



سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی

سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور

نمونه سوالات امتحانات ریاضی

نرم افزارهای ریاضیات

...و

(@riazisara)

ریاضی سرا در تلگرام:



<https://t.me/riazisara>

(@riazisara.ir) ریاضی سرا در اینستاگرام:



<https://www.instagram.com/riazisara.ir>

آموزش علوم

ریاضیات (۲)

(مفاهیم الجبری)

موضوعات:

- ✓ عملیه‌های اعداد الجبری
- ✓ توان‌ها
- ✓ جذر اعداد
- ✓ عبارت‌های الجبری
- ✓ مطابقت‌ها
- ✓ تجزیه افاده‌ها
- ✓ کسور الجبری و اعداد موهومی

تألیف: استاد رمضان "میدری"

تصویر: استاد انبیر بقتیاری "بقتیار"

سرمدی فزیک

ویژگی‌ها:

- ✓ جامع و مفهومی
- ✓ مسلسل و منطقی
- ✓ متناسب با نصاب تعلیمی جدید و کانکور سراسری

سال: ۱۳۹۷ هـ ش

هیدری، رمضان. ۱۳۹۷
 ریاضیات ۲ (مفاهیم الجبری)، مولف: رمضان هیدری، کابل: انتشارات تمدن شرق
 چاپ اول ۱۳۹۷

مشخصات کتاب

نام کتاب:	ریاضیات ۲ (مفاهیم الجبری)
تألیف:	استاد رمضان "هیدری"
نظارت بر تألیف:	استاد انجنیر بختیاری "بختیار" سرمربی فزیک
ویراستار:	مولف
ناشر:	انتشارات تمدن شرق
سال چاپ:	۱۳۹۷
نوبت چاپ:	چاپ اول
قیمت:	۱۰۰، افغانی
تیراژ	۱۰۰۰ جلد
ارتباط با مولف:	۰۷۸۶۸۶۶۰۱۱

Email: Ramazan.Haidari786@yahoo.com

همه حقوق چاپ و نشر به مولف و ناشر محفوظ است.

انتشارات تمدن شرق

نشانی: کابل، بین چهارراهی دهبوری و چوک کوته سنگی.

شماره تماس: ۰۷۰۸۲۱۵۱۱۳ / ۰۷۷۳۳۹۴۰۰۱



تقدیم:

این اثر را به پیشگاه ارمغان آور مهر و رحمت برای جهانیان حضرت فاطمه پیامبران که گفت: «من معلم برگزیده شده‌ام تا مکارم اخلاق را تمام کنم». تقدیم می‌کنم.

پیشگفتار

در جهان متمدن امروز که علم و تکنالوژی ابزار مهم برای رشد و انکشاف جوامع بشری محسوب می‌شود، در صورت این دو عامل ارزش و جایگاه اساسی خود را می‌یابد، که علم و تکنالوژی در خدمت ارزش‌های والای انسانی، تکامل و رساندن بشر به آرامش و آسایش قرار گیرد. ما علم و تکنالوژی را بدون باورهای دینی و احساس ملی کافی ندانسته و معرفت دینی مبتنی بر معارف اسلامی، تعقل و درک صحیح از حقایق را نسبت به علوم تجربی و تجربه‌گرایی ضروری‌تر و مهم دانسته و هدف ما ارائه خدمات علمی و اکادمیک مبتنی بر احساس دینی و ملی است. و از برادر دانشمند و محقق محترم استاد رمضان "حیدری" که سیستم را تحت نام (آموزش علوم ریاضیات) در شهر غزنی یعنی مرکز تمدن اسلامی بنیان‌گذاری نموده، تلاش و خدمات علمی ایشان در بخش علوم ساینسی و خصوصاً تهیه و تدوین ریاضیات (۲)، یک گام مثبت در راستای ترقی سطح علمی هم‌وطنان و دانش‌آموزان عزیز، می‌باشد.

