8$$

$$\Rightarrow \frac{x-2}{x+3}=-2\Rightarrow x-2=-2x-6\Rightarrow x+2x=-6+2\Rightarrow 3x=-4$$

$$\Rightarrow x_2=\frac{-4}{3}$$

5) $|2x-3|=|x+7|$

$$(2x-3)^2=(x+7)^2\Rightarrow 4x^2-12x+9=x^2+14x+49$$

$$\Rightarrow 3x^2-26x-40=0 \quad x_1=10 \qquad x_2=\frac{-4}{3}$$

6) $||x-2|-5|=3 \quad (+)$ $\qquad ||x-2|-5|=3 \quad (-)$

$$|x-2|-5=3 \qquad |x-2|-5=-3$$

$$|x-2|=3+5 \qquad |x-2|=-3+5$$

$$|x-2|=8 \qquad |x-2|=2$$

$$\overbrace{\overset{(+)}{(x-2)=8} \quad \overset{(-)}{(x-2)=-8}} \qquad \overbrace{\overset{(+)}{(x-2)=2} \quad \overset{(-)}{(x-2)=-2}}$$

$$x=8+2 \quad x=-8+2 \qquad x=2+2 \quad x=-2+2$$

$$\boxed{x_1=10} \quad \boxed{x_2=-6} \qquad \boxed{x_3=4} \quad \boxed{x_4=0}$$

بررسی معادلات $|x-a|+|x-b|=c \quad \& \quad |x-a|-|x-b|=c$

مثال اول: عبارت y را تعیین علامت نمائید. $y=|x-2|+|x-10|$

حل: ابتدا عبارات داخل قیمت مطلق را مساوی به صفر قرار می‌دهیم و بعد تعیین علامت می‌کنیم.

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \qquad x-10 \Rightarrow x=10$$

x	$-\infty$		2		10		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-10$		$-$		$-$	0	$+$	

$$y=\begin{cases} -(x-2)-(x-10) & x \prec 2 \\ (x-2)-(x-10) & 2 \le x \prec 10 \\ (x-2)+(x-10) & x \ge 10 \end{cases}$$

$$y=\begin{cases} -2x+12 & x \prec 2 \\ 8 & 2 \le x \prec 10 \\ 2x-12 & x \ge 10 \end{cases}$$

مثال دوم: معادله ذیل را حل نمائید. $|2x-1|+|x-2|=4$

$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \qquad x-2 \Rightarrow x=2$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	

$$if\ \ x \prec \frac{1}{2}\ ,\ \ -(2x-1)-(x-2)=4\ \ \Rightarrow -2x+1-x+2=4 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

$x=-\frac{1}{3}$ قابل قبول.

$$if\ \ \frac{1}{2} \le x \prec 2\ ,\ \ (2x-1)-(x-2)=4\ \ \Rightarrow 2x-1-x+2=4 \Rightarrow x=3$$

$x=3$ قابل قبول نیست.

$$if\ \ x \ge 2\ ,\ \ (2x-1)+(x-2)=4\ \ \Rightarrow 2x-1+x-2=4 \Rightarrow x=\frac{7}{3}$$

$x=\frac{7}{3}$ قابل قبول است.

مثال سوم: بیش‌ترین مقدار عبارت را تعیین کنید. $|x-a|-|x-b|$

نظر به خواص قیمت مطلق داریم $|x|-|y| \le |x-y|$.

$$|x-a|-|x-b| \le |(x-a)-(x-b)| = |b-a|$$

مثال چهارم: کم‌ترین مقدار عبارت را تعیین نمائید. $|x-a|+|x-b|$

نظر به خواص قیمت مطلق داریم $|x-y| \le |x|+|y|$.

$$|x-a|+|x-b| = |a-x|+|x-b| \ge |(a-x)+(x-b)| = |a-b|$$

توجه۱: در معادلات نکات ذیل را بخاطر داشته باشید.

- ✓ اگر $|c| \succ |b-a|$ باشد، آنگاه معادله جواب ندارد. زیرا با توجه به مثال بالا حد اکثر عبارت $|x-a|-|x-b|$ برابر $|b-a|$ می‌باشد.
- ✓ اگر $|c| \prec |b-a|$ باشد، معادله یک جواب دارد.
- ✓ اگر $|c| = |b-a|$ باشد، آنگاه معادله دارای بی‌نهایت جواب است.

توجه۲: در معادلات $|x-a|+|x-b|=c$ و $c \succ 0$ نکات ذیل را بخاطر داشته باشید.

- ✓ اگر $|a-b| \succ c$ باشد، معادله جواب ندارد.

✓ اگر $|a-b| \prec c$ باشد، معادله دو جواب به صورت زیر دارد.

$$x_2 = \frac{a+b-c}{2} \qquad x_1 = \frac{a+b+c}{2}$$

✓ اگر $a-b \prec c \prec b-a$، معادله دارای یک جواب است.

✓ اگر $|a-b| = c$، معادله دارای بی‌نهایت جواب است.

مثال پنجم: در وجود جواب معادلات زیر بحث و در صورت داشتن جواب آن‌ها را تعیین کنید.

$$A: \quad |x+2|-|x-4|=5$$
$$B: \quad |x+2|+|x-4|=7$$
$$C: \quad |x+2|+|x-4|=6$$

حل A: $a=-2,\ b=4,\ c=5$

$5 \prec |6| = |4-(-2)| \Rightarrow c \succ |b-a|$ معادله یک جواب دارد.

$x+2=0 \Rightarrow x=-2, \quad x-4=0 \Rightarrow x=4$

x	$-\infty$		-2		4		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	

$if\ \ x \prec -2,\ \ -(x+2)+(x-4)=5 \Rightarrow -6=5$ غیرممکن است

$if\ \ -2 \le x \prec 4,\ \ (x+2)+(x-4)=5 \Rightarrow x=\frac{7}{2}$ قابل قبول است

$if\ \ x \ge 4,\ \ (x+2)-(x-4)=5 \Rightarrow 6=5$ غیر ممکن است

حل B: $a=-2,\ b=4,\ c=7$ داریم:

معادله دارای دو جواب می‌باشد. $7 \prec 6 = |6| = |-2-(4)| \Rightarrow c \prec |a-b|$

$if,\ x \prec -2,\ \ -(x+2)-(x-4)=7 \Rightarrow x=-\dfrac{5}{2}$ قابل قبول است

$if, -2 \le x \prec 4,\ \ (x+2)-(x-4)=7 \Rightarrow 6=7$ غیر ممکن است

$if,\ x \ge 4,\ \ (x+2)+(x-4)=7 \Rightarrow x=\dfrac{9}{2}$ قابل قبول است

جواب‌های فوق را می‌توانیم از فورمول‌های داده شده به‌دست آوریم.

$$x_1=\frac{a+b+c}{2} \quad \Rightarrow x_1=\frac{-2+4+7}{2} \qquad \Rightarrow x_1=\frac{9}{2}$$

$$x_2=\frac{a+b-c}{2} \quad \Rightarrow x_2=\frac{-2+4-7}{2} \qquad \Rightarrow x_2-\frac{5}{2}$$

حل C: در این حالت $|a-b|=|c| \Rightarrow |-2-(4)|=|6|=6$ و معادله دارای بی‌نهایت جواب است. زیرا اگر $-2 \le x \prec 4$، داریم:

$$x+2-(x-4)=6=6$$

و لذا معادله فوق به تمام قیمت‌های $-2 \le x \prec 4$ برقرار است. و معادله دارای بی‌نهایت جواب می‌باشد.

کسور قسمی

کسرهای کوچک یک کسر واقعی که به شکل حاصل جمع نوشته باشد، طوری که اگر آن‌ها باهم جمع گردد کسر داده شده واقعی به‌دست آید، کسور قسمی نامیده می‌شود.

برای تجزیه یک کسر واقعی حالات ذیل را در نظر می‌گیریم.

حالت اول: هرگاه $\dfrac{p_m(x)}{p_n(x)}$ پولینوم مخرج $p_n(x)$ از عوامل ضربی که تکرار نشده، تشکیل گردیده باشد. بشکل ذیل تجزیه شده می‌تواند.

$$\frac{p_m(x)}{p_n(x)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}+\frac{C}{x-x_3}+\cdots+\frac{N}{x-x_n}$$

طوری که اعداد $(A,B,C,\cdots,N)$ حقیقی اند.

مثال‌ها: کسرهای ذیل را به کسور قسمی آن تجزیه نمائید.

1) $$\frac{2x+3}{x^2+5x+6}$$

$$=\frac{2x+3}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}=\frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3}{(x+2)(x+3)}=\frac{A(x+3)+B(x+2)}{(x+2)(x+3)}$$

دیده می‌شود که مخرج‌ها مساوی اند، بناً صورت‌ها نیز مساوی اند.

با استفاده از خواص مطابقت‌ها و معادلات می‌توانیم بنویسیم که:

$$A(x+3)+B(x+2)\cong 2x+3$$

$$if\ \ x=-3 \quad \to \underbrace{A(-3+3)}_{0}+B(-3+2)\cong 2(-3)+3 \ \Rightarrow B=3$$

$$if\ \ x=-2 \ \to A(-2+3)+\underbrace{B(-2+2)}_{0}\cong 2(-2)+3 \quad \Rightarrow A=-1$$

$$\frac{2x+3}{x^2+5x+6}=\frac{-1}{x+2}+\frac{3}{x+3}$$

2) $$\frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{4x^2-x-39}{(x-5)(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$$=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)}{(x-5)(x-1)(x+2)}$$

دیده می‌شود که مخرج‌ها مساوی اند، بناً صورت‌ها نیز مساوی اند.

با استفاده از خواص مطابقت‌ها و معادلات می‌توانیم بنویسیم که:

$$A(x-1)(x+2)+B(x-5)(x+2)+C(x-5)(x-1)\cong 4x^2-x-39$$

$$\boxed{\begin{array}{l} if\ x=1 \\ \underbrace{A(1-1)(1+2)}_{0}+B(1-5)(1+2)+\underbrace{C(1-5)(1-1)}_{0}\cong 4(1)^2-(1)-39 \end{array}}$$

$$-12B=4-40 \Rightarrow B=3$$

$$\boxed{\begin{array}{l} if\ x=5 \\ A(5-1)(5+2)+\underbrace{B(5-5)(5+2)}_{0}+\underbrace{C(5-5)(5-1)}_{0}\cong 4(5)^2-(5)-39 \end{array}}$$

$$28A=100-44\Rightarrow A=2$$

$$if\ \ x=-2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \underbrace{A(-2-1)(-2+2)}_{0}+\underbrace{B(-2-5)(-2+2)}_{0}+C(-2-5)(-2-1)\cong \\ 4(-2)^2-(-2)-39 \end{array}}$$

$$21C=16+2-39 \Rightarrow C=-1$$

$$\Rightarrow \frac{4x^2-x-39}{x^3-4x^2-7x+10}=\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x+2}$$

3) $\dfrac{2x^3+6x^2-6x-1}{x^2+3x-4}$

ابتدا باید کسر فوق را به کسر واقعی تبدیل نموده و بعداً مانند حالت اول اجرا می‌نمائیم.

$$\frac{2x^3+6x^2-6x-1}{x^2+3x-4}=2x+\frac{2x-1}{x^2+3x-4}\Rightarrow \frac{2x-1}{x^2+3x-4}=\frac{2x-1}{(x-1)(x+4)}$$

$$\frac{2x-1}{(x-1)(x+4)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+4)}=\frac{A(x+4)+B(x-1)}{(x-1)(x+4)}$$

دیده می‌شود که مخرج‌ها مساوی اند، بناً صورت‌ها نیز مساوی اند.

با استفاده از خواص مطابقت‌ها و معادلات می‌توانیم بنویسیم که:

$$A\left(x+4\right)+B\left(x-1\right)\cong 2x-1$$

$$if\ \ x=1 \qquad A\left(1+4\right)+\underbrace{B\left(1-1\right)}_{0}\cong 2\left(1\right)-1\Rightarrow A=\frac{1}{5}$$

$$if\ x=-4 \qquad \underbrace{A\left(-4+4\right)}_{0}+B\left(-4-1\right)\cong 2\left(-4\right)-1\ \Rightarrow B=\frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^3+6x^2-6x-1}{x^2+3x-4}=2x+\frac{1}{5\left(x-1\right)}+\frac{9}{5\left(x+4\right)}$$

<u>حالت دوم:</u> هرگاه عوامل ضربی مخرج پولینوم درجه یک که بعضی از آن‌ها تکرار گردیده باشد یعنی اگر عامل $x-x_0$، n دفعه تکرار گردیده باشد می‌توانیم بنویسیم که:

$$\frac{p_m\left(x\right)}{p_n\left(x\right)}=\frac{A}{x-x_0}+\frac{B}{\left(x-x_0\right)^2}+\cdots+\frac{N}{\left(x-x_0\right)^n}$$

مثال‌ها: کسرهای ذیل را به کسور قسمی آن تجزیه نمائید.

1) $$\frac{4x-2}{\left(x-2\right)^2}=\frac{A}{\left(x-2\right)}+\frac{B}{\left(x-2\right)^2}=\frac{A\left(x-2\right)+B}{\left(x-2\right)^2}$$

$$A\left(x-2\right)+B\cong 4x-2\, if\ \ x=2\rightarrow \underbrace{A\left(2-2\right)}_{0}+B\cong 4\left(2\right)-2\Rightarrow B=6$$

$$if\ \ x=3\ \rightarrow A\left(3-2\right)+B\cong 4\left(3\right)-2\Rightarrow A+\underset{B}{6}=10\Rightarrow A=4$$

$$\Rightarrow \frac{4x-2}{\left(x-2\right)^2}=\frac{4}{\left(x-2\right)}+\frac{6}{\left(x-2\right)^2}$$

2) $$\frac{2x^2+8x+12}{x^3-3x-2}=\frac{2x^2+8x+12}{\left(x-2\right)\left(x+1\right)^2}=\frac{A}{\left(x-2\right)}+\frac{B}{\left(x+1\right)}+\frac{C}{\left(x+1\right)^2}$$

$$= \frac{A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2)}{(x-2)(x+1)^2}$$

دیده می‌شود که مخرج‌ها مساوی اند، بناً صورت‌ها نیز مساوی اند.

با استفاده از خواص مطابقت‌ها و معادلات می‌توانیم بنویسیم که:

$$A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2) \cong 2x^2 + 8x + 12$$

$$if\ x = 2 \rightarrow A(2+1)^2 + \underbrace{B(2-2)(2+1)}_{0} + \underbrace{C(2-2)}_{0} \cong 2(2)^2 + 8(2) + 12$$

$$\Rightarrow 9A = 36 \Rightarrow A = 4$$

$$\boxed{\begin{array}{l} if\ x = -1 \rightarrow \underbrace{A(-1+1)^2}_{0} + \underbrace{B(-1-2)(-1+1)}_{0} + C(-1-2) \cong \\ 2(-1)^2 + 8(-1) + 12 \end{array}}$$

$$\Rightarrow -3C = 2 - 8 + 12 \Rightarrow -3C = 6 \Rightarrow C = -2$$

$$if\ x = 3,\ \underset{A}{4}(3+1)^2 + B(3-2)(3+1) + \underset{C}{-2}(3-2) \cong 2(3)^2 + 8(3) + 12$$

$$\Rightarrow 64 + 4B - 2 = 18 + 24 + 12 \Rightarrow 4B = 54 - 62 \Rightarrow B = -2$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 + 8x + 12}{x^3 - 3x - 2} = \frac{4}{(x-2)} - \frac{2}{(x+1)} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

حالت سوم: هرگاه عوامل ضربی پولینوم درجه دو، که قابل تجزیه نبوده و تکرار هم نگردیده باشد، پس یک جز پولینوم واقعی $\frac{p_m(x)}{p_n(x)}$ است که شکل کسر $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ را دارد.

مثال‌ها: کسرهای ذیل را به کسور قسمی آن تجزیه نمائید.

$$1)\qquad \frac{6x^2 + x + 27}{x^3 + 5x + 6} = \frac{6x^2 + x + 27}{(x^2 - x + 6)(x+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2 - x + 6)} + \frac{C}{x+1}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x+1)+C(x^2-x+6)}{(x^2-x+6)(x+1)}$$

دیده می‌شود که مخرج‌ها مساوی اند، بناً صورت‌ها نیز مساوی اند.

با استفاده از خواص مطابقت‌ها و معادلات می‌توانیم بنویسیم که:

$$(Ax+B)(x+1)+C(x^2-x+6) \cong 6x^2+x+27$$

$$if\ \ x=-1$$

$$\underbrace{(A(-1)+B)(-1+1)}_{0}+C\left((-1)^2-(-1)+6\right) \cong 6(-1)^2+(-1)+27$$

$$\Rightarrow 8C=32 \Rightarrow C=4$$

$$if\ \ x=0 \rightarrow (A(0)+B)(0+1)+C(0^2-0+6) \cong 6(0)^2+0+27$$

$$\Rightarrow B+6\underbrace{(4)}_{C}=27\ \Rightarrow B=27-24 \Rightarrow\ B=3$$

$$if\ \ x=1 \rightarrow (A(1)+B)(1+1)+C(1^2-1+6) \cong 6\cdot 1^2+1+27$$

$$\Rightarrow \left(A+\underbrace{3}_{B}\right)2+6\cdot\underbrace{4}_{C}=34 \Rightarrow 2A+6+24=34 \Rightarrow 2A=34-30 \Rightarrow\ A=2$$

$$\Rightarrow \frac{6x^2+x+27}{x^3+5x+6}=\frac{2x+3}{(x^2-x+6)}+\frac{4}{x+1}$$

$$2)\qquad \frac{3x^2+8x-1}{x^3+2x^2-2x-1}=\frac{3x^2+8x-1}{(x^2+3x+1)(x-1)}=\frac{Ax+B}{(x^2+3x+1)}+\frac{C}{(x-1)}$$

$$= \frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+3x+1)}{(x^2+3x+1)(x-1)}$$

دیده می‌شود که مخرج‌ها مساوی اند، بناً صورت‌ها نیز مساوی اند.

با استفاده از خواص مطابقت‌ها و معادلات می‌توانیم بنویسیم که:

$$(Ax+B)(x-1)+C(x^2+3x+1)\cong 3x^2+8x-1$$

$$if\ x=1\to \underbrace{(A(1)+B)(1-1)}_{0}+C(1^2+3(1)+1)\cong 3(1)^2+8(1)-1$$

$$\Rightarrow 5C=10\Rightarrow C=2$$

$$if\ x=0\to (A(0)+B)(0-1)+C(0^2+3(0)+1)\cong 3(0)^2+8(0)-1$$

$$\Rightarrow -B+\underset{C}{2}=-1\Rightarrow B=3$$

$$if\ x=2\to (A2+B)(2-1)+C(2^2+3(2)+1)\cong 3\cdot 2^2+8(2)-1$$

$$2A+\underset{B}{3}+\underset{C}{2}\cdot 11=12+16-1\Rightarrow 2A=27-25\Rightarrow A=1$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2+8x-1}{x^3+2x^2-2x-1}=\frac{x+3}{(x^2+3x+1)}+\frac{2}{(x-1)}$$

فصل دوم
متریکس

بارها گفته‌ام، وقتی بتوانید آنچه را که در باره‌اش صحبت می‌کنید، اندازه بگیرید و آن‌را به عدد بیان نمایید، در باره آن چیزی می‌دانید. (کلوین)

آشنایی: این فصل شامل متریکس و معادلات در متریکس‌ها می‌باشد، و هدف از متریکس ترتیب از اعداد در یک جدول مستطیلی می‌باشد که توسط متریکس می‌توان بعضی از محاسبات ریاضی را انجام داد، و به‌صورت مختصر آن‌را بررسی می‌کنیم.

متریکس

تعریفی که اولین بار یک ریاضیدان اسکاتلندی به نام « آرتو کیلی » ارائه کرده است؛ عبارت از: متریکس ترتیب از اعداد حقیقی است که روی سطرها و ستون‌های منظم قرار گرفته و توسط قوس احاطه شده باشند.

متریکس را عمدتاً توسط حروف بزرگ لاتین $A,B,C\cdots$ و عناصر آن را توسط حروف کوچک لاتین $a,b,c\ldots$ نشان می‌دهند. مانند:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ردیف عناصر متریکس که بشکل افقی ترتیب شده باشد بنام سطر متریکس، و ردیف عناصر متریکس که بشکل عمودی ترتیب شده باشند بنام ستون‌های متریکس یاد می‌کنند.

برای این که در نگارش متریکس‌ها، فشرده نویسی کرده باشیم، متریکس بالا را برای قیمت‌های $i=1,2,\dots m$ و $j=1,2,\dots n$ با $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ یا به‌صورت ساده $\left[a_{ij}\right]$ نشان می‌دهیم. در اینجا i سطر و j ستون را نشان می‌دهد.

مرتبه یا درجه متریکس

اگر تعداد سطرهای متریکس A مساوی به m و تعداد ستون‌های آن مساوی به n باشد می‌گوییم A متریکس مرتبه $(m\times n)$ و خوانده می‌شود m در n است، و می‌نویسیم: $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ تعداد سطر و ستون هر متریکس را مرتبه یا اندازه آن گویند. مانند:

$A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 1\\ 7 & 5\end{pmatrix}$ طوری که متریکس A دارای ۳ سطر و ۲ ستون می‌باشد که مرتبه آن بشکل (3×2) ارائه می‌گردد یعنی: عدد اولی سطر و عدد دومی ستون را نشان می‌دهد.