استاد انجمن بفتیاری "بفتیار"

سرمری فزیک

فهرست مطالب

۱۰	فصل اول: عملیه‌های اعداد الجبری
۱۰	الجبر
۱۳	قیمت مطلق
۱۳	خواص قیمت مطلق
۱۵	فصل دوم: توان‌ها
۱۵	قوانین توان‌ها
۲۰	فصل سوم: جذر اعداد
۲۰	دریافت جذر مربع اعداد
۲۱	دریافت جذر مربع اعداد اعشاری
۲۲	دریافت جذر n ام اعداد
۲۳	هم درجه کردن جذور
۲۴	قوانین جذور
۲۹	فصل چهارم: عبارت‌های الجبری
۲۹	افاده الجبری
۳۱	افاده‌های الجبری پولینومی
۳۵	دریافت مجموع ضرایب پولینوم‌ها
۳۹	قضیه باقی مانده
۴۲	تقسیم ترکیبی
۴۴	فصل پنجم: مطابقت‌ها
۴۵	انکشاف مطابقت‌ها
۵۳	مطابقت‌های مشهور

۵۴	 فصل ششم : تجزیه
۵۴	 تجزیه به اساس فکتور گیری
۵۴	 تجزیه بینومها
۵۵	 تجزیه به روش گروپ بندی
۵۹	 بزرگترین قاسم مشترک
۵۹	 کوچکترین مضرب مشترک
۶۰	 فصل هفتم: کسور الجبری و اعداد مختلط
۶۰	 کسور الجبری
۶۲	 اعداد موهومی
۶۹	 اعداد مختلط
۷۲	 قیمت مطلق اعداد مختلط
۷۳	 انتروالها
۷۶	 سوالات
۱۰۲	 مآخذ
۱۰۸	 کلید جوابات

مقدمه

بنام خداوند مهر آفرین، آفرنده سپهر برین. درود بی‌پایان بر پیامبر رحمت، ارمغان آور مهر و سعادت برای جهانیان و درود بر اهل بیت او که مرکز ثقل فضیلت و معیار حق و حقیقت‌اند.

اما بعد: روح حقیقت‌جویی و میل به کمال، اساسی‌ترین انگیزه بشر در طول تاریخ برای جستجوی علمی او بوده است. بر این اساس هر انسانی با کنجکاوی ذاتی‌اش به دنبال کشف اسرار هستی بوده است. هر چند که جستجوهای علمی و کشفیات بشر، منجر به تسلط او بر طبیعت و در نتیجه رفاه زندگی نیز شده است. اما باید گفت: انگیزه بشر در رفتن بسوی دانش و حقیقت فراتر از اهداف مادی است. و حقیقت‌جویی نیاز عالی روح انسانی است.

جستجوهای از حقیقت همواره بر ابزارهای که خداوند (ج) در اختیار بشر قرار داده است، صورت می‌گیرد. این ابزارها را می‌توان در چهار دسته زیر خلاصه کرد.

- ابزار حسی
- ابزار عقل
- ابزار دل
- استفاد از منبع وحی

هر چهار مورد فوق ابزار رسیدن به حقایق است، اما کلی‌ترین و جامع‌ترین روش برای رسیدن به حقیقت تعالیم، وحی و دستورات پیامبران و معصومین (ع) خصوصاً دستورات پیامبر اسلام (ص) می‌باشد.

و در مسائل علمی و تجربی و برای شناخت جزئیات هستی و روابط دقیق پدیده‌های عالم از ابزار حس و روش دانش‌تجربی استفاده می‌کنیم و

دانش تجربی بدون دانستن ریاضیات که به حیث زبان قوانین علوم تجربی استفاده می‌شود کاری است که به نتیجه مطلوب نخواهد رسید. و خصوصاً در علوم طبیعی رشته‌های میخانیک، احتمالات و استروئومی که علوم ریاضی و فزیک نامیده شده، که حد اوسط میان ریاضیات و فزیک است. و برای تقویه اصول ریاضیات دانش‌آموزان، ریاضیات بسا ارزنده و نهایت مهم تلقی می‌شود. لذا تصمیم بر آن شد ممد درسی ریاضیات تحت نام (آموزش علوم ریاضیات) که روابط بین عناوین و موضوعات آن مسلسل و منطقی باشد، تهیه نمایم تا در فهم مسائل علوم تجربی دانش‌آموزان به مشکل مواجه نشوند.

کتاب ریاضیات (۲) را که به رهنمایی محترم استاد انجنیر بختیاری "بختیار" تهیه نموده‌ام. امید است که باعث رضایت پروردگار مهربان، و مورد استفاده هم‌وطنان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد. و ادعا نمی‌شود که کتاب تهیه شده خالی از نواقص می‌باشد، و از پیشنهادات سالم دانش‌دوستان، استقبال می‌شود.

رمضان "حیدری"

Email: Ramazan.Haidari786@yahoo.com

عملیه‌های اعداد الجبری

فصل اول

آشنایی: در فصل اول این کتاب اعداد الجبری، عملیه‌های الجبری و قیمت مطلق اعداد را بررسی می‌کنیم.

الجبر: بخش از ریاضیات بوده که معنی آن ترمیم و جبران کردن است، به مسائل که علم حساب عاجز باشد توسط علم الجبر حل می‌گردد و در الجبر بر علاوه عدد حروف نیز استفاده می‌گردد، که این حروف نشان دهنده کمیات طول، کتله، وقت ... می‌باشد.

فرق الجبر و حساب این است که علم حساب از کمیات یا اشیاء با اعداد بحث می‌کند، اما الجبر کمیت یا اشیاء را با حروف نشان می‌دهد. به عبارت دیگر، اگر علم حساب به بیان حرفی نوشته شود، آن را الجبر می‌نامند، همچنان در حساب اعداد بدون علامه استفاده می‌گردد و در الجبر با علامه در نظر گرفته می‌شود. مانند:

$$\{\dots, -2, -\sqrt{3}, -1, 0, +1, +2, +3, +\pi, \dots\}$$

عملیه‌های اعداد الجبری

اعداد الجبری دارای علامه مثبت (+) یا منفی (-) می‌باشد و صفر عددی است که دارای علامه نمی‌باشد. قبل از این که عملیه‌های اعداد الجبری را مورد مطالعه قرار دهیم نکات ذیل را بخاطر داشته باشید.

$$1) \quad 3+5=8 \quad 2) \quad 13-5=8 \quad 3) \quad -3, -2, +3, +4$$

در مثال ۱ و ۲ علامه (+) نشان دهنده عملیه جمع و علامه (-) نشان دهنده عملیه تفریق می‌باشد. و در مثال ۳ علامه‌های (+), (-) نشان دهنده علامه عدد می‌باشد.

عملیه جمع: برای اجرای این عملیه دو حالت وجود دارد.

الف) اگر اعداد هم علامه باشند جمع می‌کنیم، علامه مشترک آن‌ها را در نظر می‌گیریم.

ب) اگر اعداد مختلف علامه باشند، عدد کوچک را از عدد بزرگ تفریق و علامه عدد بزرگ را در نظر می‌گیریم.

مثال‌ها: اعداد ذیل را جمع نمائید.

$$1) \quad (-3) + (-2) = -5 \quad 4) \quad (-36) + (-4) = -40$$

$$2) \quad (-5) + (+6) = 1 \quad 5) \quad (-2) + (-8) = -10$$

$$3) \quad (+3) + (-6) = -3 \quad 6) \quad (+32) + (-20) = 12$$

توجه: عدد الجبری که علامه آن مثبت باشد، آنرا بدون علامه می‌نویسند. مانند:

$$+3 = 3, \quad +6 = 6, \quad +32 = 32, \quad +761 = 761$$

عملیه تفریق: برای تفریق اعداد الجبری اولاً علامه مفروق را تغییر داده بعداً جمع می‌نمائیم.

$$1) \quad (-3) - (+2) = (-3) + (-2) = -5$$

$$2) \quad (+4) - (-2) = (+4) + (+2) = 6$$

$$3) \quad (+14) - (+10) = (+14) + (-10) = 4$$

$$4) \quad (+3) - (+8) = (+3) + (-8) = -5$$

عملیه ضرب: برای ضرب نمودن اعداد الجبری اولاً علامه را با علامه ضرب نموده، بعداً مانند ضرب عدد حسابی عمل می‌کنیم. و حاصل ضرب دو عدد هم علامه مثبت است و مخالف علامه منفی می‌باشد. یعنی:

$$\begin{cases} (-)(-) = + \\ (+)(+) = + \end{cases} \quad \begin{cases} (+)(-) = - \\ (-)(+) = - \end{cases}$$