به صورت عموم اگر a عنصر در سطر i ام و ستون j ام یک متریکس باشد آن‌را بشکل a_{ij} نشان می‌دهیم که i و j اعداد طبیعی بوده و به ترتیب مشخص کننده شماره سطر و ستون می‌باشند، یعنی $i=1,2,\dots,m$ و $j=1,2,\dots,n$ که شکل عمومی آن عبارت از:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

توجه: دو متریکس زمانی هم مرتبه گفته می‌شود که دارای سطرها و ستون‌های مساوی باشند،

تساوی دو متریکس

دو متریکس $A=\left[a_{ij}\right]$ و $B=\left[b_{ij}\right]$ مساوی یکدیگر اند و می‌نویسیم $A=B$ اگر هم مرتبه بوده و عناصر آن یک به یک مساوی باشند، یعنی برای همه‌ای قیمت‌های ممکنه i و j داشته باشیم $a_{ij}=b_{ij}$.

مثال: هرگاه متریکس‌های ذیل مساوی باشد، قیمت‌های a و b را دریابید.

$$A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad if\ A=B, \Rightarrow a=3,\ \ b=5$$

انواع متریکس

متریکس سطری: متریکس که تنها دارای یک سطر باشد، آن‌را متریکس سطری گویند، مثلاً: $A=\begin{pmatrix} 4 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}_{1\times 4}$

متریکس ستونی: متریکس که تنها دارای یک ستون باشد، آن‌را متریکس ستونی گویند. مثلاً:

$$A=\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

متریکس صفری: متریکس که تمام عناصر آن صفر باشد، آن‌را متریکس صفری نامیده و به سمبول $0_{m\times n}$ نمایش می‌دهند.

$$0_{2\times 2}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 4},\ 0_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

متریکس مربعی: هرگاه تعداد سطرها و ستون‌های یک متریکس برابر باشد $m=n$ متریکس را مربعی گویند، مانند:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 7 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{3\times 3} \qquad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

قطر فرعی قطر اصلی

متریکس قطری: متریکس که تمام عناصر آن به غیر از قطر اصلی مساوی به صفر باشند، بنام متریکس قطری یاد می‌شود. مانند:

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

متریکس اسکالر: هر متریکس قطری که عناصر قطر اصلی آن مساوی باشند، بنام متریکس اسکالر یاد می‌کنند.مانند:

$$B=\begin{pmatrix}k&0&0\\0&k&0\\0&0&k\end{pmatrix},A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{pmatrix}\qquad k=4$$

متریکس واحد: هر متریکس قطری که عناصر قطر اصلی آن عدد (1) باشند، بنام متریکس واحد یاد می‌کنند و به I نشان می‌دهیم. مانند:

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},...$$

متریکس مثلثی: اگر در یک متریکس مربعی که تمام عناصر بالایی قطر اصلی و یا پایانی قطر اصلی صفر باشند در این صورت متریکس را بنام متریکس مثلثی یاد می‌کنند.

هرگاه تمام عناصر بالای قطر اصلی صفر باشند، بنام متریکس مثلثی بالایی، و یا تمام عناصر تحت قطر اصلی صفر باشند، بنام متریکس مثلثی پائین یاد می‌کنند. مانند:

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\9&3&0\\4&2&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&3&5\\0&2&7\\0&0&3\end{pmatrix}$$

متریکس متناظر: متریکس مربعی که عناصر بالای قطر اصلی در پایین قطر اصلی و در مکان‌های متناظر تکرار شده باشند، یک متریکس متناظر نامیده میشود. یعنی متریکس مربعی $A=\left[a_{ij}\right]$ متناظر است اگر برای تمام قیمت‌های i و j رابطه $a_{ij}=a_{ji}$ برقرار باشد. و ترانسپوز آن با خودش برابر است. $A=A^t$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} a_{ij}=a_{ji} \\ a_{2\times 3}=a_{3\times 2}=5 \end{matrix}$$

هر متریکس مربعی داده شده را می‌توان به مجموع دو متریکس، یکی متناظر و دیگری شبه متناظر تجزیه نمود.

$$A=\left(a_{ij}\right)_n=\left[\frac{1}{2}\left(a_{ij}+a_{ji}\right)+\frac{1}{2}\left(a_{ij}-a_{ji}\right)\right]_n$$

$$=\left[\frac{1}{2}\left(a_{ij}+a_{ji}\right)\right]_n+\left[\frac{1}{2}\left(a_{ij}-a_{ji}\right)\right]=\overline{A}+A$$

در اینجا $\overline{A}$ متناظر و A شبه متناظر است.

مثال: مترکس مربعی $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ را به مجموع دو متریکس یکی متناظر و دیگری شبه متناظر تجزیه کنید.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

متضاد یک متریکس: متضاد متریکس A را به $(-A)$ نشان داده و متریکس است که هر عنصر آن متضاد عناصر متناظرش در A می‌باشد. متضاد متریکس $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ عبارت از: $-A=\left(-a_{ij}\right)_{m\times n}$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -2 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow -B=\begin{pmatrix}-1 & -4\\ 2 & -3\end{pmatrix}$$

جمع ماتریکس‌ها: هرگاه $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ و $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ دو ماتریکس باشد پس $A+B=C$ عبارت از یک ماتریکس است که عنصر C_{ij} آن حاصل جمع a_{ij} و b_{ij} می‌باشد یعنی جمع دو ماتریکس تنها در صورت ممکن است که هر دو ماتریکس دارای مرتبه مساوی باشند چون C_{ij} حاصل جمع دو عدد حقیقی است. $A_{m\times n}+B_{m\times n}=C_{m\times n}\Rightarrow\left(a_{ij}\right)_{m\times n}+\left(b_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}+b_{ij}\right)_{m\times n}$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & 1 & 4\end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 6 & 2 & 5\end{pmatrix}_{2\times 3} \quad \Rightarrow A+B=$$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 4 & 1\\ 6 & 2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & 2+4 & 3+1\\ -3+6 & 1+2 & 4+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 4\\ 3 & 3 & 9\end{pmatrix}=C_{2\times 3}$$

تفریق ماتریکس‌ها : تفریق ماتریکس‌ها نیز مانند عملیه جمع اجرا می‌گردد.

$$A_{m\times n}-B_{m\times n}=C_{m\times n}\Rightarrow\left(a_{ij}\right)_{m\times n}-\left(b_{ij}\right)_{m\times n}=\left(a_{ij}-b_{ij}\right)_{m\times n}$$

$$ex: \quad A=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 5\end{pmatrix}_{3\times 1} \quad B=\begin{pmatrix}4\\ 2\\ 1\end{pmatrix}_{3\times 1} \quad \Rightarrow AB=\begin{pmatrix}2-4\\ 3-2\\ 5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 4\end{pmatrix}=C_{3\times 1}$$

خواص جمع و تفریق ماتریکس‌ها

- ❖ جمع ماتریکس‌ها دارای خاصیت تبدیلی است، اما تفریق ماتریکس‌ها دارای خاصیت تبدیلی نیست. $A+B=B+A \ , \ A-B\neq B-A$
- ❖ جمع و تفریق ماتریکس‌ها دارای خاصیت اتحادی است.

$$(A\pm B)\pm C=A\pm(B\pm C)$$

- ❖ عنصر عینیت در عملیه جمع و تفریق ماتریکس صفری می‌باشد.

$$A+0=0+A=A$$

❖ متقابل متریکس $A+(-A)=-A+A=0$

ضرب یک متریکس در اسکالر

اگر $A=(a_{ij})$ یک متریکس و $K\in\mathbb{R}$ یک عدد باشد، پس حاصل ضرب KA عبارت از متریکس C است، طوری که عنصر c_{ij} آن حاصل ضرب K در a_{ij} است. $c_{ij}=K(a_{ij})$.

مثال: اگر $A=\begin{pmatrix}1&3&2\\3&7&5\end{pmatrix}$ و $K=3$، حاصل ضرب KA را دریابید.

$$kA=3\begin{pmatrix}1&3&2\\3&7&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot1&3\cdot3&3\cdot2\\3\cdot3&3\cdot7&3\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&9&6\\9&21&15\end{pmatrix}$$

خواص ضرب متریکس در اسکالر

اگر A و B دو متریکس هم مرتبه α و β دو عدد حقیقی باشند، آنگاه!

$a)\quad \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

$b)\quad (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

$c)\quad \alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A=\beta(\alpha A)$

ضرب دو متریکس

دو متریکس $A=(a_{ij})_{m\times n}$ و $B=(b_{ij})_{n\times p}$ را در نظر بگیریم، برای این که دو متریکس قابل ضرب شدن در یکدیگر باشند باید تعداد ستون‌های متریکس اول با تعداد سطرهای متریکس دوم برابر باشد. متریکس حاصل ضرب، متریکسی است، مانند: $C=(c_{ij})m\times p$ که تعداد سطرهای آن برابر تعداد سطرهای متریکس اول و تعداد ستون‌ها برابر تعداد ستون‌های متریکس دوم است.

$A_{m\times n}\cdot B_{n\times p}=C_{m\times p}$

برای ضرب دو متریکس بدین صورت عمل می‌کنیم: مجموع حاصل ضرب عناصر سطر اول متریکس اول در ستون‌های متریکس دوم، عناصر سطر اول

متریکس حاصل ضرب را تعیین می‌کند. مجموع حاصل ضرب عناصر سطر دوم متریکس اول در ستون‌های متریکس دوم، عناصر سطر دوم متریکس حاصل ضرب را تشکیل می‌دهد. با تکرار این عمل برای تمامی سطرها و ستون دو متریکس، متریکس حاصل ضرب محاسبه می‌شود. این مطلب را می‌توان به صورت زیر نشان داد. $\left(a_{ij}\right)_{m\times n}\cdot\left(b_{ij}\right)_{n\times p}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}b_{ij}=\left(C_{ij}\right)_{m\times p}$.

مثال‌ها: متریکس‌های ذیل را ضرب نمائید.

1) $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\0&2&5\end{pmatrix}_{2\times3}\quad B=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}_{3\times1}\Rightarrow A\times B=\begin{pmatrix}2&3&1\\0&2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}2\times3+3\times2+1\times1\\0\times3+2\times2+5\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\9\end{pmatrix}_{2\times1}$$

2) $A=\begin{pmatrix}3&2&1\\-1&3&2\end{pmatrix}_{2\times3}\quad B=\begin{pmatrix}1&5\\3&0\\4&2\end{pmatrix}_{3\times2}$

$$A\times B=\begin{pmatrix}3&2&1\\-1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&5\\3&0\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}-1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}&\begin{pmatrix}-1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\0\\2\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\times1+2\times3+1\times4&3\times5+2\times0+1\times2\\-1\times1+3\times3+2\times4&-1\times5+3\times0+2\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&17\\16&-1\end{pmatrix}$$

خواص ضرب متریکس

➢ خاصیت اتحادی: $(AB)C = A(BC)$

➢ خاصیت توزیعی

$$
\begin{array}{ll}
a) & A(B+C) = AB + AC \\
b) & (A+B)C = AC + BC \\
c) & K(AB) = (KA)B = A(KB) \\
d) & IA = AI = A
\end{array}
$$

متریکس ترانسپوز

ترانسپوز متریکس A که با A^t نشان داده می‌شود متریکس است که اینگونه به‌دست می‌آید. در متریکس A، سطرها را به ستون، یا ستون‌ها را به سطر تبدیل می‌کنیم. واضح است که اگر مرتبه متریکس A، $m\times n$ باشد، در آن‌صورت مرتبه متریکس A^t برابر است با $n\times m$ یعنی اگر:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} \quad \Rightarrow A^t = \left(a_{ji}\right)_{n\times m}$$

مثال: ترانسپوز متریکس $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ را به‌دست آورید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

خواص ترانسپوز متریکس

✓ $\left(A^t\right)^t = A$

✓ $(A\pm B)^t = A^t \pm B^t \quad or \quad (A\pm B\pm C\ldots)^t = A^t \pm B^t \pm C^t \ldots$

✓ $(AB)^t = B^t \cdot A^t$

✓ $(-A)^t = -A^t \quad \& \quad (\alpha A)^t = \alpha A^t \quad \alpha\in\mathbb{R}$

دیترمنانت

اگر یک متریکس A به عدد حقیقی نسبت داده شود بنام دیترمنانت متریکس A یاد می‌شود.

دیترمنانت متریکس مانند $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ را به یکی از شکل های $|A|$ یا $\det A$ و یا $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ نشان می‌دهند.

محاسبه دیترمنانت‌های مرتبه ۲

دیترمنانت مرتبه ۲ به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

مثال: دیترمنانت $\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ را محاسبه نمائید.

$$\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=6\times 4-2\times 3=18$$

دیترمنانت مرتبه ۳

دیترمنانت مرتبه ۳ را به روش عمومی و روش ساروس محاسبه می‌نماییم.

روش عمومی: در این روش به ترتیب سطرها یا ستون‌ها، که یکی از آن‌ها را در نظر می‌گیریم، در اینجا نظر به سطر اول بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\left(-1\right)^{i+j}A_1+a_{12}\left(-1\right)^{i+j}A_2+a_{13}\left(-1\right)^{i+j}A_3$$

۱. عنصر a_{11} را که در سطر و ستون اول قرار دارد، در دترمنانت مرتبه دوم به‌دست آمده ضرب نموده، سطر و ستون عنصر مربوط را حذف می‌کنیم. یعنی:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^2 a_{11} (a_{22} \times a_{33} - a_{23} \times a_{32})$$

۲. عنصر a_{12} را که در سطر اول و ستون دوم قرار دارد، در دترمنانت مرتبه دوم به‌دست آمده ضرب نموده، سطر و ستون عنصر مربوط را حذف می‌کنیم. یعنی:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^3 a_{12} (a_{21} \times a_{33} - a_{23} \times a_{31})$$

۳. عنصر a_{13} را که در سطر اول و ستون سوم قرار دارد، در دترمنانت مرتبه دوم به‌دست آمده ضرب نموده، سطر و ستون عنصر مربوط را حذف می‌کنیم. یعنی:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Rightarrow (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = (-1)^4 a_{13} (a_{21} \times a_{32} - a_{22} \times a_{31})$$

حالا قیمت‌های به‌دست آمده A_1, A_2, A_3 را جمع می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11} (a_{22} \times a_{33} - a_{23} \times a_{32}) - a_{12} (a_{21} \times a_{33} - a_{23} \times a_{31}) + a_{13} (a_{21} \times a_{32} - a_{22} \times a_{31})$$

مثال: دیترمنانت $A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ را محاسبه نمائید.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{1(-1)^{1+1}(0\times -1 - 1\times 2)}_{A_1} + \underbrace{2(-1)^{1+2}(2\times -1 - 1\times 3)}_{A_2} + \underbrace{3(-1)^{1+3}(2\times 2 - 0\times 3)}_{A_3}$$

$$= -2 + 10 + 12 = 20$$

روش ساروس: روش ساروس صرف برای محاسبه دیترمنانت مرتبه ۳ بوده که در این روش سطر اول و دوم را به ترتیب به پایین سطر سوم، یا ستون اول و دوم را به سمت راست ستون سوم می‌نویسیم.

$$D_3 = \begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

قطر فرعی

قطر اصلی

بعداً عناصر قطر اصلی را باهم ضرب و جمع می‌کنیم، به همین ترتیب عناصر قطر فرعی را باهم ضرب و جمع می‌کنیم. سپس حاصل جمع قطر اصلی را از حاصل جمع قطر فرعی تفریق می‌کنیم، به این صورت دیترمنانت مربوطه به‌دست می‌آید.

$$D_3 = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

مثال: دیترمنانت $D = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ را محاسبه نمائید.

$$D=\begin{vmatrix}2&6&-3\\5&1&2\\4&-1&7\end{vmatrix}=\begin{array}{ccc:cc}2&6&-3&2&6\\5&1&2&5&1\\4&-1&7&4&-1\end{array}$$

$$=\left[(2\times1\times7)+(6\times2\times4)+(-3\times5\times-1)\right]$$
$$-\left[(4\times1\times-3)+(-1\times2\times2)+(7\times5\times6)\right]$$
$$=[14+48+15]-[-12-4+210]$$
$$=[77]-[194]=-117$$

خواص دیترمنانت

هرگاه A یک ماتریکس $n\times m$ باشد، برای دیترمنانت $|A|$ خواص زیر صحت دارد.

۱. هرگاه تمام عناصر یک سطر یا ستون ماتریکس $|A|_{n\times m}$ مساوی صفر باشد، آنگاه دیترمنانت A مساوی به صفر است.

$$|A|=\begin{vmatrix}0&0&0\\a&b&c\\d&e&f\end{vmatrix}=0 \qquad |A|=\begin{vmatrix}0&a&b\\0&c&d\\0&e&f\end{vmatrix}$$

۲. هرگاه دو سطر یا دو ستون ماتریکس $|A|_{m\times n}$ یکسان یا متناسب باشند دیترمنانت A مساوی به صفر است.

$$|A|=\begin{vmatrix}a&b&c\\a&b&c\\d&e&f\end{vmatrix}=0$$

۳. اگر عناصر یک سطر یا ستون $|A|_{m\times n}$ مضربی از عناصر سطر یا ستون دیگر باشند، در آن‌صورت $|A|=0$ است.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ d & e & f \end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}=\alpha(0)=0$$

۴. دیترمنانت A و دیترمنانت A^t باهم مساوی اند.

$$|A|=|A^t|$$

۵. هرگاه در یک دیترمنانت جای دو سطر یا دو ستون متوالی و غیر متوالی را با یکدیگر عوض کنیم علامت دیترمنانت تغییر می‌کند.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ g & h & i \\ d & e & f \end{vmatrix}, \qquad |B|=\begin{vmatrix} b & a & c \\ h & g & i \\ e & d & f \end{vmatrix} \qquad A=-B$$

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}=-117 \qquad E=\begin{vmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix}=117$$

۶. اگر عددی ثابت مانند k در یک دیترمنانت ضرب شود، این عدد تنها در یک سطر یا یک ستون دلخواه دیترمنانت ضرب خواهد شد.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ d & e & f \end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

متریکس الحاقی

برای دریافت متریکس الحاقی جاهای سطر و ستون قطر اصلی را تغییر داده و عناصر قطر فرعی را با تغییر علامه می‌نویسیم، متریکس جدید که به‌دست می‌آید عبارت از متریکس الحاقی یا Adj می‌نامند. بطور مثال:

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow AdjA=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$ex: B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow AdjB=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

متریکس معکوس

متریکس مربعی $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ را در نظر گرفته، اگر متریکس مربعی B وجود داشته باشد، طوری که: $AB=BA=I_n$.

در این صورت B را معکوس ضربی A گویند و آن‌را به شکل A^{-1} نشان می‌دهند، بنابرین خواهیم داشت. $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$.

توجه: متریکس مربعی A را $(singular)$ گویند هرگاه $|A|=0$ باشد، و غیر منفرد $(non-singular)$ یا منظم گویند، هرگاه $|A|\neq 0$ باشد. بناً برای معکوس پذیر بودن یک متریکس باید دو شرط برقرار باشد.

- متریکس باید مربعی باشد.
- دترمنانت آن متریکس خلاف صفر باشد.

در هر متریکس $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ که دیترمنانت آن خلاف صفر باشد. بناً متریکس معکوس پذیر از روی فورمول زیر معکوس متریکس را به‌دست می‌آوریم.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}Adj\ A$$

مثال: معکوس ضربی $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ را دریابید.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}AdjA \qquad B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=6-4=2$$

$$\Rightarrow AdjB = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

متریکس و معادلات

حل سیستم معادلات خطی با استفاده از معکوس متریکس:

سیستم $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ را در نظر گرفته، ابتدا سیستم معادلات را به شکل متریکس‌ها می‌نویسیم، متریکس ضرایب، مجهول‌ها و متریکس حدود ثابت را به‌صورت معادله چنین می‌نویسیم:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \;,\; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

A متریکس ضرایب، B متریکس ثابت‌ها و X متریکس مجهول‌ها اند. که حل آن قرار ذیل می‌باشد.

$$AX = B \qquad \Rightarrow \underbrace{AA^{-1}}_{I} X = A^{-1}B \qquad \Rightarrow X = A^{-1}B$$

مثال اول: سیستم معادلات دو مجهوله $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$ را با استفاده از معکوس متریکس حل نمائید.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times5 - 2\times7 \\ -1\times5 + 1\times7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-14 \\ -5+7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 1 \,,\; y = 2$$

مثال دوم: سیستم معادلات دو مجهوله $\begin{cases}5x-2y=2\\3x-y=3\end{cases}$ را با استفاده از معکوس متریکس حل نمائید.

$$A=\begin{pmatrix}5 & -2\\3 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\qquad X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\ \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\-3 & 5\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-1 & 2\\-3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\times2+2\times3\\-3\times2+5\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+6\\-6+15\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}\Rightarrow x=4\ ,\ y=9$$

حل سیستم معادلات به طریقه کرامر (دترمنانت)

سیستم $\begin{matrix}a_1x+b_1y=d_1\\a_2x+b_2y=d_2\end{matrix}$ را در نظر گرفته با استفاده از روش کرامر ابتدا دیترمنانت ضرایب را به‌دست آورده بعداً دیترمنانت را نظر به مجهول‌ها به‌دست می‌آوریم.

$$|A|=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\qquad x=\frac{|A_x|}{|A|}\ ,\ y=\frac{|A_y|}{|A|}\qquad |A|\neq0$$

$$|A_x|=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\c_2 & b_2\end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1\ ,\quad |A_y|=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\a_2 & c_2\end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1$$

مثال اول: حل سیستم معادلات $\begin{cases}x-3y=3\\2x+y=2\end{cases}$ را به روش کرامر به‌دست آورید.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -3\\2 & 1\end{vmatrix}=7\qquad |A_x|=\begin{vmatrix}3 & -3\\2 & 1\end{vmatrix}=9\qquad |A_y|=\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 2\end{vmatrix}=-4$$

$$\Rightarrow x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{9}{7}\ ,y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{-4}{7}$$

مثال دوم: حل سیستم معادلات $\begin{cases} x+y-3z=-6 \\ 2x-y+z=6 \\ 3x+2y+2y=14 \end{cases}$ را به روش کرامر به‌دست آورید.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-26,\quad |A_x|=\begin{vmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 6 & -1 & 1 \\ 14 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-52$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 14 & 2 \end{vmatrix}=-26\ ,\ |A_z|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 2 & 14 \end{vmatrix}=-78$$

$$x=\frac{|A_x|}{|A|}=\frac{-52}{-26}=2 \qquad y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{-26}{-26}=1 \qquad z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{-78}{-26}=3$$

حل سیستم معادلات خطی به طریقه حذفی *Gouse*

برای حل سیستم معادلات به طریقه حذفی، متریکس ضرایب و مقادیر ثابت را نوشته به ترتیب مراحل ذیل را انجام داده، سپس قیمت مجهول دیگری را به دست آورد. سطرهای متریکس را به نشان $R_1, R_2, R_3 ...$ می‌دهیم.

أ. ضرب کردن یک متریکس در یک اسکالر غیر صفر.

ب. افزودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر.

ج. تعویض نمودن دو سطر با یک سطر.

مثال اول: حل سیستم معادلات $\begin{cases} x+2y=5 \\ x+3y=7 \end{cases}$ را به روش حذفی به‌دست آورید.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_1\to R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow y=2$$

$$x+2y=5 \ \Rightarrow x+2(2)=5 \ \Rightarrow x=1$$

مثال دوم: حل سیستم معادلات $\begin{cases} x+y-3z=-6 \\ 2x-y+z=6 \\ 3x+2y+2z=14 \end{cases}$ را به روش حذفی به‌دست آورید.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 14 \end{array}\right) \underbrace{\xrightarrow{-2R_1+R_2\to R_2}}_{step1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 7 & 18 \\ 3 & 2 & 2 & 14 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\xrightarrow{-3R_1+R_3\to R_3}}_{step2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & 7 & 18 \\ 0 & -1 & 11 & 32 \end{array}\right) \underbrace{\xrightarrow{R_2\to R_3}}_{step3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 11 & 32 \\ 0 & -3 & 7 & 18 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\xrightarrow{-3R_2+R_3\to R_3}}_{step4} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 11 & 32 \\ 0 & 0 & -26 & -78 \end{array}\right) \Rightarrow -26z=-78 \quad \Rightarrow z=3$$

$$-y+11\underbrace{(3)}_{z}=32 \Rightarrow y=1 \qquad x+\underbrace{(1)}_{y}+-3\underbrace{(3)}_{z}=-6 \Rightarrow x=2$$

فصل سوم نامساوات

تجربه، مادرِ همه حقایق است. (داوینچی)

آشنایی: این فصل شامل نامساوات و سیستم نامساوات می‌باشد، و هدف از حل نامساوات و یا سیستم نامساوات دریافت فاصله‌های معیین (ست حل آن) است که نامساوات را صدق نماید.

نامساوات

هرگاه دو مقدار یا دو عبارت الجبری را باهم مقایسه نمائیم یعنی:

$$a=b \quad , \qquad a>b \qquad or \qquad a<b$$

خواهد شد، که در روابط فوق حالت اول را بنام مساوات و دو حالت دیگر را بنام نامساوات یاد می‌کنند. قبل از این که به حل و بررسی نامساوات بپردازیم، لازم است که تعیین اشاره عبارات الجبری را مورد بررسی قرار دهیم.

تعیین اشاره دو جمله‌ای درجه اول (بینوم‌ها)

هر عبارت الجبری که شکل $ax+b$ را داشته باشد بنام بینوم یاد می‌گردد. طوری که a,b اعداد ثابت و x متحول می‌باشد، هدف از تعیین اشاره بینوم‌ها این است که بدانیم تا با وضع نمودن کدام قیمت متحول عبارت $ax+b$ دارای اشاره مثبت، منفی و یا صفر (بی اشاره) می‌باشد.

برای اجرای این عملیه عبارت $ax+b$ را مساوی به صفر قرار داده که جذر آن $x=-\frac{b}{a}$ است به‌دست می‌آید، در این حالت عبارت مورد نظر به تمام

قیمت‌های کوچک‌تر از $-\frac{b}{a}$ خلاف اشاره a و به تمام قیمت‌های بزرگ‌تر از $-\frac{b}{a}$ هم اشاره با a خواهد گردید. مانند:

$$ax+b=0 \qquad \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		مخالف اشاره a	0	موافق اشاره a	

مثال‌ها: بینوم‌های ذیل را تعیین اشاره نمائید.

1) $2x+4 \Rightarrow 2x+4=0 \Rightarrow 2x=-4 \Rightarrow x=-2$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$2x+4$		$-$	0	$+$	

عبارت فوق به قیمت -2 بی اشاره بوده، و به قیمت بزرگ‌تر از -2 اشاره مثبت و برای قیمت کوچک‌تر از -2 اشاره منفی را اختیار می‌کند.

2) $3x-12 \Rightarrow 3x-12=0 \Rightarrow 3x=12 \Rightarrow x=4$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$3x-12$		$-$	0	$+$	

3) $x-5 \Rightarrow x-5=0 \Rightarrow x=5$

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$x-5$		$-$	0	$+$	

4) $-2x-8 \Rightarrow -2x-8=0 \quad \Rightarrow x=-4$

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$-2x-8$		$+$	0	$-$	

تعیین اشاره سه جمله‌ای درجه دوم (ترینوم)

هر عبارت الجبری که شکل ax^2+bx+c را داشته باشد بنام ترینوم یاد می‌گردد، طوری که a,b,c اعداد ثابت و x متحول می‌باشد.

هدف از تعیین اشاره ترینوم‌ها این است که بدانیم که با وضع نمودن کدام قیمت‌های عبارت مذکور دارای اشاده مثبت، منفی و یا صفر (بی اشاره) می‌باشد.

برای اجرای این عملیه ترینوم مورد نظر را مساوی به صفر قرار میدهیم، در این حالت با استفاده از قیمت Δ سه حالت ذیل را بررسی می‌کنیم.

A. هرگاه $\Delta<0$ باشد، اشاره ترینوم مورد نظر به تمام قیمت‌های اعداد حقیقی هم اشاره با a می‌باشد.

B. در صورتِ که $\Delta=0$ باشد، ترینوم مورد نظر به قیمت $-\dfrac{b}{2a}$ صفر (بی اشاره) می‌گردد به سایر قیمت‌های اعداد هم اشاره با a می‌باشد.

C. در صورتِ که $\Delta>0$ باشد، ترینوم به جذور خود بی اشاره، و به سایر قیمت‌ها در بین جذور خلاف اشاره a و بیرون جذور هم اشاره با a می‌باشد.

برای وضاحت این موضوع جدول ذیل را در نظر می‌گیریم.

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		موافق اشاره a	0	مخالف اشاره a	0	موافق اشاره a	

مثال‌ها: ترینوم‌های ذیل را تعیین اشاره نمائید.

1) $x^2+2x+3 \qquad \Delta=b^2-4ac=(2)^2-4\times1\times3=4-12=-8$

چون $\Delta<0$ است، ترینوم به تمام قیمت‌ها دارای اشاره موافق $a=1$ می‌باشد.

2) $x^2-4x+4 \qquad \Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\cdot1\cdot4=16-16=0$

چون $\Delta=0$ است، ترینوم برای قیمت $-\frac{b}{2a}=2$ بی اشاره (صفر) و به سایر قیمت‌ها موافق اشاره $a=1$ می‌باشد.

$$a=1, b=-4, c=4 \Rightarrow -\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2\cdot1}=2$$

3) $x^2-3x+2 \qquad \Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=1$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{3+1}{2}=2$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\cdot1}=\frac{3-1}{2}=2$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

تعیین اشاره پولینوم‌های که قابل تجزیه اند

برای تعیین اشاره پولینوم‌های که قابل تجزیه اند به‌صورت زیر عمل می‌نمائیم.

۱. هرگاه پولینوم‌ها به‌صورت درجه ۲ و یا درجه ۳ باشد آن‌را به درجه اول تجزیه می‌نمائیم.

۲. هر یک از عوامل درجه اول را به صورت جداگانه تعیین اشاره می‌نمائیم، و حاصل ضرب اشاره‌های این عوامل، اشاره پولینوم می‌باشد.

مثال‌ها: عبارت‌های الجبری ذیل را تعیین اشاره نمائید.

$$1)\qquad 2x^2+x-6=(2x-3)(x+2)\Rightarrow x_1=\frac{3}{2}\ ,\ x_2=-2$$

x	$-\infty$	-2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$	
$2x-3$	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)(2x-3)$	$+$		$-$		$+$	

ملاحظه می‌شود که پولینوم فوق به قیمت‌های $x<-2$ مثبت و قیمت‌های $-2<x<\frac{3}{2}$ منفی و به قیمت‌های $x>\frac{3}{2}$ مثبت می‌باشد. و به قیمت‌های $x=-2,\frac{3}{2}$ بی اشاره (صفر) می‌باشد.

توجه: تعیین اشاره کسرهای که صورت و مخرج آن‌ها به حاصل ضرب عوامل درجه اول تبدیل می‌شود، مانند مثال فوق عمل می‌نمائیم و حاصل تقسیم دو اشاره درجه اول اشاره پولینوم کسری می‌باشد.

مثال: پولینوم کسری ذیل را تعیین اشاره نمائید.

$$1)\qquad y=\frac{(3-4x)(2x^2-4x)}{x^2-3x-4}=\frac{(3-4x)(2x)(x-2)}{(x-4)(x+1)}$$

$2x=0\Rightarrow x=0 \qquad x-4=0\Rightarrow x=4$

$x-2=0\Rightarrow x=2 \qquad x+1=0\Rightarrow x=-1$

$3-4x=0\Rightarrow x=\frac{3}{4}$

x	$-\infty$		-1		0		$\frac{3}{4}$		2		4		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$3-4x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
y		$-$		$-$		$+$		$-$		$+$		$-$	

توجه: جذرهای مخرج کسر، پولینوم را نامعیین می‌نمایند و جذرهای صورت، کسر را صفر می‌سازد.

خواص نامساوات

۱. به دو طرف نامساوی می‌توان عددی را جمع و یا تفریق نمود.

$$x > y \Rightarrow x+a > y+a \qquad x > y \Rightarrow x-a > y-a$$

۲. به دو طرف نامساوی می‌توان یک عدد مثبت را ضرب و یا تقسیم نمائیم.

$$x > y \Rightarrow ax > ay \quad a > 0 \qquad x > y \Rightarrow \frac{x}{a} > \frac{y}{a} \quad a > 0$$

۳. اگر به دو طرف نامساوی یک عدد منفی را ضرب و یا تقسیم نمائیم، جهت نامساوی تغییر می‌کند.

$$x \succ y \Rightarrow ax \prec ay \;:\; a \prec 0 \qquad x \succ y \Rightarrow \frac{x}{a} \prec \frac{y}{a} \;:\; a \prec 0$$

۴. اگر دو طرف یک نامساوی را معکوس نمائیم، حالات ذیل را در نظر می‌گیریم.

a. هرگاه دو طرف نامساوی هم علامه باشد، بعد از معکوس نمودن دو طرف جهت، جهت نامساوی تغییر می‌کند.

$8 \succ 3 \quad \Rightarrow \frac{1}{8} \prec \frac{1}{3}$ $\qquad$ $-4 \succ -5 \Rightarrow -\frac{1}{4} \succ -\frac{1}{5}$

b. هرگاه دو طرف نامساوی مختلف العلامه باشد، بعد از معکوس نمودن دو طرف جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.

$6 \succ -3 \Rightarrow \frac{1}{6} \succ -\frac{1}{3}$

۵. اگر دو طرف یک نامساوی را به توان عددی مانند m بلند ببریم، ممکن است جهت نامساوی تغییر کند یا تغییر نکند، که برای این منظور حالات ذیل را در نظر می‌گیریم.

A. هرگاه m یک عدد تاق باشد، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.

$3 \succ 2 \Rightarrow 3^3 \succ 2^3 \Rightarrow 27 \succ 8$

$-3 \prec -2 \Rightarrow (-3)^3 \prec (-2)^3 \Rightarrow -27 \succ -8$

B. هرگاه m یک عدد جفت باشد حالات ذیل را بررسی می‌کنیم.

1.B هرگاه هردو طرف نامساوی مثبت باشد جهت نامساوی تغییر نمی‌کند. $3 \succ 2 \Rightarrow 3^2 \succ 2^2 \Rightarrow 9 \succ 4$

2.B هرگاه دو طرف نامساوی منفی باشد جهت نامساوی تغییر می‌کند. $-3 \succ -4 \Rightarrow (-3)^2 \prec (-4)^2 \Rightarrow 9 \prec 16$

3.B هرگاه یک طرف مثبت و یک طرف منفی باشد، جهت نامساوی به طرف عددی که دارای قیمت مطلق بزرگ‌تر است تغییر می‌کند.

$-2 \prec 3 \Rightarrow (-2)^2 \prec 3^2 \Rightarrow 4 \prec 9$

4.B هرگاه دو طرف نامساوی دارای قیمت مطلق برابر بوده اما مختلف العلامه باشد، بعد از به توان رساندن به یک عدد جفت نامساوات به مساوات تبدیل می‌گردد. $-2 \prec 2 \Rightarrow (-2)^2 = 2^2 \Rightarrow 4 = 4$

علایم در نامساوات

$a \succ b$	a بزرگ‌تر است از b
$a \geq b$	a بزرگ‌تر و مساوی است از b
$a \prec b$	a کوچک‌تر است از b
$a \leq b$	a کوچک‌تر و مساوی است از b

نامساوات یک مجهوله درجه اول

شکل عمومی نامساوات یک مجهوله درجه اول عبارتند از:

$$ax+b \succ 0, \quad ax+b \prec 0, \quad ax+b \geq 0, \quad ax+b \leq 0$$

در عبارات فوق a,b اعداد ثابت و x متحول می‌باشد. منظور از حل یک نامساوات عبارت از دریافت همان قیمت‌های می‌باشد، که برای نامساوات صدق نماید. و انواع نامساوات یک مجهوله درجه اول را به ترتیب بررسی می‌کنیم.

۱ **نامساوات پولینومی**: هر افاده الجبری را پس از ساده کردن به شکل $ax+b$ تبدیل نموده و با استفاده از روش تعیین اشاره و خواص نامساوات جواب نامساوات را به‌دست می‌آوریم.

مثال اول: ساحه حل نامساوی $3x-12 \geq 5-3(x+3)$ را دریافت نمائید.

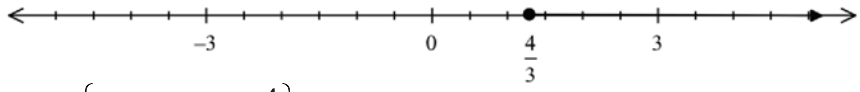
$$3x-12 \geq 5-3(x+3) \quad \Rightarrow 3x-12 \geq 5-3x-9$$

$$\Rightarrow 3x+3x \geq 12+5-9 \;\Rightarrow 6x \geq 8 \qquad \Rightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

ست حل نامساوی فوق را به طریقه‌های ذیل می‌توان بیان کرد.

$$\left[\frac{4}{3},+\infty\right) \qquad or \qquad x \geq \frac{4}{3}$$

و روی محور اعداد چنین نشان می‌دهیم.



$$D_f=\left\{x: x\in\mathbb{R}, x\geq\frac{4}{3}\right\}$$

مثال دوم: ساحه حل نامساوی $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x+2x-7\prec 5(x-1)$ را دریافت نمائید.

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x+2x-7\prec 5(x-1)\quad\Rightarrow\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x+2x-7\prec 5x-1\ \ /\cdot 6$$

$$\Rightarrow 3x-2x+12x-42\prec 30x-30\qquad\Rightarrow 13x-42\prec 30x-30$$

$$\Rightarrow 30x-13x\succ 30-42\qquad\Rightarrow 17x\succ -12\quad\Rightarrow x\succ-\frac{12}{17}$$

ساحه حل نامساوی فوق عبارت از: $\left(-\frac{12}{17},+\infty\right)$ یا $\left]-\frac{12}{17},+\infty\right[$

۲ **نامساوات کسری**: برای دریافت ساحه حل نامساوی کسری، عملیه‌های ذیل را در نظر می‌گیریم.

- تمام عبارات الجبری را به یک طرف انتقال می‌دهیم.
- عبارات الجبری را به یک کسر ساده تبدیل نموده تا صورت و مخرج به شکل بینوم تبدیل گردد.
- طوری که به تعیین اشاره یاد آور شدیم جواب نامساوی را به‌دست می‌آوریم.

مثال اول: ساحه حل نامساوی $\frac{1}{x-1}+4\prec 3-\frac{2x}{x-1}$ را دریابید.

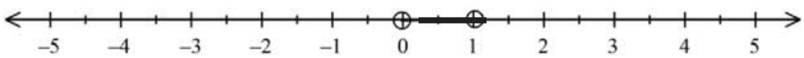
$$\frac{1}{x-1}+4\prec 3-\frac{2x}{x-1}\quad\Rightarrow\frac{1}{x-1}+\frac{2x}{x-1}+4-3\prec 0$$

$$\Rightarrow\frac{2x+1}{x-1}+1\prec 0\qquad\Rightarrow\frac{2x+1+x-1}{x-1}\prec 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{x-1}\prec 0 \quad \rightarrow \frac{3x}{x-1}=0 \quad \underbrace{x=0,1}_{root\ of\ fraction}$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$3x$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$3x(x-1)$	$+$		$-$		$+$

جواب نامساوی فوق $0\prec x\prec 1$ یا انتروال باز $(0,1)$ و یا هم $\{x: x\in\mathbb{R}\wedge 0\prec x\prec 1\}$ و به بالای محور چنین نمایش می‌دهیم.



مثال دوم: ساحه حل نامساوی $\frac{4x+8}{x-1}\succ 3$ را دریافت کنید.

$$\frac{4x+8}{x-1}\succ 3 \quad \Rightarrow \frac{4x+8}{x-1}-3\succ 0 \quad \Rightarrow \frac{4x+8-3x+3}{x-1}\succ 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+11}{x-1}\succ 0 \quad \begin{cases} x+11=0 \Rightarrow x=-11 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-11		1	$+\infty$
$x+11$	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+11}{x-1}$	$+$		$-$		$+$

جواب (ساحه حل نامساوی) فوق عبارت از: $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

۳ **نامساوات جذری**: برای حل معادلات و نامساوات جذری روش یکسان را به کار می‌گیریم، یعنی دو طرف نامساوات را به توان یک عدد طبیعی بلند می‌بریم، در این صورت نامساوات جدید به شکل پولینومی به‌دست می‌آید. البته تمام

نکات و خواص نامساوات را در نظر گرفته تا دقیقاً معادل این نامساوات را به‌دست آوریم، بعد از تعیین اشاره ساحه حل به‌دست آمده را با ناحیه تعریف هر یک از عبارت که تحت جذر قرار دارد تقاطع داده تا جواب نهایی حاصل گردد.

مثال اول: ساحه حل نامساوی $\sqrt{3x-2} \succ 1$ را به‌دست آورید.

$$\sqrt{3x-2} \succ 1 \quad \Rightarrow \left(\sqrt{3x-2}\right)^2 \succ 1^2 \quad \Rightarrow 3x-2 \succ 1 \ \Rightarrow 3x \succ 3 \Rightarrow x \succ 1$$

ناحیه تعریف نامساوات فوق را دریافت می‌کنیم.

$$D_f = \sqrt{3x-2} \Rightarrow 3x-2 \geq 0 \quad \Rightarrow 3x \geq 2 \qquad \Rightarrow x \geq \frac{2}{3} = 0.\bar{6}$$

$$\Rightarrow \left[\tfrac{2}{3}, +\infty\right) \cap (1, +\infty) = (1, +\infty)$$

برای نامساوات فوق جواب $(1, +\infty)$ به‌دست می‌آید.

مثال دوم: ساحه حل نامساوی $\sqrt{x+1} \prec 5$ را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} D_f \sqrt{x+1} \Rightarrow x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \\ \sqrt{x+1} \prec 5 \Rightarrow \left(\sqrt{x+1}\right)^2 \prec 5^2 \Rightarrow x+1 \prec 25 \Rightarrow x \prec 24 \end{cases}$$

$$[-1, +\infty) \cap (-\infty, 24) = [-1, 24)$$

جواب نامساوات فوق $[-1, 24)$ به‌دست می‌آید.

۴ **نامساوات نمایی**: آن مساوات که مجهول به حیث توان قرار گیرد بنام نامساوات نمایی یاد می‌گردد. و برای دریافت ساحه حل نامساوات نمایی نکات ذیل را در نظر می‌گیریم.

۱. اگر $a \succ 0$، آنگاه نامساوات $a^{f(x)} \succ a^{g(x)}$ با نامساوات $f(x) \succ g(x)$ معادل می‌باشد.