مثال‌ها: اعداد الجبری ذیل را ضرب نمائید.

$$\begin{array}{ll} 1) & (-3)(-2) = 6 \\ 2) & (+31)(-2) = -62 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 3) & (+7)(-2) = -14 \\ 4) & (+3)(+8) = 24 \end{array}$$

عملیه تقسیم: برای تقسیم نمودن اعداد الجبری اولاً علامه را با علامه تقسیم نموده و بعداً مانند ضرب عدد حسابی عمل می‌نمائیم. حاصل تقسیم دو عدد هم علامه مثبت و مخالف علامه منفی می‌باشد. یعنی:

$$\begin{cases} \frac{+}{+} = + \\ \frac{-}{-} = + \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{+}{-} = - \\ \frac{-}{+} = - \end{cases}$$

مثال‌ها: اعداد الجبری ذیل را تقسیم نمائید.

$$\begin{array}{ll} 1) & (-12) \div (-3) = 4 \\ 2) & (+8) \div (+2) = 4 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 3) & (-18) \div (+2) = -9 \\ 4) & (+20) \div (-5) = -4 \end{array}$$

افاده‌های اعداد الجبری: با استفاده از عملیه جمع، تفریق، ضرب، تقسیم و رفع قوس‌ها می‌توان به صورت ذیل ساده سازی کرد.

$$\begin{array}{l} 1) \quad \{32[(-2)(-8)] + 2(32-8)\} \\ \quad = \{32[16] + 2(24)\} = 512 + 48 = 560 \\ 2) \quad \{(-3)(-2) + (-3) - 2(-8)\} \\ \quad = \{6 + (-3) + 16\} = 6 - 3 + 16 = 19 \end{array}$$

قیمت مطلق اعداد

قیمت مطلق هر عدد عبارت از مقدار مثبت آن عدد، از نظر هندسی عبارت از فاصله همان عدد از مرکز محور اعداد می‌باشد، قیمت مطلق اعداد را به شکل $|x|$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$|x| = \begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x < 0 \end{cases}$$

مثال: قیمت مطلق x را دریابید. طوری که $x = 4$, $x = -4$ باشند.

برای $x = 4$ شرط اول و برای $x = -4$ شرط دوم صدق می‌کند.

$$\text{if } x = |4| \Rightarrow x = 4$$

$$\text{if } x = |-4| \Rightarrow x = -(-4) \Rightarrow x = 4$$

خواص قیمت مطلق اعداد

- 1) $|x| = |-x|$
- 2) $x = y \Rightarrow |x| = |y|$
- 3) $|xy| = |x| \cdot |y|$
- 4) $\frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|} : y \neq 0$
- 5) $|x - y| = |y - x|$
- 6) $|x| = a \Rightarrow x = \pm a$

افاده‌های قیمت مطلق

برای حل افاده‌های قیمت مطلق از خواص فوق استفاده می‌نماییم.

$$1) \quad |3 - 6| = |-3| \Rightarrow -(-3) = 3$$

$$2) \quad |-6| - |-7| = -(-6) - [-(-7)] = +6 - 7 = -1$$

$$3) \quad \frac{5}{|-3|} = \frac{5}{-(-3)} = \frac{5}{3}$$

$$4) \quad |\sqrt{2} - 2| = -(\sqrt{2} - 2) = 2 - \sqrt{2}$$

$$5) \quad |2 - \sqrt{2}| = 2 - \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & |1 - \sqrt{2}| + |2 - \sqrt{3}| + |1 - \sqrt{3}| + 5 - \sqrt{2} \\ &= -(1 - \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{3}) - (1 - \sqrt{3}) + 5 - \sqrt{2} \\ &= (\sqrt{2} - 1) + (2 - \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1) + 5 - \sqrt{2} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7) \quad & |\pi - 3| + |\pi + 3| + |3 - \pi| + |3 + \pi| \quad \pi \sim 3.141592 \\ &= (\pi - 3) + (\pi + 3) - (3 - \pi) + (3 + \pi) = 4\pi \end{aligned}$$