۲. اگر $0 \prec a \prec 1$،آنگاه نامساوات $a^{f(x)} \succ a^{g(x)}$ با نامساوات $f(x) \prec g(x)$ معادل می‌باشد.

مثال اول: ساحه حل نامساوی $8^{3-x} \prec 216$ را دریابید.

$$8^{3-x} \prec 216 \quad \Rightarrow \frac{6^3}{6^x} \prec 6^3 \quad \Rightarrow 6^3 \prec 6^3 \cdot 6^x \quad \Rightarrow 6^x \succ 1$$

$$\Rightarrow 6^x \succ 6^0 \quad \Rightarrow x \succ 0 \quad (0,+\infty)$$

مثال دوم: ساحه حل نامساوی $3^{3x+3} - 3^{2x-3} \succ 0$ را دریابید.

$$3^{3x+3} - 3^{2x-3} \succ 0 \quad \Rightarrow 3^{3x+3} \succ 3^{2x-3} \quad \Rightarrow 3x+3 \succ 2x-3$$

$$\Rightarrow x \succ -6 \quad \Rightarrow \quad answer:(-6,+\infty)$$

نامساوات یک مجهوله درجه دوم

هر عبارت که پس از ساده کردن به شکل ax^2+bx+c تبدیل شود، نامساوات یک مجهوله درجه دوم نامیده می‌شود و به‌صورت ذیل می‌باشد.

$$ax^2+bx+c \succ 0 \qquad ax^2+bx+c \geq 0$$

$$ax^2+bx+c \prec 0 \qquad ax^2+bx+c \leq 0$$

طوری که نامساوات یک مجهوله درجه اول به حالات فوق الذکر بررسی گردید، نامساوات یک مجهوله درجه دوم نیز حالات فوق را داشته می‌باشد که قبلاً معرفی گردید، لذا فقط طی چند مثال که شکل درجه دوم را بخود بگیرد بررسی می‌نمائیم.

مثال اول: ساحه حل نامساوات $(x+1)^2 - 1 \succ 0$ را دریابید.

$$(x+1)^2 - 1 \succ 0 \Rightarrow x^2+2x+1-1 \succ 0 \quad \Rightarrow x^2+2x \succ 0 \Rightarrow x(x+2) \succ 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x+2)$		$+$		$-$		$+$	

جواب نامساوات فوق عبارت از: $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ است.

مثال دوم: ساحه حل نامساوات $x^2-4x+4\le 4x^2+4x+1$ را دریابید.

$$x^2-4x+4\le 4x^2+4x+1 \qquad \Rightarrow 4x^2+4x+1\ge x^2-4x+4$$

$$4x^2-x^2+4x+4x+1-4\ge 0 \quad \Rightarrow 3x^2+8x-3\ge 0$$

$$\Delta=b^2-4ac\Rightarrow \Delta=8^2-4\cdot 3\cdot -3=100$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x_1=\frac{-8+10}{2\cdot 3}=\frac{1}{3}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\Rightarrow x_2=\frac{-8-10}{2\cdot 3}=-3 \qquad \Rightarrow Answer\ (-\infty,-3]\cup\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$$

یعنی: هرگاه $\Delta \succ 0$، اشاره پولینوم موافق به بیرون جذور می‌باشد.

مثال سوم: ساحه حل نامساوات $\frac{(x^2+1)(1-x)}{1+x}\prec 0$ را دریابید.

عبارت (x^2+1) برای همیشه مثبت است. پس عبارت $\frac{1-x}{1+x}$ را باید تعیین اشاره کنیم.

$$(1-x)(1+x)=1-x^2\prec 0 \qquad \Rightarrow x^2\succ 1 \qquad \Rightarrow |x|\succ 1$$

$$\Rightarrow -1\succ x\succ 1 \quad \Rightarrow D=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$$

مثال چهارم: ساحه حل نامساوی $\sqrt{2x-1}\prec x+2$ را به‌دست آورید.

$$\sqrt{2x-1}\prec x+2\Rightarrow\left(\sqrt{2x-1}\right)^2\prec(x+2)^2$$

$$\Rightarrow 2x-1\prec x^2+4x+4 \qquad \Rightarrow x^2+4x+4-2x+1\succ 0$$

$$\Rightarrow x^2+2x+5\succ 0 \qquad \Rightarrow b^2-4ac=\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot 5=-16\prec 0$$

در نامساوات فوق $\Delta\prec 0$ است پس به تمام قیمت‌ها مثبت بوده و ناحیه تعریف آن‌را دیده جواب را ارائه می‌کنیم.

$$\sqrt{2x-1} \Rightarrow 2x-1\ge 0 \quad \Rightarrow 2x\ge 1 \quad \Rightarrow x\ge \frac{1}{2}$$

$$(-\infty,+\infty)\cap\left[\frac{1}{2},+\infty\right)=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$$

یعنی جواب نامساوی فوق $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ می‌باشد.

مثال پنجم: ساحه حل نامساوی $\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}\ge 1$ را به‌دست آورید.

$$\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}\ge 1 \qquad \Rightarrow \sqrt{3x}\ge 1+\sqrt{2x+1} \quad /(\ )^2$$

$$\Rightarrow 3x\ge 1+2\sqrt{2x+1}+2x+1 \quad \Rightarrow x-2\ge 2\sqrt{2x+1} \quad /(\ )^2$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4\ge 4(2x+1) \qquad \Rightarrow x^2-4x+4\ge 8x+4$$

$$\Rightarrow x^2-4x-8x+4-4\ge 0 \qquad \Rightarrow x^2-12x\ge 0$$

$$D=(-\infty,0]\cup[12,+\infty)$$

و ناحیه تعریف آن عبارت از: $x\ge 0,\ \ x\ge -\frac{1}{2}$ با تقاطع جواب نهایی را در می‌یابیم.

$$\Rightarrow D=\{(-\infty,0]\cup[12,+\infty)\}\cap\left\{[0,+\infty)\cup\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)\right\}$$

$$=D=[12,+\infty)$$

مثال ششم: ساحه حل نامساوی $\sqrt[3]{2^{\frac{3x-1}{x-1}}}\prec 8^{\frac{x-2}{3x-7}}$ را به‌دست آورید.

$$\sqrt[3]{2^{\frac{3x-1}{x-1}}}\prec 8^{\frac{x-2}{3x-7}} \Rightarrow 2^{\frac{\frac{3x-1}{x-1}}{3/1}}\prec (2^3)^{\frac{x-2}{3x-7}} \qquad \Rightarrow 2^{\frac{3x-1}{3(x-1)}}\prec 2^{3\left(\frac{x-2}{3x-7}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{3x-1}{3(x-1)}\prec 3\left(\frac{x-2}{3x-7}\right) \qquad \Rightarrow \frac{3x-1}{3x-3}-\frac{3x-6}{3x-7}\prec 0$$

$$\Rightarrow \frac{(3x-1)(3x-7)-(3x-6)(3x-3)}{(3x-3)(3x-7)}\prec 0 \qquad \Rightarrow \frac{3x-11}{(3x-3)(3x-7)}\prec 0$$

بعد از تعیین اشاره جواب $(-\infty,1)\cup\left(\frac{7}{3},\frac{11}{3}\right)$ به‌دست می‌آید.

نامساوات قیمت مطلق

برای دریافت ساحه حل نامساوات قیمت مطلق با استفاده از تعریف قیمت مطلقه ساحه حل نامساوات را به حالات ذیل دریافت می‌کنیم.

۱. هرگاه نامساوات به حالت $|f(x)|\geq g(x)$ باشد چنین ساده می‌سازیم.

$$|f(x)|\geq g(x) \;\Rightarrow -g(x)\geq f(x)\geq g(x)$$

$$|f(x)|\prec g(x) \;\Rightarrow -g(x)\prec f(x)\prec g(x)$$

۲. هرگاه نامساوات به حالت $|f(x)|\geq|g(x)|$ باشد، چنین ساده می‌سازیم.

$$|f(x)|\geq|g(x)|\Rightarrow(f(x))^2\geq(g(x))^2 \;:g(x)\geq 0$$

مثال اول: ساحه حل نامساوی $|x-2|\prec 2$ را به‌دست آورید.

$$|x-2|\prec 2 \qquad \Rightarrow -2\prec x-1\prec 2 \qquad \diagup +1\;\diagup \quad \Rightarrow -1\prec x\prec 3$$

$$Answer:(-1,3)$$

مثال دوم: ساحه حل نامساوی $|2x-1|\leq|3x+1|$ را به‌دست آورید.

$$|2x-1|\leq|3x+1| \;\;\diagup(\;)^2 \qquad \Rightarrow 4x^2-4x+1\leq 9x^2+6x+1$$

$$5x^2+10x\geq 0 \;\;\Rightarrow x(x+10)\geq 0 \qquad \Rightarrow Answer:(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$$

مثال سوم: ساحه حل نامساوی $\left|\frac{2x+3}{3x-2}\right|\succ 1$ را به‌دست آورید.

$$\left|\frac{2x+3}{3x-2}\right|\succ 1 \qquad \Rightarrow\left(\frac{2x+3}{3x-2}\right)^2\succ 1 \qquad \frac{(2x+3)}{(3x-2)}\succ 1$$

$$\Rightarrow\frac{(2x+3)}{(3x-2)}-1\succ 0 \qquad \Rightarrow\frac{-5x^2+24x+5}{(3x-2)^2}\succ 1$$

صرف صورت مثبت باشد جواب درست است، چون مخرج هیچگاه منفی نمی‌شود. جواب عبارت از: $\left(-\frac{1}{5},5\right)\setminus\left\{-\frac{2}{3}\right\}$.

مثال چهارم: ساحه حل نامساوی $\left|x^2-3x+2\right|\le 2x-x^2$ را به‌دست آورید.

$$\left|x^2-3x+2\right|\le 2x-x^2 \quad \Rightarrow -\left(2x-x^2\right)\le\left(x^2-3x+2\right)\le\left(2x-x^2\right)$$

$$\begin{cases} -\left(2x-x^2\right)\le x^2-3x+2 \\ \Rightarrow x^2-2x\le x^2-3x+2 \\ \quad\Rightarrow x-2\le 0 \ \Rightarrow x\le 2 \\ \quad\underbrace{Answer}_{part\ (-)}:\ (-\infty,2] \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-3x+2\le 2x-x^2 \\ \quad 2x^2-5x+2\le 0 \\ \quad\underbrace{Answer}_{part\ (+)}:\ \left[\frac{1}{2},2\right] \end{cases}$$

جواب نهایی را با تقاطع جواب‌های بخش مثبت و منفی به‌دست می‌آوریم.

$$[1/2,2]\cap(-\infty,2]=[1/2,2]$$

مثال پنجم: ساحه حل نامساوی $\left|\frac{x-1}{x^2+1}\right|\prec 1$ را به‌دست آورید.

$$\left|\frac{x-1}{x^2+1}\right|\prec 1 \qquad \Rightarrow\left|x-1\right|\prec x^2+1 \quad /\left(\ \right)^2 \Rightarrow x^2-2x+1\prec x^4+2x^2+1$$

$$\Rightarrow x^4+x^2+4x+2x\succ 0 \qquad \Rightarrow x\left(x+1\right)\left(x^2-x+2\right)\succ 0$$

برای $0\prec\left(x^2-x+2\right)$, $0\prec\Delta$ است. پس فقط اشاره $x\left(x+1\right)$ را بررسی می‌کنیم.

بعد از تعیین اشاره، جواب را به‌دست می‌آوریم.

$$Answer:(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$$

مثال ششم: ساحه حل نامساوی $\left|x-4\right|+\left|2x+6\right|\succ 10$ را به‌دست آورید.

<u>حل</u>: بنابر تعریف قیمت مطلقه جذور افاده‌ها 4 و -3 می‌باشد که محور اعداد را به سه قسمت تقسیم می‌کند. یعنی: $(-\infty,-3]$, $[-3,4]$, $[4,+\infty)$

نامساوات فوق را به سه فاصله فوق به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} if\ x \prec -3 & -(x-4)-(2x+6) \succ 10 \\ if\ -3 \le x \prec 4 & -(x-4)+(2x+6) \succ 10 \\ if\ x \ge 4 & (x-4)+(2x+6) \succ 10 \end{cases}$$

از رابطه اول $x \prec 4$ می‌باشد، از رابطه دوم $0 \le x \prec 4$ می‌باشد، از رابطه سوم $x \ge 4$ می‌باشد، و از ترکیب سه فاصله فوق خواهیم داشت.

$$(-\infty,-4)\cup[0,4)\cup[4,+\infty) \Rightarrow Answer:(-\infty,-4)\cup[0,+\infty)$$

سیستم نامساوات یک مجهوله درجه اول

حل هم‌زمان چند نامساوات یک مجهوله درجه اول را بنام سیستم فوق الذکر یاد می‌کنند، و برای دریافت جواب، ساحه حل هر یک از نامساوات را دریافت نموده و ساحه حل تمام نامساوات را تقاطع داده تا جواب سیستم را دریافت نمائیم.

مثال اول: ساحه حل سیستم نامساوات $\begin{cases} 2x+3 \prec x-4 \\ 2x+3 \succ 3x-1 \end{cases}$ را دریابید.

$$2x+3 \prec x-4 \ \Rightarrow x \prec -7 \qquad (-\infty,-7)$$

$$2x+3 \succ 3x-1 \ \Rightarrow -x \succ -4 \quad / \cdot(-) \quad \Rightarrow x \prec 4 \qquad (-\infty,4)$$

$$(-\infty,-7)\cap(-\infty,4) \qquad \Rightarrow Answer:(-\infty,-7)$$

مثال دوم: ساحه حل سیستم نامساوات $\begin{cases} x-3 \succ 1-3x \\ 2x+5 \le x+8 \end{cases}$ را دریابید.

$$\begin{cases} x-3 \succ 1-3x & \Rightarrow x+3x \succ 1+3 & \Rightarrow x \succ 1 & \Rightarrow (1,+\infty) \\ 2x+5 \le x+8 & \Rightarrow 3x \le 3 & \Rightarrow x \le 3 & \Rightarrow (-\infty,3] \end{cases}$$

$$(-\infty,3]\cap(1,+\infty) \qquad \Rightarrow Answer:(1,3]$$

نامساوات دو مجهوله درجه اول

شکل عمومی نامساوات دو مجهوله درجه اول قرار ذیل می‌باشد.

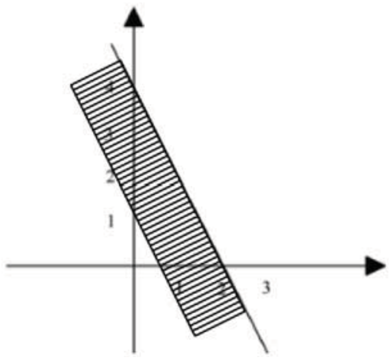
$ax+by \prec c \qquad ax+by \le c \qquad ax+by \succ c \qquad ax+by \ge c$

برای حل این اولاً گراف آن‌را رسم نموده و این گراف سیستم کمیات را به دو ناحیه تقسیم می‌کند، یکی از این ناحیه ساحه حل نامساوی می‌باشد، برای تشخیص ساحه حل در یکی از این دو ناحیه نطقه دلخواه را انتخاب نموده و در نامساوی قیمت را وضع می‌کنیم اگر نامساوی را صدق نمود ساحه حل آن می‌باشد، اگر صدق نکرد ناحیه بعدی ساحه حل نامساوی می‌باشد.

مثال: ساحه حل نامساوی $2x+y \prec 4$ را دریابید.

$$2x+y \prec 4 \quad \Rightarrow 2x+y=4 \quad \Rightarrow 2x+(0)=4 \Rightarrow \boxed{x=2}$$

$$2x+y \prec 4 \quad \Rightarrow 2x+y=4 \quad \Rightarrow 2(0)+y=4 \Rightarrow \boxed{y=4}$$



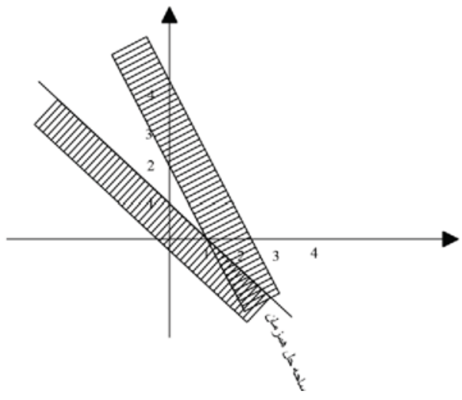
سیستم نامساوات دو مجهوله درجه اول

هرگاه بیش‌تر از یک نامساوات دو مجهوله درجه اول را باهم در یک ساحه حل دریابیم، سیستم نامساوات دو مجهوله درجه اول یاد می‌گردد. و برای حل هم‌زمان سیستم اولاً تمام نامساوات را حل نموده و جواب‌ها را باهم تقاطع می‌دهیم تا جواب نهایی به‌دست آید.

مثال اول: ساحه حل سیستم نامساوی $\begin{cases} 2x+y \succ 2 \\ x+y \prec 1 \end{cases}$ را دریابید.

$$2x+y \succ 2 \begin{cases} 2x+y=2 & \Rightarrow 2x+(0)=2 & \Rightarrow x=1 \\ 2x+y=2 & \Rightarrow 2(0)+y=2 & \Rightarrow y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (1,0) \\ (0,2) \end{matrix}$$

$$x+y \prec 1 \begin{cases} x+y=1 & \Rightarrow x+0=1 & \Rightarrow x=1 \\ x+y=1 & \Rightarrow 0+y=1 & \Rightarrow y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (1,0) \\ (0,1) \end{matrix}$$



فصل چهارم
لوگاریتم

تمام حدسیات و نظریات ما، روی‌هم رفته به وسیله تجربه تائید یا رد می‌گردد. (آلبرت)

آشنایی: لوگاریتم از موضوعات مهم در محاسبات بشمار می‌رود که در علوم طبیعی کاربرد فراوان دارد و در این فصل با معرفی این موضوع پر اهمیت می‌پردازیم.

لوگاریتم

به‌صورت عموم اگر داشته باشیم $a^x = b$ و $(a \succ 0, a \neq 1)$، این را به‌صورت $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$ نمایش می‌دهند و می‌خوانند لوگاریتم b به قاعده a.

مثال‌ها: طاقت‌های ذیل را به‌صورت لوگاریتم بنویسید.

$9 = 3^2 \Leftrightarrow \log_3 9 = 2 \qquad 16 = 2^4 \Leftrightarrow \log_2 16 = 4$

توجه: دیدیم که $a^x = b$ با شرط $a \neq 1$ و $a \succ 0$ آنگاه x هر عدد حقیقی که باشد a^x همیشه مثبت، پس b همیشه مثبت است بنابراین $\log_a b = x$ وقتی معنی خواهد داشت که b مثبت باشد، یعنی: اعداد منفی لوگاریتم ندارد و لوگاریتم صفر نیز بی مفهوم است.

نکته: قاعده لوگاریتم عددی مثبت و مخالف صفر و یک است. $(a \succ 0,\ a \neq 1)$ بنابر این قاعده‌ها را به دو بخش $0 \prec a \prec 1$ و $a \succ 1$ تقسیم می‌کنیم.

۱. در قاعده بزرگ‌تر از یک $(a \succ 1)$ لوگاریتم اعداد بزرگ‌تر از 1 مثبت و لوگاریتم اعداد کوچک‌تر از 1 منفی است بطور مثال:

$$\log_{10} 3 \succ 0, \quad \log_2 8 \succ 0, \quad \log_{10} 0.5 \prec 0, \quad \log_2 \frac{1}{8} \prec 0$$

۲. در قاعده کوچک‌تر از 1 یعنی $0 \prec a \prec 1$ لوگاریتم اعداد بزرگ‌تر از 1 منفی و لوگاریتم اعداد کوچک‌تر از 1 مثبت است. مانند:

$$\log_{\frac{1}{3}} 5 \prec 0, \qquad \log_{0.01} 100 \prec 0, \qquad \log_{0.1} 0.01 \succ 0$$

انواع لوگاریتم

طوری که دیدیم به غیر از 1 هر عدد مثبت دیگر می‌تواند قاعده لوگاریتم باشد، اما قاعده‌های که اکثراً در عمل به‌کار برده می‌شوند عبارت از عدد 10 و e می‌باشند. که اینک به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

لوگاریتم اعشاری(معمولی)

در صورت که قاعده لوگاریتم عدد 10 باشد، این نوع لوگاریتم را بنام لوگاریتم اعشاری و معمولی یاد می‌کنند. که به‌صورت زیر نمایش می‌دهند.

$$\log b = x \Leftrightarrow \log_{10} b = x \qquad \log 100 = 2 \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2$$

لوگاریتم طبیعی

در صورت که قاعده لوگاریتم عدد e باشد، این نوع لوگاریتم را بنام لوگاریتم طبیعی یاد می‌کنند. که به‌صورت زیر نمایش می‌دهند.

$$\log_e b = x \Leftrightarrow \ln b = x$$

e یک عدد غیر ناطق بوده که قیمت تقریبی آن عبارت از $e \approx 2.718281828459$ می‌باشد که از محاسبه لیمت $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ به‌دست آمده و دریافت آن مربوط ریاضیات عالی بوده که در ریاضیات (۴) به معرفی آن می‌پردازیم. e به عدد نپر موسوم است. و بعدها، به افتخار اویلر آن را بنام حرف اول اسم اویلر نامیدند.

قوانین لوگاریتم

۱. لوگاریتم عدد 1 به هر قاعده همیشه صفر است.

$$b = a^x \Rightarrow \log_a b = x \qquad proof : if\ 1 = a^0 \Rightarrow \log_a 1 = 0$$

۲. لوگاریتم هر عدد به قاعده خودش همیشه مساوی به 1 است.

$$b = a^x \Rightarrow \log_a b = x \qquad proof : if\ a = a^1 \Rightarrow \log_a a = 1$$

۳. لوگاریتم حاصل ضرب چند عدد مساوی است به حاصل جمع لوگاریتم‌های آن اعداد.

$$\log_a mn = \log_a m + \log_a n$$

$$proof : \begin{cases} I.....\ m = a^x \Rightarrow \log_a m = x \\ II....n = a^y \Rightarrow \log_a n = y \end{cases}$$

$$\Rightarrow I \times II : mn = a^x \cdot a^y \Rightarrow mn = a^{x+y} \quad \Rightarrow \log_a mn = x + y$$

$$\Rightarrow \log_a mn = \underbrace{\log_a m}_{x} + \underbrace{\log_a n}_{y}$$

۴. لوگاریتم حاصل تقسیم دو عدد مساوی است به لوگاریتم صورت منفی لوکاریتم مخرج.

$$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

$$proof : \frac{I}{II} : \ \frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow \frac{m}{n} = a^{x-y} \qquad \Rightarrow \log_a \left(\frac{m}{n}\right) = x - y$$

$$\Rightarrow \log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \underbrace{\log_a m}_{x} - \underbrace{\log_a n}_{y}$$

۵. لوگاریتم هر عدد به توان n مساوی است به n چند لوگاریتم آن عدد.

$$\log_a b^n = n \log_a b \qquad proof : \ \log_a b = x \Rightarrow b = a^x \quad \Rightarrow b^n = \left(a^x\right)^n$$

$$\Rightarrow b^n = a^{nx} \qquad \Rightarrow \log_a b^n = nx$$

۶. اگر قاعده به‌صورت عدد توان‌دار باشد در این صورت داریم:

$$\log_{a^n} b=\frac{1}{n}\log_a b \qquad proof:\ \log_{a^n} b=x \Rightarrow b=\left(a^n\right)^x$$

$$\Rightarrow b=\left(a^x\right)^n \quad \Rightarrow b^{\frac{1}{n}}=a^x \quad \Rightarrow \log_a b^{\frac{1}{n}}=x \quad \Rightarrow \frac{1}{n}\log_a b=x$$

۷. به‌صورت عموم داریم:

$$\log_{a^n} b^m=\frac{m}{n}\log_a b$$

$$proof:\log_{a^n} b^m=m\log_{a^n} b=m\frac{1}{n}\log_a b=\frac{m}{n}\log_a b$$

۸. گاهی لازم است که قاعده لوگاریتم را تغییر دهیم، در این حالت از رابطه‌های زیر استفاده می‌کنیم.

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\ proof:\ \log_a b=x \Rightarrow b=a^x$$

$$\Rightarrow \log_c b=\log_c a^x \Rightarrow \log_c b=x\log_c a \Rightarrow x=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\Rightarrow \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

۹. گاهی نیاز می‌شود که یک لوگاریتم را معکوس نمائیم.

$$\log_a b=\frac{1}{\log_a b}\ proof:\log_a b=\frac{\log_b b}{\log_b a}=\frac{1}{\log_b a}$$

۱۰. در صورت ضرورت می‌توان از روابط زیر در محاسبات استفاده نمود.

$$\log_a b\times\log_b a=1 \qquad proof:\log_a b\times\log_b a=1 \quad \Rightarrow \log_a b\times\frac{1}{\log_a b}=1$$

$$\Rightarrow \frac{\log_a b}{\log_a b}=1 \quad \Rightarrow \log_a b\times\log_b a=1$$

۱۱. در صورت ضرورت می‌توان از روابط زیر در محاسبات استفاده نمود.

$\log_a b \times \log_c a \times \log_d c \times .... \times \log_n d = \log_n b \quad proof:$

$\log_a b \times \log_c a \times \log_d c \times .... \times \log_n d$

$= \frac{\log_z b}{\log_z a} \times \frac{\log_z a}{\log_z c} \times \frac{\log_z c}{\log_z d} \times .... \times \frac{\log_z d}{\log_z n} = \log_n b$

۱۲. معکوس یک عدد لوگاریتمی را کولوگاریتم $(co\log)$ آن عدد گویند.

$\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b = co\log_a b \quad proof: \log_a\left(\frac{1}{b}\right) = \log_a 1 - \log_a b$

$= 0 - \log_a b = co\log_a b$

۱۳. عبارت که چندین‌بار از آن لوگاریتم گرفته شود، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم. $\log_d \log_c lod_a \log_b x = \alpha \Rightarrow x = b^{a^{c^{d^\alpha}}}$

$proof: \log_d \log_c lod_a \log_b x = \alpha \quad \Rightarrow \log_c lod_a \log_b x = d^\alpha$

$\Rightarrow lod_a \log_b x = c^{d^\alpha} \quad \Rightarrow \log_b x = a^{c^{d^\alpha}} \quad \Rightarrow x = b^{a^{c^{d^\alpha}}}$

۱۴. در صورت لزوم می‌توان از رابطه زیر در محاسبه استفاده نمود.

$\log_a x = \frac{m}{n} \Leftrightarrow x^n = a^m \ proof: \ \log_a x = \frac{m}{n} \quad \Rightarrow x = a^{\frac{m}{n}} \ /(\ )^n$

$\Rightarrow x^n = a^m$

۱۵. در صورت لزوم می‌توان از رابطه زیر در محاسبه استفاده نمود.

$b^{\log_a x} = x^{\log_a b} \quad proof: \quad \log_a b = x.....I \qquad b = a^x....II$

قیمت x را از رابطه I به II وضع می‌کنیم. $.b = a^{\log_a b}$

رابطه فوق قابل تعمیم است: $b^{\log_a x} = x^{\log_a b}$

با در نظر داشت خاصیت ۱۵ می‌توان از رابطه‌های زیر استفاده نمود.

1) $a^{\log_a x} = x$, 2) $e^{x\ln a} = a^x$, 3) $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$

توجه: نکات ذیل را بخاطر داشته باشید.

1) $\log A\times\log A=\left(\log A\right)^2$ 3) $\sqrt{\log A}\neq\log\sqrt{A}$

2) $\log A\times\log A\neq\log A^2$ 4) $\log A=\log A\Rightarrow A=A$

افاده‌های لوگاریتمی

افاده‌های عددی یا الجبری که لوگاریتم را شامل باشد بنام افاده‌های لوگاریتمی گفته می‌شود. و با استفاده از قوانین لوگاریتم می‌توان آن‌ها را ساده نمود و قیمت عددی افاده را به‌دست آوریم.

مثال‌ها:

1) $\log_{10}1000=?\quad\Rightarrow\log_{10}1000=\log_{10}10^3=3\log_{10}10=3\cdot1=3$

2) $\log_{3\sqrt{3}}\sqrt{5}\times\log_{\sqrt{2}}9\times\log_{25}8=?$

$$\Rightarrow\log_{3^{\frac{3}{2}}}5^{\frac{1}{2}}\times\log_{2^{\frac{1}{2}}}3^2\times\log_{5^2}2^3=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\log_3 5\times\frac{2}{\frac{1}{2}}\times\log_2 3\times\frac{3}{2}\log_5 2$$

$$=\frac{1}{3}\times4\times\frac{3}{2}\left(\log_3 5\times\log_2 3\times\log_5 2\right)=2\left(\log_5 5\right)=2\cdot1=2$$

3) $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log16}}=?\qquad\Rightarrow\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\log16}}=\sqrt{10^2\times10^{\frac{1}{2}\log_{10}4^2}}$

$$=\sqrt{10^2\times10^{\log_{10}4^{\frac{1}{2}\times2}}}=\sqrt{10^2\times10^{\log_{10}4}}=\sqrt{10^2\times4}=10\times2=20$$

4) $\log\frac{75}{16}-2\log\frac{5}{9}+\log\frac{32}{243}=?\ \Rightarrow\log\frac{75}{16}-2\log\frac{5}{9}+\log\frac{32}{243}$

$$=\log\frac{75}{16}-\log\left(\frac{5}{9}\right)^2+\log\frac{32}{243}=\log\frac{\frac{75}{16}}{\frac{25}{81}}+\log\frac{32}{243}$$

$$=\log\frac{75}{16}\times\frac{81}{25}+\log\frac{32}{243}=\log\frac{75}{16}\times\frac{81}{25}\times\frac{32}{243}=\log2$$

5) $\dfrac{1}{\log_{12} 2}-\dfrac{1}{\log_3 2}=?\quad \Rightarrow \dfrac{1}{\log_{12} 2}-\dfrac{1}{\log_3 2}=\log_2 12-\log_2 3$

$=\log_2 \dfrac{12}{3}=\log_2 4=\log_2 2^2=2\log_2 2=2$

6) $\dfrac{\log_a z}{\log_{ab} z}=?\quad \Rightarrow \dfrac{\log_a z}{\log_{ab} z}=\log_a z\times\log_z ab=\log_z ab\times\log_a z$

$=\log_a ab=\log_a a+\log_a b=1+\log_a b$

7) $\left(\log_{15} 5\right)^2+\left(\log_{15} 3\right)\times\left(\log_{15}\left(3\times5^2\right)\right)=?$

$=\left(\log_{15} 5\right)^2+\left(\log_{15} 3\right)\left(\log_{15} 3+\log_{15} 5^2\right)$

$=\left(\log_{15} 5\right)^2+\left(\log_{15} 3\right)\left(\log_{15} 3+2\log_{15} 5\right)$

$=\left(\log_{15} 5\right)^2+\left(\log_{15} 3\right)^2+2\log_{15} 5\times\log_{15} 3=\left(\log_{15} 5+\log_{15} 3\right)^2$

$=\left(\log_{15}\left(5\times3\right)\right)^2=\left(\log_{15} 15\right)^2=1$

8) $\log_n \dfrac{2}{1}+\log_n \dfrac{3}{2}+\cdots+\log_n \dfrac{n}{n-1}=?$

$\Rightarrow \log_n \dfrac{2}{1}+\log_n \dfrac{3}{2}+\cdots+\log_n \dfrac{n}{n-1}=\log_n\left(\dfrac{2}{1}\times\dfrac{3}{2}\times\cdots\times\dfrac{n}{n-1}\right)$

$=\log_n n=1$

9) $\log_x \sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}=?\quad \Rightarrow \log_x \sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}=\log_x \sqrt[3]{\sqrt[3]{x^4\sqrt{x}}}$

$=\log_x \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt{x^9}}}=\log_x \sqrt[18]{x^9}=\log_x \sqrt{x}=\log_x x^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}\log_x x=\dfrac{1}{2}$

10) $\frac{1}{1+\log_5 3}+\frac{1}{1-\log_3 \frac{1}{5}}=?\qquad \Rightarrow \frac{1}{1+\log_5 3}+\frac{1}{1-\log_3 \frac{1}{5}}$

$=\frac{1}{1+\log_5 3}+\frac{1}{1-\log_3 5^{-1}}=\frac{1}{1+\log_5 3}+\frac{1}{1+\log_3 5}$

$=\frac{(1+\log_3 5)+(1+\log_5 3)}{(1+\log_5 3)(1+\log_3 5)}=\frac{1+\log_3 5+1+\log_5 3}{(1+\log_5 3)(1+\log_3 5)}$

$=\frac{1+\log_3 5+1+\log_5 3}{1+\log_3 5+\log_5 3+(\log_5 3\times\log_3 5)}=\frac{1+\log_3 5+1+\log_5 3}{1+\log_3 5+\log_5 3+1}=1$

11) $\log_{\frac{1}{\sqrt[4]{8}}}\sqrt[3]{16}=x\ \to x=?\qquad \Rightarrow \log_{\frac{1}{\sqrt[4]{8}}}\sqrt[3]{16}=x$

$\Rightarrow \sqrt[3]{16}=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{8}}\right)^x \Rightarrow \sqrt[3]{2^4}=\left[\left(\sqrt[4]{8}\right)^{-1}\right]^x \Rightarrow 2^{\frac{4}{3}}=\left(2^{-\frac{3}{4}}\right)^x$

$\Rightarrow 2^{\frac{4}{3}}=2^{-\frac{3}{4}x}\ \Rightarrow -\frac{3}{4}x=\frac{4}{3}\qquad \Rightarrow x=-\frac{16}{9}$

12) $\frac{\log_a n\cdot\log_b n}{\log_a n+\log_b n}=?\qquad \Rightarrow \frac{\log_a n\cdot\log_b n}{\log_a n+\log_b n}=\frac{\frac{1}{\log_n a}\cdot\frac{1}{\log_n b}}{\frac{1}{\log_n a}+\frac{1}{\log_n b}}$

$=\frac{\frac{1}{\log_n a\cdot\log_n b}}{\frac{\log_n b+\log_n a}{\log_n a\cdot\log_n b}}=\frac{1}{\log_n b+\log_n a}=\frac{1}{\log_n ab}=\log_{ab} n$

13) $10^{\left(2\log\sqrt[4]{6}-\log 2\right)}=?\qquad \Rightarrow 10^{\left(2\log\sqrt[4]{6}-\log 2\right)}=10^{\left[\log\left(\sqrt[4]{6}\right)^2-\log 2\right]}$

$=10^{\left(\log\sqrt{6}-\log 2\right)}=10^{\log_{10}\frac{\sqrt{6}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

14) $\dfrac{1}{\log_x \sqrt{xy}}+\dfrac{1}{\log_y \sqrt{xy}}=?\qquad \Rightarrow \dfrac{1}{\log_x \sqrt{xy}}+\dfrac{1}{\log_y \sqrt{xy}}$

$=\log_{\sqrt{xy}} x+\log_{\sqrt{xy}} y=\log_{\sqrt{xy}} xy=\log_{(xy)^{\frac{1}{2}}} xy=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}\log_{xy} xy=2$

15) $x^{\frac{\log 2+\log(\log x)}{\log x}}=?\qquad \Rightarrow x^{\frac{\log 2+\log(\log x)}{\log x}}=x^{\frac{\log(2\log x)}{\log x}}=x^{\frac{\log(\log x^2)}{\log x}}$

$=x^{\log_x(\log x^2)}=\log x^2=2\log x$

16) $\log\dfrac{a}{b}+\log\dfrac{b}{c}+\log\dfrac{c}{d}-\log\dfrac{ay}{xd}=?$

$=\log\dfrac{a}{b}+\log\dfrac{b}{c}+\log\dfrac{c}{d}-(\log ay-\log xd)=$

$(\log a-\log b)+(\log b-\log c)+(\log c-\log d)$

$-[(\log a+\log b)-(\log x+\log d)]=\log x-\log y=\log\dfrac{x}{y}$

17) $\log_x \sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}}=?\qquad \Rightarrow \log_x \sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}}=\log_x \sqrt{\sqrt[3]{x^3\times x\sqrt[4]{x}}}$

$=\log_x \sqrt[6]{x^4\sqrt[4]{x}}=\log_x \sqrt[6]{\sqrt[4]{x^{17}}}=\log_x \sqrt[24]{x^{17}}=\log_x x^{\frac{17}{24}}=\dfrac{17}{24}\log_x x=\dfrac{17}{24}$

18) $a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}=?\qquad \Rightarrow a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}=a^{\log_a(\log a)}=\log a^{\log_a(a)}=\log a$

معادلات لوگاریتمی

افاده‌های لوگاریتمی که در آن مجهول موجود باشد بنام معادلات لوگاریتمی یاد می‌گردد. برای دریافت قیمت مجهول از یک معادله لوگاریتمی اولاً معادله داده شده را نظر به قوانین و قضایای لوگاریتمی ساده‌ساخته؛ سپس در مطابقت به قوانین الجبری و یا معادلات نمایی می‌توان قیمت مجهول را به‌دست آورد.

مثال‌ها: قیمت هر یک از جذور معادلات زیر را به‌دست آورید.

1) $\log_3\left(x^2-3x-5\right)=\log_3\left(7-2x\right)$

$\Rightarrow x^2-3x-5=7-2x \qquad \Rightarrow x^2-3x-5+2x-7=0$

$\Rightarrow x^2-x-12=0 \qquad x_1=-3\,, \qquad x_2=4$

از حل معادله فوق $x_2=4$ و $x_1=-3$ به‌دست می‌آید، طوری که $x_2=4$ جواب معادله دومی (معادله هم‌ارز) بوده اما جواب معادله اصلی نمی‌باشد. و برای بررسی این مطلب به نکته زیر توجه نمائید.

نکته: برای این که درستی جذور را بدانیم، اولاً ناحیه تعریف معادله را در عدد به‌دست آمده (جذور معادله) بررسی می‌کنیم.

2) $\log\left(x+4\right)+\log\left(2x+3\right)=\log\left(1-2x\right)$

$\Rightarrow \log\left[\left(x+4\right)\left(2x+3\right)\right]=\log\left(1-2x\right)$

$\Rightarrow \left(x+4\right)\left(2x+3\right)=\left(1-2x\right) \quad \Rightarrow \underset{\text{ق ق}}{x_1=-1}, \qquad \underset{\text{غ ق ق}}{x_2=-\frac{11}{2}}$

3) $\log_2\left(x^2-1\right)=\log_{\frac{1}{2}}\left(x-1\right) \qquad \Rightarrow \log_2\left(x^2-1\right)=\log_{2^{-1}}\left(x-1\right)$

$\Rightarrow \log_2\left(x^2-1\right)=-\log_2\left(x-1\right)\Rightarrow \log_2\left(x^2-1\right)=\log_2\left(x-1\right)^{-1}$

$\Rightarrow x^2-1=\left(x-1\right)^{-1} \qquad \Rightarrow x^2-1=\frac{1}{\left(x-1\right)} \qquad \Rightarrow \left(x^2-1\right)\left(x-1\right)=1$

$\Rightarrow x^3-x^2-x+1-1=0 \qquad \Rightarrow x\left(x^2-x-1\right)=0 \qquad \Rightarrow x=0$ غ‌ق‌ق

$\Rightarrow x^2-x-1=0 \Rightarrow x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ق‌ق, $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ غ‌ق‌ق

4) $\log_{x+4}\left(x^2-1\right)=\log_{x+4}\left(5-x\right)$

$\Rightarrow x^2-1=5-x \qquad \Rightarrow x^2+x-6=0 \qquad \Rightarrow x_1=-3,$ غ‌ق‌ق $x_2=2$ ق‌ق

5) $\dfrac{\log 2}{1-\log x}=\dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow 1-\log x=3\log 2 \quad \Rightarrow 1-\log x=\log 2^3$

$\Rightarrow \log 8+\log x=1 \quad \Rightarrow \log 8x=1 \quad \Rightarrow 8x=(10)^1 \quad \Rightarrow x=\dfrac{10}{8}=\dfrac{5}{4}$ ق ق

6) $\log\dfrac{1}{2}+\log\dfrac{2}{3}+\cdots+\log\dfrac{n}{n+1}=-2 \Rightarrow \log\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{n}{n+1}=-2$

$\Rightarrow \log\dfrac{1}{n+1}=-2 \quad \Rightarrow \dfrac{1}{n+1}=(10)^{-2} \quad \Rightarrow \dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{100}$

$\Rightarrow n+1=100 \quad \Rightarrow n=99$ ق ق

7) $7^{\log x}=98-x^{\log 7} \quad \Rightarrow 7^{\log x}=98-7^{\log x} \quad \Rightarrow 7^{\log x}+7^{\log x}=98$

$\Rightarrow 7^{\log x}=49 \quad \Rightarrow 7^{\log x}=7^2 \quad \Rightarrow \log x=2 \quad \Rightarrow x=(10)^2=100$ ق ق

8) $3x^{\log_5 2}+2^{\log_5 x}=64 \Rightarrow 3\times 2^{\log_5 x}+2^{\log_5 x}=64 \Rightarrow 4\times 2^{\log_5 x}=64$

$\Rightarrow 2^{\log_5 x}=16 \quad \Rightarrow 2^{\log_5 x}=2^4 \quad \Rightarrow \log_5 x=4 \quad \Rightarrow x=625$

9) $2\log_2 x+\log_{\sqrt{2}} x+\log_{\frac{1}{2}} x=9$

$\Rightarrow 2\log_2 x+\dfrac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}}+\dfrac{\log_2 x}{\log_2 \dfrac{1}{2}}=9$

$\Rightarrow 2\log_2 x+\dfrac{\log_2 x}{\log_2 2^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{\log_2 x}{\log_2 2^{-1}}=9$

$\Rightarrow 2\log_2 x+\dfrac{\log_2 x}{\frac{1}{2}\log_2 2}+\dfrac{\log_2 x}{(-1)\log_2 2}=9$

$\Rightarrow 2\log_2 x+2\log_2 x-\log_2 x=9$

$\Rightarrow 3\log_2 x=9 \quad \Rightarrow \log_2 x=3 \quad \Rightarrow x=2^3=8$

$$10)\quad \log_{16} x+\log_4 x+\log_2 x=7 \quad \Rightarrow \log_{2^4} x+\frac{\log_2 x}{\log_2 4}+\log_2 x=7$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\log_2 x+\frac{\log_2 x}{\log_2 2^2}+\log_2 x=7 \quad \Rightarrow \frac{1}{4}\log_2 x+\frac{\log_2 x}{2\log_2 2}+\log_2 x=7$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 x+\log_2 x=7 \quad \Rightarrow \log_2 x=4 \quad \Rightarrow x=16$$

نامساوات لوگاریتمی

برای حل نامساوات لوگاریتمی با استفاده از تعریف و خواص لوگاریتم نامساوات را به‌شکل الجبری نوشته بعداً مانند نامساوات الجبری ساحه حل آن را دریافت می‌کنیم. به‌صورت عموم حالات ذیل را بخاطر داشته باشید.