مثال ۸: اگر $1 < x < 2$ باشد حاصل افاده زیر را حساب نمائید.

$$\begin{aligned} & |x - 2| + |x + 1| + |x - 1| + |x| \quad \text{if } 1 < x < 2 \\ &= -(x - 2) + (x + 1) + (x - 1) + |x| \\ & \quad (2 - x) + (x + 1) + (x - 1) + |x| = 2x + 2 \end{aligned}$$

مثال ۹: اگر $0 < x < 2$ باشد حاصل افاده زیر را حساب نمائید.

$$\begin{aligned} & |x + 2| + |x| + 5 \quad \text{if } -2 < x < 0 \\ &= (x + 2) - (x) + 5 = 7 \end{aligned}$$

مثال: نشان دهید که $(-a)(-b) = ab$ است.

$$(-a)(-b) = \underbrace{(-a)(-b) - ab + ab}$$

$$(-a)(-b) = -a[-b + b] + ab$$

$$(-a)(-b) = -a[0] + ab$$

$$(-a)(-b) = ab$$

توان‌ها

فصل دوم

آشنایی: توان‌ها نقش مهم برای ساده سازی افاده‌ها و حل معادلات نمایی داشته، که در این فصل توان‌ها و قوانین آن‌را مورد بحث قرار می‌دهیم، و قوانین توان‌ها همان روش ساده ضرب و تقسیم اعداد می‌باشد.

توان‌ها: شکل ساده جمع اعداد یکسان را ضرب می‌نامند و شکل ساده ضرب اعداد یکسان را توان (طاقت) می‌نامند، به عبارت دیگر هرگاه یک عدد چندین مرتبه به خودش ضرب شده باشد، این حاصل ضرب را به شکل ساده (توان) نوشته می‌کنیم، اگر a یک عدد حقیقی بنام قاعده و n یک عدد طبیعی بنام توان باشد، داریم که:

$$a^n \quad a \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{N}$$

مثال‌ها:

- 1) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$
- 2) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$
- 3) $(-7)(-7)(-7) = (-7)^3$

قوانین توان‌ها

قانون اول

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{n \text{ مرتبه}}$$

ex:

1) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

2) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

3) $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$

4) $3^1 = 3$

توجه: عدد (1) به توان هر عدد مساوی است به (1). مانند:

$1^0 = 1 \quad 1^3 = 1 \quad 1^{\frac{1}{3}} = 1$

قانون دوم

$$(-a)^{2n} = a^{2n}$$

ex:

1) $(-3)^4 = 3^4 = 81 \quad \text{or} \quad (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$

2) $(-x)^8 = x^8 \quad \text{or} \quad (-x)(-x)(-x)(-x)(-x)(-x)(-x)(-x) = x^8$

قانون سوم

$$(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}$$

ex:

1) $(-2)^5 = -2^5 = -32 \quad \text{or} \quad (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -32$

2) $\left(-\frac{3}{2}\right)^3 = -\left(\frac{3}{2}\right)^3 = -\frac{27}{8} \quad \text{or} \quad \left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}$

قانون چهارم

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

ex:

1) $3^4 \times 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$

2) $8^3 \times 8^1 = 8^{3+1} = 8^4$

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2+3+5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

4) $x \cdot x^2 \cdot x^3 = x^{1+2+3} = x^6$

قانون پنجم

$$a^m \cdot b^m = (ab)^m$$

ex :

$$\begin{array}{ll} 1) & 3^4 \times 5^4 = (3 \times 5)^4 = (15)^4 \\ 2) & \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times (8)^3 = \left(\frac{1}{4} \times 8\right)^3 = 2^3 \\ 3) & x^4 \cdot y^4 = (xy)^4 \\ 4) & x^5 \cdot y^5 \cdot z^5 = (xyz)^5 \end{array}$$

قانون ششم

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

ex :

$$\begin{array}{ll} 1) & (3^4)^2 = 3^{4 \times 2} = 3^8 \\ 2) & (2^3)^2 = 2^{3 \times 2} = 2^6 \\ 3) & (x^y)^2 = x^{2y} \\ 4) & (z^x)^n = z^{nx} \end{array}$$

قانون هفتم

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$$

ex :

$$\begin{array}{ll} 1) & \frac{2^4}{2^3} = (2)^{4-3} = 2^1 = 2 \\ 2) & \frac{3^7}{3^5} = 3^{7-5} = 3^2 \\ 3) & \frac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2 \\ 4) & \frac{z^{2n}}{z^n} = z^{2n-n} = z^n \end{array}$$

قانون هشتم

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \quad b \neq 0$$

ex:

$$1) \quad \frac{2^3}{5^3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \quad 2) \quad \frac{12^4}{2^4} = \left(\frac{12}{2}\right)^4 = 6^4$$

$$3) \quad \frac{x^3}{y^3} = \left(\frac{x}{y}\right)^3 \quad 4) \quad \frac{x^4}{z^2} = \frac{(x^2)^2}{z^2} = \left(\frac{x^2}{z}\right)^2$$

قانون نهم

$$\boxed{a^0 = 1} \quad 1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 \Rightarrow a^0 = 1, a \neq 0$$

ex:

$$1) \quad (1375)^0 = 1 \quad 2) \quad (761x^2)^0 = 1$$

$$3) \quad \left[\frac{x^3}{y^3} \div \left(\frac{x}{3}\right)^3 \right]^0 = 1 \quad 4) \quad \left[\frac{x^4}{z^2} + \frac{(x^2)^2}{z^2} \div \left(\frac{x^2}{z}\right)^2 \right]^0 = 1$$

قانون دهم

$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^m}} \Rightarrow \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^m} \times \frac{a^m}{a^m} = \frac{a^m}{a^{m+m}} = \frac{a^m}{a^{2m}} = a^{m-2m} = a^{-m}$$

ex:

$$1) \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \quad 2) \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$3) \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n} \quad 4) \quad y^m = \frac{1}{y^{-m}}$$

قانون یازدهم

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{1}{a^n} \times \frac{b^n}{1} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

ex:

$$1) \quad \frac{3^{-2}}{8^{-4}} = \frac{3^{-2}}{(8^2)^{-2}} = \left(\frac{3}{(8^2)}\right)^{-2} = \left(\frac{64}{3}\right)^2 \quad 2) \quad \frac{x^{-3}}{y^{-3}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{-3} = \left(\frac{y}{x}\right)^3$$

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ex:

$$1) \quad \frac{3^{-2}}{9^{-3}} = \frac{9^3}{3^2} = 3^4 \quad 2) \quad \frac{y^4 x}{y^{-3}} = \frac{y^4 x y^3}{1} = x y^7$$

اساسات الجبری

$$10 - \underset{1}{2} - \underset{2}{2} - \underset{3}{2} - \underset{4}{2} - \underset{5}{2} = 0$$

$$\frac{10}{-10} \left| \frac{2}{5} \right.$$

$$32 \div \underset{1}{2} \div \underset{2}{2} \div \underset{3}{2} \div \underset{4}{2} \div \underset{5}{2} = 1$$

$$32 \div 2^5 = 1$$

$$2^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\sqrt{2} \div \sqrt{2} = 1$$

$$1 = 2^0 = 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\underset{1}{2} + \underset{2}{2} + \underset{3}{2} + \underset{4}{2} + \underset{5}{2} = 10$$

$$5 \times 2 = 10$$

$$\underset{1}{2} \times \underset{2}{2} \times \underset{3}{2} \times \underset{4}{2} \times \underset{5}{2} = 32$$

$$2^5 = 32$$

$$2^3 = 2^2 \times 2^1 = 2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}}$$

$$2^2 \times 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

جذر ها

فصل سوم

آشنایی: جذرها یک بخش مهم برای محاسبات افاده‌ها و معادلات بوده که در این فصل به ساده سازی افاده‌های جذری و قوانین آن می‌پردازیم.