نامساوات $\log_a f(x) \succ \log_a g(x)$ را در نظر گرفته داریم:

I. اگر $a \succ 1$ ، آنگاه نامساوات لوگاریتمی با $f(x) \succ g(x)$ معادل می‌باشد.

II. اگر $0 \prec a \prec 1$، آنگاه نامساوات لوگاریتمی با $f(x) \prec g(x)$ معادل می‌باشد.

مثال‌ها: ساحه حل نامساوی‌های زیر را دریافت نمائید.

$$1)\quad \log(2x-3) \prec 0 \quad \Rightarrow 2x-3 \prec 10^0 \quad \Rightarrow 0 \prec 2x-3 \prec 1$$

$$\Rightarrow 3 \prec 2x \prec 4 \quad \Rightarrow \frac{3}{2} \prec x \prec 2 \quad \Rightarrow Answer:\left(\frac{3}{2},2\right)$$

$$2)\quad \log_7 \frac{x-2}{x-3} \prec 0 \quad \Rightarrow \frac{x-2}{x-3} \prec 7^0 \quad \Rightarrow 0 \prec \frac{x-2}{x-3} \prec 1$$

$$\left\{\frac{x-2}{x-3} \prec 1 \quad \Rightarrow (-\infty,3), \qquad \left\{\frac{x-2}{x-3} \succ 0 \quad \Rightarrow (-\infty,2)\cup(3,+\infty)\right.\right.$$

$$\Rightarrow (-\infty,3)\cap(-\infty,2)\cup(3,+\infty) \Rightarrow Answer:(-\infty,2)$$

$$3)\qquad \log_{\frac{1}{4}}(2x-3)\succ 0 \qquad \Rightarrow (2x-3)\prec\left(\frac{1}{4}\right)^{0} \qquad \Rightarrow (2x-3)\prec 1$$

$$\Rightarrow 2x\prec 4 \qquad \Rightarrow x\prec 2 \qquad Answer:(-\infty,2)\cap\left(\tfrac{3}{2},+\infty\right)=\left(\frac{3}{2},2\right)$$

کرکترستیک و مانتیس

$$\begin{cases}100=10^2 & \Rightarrow \log 100=2\\ 1000=10^3 & \Rightarrow \log 1000=3\end{cases}$$

اگر عدد بین 100 و 1000 باشد، مسلماً لوگاریتم آن بین 2 و 3 می‌باشد. مثلاً: اگر $\log 200=2.30103$ باشد، عدد 2 را بنام کرکترستیک و عدد اعشاری 0.30103 را مانتیس یا قیمت اعشاری گویند که از جدول لوگاریتم به‌دست می‌آید.

نکته: کرکترستیک از لحاظ علامت، مثبت یا منفی و یا ممکن است صفر باشد اما مانتیس همیشه مثبت است.

دریافت کرکترستیک

برای دریافت کرکترستیک حالات ذیل را بخاطر داشته باشید.

۱. هرگاه عدد بزرگ‌تر از 1 باشد، برای دریافت کرکترستیک آن تعداد ارقام صحیح آن‌را شمرده یک واحد از آن کم می‌کنیم و در نتیجه کرکترستیک عدد مورد نظر حاصل می‌شود.

کرکترستیک اعداد بزرگ‌تر از یک $=n-1$

در رابطه فوق n عبارت از تعداد ارقام قبل از اعشاری یا تعداد ارقام صحیح می‌باشد.

۲. هرگاه عدد کوچک‌تر از 1 باشد، کرکترستیک آن منفی بوده که برابر با تعداد صفرهای بعد از علامه اعشاری به علاوه عدد 1 .

$-(n+1)=$ کرکترستیک اعداد کوچک‌تر از یک

در رابطه فوق n عبارت از تعداد صفرهای بعد از علامه اعشاری می‌باشد.

مثال‌ها: کرکترستیک اعداد زیر را دریافت نمائید.

۱. کرکترستیک $\log 500$ برابر است با 2 زیرا تعداد ارقام صحیح آن 3 بوده که یک واحد از آن کم نمائیم 2 می‌شود.

۲. کرکترستیک $\log 30$ برابر است با 1 زیرا تعداد ارقام صحیح آن 2 بوده که یک واحد از آن کم نمائیم 1 می‌شود.

۳. کرکترستیک $\log 3$ برابر است با 0 زیرا تعداد ارقام صحیح آن 1 بوده که یک واحد از آن کم نمائیم 0 می‌شود.

۴. کرکترستیک $\log 1853$ برابر است با 3 زیرا تعداد ارقام صحیح آن 4 بوده که یک واحد از آن کم نمائیم 3 می‌شود.

۵. کرکترستیک $\log 0.312$ برابر است با -1 زیرا بعد از علامه اعشاری هیچ صفر موجود نیست.

۶. کرکترستیک $\log 0.05$ برابر است با -2 زیرا بعد از علامه اعشاری یک صفر موجود است.

۷. کرکترستیک $\log 0.008$ برابر است با -3 زیرا بعد از علامه اعشاری دو صفر موجود است.

دریافت مانتیس اعداد لوگاریتمی

مانتیس لوگاریتم اعداد بستگی به علامه اعشاری ندارد بلکه بستگی به خود ارقام دارد، یعنی همه اعداد خورد و بزرگ که دارای عین ارقام اند مانتیس‌های شان برابر است. مانند:

1) $\log 3 = 0.47712$

2) $\log 30 = 1.47712$

3) $\log 300 = 2.47712$

4) $\log 0.3 = -0.52287 = -1.47712 = \bar{1}.47712$

5) $\log 0.03 = -1.52287 = \bar{1}.52287 = \bar{2}.47712$

6) $\log 0.003 = -2.52287 = \bar{2}.52287 = \bar{3}.47712$

نکته: هرگاه مانتیس منفی باشد، یک واحد از کرکترستیک کم کرده و به مانتیس یک واحد علاوه می‌کنیم.

دریافت لوگاریتم اعداد

برای دریافت لوگاریتم اعداد نیاز به جدول لوگاریتمی است. و معمولاً جدول‌های مروج و موجود به قاعده‌های 10 و e می‌باشد که برای روشن شدن موضوع حالات زیر را بررسی می‌کنیم.

❖ برای دریافت $\log_{10} B$ در صورتِ که B به‌صورت توانهای صحیح مثبت 10 باشد.

1) $\log_{10} 10 = \log_{10} 10^1 = 1 \cdot \log_{10} 10 = 1$

2) $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2\log_{10} 10 = 2$

3) $\log_{10} 100000 = \log_{10} 10^5 = 5\log_{10} 10 = 5$

❖ برای دریافت $\log_{10} B$ در صورتِ که B به‌صورت توان‌های صحیح منفی 10باشد.

1) $\log_{10} 0.1 = \log_{10} \frac{1}{10} = \log_{10} 10^{-1} = -1 \cdot \log_{10} 10 = -1$

2) $\log_{10} 0.001 = \log_{10} \frac{1}{1000} = \log_{10} \frac{1}{10^3} = \log_{10} 10^{-3}$
$= -3\log_{10} 10 = -3$

3) $\log_{10} 0.000001 = \log_{10} \frac{1}{1000000} = \log_{10} \frac{1}{10^6}$
$= \log_{10} 10^{-6} = -6\log_{10} 10 = -6$

❖ برای دریافت $\log_{10} B$ در صورتِ که B به‌صورت توانهای صحیح 10 نباشد، برای دریافت لوگاریتم این اعداد اولاً آنها را به‌صورت علمی نوشته و با استفاده از خواص لوگاریتم و جدول چنین به‌دست می‌آوریم.

مثال: افاده $\log 247$ را محاسبه نمائید.

$$\log 247 = \log 2.47 \times 10^2 = \log 2.47 + \log 10^2 = \log 2.47 + 2$$

برای دریافت مانتیس یک عدد مورد نظر ارقام عدد داده شده را از طرف چپ در نظر گرفته به استثنای یک رقم طرف راست آن عدد را در جدول ملاحظه نموده که به کدام ستون رقم طرف راست عدد است. تقاطع سطر و ستون اعشاری است که مانتیس آن عدد می‌باشد.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
24	0.3802	0.3820			0.3874			0.3927		

در مثال فوق عدد 2 عبارت از کرکترستیک می‌باشد برای دریافت مانتیس سطر 24 را تحت ستون 7 مطالعه نموده که عدد به عدد 0.3927 مطابقت می‌نماید. یعنی عدد 0.3927 مانتیس عدد 2.47 می‌باشد.

$$\log 2.47 + 2 = 0.3927 + 2 = 2.3927$$

نکته: برای سهولت می‌توان از ماشین‌حساب علمی استفاده نمود.

انتی لوگاریتم

هرگاه $\log_a y = x$ باشد، پس y را بنام انتی لوگاریتم x می‌نامند.

$$y = anti \log x$$

مثلاً: اگر $\log 34 = 1.5315$ باشد، انتی لوگاریتم 1.5315 مساوی به 34 است.

$$1)\qquad \log 100 = 2 \qquad \Rightarrow anti\log 2 = 100$$
$$2)\qquad \log 1000 = 3 \qquad \Rightarrow anti\log 3 = 1000$$

نکته: هرگاه لوگاریتم اعداد اعشاری باشد مطابق با جدول می‌توان انتی لوگاریتم اعداد دریافت نمود.

رابطه بین لوگاریتمی طبیعی و اعشاری

با در نظر داشت قاعده‌های این دو لوگاریتم یعنی اعداد 10 و e با استفاده از تبدیل قاعده لوگاریتم داریم:

$$\ln x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} e} = \frac{1}{\log_{10} e} \cdot \log_{10} x \Rightarrow \log_{10} e = 0.4343$$
$$\ln x = \frac{\log_{10} x}{0.4343} \quad \Rightarrow \ln x = 2.3026 \log_{10} x$$

مثال: $\ln 4.69$ را دریافت نمائید.

$$\ln x = 2.3026 \log x$$
$$\ln 4.69 = 2.3026 \log 4.69$$
$$\ln 4.69 = 2.3026 \times 0.6712 = 1.5455$$

فصل پنجم ترادف و سلسله‌ها

طبیعت با نابغه در پیوندی جاودانی است، هر عهدی که این یک می‌بندد آن دیگری لاجرم وفا می‌کند. (شیلر)

آشنایی: فصل اخیر ریاضیات (۳) درباره ترادف و سلسله‌ها می‌باشد و ترادف عبارت از تابع است که ناحیه تعریف آن اعداد طبیعی و ناحیه قیمت‌های آن اعداد حقیقی باشد، که در اینجا مفاهیم مقدماتی و بسیط آن را به بررسی می‌گیریم.

ترادف: به سلسله از اعداد گفته می‌شود که حدود آن با قاعده‌های خاصی تعریف می‌شوند و هر یک از حدود ترادف توسط حد عمومی آن مشخص می‌شود که با a_n نشان داده می‌شود. مانند:

$$a_n = 2n+1 \qquad ; n = 1,2,3,...$$
$$b_n = 3n \qquad ; n = 1,2,3,...$$
$$c_n = 2+n \qquad ; n = 1,2,3,...$$
$$a_n = a_n \qquad ; a_1, a_2, a_3, ..., a_n$$

در مثال‌های فوق a_1 حد اول، a_2 حد دوم،... a_n را حد n ام ترادف می‌گویند.

مثال: هرگاه اعداد طبیعی را به‌صورت $1,2,3,...,n,....$ یعنی هر حد برابر باشد با حد قبلی خود به اضافه عدد یک، به آن ترادف می‌گویند، در اینجا n یک عدد طبیعی نامشخص فرض شده، حد عمومی یا حد مرتبه n ام ترادف اعداد طبیعی می‌نامند.

انواع ترادف

ترادف معیین: هرگاه تعداد حدود یک ترادف معیین باشد آن‌را بنام ترادف معیین یاد می‌کنند. مانند:

$2,6,10,14,18,$

در مثال فوق حد آخر 18 می‌باشد، پس ترادف معیین می‌باشد.

ترادف نامعیین: هرگاه تعداد حدود یک ترادف معیین نباشد بنام ترادف نامعیین یاد می‌کنند. مانند:

$3,6,9,12,15,3n$

در ترادف فوق n عدد طبیعی بوده که آن را معیین کرده نمی‌توانیم لذا ترادف نامعیین می‌باشد.

ترادف صعودی (تصاعد)

ترادف که قیمت عددی حدود آن به‌تدریج افزایش می‌یابد، ترادف صعودی گفته می‌شود. مانند: $2,4,6,...2n$

ترادف نزولی (متناقص)

ترادف که قیمت عددی حدود آن به‌تدریج کاهش می‌یابد، ترادف متناقص گفته می‌شود. مانند: $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...,\frac{1}{n+1}$

ترادف متناوب: ترادف که حدود آن به یک نظم خاص به‌صورت تناوب تکرار شود بنام ترادف متناوب گفته می‌شود. مانند: $1,0,1,0,...,\frac{(-1)^n+1}{2}$

ترادف حسابی: هرگاه در یک ترادف فرق بین دو حد متعاقب آن همیشه یک عدد ثابت باشد آن را ترادف حسابی می‌نامند. مانند:

$3,5,7,9,11,...$

$2,4,6,8,10$

فرق مشترک: تفاضل دو حد متوالی را در ترادف حسابی بنام فرق مشترک یاد می‌کنند و به حرف d نشان می‌دهند، در صورتِ که d یک عدد مثبت $d\succ 0$

، ترادف را متزاید و اگر فرق مشترک عدد منفی $(d \prec 0)$ باشد ترادف را متناقص می‌گویند. یعنی: $d = a_n - a_{n-1}$

$$3,5,7,9,\ldots \quad a_1 = 3, a_2 = 5 \quad d = a_2 - a_1 \Rightarrow d = 5-3 = 2 \quad \Rightarrow d \succ 0$$

چون $d \succ 0$ است پس ترادف حسابی متزاید است.

$$20,15,10,5,\ldots \quad a_1 = 20, a_2 = 15 \quad \Rightarrow d = 15-20 = -5 \quad \Rightarrow d \prec 0$$

چون $d \prec 0$ است پس ترادف حسابی متناقص است.

دریافت حد n ام در یک ترادف حسابی

هرگاه در یک ترادف حسابی حد اول آن a_1 و فرق مشترک آن d باشد، برای دریافت حد n ام از ثبوت تحلیلی زیر استفاده می‌نمائیم.

حد n ام	$\cdots$	حد چهارم	حد سوم	حد دوم	حد اول
$a_1 + (n-1)d$	$\cdots$	$a_1 + 3d$	$a_1 + 2d$	$a_1 + d$	a_1
a_n	$\cdots$	a_4	a_3	a_2	a_1

در نتیجه رابطه $a_n = a_1 + (n-1)d$ برقرار است.

مثال اول: حد اول یک ترادف 2 و فرق مشترک آن 3 می‌باشد، حد ششم این ترادف را دریابید.

$$a_1 = 2, \quad d = 3, \quad a_6 = ? \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\Rightarrow a_6 = 2 + (6-1)3 = 17$$

مثال دوم: حد نهم ترادف حسابی $(2,4,6,8)$ را به‌دست آورید.

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ n = 9 \\ a_9 = ? \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} d = a_2 - a_1 \\ d = 4 - 2 \\ d = 2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)d \\ a_9 = 2 + (9-1)2 \\ a_9 = 2 + 8 \cdot 2 = 18 \end{cases}$$

مثال سوم: در یک ترادف حسابی $a_1 = 5$ و $a_n = 75$ و تعداد حدود آن $n = 15$ می‌باشد، فرق مشترک را به‌دست آورید.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad \Rightarrow 75 = 5 + (15-1)d \quad \Rightarrow d = 5$$

مثال چهارم: تعداد حدود ترادف حسابی زیر را دریافت کنید.

$$35, 40, 45, ..., 2000 \qquad a_1 = 35, \quad d = 5, \quad a_n = 2000, \ n = ?$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad \Rightarrow 2000 = 35 + (n-1)5$$

$$\Rightarrow 400 = 7 + (n-1) \qquad \Rightarrow 400 = 6 + n \qquad \Rightarrow n = 394$$

مثال پنجم: اگر حد پنجم یک ترادف 20 و حد نهم آن 36 باشد، حد هفتم آن‌را دریابید.

$$\begin{cases} a_5 = a_1 + 4d = 20 \\ a_9 = a_1 + 8d = 36 \end{cases} \Rightarrow d = 4, \quad a_1 = 4 \qquad \Rightarrow a_7 = 4 + 6 \times 4 = 28$$

علاوه نمودن حدود در ترادف حسابی

هرگاه حد اول یک ترادف حسابی a_1 و حد اخیر آن a_n باشد بین حد اول و آخر l حد علاوه نمائیم از رابطه ذیل استفاده می‌کنیم.

$$a_1, \underbrace{.............}_{l \text{ حد}}, a_n$$

از ترادف فوق نتیجه می‌گیریم که تعداد حدود آن برابر است با l به اضافه حد اول و آخر یعنی: $n = l + 2$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad \Rightarrow a_n - a_1 = (n-1)d \quad \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{(n-1)}$$

$$\Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{l + 2 - 1} = \frac{a_n - a_1}{l + 1}$$

مثال: بین 2 و 14 سه حد علاوه نمائید.

$$a_n = 14,\ a_1 = 2, \quad \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{m+1} = \frac{14-2}{3+1} = 3,\ \Rightarrow 2,5,8,11,14$$

توجه: حالات ذیل را به خاطر داشته باشید.

۱. برای به‌دست آوردن فرق مشترک (d) از رابطه ذیل استفاده می‌کنیم.

$$d = \frac{a_n - a_m}{n-m} \quad n \succ m \qquad proof:\ a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\Rightarrow a_n - a_1 = (n-1)d \quad \Rightarrow d = \frac{a_n - a_1}{n-1} \Rightarrow d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$$

۲. هرگاه حدود ترادف پی در پی معلوم باشد، فرق مشترک را از رابطه ذیل استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} d = a_2 - a_1 \\ d = a_n - a_{n-1} \end{cases} \quad n \succ m$$

۳. برای حد خواسته شده دلخواه رابطه ذیل قابل اهمیت است.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad \Rightarrow a_n = a_m + (n-m)d$$

۴. هم چنان رابطه ذیل را می‌توان به‌دست آورد.

$$a_n + a_m = a_p + a_q \ \ if\ \ n+m = p+q \qquad ex: a_1 + a_5 = a_2 + a_4$$

۵. برای به‌دست آوردن مجهول از حدود از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

ترادف‌هارمونیک

یک ترادف $\{a_n\}$ را زمانی ترادف‌هارمونیک گویند که معکوس آن یعنی: $b_n = \frac{1}{a_n}$ یک ترادف حسابی باشد.

مثلاً ترادف $1,3,5,7,...$ یک ترادف حسابی گفته می‌شود. زیرا $d=2$ است، معکوس حدود این ترادف یعنی: $1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},...$ را یک ترادف‌هارمونیک گویند.

اوسط‌هارمونیکی

هرگاه حدود مسلسل a_{n-1}، a_n و a_{n+1} را در نظر بگیریم در حالی که $n=2,3,4,...$ باشد، با در نظر داشت این که $\frac{1}{a_{n+1}},\frac{1}{a_n},\frac{1}{a_{n-1}}$، حدود یک ترادف‌هارمونیک است می‌توان نوشت که:

$$\frac{1}{a_n}=\frac{\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n-1}}}{2}=\frac{\frac{(a_{n-1})+(a_{n+1})}{(a_{n+1})(a_{n-1})}}{2} \quad \Rightarrow \frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}\frac{(a_{n-1})+(a_{n+1})}{(a_{n+1})(a_{n-1})} \quad /(\ )^{-1}$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{2(a_{n+1})(a_{n-1})}{(a_{n-1})+(a_{n+1})}$$

مثال: اوسط‌هارمونیکی اعداد $4,16$ را دریابید.

$$a_n=\frac{2(4\times16)}{4+16}=\frac{128}{20}=6.4$$

ترادف هندسی

ترادف که نسبت بین دو حد متعاقب آن یک عدد ثابت q باشد، بنام ترادف هندسی یاد می‌شود. مانند:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},... \qquad 3,9,27,81,...$$

نسبت مشترک: عددی که از حاصل تقسیم هر دو حد متعاقب یک ترادف هندسی به‌دست آید، بنام نسبت مشترک یاد می‌گردد و حرف q نشان می‌دهند.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

مثال: ترادف هندسی $6,12,24,48,...$ را در نظر گرفته نسبت مشترک آن را معلوم کنید.

$$q = \frac{a_{n+1}}{a_n} \qquad \Rightarrow q = \frac{12}{6} = 2 \quad , \qquad q = \frac{24}{12} = 2 \qquad \Rightarrow q = 2$$

توجه: نکات ذیل را بخاطر داشته باشید.

- برای $q \succ 1$ ترادف متزاید می‌باشد.
- برای $q \prec 1$ ترادف متناقص است.
- برای $q = 1$ ترادف ثابت می‌باشد.

دریافت حد n ام ترادف هندسی

اگر a_1 حد اول، q نسبت مشترک و n تعداد حدود در یک ترادف هندسی معلوم باشد، برای دریافت فورمول حد n اُم از ثبوت تحلیلی زیر استفاده می‌کنیم.

ترادف هندسی $a_1, a_2, ..., a_n$ را در نظر می‌گیریم.

حد n ام	...	حد پنجم	حد چهارم	حد سوم	حد دوم	حد اول
a_1q^{n-1}	...	a_1q^4	a_1q^3	a_1q^2	a_1q	a_1
a_n	...	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1

از رابطه فوق نتیجه می‌شود: $a_n = a_1q^{n-1}$

مثال اول: حد هفتم ترادف هندسی زیر را دریافت نمائید.

$$5,10,20,40,... \ \{a_1 = 5, \ q = 2, \quad n = 7, \quad a_7 = ?$$

$$\Rightarrow a_7 = 5 \cdot 2^6 = 320$$

مثال دوم: حد اول یک ترادف هندسی 3 و حد آخر 729 می‌باشد، تعداد حدود این ترادف را حساب نمائید، طوری که $q=3$ باشد.

$$a_1=3,\ a_n=729,\ \ q=3,\ n=?\ \ \Rightarrow a_n=a_1q^{n-1}\ \ \Rightarrow 729=3\cdot 3^{n-1}$$

$$\Rightarrow 729=3\times\frac{3^n}{3}\qquad \Rightarrow 729=3^n\quad \Rightarrow 3^6=3^n\quad \Rightarrow n=6$$

علاوه نمودن حدود در ترادف هندسی

هرگاه حد اول یک ترادف هندسی a_1 و حد اخیر آن a_n باشد و خواسته باشیم بین حد اول و حد اخیر l حد علاوه نمائیم از رابطه ذیل استفاده می‌کنیم.

$$a_1,\underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots}_{l\ \text{حد}},a_n$$

از ترادف فوق نتیجه می‌گیریم که تعداد حدود آن برابر است با l حد به علاوه حد اول و حد اخیر یعنی: $n=2+l$

$$a_n=a_1q^{n-1}\qquad \Rightarrow a_n=a_1q^{2+m-1}\qquad \Rightarrow \frac{a_n}{a_1}=q^{m+1}\quad \Rightarrow q=\sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

مثال: بین دو عدد $4,256$ سه حد علاوه نمائید.

$$q=\sqrt[m+1]{\frac{a_n}{a_1}}=\sqrt[3+1]{\frac{256}{4}}=\sqrt[4]{64}=\sqrt{8}\qquad \Rightarrow 4,4\sqrt{8},32,32\sqrt{8},256$$

توجه: نکات ذیل را بخاطر داشته باشید.

۱. مربع یکی از حدود مساویست به حاصل ضرب دو حد طرفین آن یعنی:

$$a_1,a_1q,a_1q^2,aq^3\qquad \Rightarrow\left(a_1q^2\right)^2=\left(a_1q\right)\left(a_1q^3\right)$$

۲. حاصل ضرب n حد تاق در یک ترادف هندسی عبارت است:

$$2,6,18,54,162\ \Rightarrow 18^5=1889568$$

۳. رابطه زیر قابل اهمیت است.

$$a_n=a_1q^{n-1}\qquad \Rightarrow a_n=a_mq^{n-m}$$

۴. برای به‌دست آوردن نسبت مشترک از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$q = \sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}} \Rightarrow a_n = a_m q^{n-m} \Rightarrow \frac{a_n}{a_m} = q^{n-m} \quad \Rightarrow q = \sqrt[n-m]{\frac{a_n}{a_m}}$$

سلسله‌ها

حاصل جمع ترادف‌ها را سلسله می‌نامند. یعنی :

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

اصلاح

سلسله فوق را به‌صورت خلاصه و فشرده توسط سمبول سیگما $\sum$ نمایش می‌دهند. یعنی:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

عبارت فوق خوانده می‌شود (a_i از i مساوی به 1 تا به n)

مثال‌ها:

1) $\sum_{i=1}^{4} a_i = 1+2+3+4=10$

2) $\sum_{i=1}^{3} i+5 = (1+5)+(2+5)+(3+5) = 21$

سلسله‌های معیین: سلسله‌های که تعداد حدود آن معیین باشد، بنام سلسله معیین یاد می‌کنند. مانند:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i$$

سلسله‌های نامعیین: سلسله‌های که تعداد حدود آن نامعیین باشد، بنام سلسله نامعیین یاد می‌کنند. مانند:

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i$$

سلسله حسابی: هرگاه در بین حدود ترادف حسابی علامه جمع موجود باشد آن را سلسله حسابی می‌نامند و به عبارت دیگر حاصل جمع یک ترادف حسابی را سلسه حسابی می‌نامند و از رابطه ذیل استفاده می‌نماییم.

اصلاح

$$s_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right] \qquad s_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)\right]$$

در رابطه فوق s_n حاصل جمع حدود n تعداد حدود، a_1 حد اول و a_n حد اخیر ترادف حسابی است و به‌صورت زیر ثبوت می‌نمائیم.

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_n - 2d) + (a_n - d) + a_n \ldots I$$

$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$

$$s_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + (a_1 + 2d) + (a_1 + d) + a_1 \ldots II$$

$$\Rightarrow I + II = 2s_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

$$\Rightarrow 2s_n = n(a_1 + a_n) \quad \Rightarrow \boxed{s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

همچنان $a_n = a_1 + (n-1)d$ داریم:

$$s_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_1 + (n-1)d\right] = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

مثال اول: در یک ترادف حاصل جمع سلسله حسابی را معلوم نمائید در صورتِ که $a_1 = 4,\ a_n = 25,\ n = 8$.

$$s_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right] \qquad \Rightarrow s_n = \frac{8}{2}(4+25) = 4 \cdot 29 = 116$$

مثال دوم: حاصل جمع شش حد سلسه حسابی را دریابید در صورتِ که $d = 2,\ a_1 = 2$ باشد.

$$s_6 = \frac{6}{2}\left[2(2) + (6-1)2\right] \qquad \Rightarrow s_6 = 3\left[4+10\right] = 42$$

<u>نکات ذیل را بخاطر داشته باشید.</u>

۱. در هر ترادف حسابی چنانچه تعداد حدود تاق باشد و حد وسط m باشد در این صورت مجموعه حدود را می‌توان از رابطه ذیل استفاده کرد.

مجموعه حدود تاق$= s_n = nm$

۲. سلسله اعداد طبیعی که از یک الی n باشد، از رابطه ذیل استفاده می‌کنیم.

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad proof :\{a_1 = 1 \,,\ d = 1,\ n = n \quad s_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right]$$

$$\Rightarrow s_n = \frac{n}{2}[2+n-1] \quad \Rightarrow s_n = \frac{n}{2}(n+1) \quad \Rightarrow \boxed{s_n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

۳. برای به‌دست آوردن سلسله اعداد تاق مسلسل از رابطه ذیل استفاده می‌کنیم. $s_n = n^2$

۴. برای به‌دست آوردن سلسله جفت مسلسل از رابطه ذیل استفاده می‌کنیم. $s_n = n(n+1)$

۵. برای به‌دست آوردن سلسله مربعات اعداد طبیعی از رابطه ذیل استفاده می‌کنیم.

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

۶. برای به‌دست آوردن سلسله مکعبات اعداد طبیعی از رابطه ذیل استفاده می‌کنیم.

$$s_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

سلسله هندسی: حاصل جمع حدود ترادف هندسی را بنام سلسله هندسی یاد می‌کنند. برای به‌دست آوردن سلسله هندسی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

در رابطه فوق s_n حاصل جمع حدود ترادف هندسی و a_1 حد اول و q نسبت مشترک در ترادف هندسی می‌باشد که به‌صورت ذیل ثبوت می‌کنیم:

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \ldots + a_1 q^{n-1} \ldots.. I$$

$$s_n q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + \ldots + a_1 q \ldots.. II$$

$$\Rightarrow I - II:\ \ s_n - s_n q = a_1 - a_1 q = a_1\left(1 - q^n\right)$$

ان بتوان

$$\Rightarrow s_n\left(1 - q\right) = a_1\left(1 - q^n\right) \qquad \Rightarrow s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

مثال اول: در یک ترادف هندسی حد اول 3 و نسبت مشترک 2 می‌باشد، حاصل جمع 6 حد اول آن‌را دریابید.

$$\left\{ a_1 = 3,\ q = 2,\ n = 6 \quad \Rightarrow s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad \Rightarrow s_n = 3 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 189 \right.$$

مثال دوم: مجموع چند حد از ترادف هندسی ذیل، 80 می‌شود.

$$2, 6, 18, \ldots \qquad \Rightarrow a_1 = 2,\quad q = 3,\quad n = ?\quad s_n = 80$$

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad \Rightarrow 80 = 2 \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} \quad \Rightarrow 80 = 3^n - 1 \ \ \Rightarrow 81 = 3^n \Rightarrow n = 4$$

سلسله‌های متباعد: هرگاه در یک سلسله هندسی $|q| \succ 1$ و تعداد حدود معیین نباشد در این صورت حد اخیر سلسله مذکور به بی نهایت خواهد رسید که این نوع سلسله را متباعد می‌گویند. یعنی:

$$if\ n \to \infty \qquad \Rightarrow s_\infty = \frac{a_1\left(q^\infty - 1\right)}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot \infty}{q - 1} = \infty$$

سلسله متقارب: در صورتِ که $|q| \prec 1$ باشد آن سلسله را بنام متقارب می‌نامند. یعنی:

$$s = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad \Rightarrow s_\infty = a_1 \cdot \frac{1-q^\infty}{1-q} \quad \Rightarrow s_\infty = \frac{a_1 - 0}{1-q} \quad \Rightarrow s_\infty = \frac{a_1}{1-q}$$

مثال: کسر $0,\bar{3}$ را با استفاده از سلسله متقارب به کسر عام تبدیل نمائید.

$$0,\bar{3} = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + ... = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \frac{3}{10000} + ...$$

$$\Rightarrow a_1 = 0.3\ ,\ q = \frac{1}{10} \prec 1 \qquad \Rightarrow s_\infty = \frac{0.3}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

سلسله‌های متناوب: اگر حدود سلسله‌ها یک در میان مثبت و منفی باشد سلسله را بنام متناوب یاد می‌کنند. مانند:

$$\sum_{m=1}^{n} 2m(-1)^{m+1}$$

خواص سلسله‌ها

برای سهولت در محاسبه سلسله‌ها از روابط ذیل استفاده می‌کنیم.

۱. هرگاه a یک عدد ثابت باشد داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} na$$

۲. هرگاه a_i یک ترادف بوده و c عدد ثابت باشد داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$$

۳. هرگاه a_i و b_i دو سلسله باشد داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)$$

۴. هرگاه a_i و b_i دو سلسله باشد داریم:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n}\left(a_i - b_i\right)$$

۵. رابطه ذیل در سلسله‌ها قابل اهمیت است.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=n+1}^{m} b_i = \sum_{i=1}^{m}\left(a_i\right)$$

هرگاه $\left(a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_m\right)$ یک ترادف از اعداد باشد و $i \in \mathbb{Z}$ داریم:

$$\sum_{i=n}^{m} a_i = \sum_{i=n-k}^{m-k}\left(a_i + k\right) \qquad \wedge \qquad \sum_{i=n}^{m} a_i = \sum_{i=n+k}^{m+k}\left(a_i - k\right)$$

ترکیب

هرگاه r و n دو عدد طبیعی باشند طوری که $0 \le r \le n$ در این صورت ترکیب n و r عبارت است از:

$$\binom{n}{r} = C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال‌ها:

1) $$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3\cdot2\cdot1\cdot3!} = 20$$

2) $$\binom{12}{10} = \frac{12!}{10!(12-10)!} = \frac{12\cdot11\cdot10!}{10!\cdot2!} = 66$$

خواص ترکیب: برای دو عدد طبیعی r و n طوری که $0 \le r \le n$، داریم:

1) $$\binom{n}{0} = 1 \qquad \Rightarrow \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

2) $$\binom{n}{n} = 1 \qquad \Rightarrow \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!\cdot0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

3) $$\binom{n}{n-1}=n$$

$$proof:\ \binom{n}{n-1}=\frac{n!}{(n-1)!\left(n-(n-1)\right)!}=\frac{n!}{(n-1)!\cdot 1!}=\frac{n(n-1)!}{(n-1)!}=n$$

4) $$\binom{n}{0}=\binom{n+1}{0}$$

$$proof:\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!(n-0)!}=\frac{n!}{n!}=\frac{(n+1)!}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!}{0!(n+1-0)!}$$

5) $$\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}$$

$$proof:\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!(n-n)!}=\frac{n!}{n!0!}=\frac{n!}{n!}=\frac{(n+1)!}{(n+1)!}=\frac{(n+1)!}{(n+1)!0!}=$$

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot\left((n+1)-(n+1)\right)!}=\binom{n+1}{n+1}$$

6) $$\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\binom{n+1}{r}$$

$$proof:\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}=\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{r!(n-r)!}=$$

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!(n-r+1)}+\frac{n!}{r(r-1)!(n-r)!}=$$

$$\frac{n!r+n!(n-r+1)}{(r-1)!(n-r)!(n-r+1)r}=\frac{n!(r+n-r+1)}{r!\ (n-r+1)!}=$$

$$\frac{n!(n+1)}{r!(n+1-r)!}=\frac{(n+1)!}{r!\ \left((n+1)-r\right)!}=\binom{n+1}{r}$$

....

	سوالات چهار گزینه ی
۱	جذر معادله $-9x+34=8x$ عبارت است از: الف) 2 ب) 3 ج) 4 د) 5
۲	جذر معادله $2x+6\left(\frac{1}{2}x+4\right)=14$ عبارت است از: الف) 2 ب) 3 ج) -2 د) -3
۳	جذر معادله $\frac{7}{2x+1}-\frac{8x}{2x-1}=-4$ عبارت است از: الف) $\frac{6}{11}$ ب) $\frac{11}{6}$ ج) $\frac{12}{7}$ د) $\frac{7}{12}$
۴	جذر معادله $\frac{2x+5}{x+3}+\frac{3x-2}{x}=5$ عبارت است از: الف) 2 ب) -2 ج) 3 د) 4
۵	جذر معادله $\sqrt{x-9}=8$ عبارت است از: الف) 73 ب) 37 ج) 47 د) 38
۶	جذر معادله $6-\sqrt{x-5}=3$ عبارت است از: الف) 12 ب) 13 ج) 14 د) 15
۷	$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ با فرض $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$ مقدار x چند است؟ الف) $\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}$ ب) $\frac{a_1b_2-a_2b_1}{c_1b_2-c_2b_1}$ ج) $\frac{a_1b_2+a_2b_1}{c_1b_2-c_2b_1}$ د) $\frac{a_1b_2+a_2b_1}{c_1b_2+c_2b_1}$
۸	جذر معادله $\frac{(0.2)^{x-0.5}}{\sqrt{5}}=5\times(0.04)^{x-1}$ عبارت است از: الف) 2 ب) 3 ج) 4 د) 5

۹	جذر معادله $\frac{27}{64}=\left(\frac{9}{8}\right)^x\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x$ عبارت است از: الف) 3 ب) 4 ج) 5 د) 6
۱۰	جذر معادله $\frac{9}{16}=\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)$ عبارت است از: الف) -1 ب) 3 ج) 4 د) 5
۱۱	جذر معادله $(x+2)^2-x^2+4=0$ عبارت است از: الف) 3 ب) 2 ج) -3 د) -2
۱۲	نقطه $p(-2,3)$ در کدام ناحیه قرار دارد. الف) اول ب) دوم ج) سوم د) چهارم
۱۳	قیمت x از معادله $a^2(x-a)=b^2(x-b)$ عبارت است از: الف) $\frac{a^2-ab+b^2}{a+b}$ ب) $\frac{a^2+ab+b^2}{a-b}$ ج) $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ د) $\frac{a^2+ab-b^2}{a+b}$
۱۴	قیمت x از معادله $m^2(x+1)=x+m$ عبارت است از: الف) $\frac{m-m^2}{m^2-1}$ ب) $\frac{m-m^2}{m^2+1}$ ج) $\frac{m+m^2}{m^2+1}$ د) $\frac{m+m^2}{m\ \ +1}$
۱۵	حل سیستم $\begin{cases}12x-5y=63\\8x-15y=77\end{cases}$ عبارت است از: الف) $\begin{pmatrix}x=4\\y=3\end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix}x=-4\\y=3\end{pmatrix}$ ج) $\begin{pmatrix}x=\ \ 4\\y=-3\end{pmatrix}$ د) $\begin{pmatrix}x=-4\\y=-3\end{pmatrix}$

۱۶	حل سیستم $\begin{cases} \frac{5}{3}x-\frac{2}{5}y=19 \\ 4x+\frac{3}{2}y=21 \end{cases}$ عبارت است از: الف) $\begin{pmatrix} x=-9 \\ y=10 \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} x=-9 \\ y=-10 \end{pmatrix}$ ج) $\begin{pmatrix} x=9 \\ y=-10 \end{pmatrix}$ د) $\begin{pmatrix} x=9 \\ y=10 \end{pmatrix}$
۱۷	گراف سیستم $\begin{cases} 2x+y=3 \\ 4x+2y=6 \end{cases}$ در چند نقطه تقاطع دارد. الف) هیچ نقطه ب) دو نقطه ج) یک نقطه د) بی نهایت
۱۸	$\begin{cases} \frac{2x}{3}-\frac{7y}{4}+z=0 \quad \frac{x}{5}+\frac{y}{4}-\frac{z}{2}=3 \quad \frac{4}{3}x-\frac{3}{2}y-2z=0 \end{cases}$ حل سیستم فوق عبارت است از: الف) $\begin{cases} z=4 \\ y=8 \\ x=15 \end{cases}$ ب) $\begin{cases} z=-4 \\ y=8 \\ x=15 \end{cases}$ ج) $\begin{cases} z=-4 \\ y=-8 \\ x=15 \end{cases}$ د) $\begin{cases} z=-4 \\ y=-8 \\ x=-15 \end{cases}$
۱۹	هرگاه سیستم معادلات سه مجهوله A دارای یک جواب معیین باشد. الف) $\|A\|=-1$ ب) $\|A\|=1$ ج) $\|A\|\neq 0$ د) $\|A\|=0$
۲۰	قیمت x در سیستم $\begin{cases} 3x+y+2z=3 \\ 2x-3y-z=-3 \\ x+2y+z=4 \end{cases}$ عبارت است از: الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4
۲۱	حل معادله $3x^2-48$ عبارت است از: الف) $\{-2,2\}$ ب) $\{-3,3\}$ ج) $\{-4,4\}$ د) $\{5,-5\}$
۲۲	حل معادله $\sqrt{x^2-9}=4$ عبارت است از: الف) $\{-2,2\}$ ب) $\{-3,3\}$ ج) $\{-4,4\}$ د) $\{5,-5\}$

۲۳	قیمت x در معادله $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$, $2x-y+3z=38$ عبارت است از: الف) 2 ب) 4 ج) 6 د) 12
۲۴	اگر x_1 , x_2 جذور معادله $x^2-29x-2=0$ و $x_1{}^2+x_2{}^2=12$ باشد، قیمت a کدام است؟ الف) $\pm\sqrt{2}$ ب) $\pm\sqrt{3}$ ج) ± 2 د) ± 3
۲۵	اگر x_1 , x_2 جذور معادله $x^2-3x-1=0$ باشد حاصل عبارت $\lvert x_1-x_2\rvert$ کدام است؟ الف) $2\sqrt{3}$ ب) $3\sqrt{2}$ ج) $\sqrt{11}$ د) $\sqrt{13}$
۲۶	اگر جذور معادله درجه دوم $(m-1)x^2+3x-2m=0$ معکوس یکدیگر باشند، قیمت m را دریابید. الف) 2 ب) 3 ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{3}$
۲۷	حل معادله $\sqrt{x-4}=\frac{x-2}{\sqrt{2x-7}}$ عبارت است از: الف) 8 ب) 9 ج) 10 د) 11
۲۸	حل معادله $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$ عبارت است از: الف) 3 ب) 4 ج) 5 د) 6
۲۹	حل معادله $\sqrt{3x-2}=2\sqrt{x+2}-2$ عبارت است از: الف) $\{2,34\}$ ب) $\{12,34\}$ ج) $\{12,4\}$ د) $\{12,-4\}$
۳۰	حل معادله $\left(2+\sqrt{3}\right)^x+\left(2-\sqrt{3}\right)^x=4$ عبارت است از: الف) $\{0,1\}$ ب) $\{1,-1\}$ ج) $\{2,1\}$ د) $\{2,0\}$
۳۱	حل معادله $\lvert 2x-3\rvert=\lvert x+7\rvert$ عبارت است از:

	الف) $\left\{10,\frac{4}{3}\right\}$ ب) $\left\{-10,\frac{4}{3}\right\}$ ج) $\left\{-10,-\frac{4}{3}\right\}$ د) $\left\{10,-\frac{4}{3}\right\}$
۳۲	جذر معادله $\lvert x-2\rvert+\lvert x-1\rvert=x-3$ عبارت است از: الف) $x\in\mathbb{R}$ ب) $x\in\mathbb{Z}$ ج) $x\in\mathbb{N}$ د) $x=\varnothing$
۳۳	حل معادله $\lvert 3x-5\rvert=5-3x$ عبارت است از: الف) $\left(-\infty,\frac{5}{3}\right]$ ب) $\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right]$ ج) $\left(-\infty,-\frac{3}{5}\right]$ د) $\left(-\infty,\frac{3}{5}\right]$
۳۴	حل معادله $\lvert x+1\rvert+\lvert x+2\rvert=2$ عبارت است از: الف) $\left\{\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right\}$ ب) $\left\{\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right\}$ ج) $\left\{-\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right\}$ د) $\left\{-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right\}$
۳۵	حل معادله $\lvert x-1\rvert-\lvert x-2\rvert=1$ عبارت است از: الف) $[1,+\infty)$ ب) $[2,+\infty)$ ج) $[3,+\infty)$ د) $[4,+\infty)$
۳۶	حل معادله $\lvert\lvert 13-2x\rvert-1\rvert=2\lvert x\rvert$ عبارت است از: الف) $\frac{2}{3}$ ب) $\frac{3}{2}$ ج) $-\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$
۳۷	قیمت B در تجزیه کسر $\frac{x+9}{x^2+4x+3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+3}$ عبارت است از: الف) -2 ب) -3 ج) -4 د) 4
۳۸	هرگاه گراف معادله $ax^2+bx+c=0$ محور x را در یک نقطه قطع کند کدام رابطه ذیل درست است؟ الف) $\Delta\neq 0$ ب) $\Delta=0$ ج) $\Delta\succ 0$ د) $\Delta\prec 0$
۳۹	به کدام قیمت m معادله $2x+m=4+3x$ دارای جذر $x=2$ است؟ الف) 3 ب) 4 ج) 5 د) 6
۴۰	اگر یکی از جذور معادله $x^2-mx+2=0$ دو برابر دیگری باشد، قیمت

	m کدام است؟ الف) ± 1 ب) $\pm 2\sqrt{2}$ ج) ± 3 د) ± 4
۴۱	معادله $kx^2+(k+1)x+1=0$ جذور مساوی دارد، قیمت k کدام است؟ الف) 1 ب) -1 ج) 2 د) -2
۴۲	k را طوری تعیین کنید که جذور معادله $2x^2-5x+k+1=0$ معکوس یکدیگر باشند. الف) -1 ب) 1 ج) -2 د) 0
۴۳	حل معادله $9^x=81$ عبارت است از: الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4
۴۴	حل معادله $3^x+4^x=5^x$ عبارت است از: الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4
۴۵	اگر $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & 2\end{bmatrix}$ دترمنانت $\|A^{-1}\|^2$ کدام است. الف) 5 ب) 3 ج) 2 د) 1
۴۶	اگر $A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 3\\-7 & 6\end{bmatrix}$ دترمنانت A کدام است. الف) 33 ب) 1 ج) $\frac{1}{9}$ د) $\frac{1}{33}$
۴۷	اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\1 & 3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-5 & 1\\-2 & 0\end{bmatrix}$ باشد، افاده $2A-3B$ را محاسبه نمائید. الف) $\begin{bmatrix}19 & 5\\8 & -6\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}19 & -5\\8 & 6\end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix}19 & 5\\8 & 6\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}19 & 5\\-8 & 6\end{bmatrix}$

۴۸

اگر $B=\begin{bmatrix}-5 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ باشد افاده C^t+B^t را محاسبه نمائید.

الف) $\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 3 & -1\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}-4 & 1\\ 3 & 0\end{bmatrix}$

۴۹

اگر $B=(b_0)_{2\times2}=\left(-\frac{i}{j}\right)_{2\times2}$، پس متریکس B عبارت است از:

الف) $\begin{bmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

۵۰

اگر $A=(a_{ij})_{2\times3}=(i)_{2\times3}$ باشد، پس متریکس A مساوی است به:

الف) $A=\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ ب) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}$

ج) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ د) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

۵۱

کدام یک از متریکس‌های ذیل ستونی است.

الف) $A=(a_{ij})_{3\times1}$ ب) $A=(a_{ij})_{1\times3}$ ج) $A=(a_{ij})_{3\times3}$ د) $A=(a_{ij})_{2\times3}$

۵۲

بینوم $ax+b$ به کدام قیمت ذیل تغییر اشاره می‌دهد.

الف) a ب) b ج) $-a$ د) $-b/a$

۵۳

ساحه حل نامساوی $x^2+10\le 7x$ عبارت است از:

الف) $[2,5]$ ب) $[-2,5]$ ج) $[2,-5]$ د) $[3,5]$

۵۴

ساحه حل نامساوی $(2-x)(3x+1)(2x-3)\succ 0$ عبارت است از:

الف) $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$ ب) $\left(\frac{3}{2},2\right)$

	ج) $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{3}{2},2\right)$ د) $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)\cap\left(\frac{3}{2},2\right)$
۵۵	ساحه حل نامساوی $x^2-25\prec 0$ عبارت است از: الف) $(3,-3)$ ب) $(4,-4)$ ج) $(5,-5)$ د) $[5,-5]$
۵۶	ساحه حل نامساوی $\frac{(x+1)(3x-2)}{(5-2x)}\succ 0$ عبارت است از: الف) $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup\left(1,\frac{5}{2}\right)$ ب) $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cap\left(1,\frac{5}{2}\right)$ ج) $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$ د) $\left[-\infty,\frac{2}{3}\right]\cap\left(1,\frac{5}{2}\right)$
۵۷	ساحه حل نامساوی $\frac{3x-2}{2x-3}\prec 3$ عبارت است از: الف) $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\cap\left(\frac{7}{3},+\infty\right)$ ب) $\left[-\infty,\frac{3}{2}\right)\cap\left(\frac{7}{3},+\infty\right)$ ج) $\left(-\infty,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{3},+\infty\right)$ د) $\left[-\infty,\frac{3}{2}\right)\cap\left[\frac{7}{3},+\infty\right]$
۵۸	ساحه حل نامساوی $\frac{1}{x}\prec\frac{1}{3}$ عبارت است ار: الف) $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$ ب) $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$ ج) $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ د) $(-\infty,3)\cup(2,+\infty)$
۵۹	حل سیستم نامساوی $\begin{cases}x^2-4x+3\prec 0\\ 2x-4\prec 0\end{cases}$ عبارت است از: الف) $(1,2)$ ب) $(0,1)$ ج) $(-1,1)$ د) $[2,3)$
۶۰	ساحه حل نامساوی $\{x^2\prec 9,\ x^2\succ 7\}$ عبارت است از: الف) $\left(-3,-\sqrt{7}\right)\cup\left(\sqrt{7},3\right)$ ب) $\left(-4,-\sqrt{7}\right)\cup\left(\sqrt{7},4\right)$

	ج) $\left(-4,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},4\right)$ د) $\left(-4,-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5},4\right)$
۶۱	ساحه حل نامساوی $\lvert 2x-5\rvert \prec 3$ عبارت است از: الف) $(0,3)$ ب) $(-1,4)$ ج) $[1,4]$ د) $(1,4)$
۶۲	ساحه حل نامساوی $\lvert 2x-4\rvert \le 1$ عبارت است از: الف) $(1,2)$ ب) $(1,3.4)$ ج) $(1.5,2.5)$ د) $(1.3,3.4)$
۶۳	ساحه حل نامساوی $\left\lvert\frac{10}{x-1}\right\rvert \prec \left\lvert-\frac{5}{x+2}\right\rvert$ عبارت است از: الف) $(-\infty,-3)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$ ب) $(-\infty,-5)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ ج) $(-\infty,-1)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$ د) $(-\infty,-7)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$
۶۴	ساحه حل نامساوی $\lvert 1-3x\rvert-\lvert 2x+3\rvert \ge 0$ عبارت است از: الف) $(-\infty,-3)\cup\left(\frac{4}{5},+\infty\right)$ ب) $(-\infty,-3)\cup\left(\frac{3}{5},+\infty\right)$ ج) $(-\infty,-3)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$ د) $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$
۶۵	ساحه حل نامساوی $\left\lvert\frac{x+2}{2x-3}\right\rvert \prec 3$ عبارت است از: الف) $(-\infty,0)\cup(2.2,+\infty)$ ب) $(-\infty,-1)\cup(2.2,+\infty)$ ج) $(-\infty,1)\cup(2.2,+\infty)$ د) $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$
۶۶	ساحه حل نامساوی $\lvert x\rvert+\lvert x-1\rvert \prec 5$ عبارت است از: الف) $(-2,3)$ ب) $(-2,-3)$ ج) $(2,3)$ د) $(2,3.4)$
۶۷	ساحه حل نامساوی $\lvert\lvert x-3\rvert+1\rvert \ge 2$ عبارت است از: الف) $(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$ ب) $(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$ ج) $(-\infty,4)\cup(5,+\infty)$ د) $(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$
۶۸	ساحه حل نامساوی $\sqrt{3x-2} \succ 1$ عبارت است از:

الف) $(4,+\infty)$ ب) $(3,+\infty)$ ج) $(2,+\infty)$ د) $(1,+\infty)$	
ساحه حل نامساوی $\sqrt{\frac{2x-1}{3x-2}} \prec 3$ عبارت است از: الف) $(-\infty,0.4)\cup(0.68,+\infty)$ ب) $(-\infty,0.4)\cup(0.63,+\infty)$ ج) $(-\infty,0.5)\cup(0.68,+\infty)$ د) $(-\infty,0.4)\cup(0.6,+\infty)$	۶۹
ساحه حل نامساوی $6^{3-x} \succ 216$ عبارت است از: الف) $(0,+\infty)$ ب) $(1,+\infty)$ ج) $(2,+\infty)$ د) $(3,+\infty)$	۷۰
ساحه حل نامساوی $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\lvert x+2\rvert} \geq 81$ عبارت است از: الف) $(-\infty,-6)\cup(2,+\infty)$ ب) $(-\infty,-4)\cup(2,+\infty)$ ج) $(-\infty,-4)\cup(3,+\infty)$ د) $(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$	۷۱
ساحه حل نامساوی $\frac{1}{3^x+5} \prec \frac{1}{3^{x+1}-1}$ عبارت است از: الف) $(-1,1)$ ب) $(-1,2)$ ج) $(2,3)$ د) $(3,4)$	۷۲
ساحه حل نامساوی $4^{x+1.5}+9^x \prec 9^{x+1}$ عبارت است از: الف) $(0,+\infty)$ ب) $(1,+\infty)$ ج) $(2,+\infty)$ د) $(3,+\infty)$	۷۳
اگر $\log_{14} 28 = a$ باشد $A=\log_{49} 16$ را محاسبه نمایید. الف) $\frac{2(a-1)}{2-a}$ ب) $\frac{2(a+1)}{2-a}$ ج) $\frac{2(a+1)}{2+a}$ د) $\frac{2(a-1)}{2+a}$	۷۴
حاصل افاده $\log 5\cdot\log 20+\log^2 2$ عبارت است از: الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4	۷۵
حاصل افاده $49^{1-\log_7 2}+5^{-\log_5 4}$ عبارت است از: الف) $\frac{25}{2}$ ب) $\frac{50}{2}$ ج) $\frac{75}{2}$ د) $\frac{100}{2}$	۷۶

۷۷	حاصل افاده $10\times100^{\frac{1}{2}\log9-\log2}$ عبارت است از: الف) 20.5 ب) 22.5 ج) 21.5 د) 19.5
۷۸	انتی لوگاریتم عدد $-\frac{3}{2}$ به قاعده $3\sqrt[3]{3}$ عبارت است از: الف) $\frac{1}{7}$ ب) $\frac{1}{8}$ ج) $\frac{1}{9}$ د) $\frac{1}{13}$
۷۹	حل معادلات $\log_4\frac{2}{x-1}=\log_4(4-x)$ عبارت است از: الف) $\{1,4\}$ ب) $\{2,4\}$ ج) $\{1,2\}$ د) $\{3,2\}$
۸۰	حل معادلات $\log\left[(x-1)(2x-1)\right]=0$ عبارت است از: الف) $\begin{Bmatrix}2-\sqrt{3}\\2+\sqrt{3}\end{Bmatrix}$ ب) $\begin{Bmatrix}1-\sqrt{3}\\1+\sqrt{3}\end{Bmatrix}$ ج) $\begin{Bmatrix}3-\sqrt{3}\\3+\sqrt{3}\end{Bmatrix}$ د) $\begin{Bmatrix}4-\sqrt{3}\\4+\sqrt{3}\end{Bmatrix}$
۸۱	حل معادلات $\log_4\log_2\log_3(2x-1)=\frac{1}{2}$ عبارت است از: الف) 4 ب) 5 ج) 6 د) 7
۸۲	حل معادلات $x^{\log x}=1000x^2$ عبارت است از: الف) $\{10^{-1},10^{3}\}$ ب) $\{10^{-1},10^{2}\}$ ج) $\{10^{-2},10^{2}\}$ د) $\{10^{-2},10^{3}\}$
۸۳	حل معادلات $\log x^2(x+2)=2$ عبارت است از: الف) 2 ب) 4 ج) 6 د) 8
۸۴	ساحه حل نامعادلات $\log_3\frac{3}{x-1}\succ\log_3(5-x)$ عبارت است از: الف) $(1,2)\cup(4,5)$ ب) $(1,2)\cup(3,5)$ ج) $(1,2)\cup(3,7)$ د) $(1,2)\cup(3,6)$
۸۵	ساحه حل نامعادلات $\log_{\frac{1}{2}}(5+4x-x^2)\succ-3$ عبارت است از:

	الف) $(-1,1)\cup(4,5)$ ب) $(-1,1)\cup(4,6)$ ج) $(-1,1)\cup(3,5)$ د) $(-1,2)\cup(4,6)$
۸۶	ساحه حل نامساوی $\log_x(x-1)\geq 2$ عبارت است از: الف) $\{2\}$ ب) $\{3\}$ ج) $\{5\}$ د) $\{\ \}$
۸۷	حد n ام ترادف $2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},...$ عبارت است از: الف) $\frac{n-2}{n+1}$ ب) $\frac{n-2}{n}$ ج) $\frac{n+2}{n}$ د) $\frac{n+1}{n}$
۸۸	اگر $a_n=\frac{3n-1}{2n-1}$ حد n ام یک ترادف باشد، حد چندم این ترادف $\frac{11}{7}$ می شود. الف) 3 ب) 4 ج) 5 د) 6
۸۹	حد دوازدهم ترادف حسابی $-9,-5,-1,3,...$ عبار ت است از: الف) 35 ب) -35 ج) 38 د) -38
۹۰	در سلسله‌های متقارب غیر معیین هندسی نسبت مشترک q عبارت است از: الف) $\lvert q\rvert=1$ ب) $\lvert q\rvert\prec 1$ ج) $\lvert q\rvert\succ 1$ د) $\lvert q\rvert\neq 1$
۹۱	سلسله $a_1+a_2+a_3+...$ مساوی می شود به: الف) $\sum_{i=1}^{\infty}ai$ ب) $\sum_{i=n}^{\infty}ai$ ج) $\sum_{i=n}^{n+m}ai$ د) $\sum_{i=n}^{0}ai$
۹۲	سلسله $0.12+0.0012+0.000012+...$ مساوی می شود به: الف) $\frac{13}{98}$ ب) $\frac{12}{99}$ ج) $\frac{12}{100}$ د) $\frac{12}{98}$
۹۳	حاصل جمع چند حد ترادف $4,12,36$ مساوی به 160 می شود. الف) $n=3$ ب) $n=4$ ج) $n=5$ د) $n=6$

۹۴	سلسله $0.7+0.05+0.005+0.0005+...$ مساوی است به: الف) $\frac{68}{90}$ ب) $\frac{68}{99}$ ج) $\frac{69}{90}$ د) $\frac{67}{90}$
۹۵	اگر حد 30 ام یک ترادف حسابی 80 و حد 10 ام آن 20 باشد، حد اول آن مساوی است به: الف) -6 ب) -7 ج) -8 د) -9
۹۶	قیمت ترکیب $\binom{8}{3}$ مساوی است به: الف) $\binom{8}{5}$ ب) $\binom{8}{2}$ ج) $\binom{8}{7}$ د) $\binom{8}{6}$
۹۷	قیمت ترکیب $\binom{8}{5}+\binom{8}{4}$ مساوی است به: الف) $\binom{8}{4}$ ب) $\binom{9}{4}$ ج) $\binom{9}{5}$ د) $\binom{8}{5}$
۹۸	در صورتیکه $\lvert 2x-4\rvert+\lvert y-5\rvert+\lvert z+2\rvert=0$ باشد، قیمت $x+y=?$ الف) 6 ب) 7 ج) 8 د) 9
۹۹	قیمت عدد حاصل جمع $\sum_{k=2}^{243}\log_3\left(1-\frac{1}{k}\right)$ عبارت است از: الف) 2 ب) 3 ج) 5 د) -5
۱۰۰	حد دهم ترادف حسابی $2\sqrt{3},4\sqrt{3},6\sqrt{3},...$ عبارت است از: الف) $30\sqrt{3}$ ب) $20\sqrt{3}$ ج) $\sqrt{1200}$ د) $\sqrt{1400}$

مآخذ

۱) امیری، حمید رضا و ایلخانی‌پور، یدالله. (۱۳۸۸). **مبانی ریاضیات گسسته**. چاپ دهم، تهران: انتشارات مدرسه

۲) بازرگان‌لاری، عبدالرضا. (۱۳۸۲). **جبر خطی کاربردی**. شیراز: انتشارات دانشگاه شیراز۳۱۴

۳) د. فومبن و دیگران. (۱۳۸۶). **محافل ریاضی(تجربه روس‌ها)**. مترجم: ارشک حمیدی و مهرداد مسافر، تهران: انتشارات فاطمی

۴) رویا، بهشتی و مریم، میرزاخانی. (۱۳۹۱). **نظریه اعداد**. چاپ هشتم، تهران: انتشارات فاطمی

۵) شهریاری، پرویز. (۱۳۸۹). **بخش پذیری در جبر**. چاپ یازدهم، تهران: انتشارات مدرسه

۶) عبدالحسین، مصحفی.(۱۳۹۰). **تصاعدها و لوگاریتم**. چاپ چهاردهم، تهران: انتشارات فاطمی

۷) غافری، محمود. (۱۳۸۶). **جبر خطی**. تهران: انتشارات گسترش علوم پایه

۸) غوری، محمد انور. (۱۳۸۹). **ریاضی عمومی**. چاپ هفتم، کابل: انتشارات سعید

۹) لیپ شوتس، سیمور و لیپسون، مارک. (۱۳۸۴). **احتمال**. مترجم: علی‌اکبر عالم زاده، تهران: انتشارات جنگل

۱۰) محمودی، احمد و دیگران. (۱۳۹۱). **آشنایی با ترکیبات**. چاپ سوم، تهران: انتشارات فاطمی

۱۱) محمدی راد، ناصر. (۱۳۸۶). **ریاضیات وکاربرد آن در مدیریت ۱ (پایه)**. تهران: انتشارات جاودانه، جنگل

۱۲) نیکوکار، مسعود و مقسمی، حمید رضا. (۱۳۸۰). **ریاضی۳ (ریاضی ۵ قدیم)**. تهران: انتشارات گسترش علوم پایه

۱۳) نیکوکار، مسعود و دیگران. (۱۳۸۷). **ریاضی عمومی (مقطع کاردانی)**. چاپ یازدهم، تهران: انتشارات گسترش علوم پایه

۱۴) و. لیتوییننکو، آ. ماردکوویچ. (۱۳۷۲). **مروری بر جبر و مثلثات**. مترجم: مسعود مشهوری، تهران: انتشارات گوتنبرگ

کلید جوابات

شماره	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
جواب	الف	ج	ب	ب	الف	ج	الف	ب	الف	الف
شماره	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
جواب	ج	ب	ج	الف	ج	ج	د	الف	ج	الف
شماره	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠
جواب	ج	د	ب	الف	د	د	ب	د	الف	ب
شماره	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	٣٦	٣٧	٣٨	٣٩	٤٠
جواب	د	د	الف	ج	ب	د	ج	ب	د	ج
شماره	٤١	٤٢	٤٣	٤٤	٤٥	٤٦	٤٧	٤٨	٤٩	٥٠
جواب	الف	ب	ب	ب	د	د	ج	د	ب	ب
شماره	٥١	٥٢	٥٣	٥٤	٥٥	٥٦	٥٧	٥٨	٥٩	٦٠
جواب	الف	د	الف	د	ج	الف	ج	ب	الف	الف
شماره	٦١	٦٢	٦٣	٦٤	٦٥	٦٦	٦٧	٦٨	٦٩	٧٠
جواب	د	ج	الف	د	ج	الف	ب	د	ج	الف

شماره	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
جواب	الف	الف	الف	الف	الف	الف	ب	ج	د	الف
شماره	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
جواب	الف	الف	الف	الف	ج	د	د	ب	الف	ب
شماره	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰
جواب	الف	ب	ب	ب	ب	الف	ج	ب	د	ج

هدف ما ارائه خدمات علمی و آکادمیک مبتنی بر احساس دینی و ملی است.

استاد انجنیر بختیاری "بختیار" *استاد رمضان‌مهران "حیدری"*

آثار مولف:

- **ریاضیات ۱ (حساب‌کامل): عملیه‌های اعداد کامل، تجزیه اعداد طبیعی، کسرعام، کسراعشار، نسبت و تناسب، فیصد، سیستم شمارش اعداد، ست‌ها و اعداد.**
- **ریاضیات ۲ (مفاهیم الجبری): عملیه‌های اعداد الجبری، توان‌ها، جذر اعداد، عبارت‌های الجبری، مطابقت‌ها، تجزیه افاده‌ها، کسور الجبری و اعداد مختلط.**
- **ریاضیات ۳ (الجبر) همین اثر**