جذراعداد: جذر یک نوع از توان کسری طاقت می‌باشد و به شکل $\sqrt[n]{a}$ می‌نویسند، a عدد تحت جذر و n درجه جذر می‌باشد. مانند:

$$\sqrt{4} = 2 \quad \sqrt[3]{27} = 3$$

توجه ۱: جذری که درجه آن نوشته نباشد، درجه آن ۲ است. مانند:

$$\sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{9} = 3 \quad \sqrt{16} = 4 \quad \sqrt{25} = 5$$

توجه ۲: اعداد منفی تحت درجه جذر جفت، قیمت حقیقی ندارند و بنام اعداد موهومی یاد می‌کنند. مانند: $(\sqrt{-1}) = i$

$$\sqrt{-36} = \sqrt{(-1)(36)} = (\sqrt{-1})(\sqrt{36}) = (\sqrt{-1})(6) = 6i$$

نکته: در حالت ضرب و تقسیم به مسایل ذیل دقت نمائید.

$$\sqrt{-3} \times \sqrt{-2} = (i\sqrt{3})(i\sqrt{2}) = i^2 \sqrt{6} = -\sqrt{6}$$

$$\sqrt{\frac{-12}{-6}} = \sqrt{2}$$

دریافت جذر مربع اعداد

برای اجرای این عملیه نکات ذیل را بخاطر داشته باشید.

الف) خط افقی به بالای عدد مورد نظر و به طرف چپ آن نیز یک خط عمود رسم می‌نمائیم.

ب) از طرف راست دو دو مرتبه جدا می‌نمائیم و در بالای خط افقی و چپ خط عمود عدد را در نظر می‌گیریم که حاصل ضرب آن از عدد جدا شده طرف چپ اعداد بزرگ نگردد.

ج) عدد در نظر گرفته شده را ضرب و در زیر عدد جدا شده می‌نویسیم و از عدد بالای آن تفریق می‌نمائیم.

د) سپس دو مرتبه بعدی را پائین و عدد یک‌های طرف چپ خط عمود را دو چند می‌نمائیم و این عملیه را الی آخر ادامه می‌دهیم.

مثال‌ها: جذر مربع اعداد ذیل را در یابید.

$$1) \quad \sqrt{617796}$$

$$\begin{array}{r} 786 \\ 7 \quad \overline{617796} \\ 148 \quad \underline{-49} \quad \overline{1277} \\ 1566 \quad \underline{-1184} \quad \overline{9396} \\ \quad \underline{-9396} \quad \overline{0} \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{617796} = 786$$

$$2) \quad \sqrt{12321}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 1 \quad \overline{12321} \\ 21 \quad \underline{-1} \quad \overline{23} \\ 221 \quad \underline{-21} \quad \overline{221} \\ \quad \underline{-221} \quad \overline{0} \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{12321} = 111$$

در یافت جذر مربع اعداد اعشاری

برای انجام این عملیه، مانند اعداد طبیعی عمل نموده صرف اعداد طبیعی را از راست به چپ و اعداد اعشاری را از طرف چپ به راست دو دو مرتبه جدا می‌نمائیم، و علامه اعشاری را در موقع اش بالا می‌کنیم.

مثال‌ها:

$$1) \quad \sqrt{149.5729}$$

$$2) \quad \sqrt{26.2144}$$

$$\begin{array}{r}
 12.23 \\
 \hline
 \widehat{1} \widehat{49.57} \widehat{29} \\
 -1 \\
 \hline
 49 \\
 -44 \\
 \hline
 557 \\
 -484 \\
 \hline
 7329 \\
 -7329 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{149.5729} = 12.23$$

$$\begin{array}{r}
 5.12 \\
 \hline
 \widehat{26.} \widehat{21} \widehat{44} \\
 -25 \\
 \hline
 121 \\
 -101 \\
 \hline
 2044 \\
 -2044 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

$$\Rightarrow \sqrt{26.2144} = 5.12$$

دریافت جذر $n^{\text{ام}}$ اعداد

برای جذر دوم، سوم، چهارم،... اولاً اعداد را تجزیه نموده و بعداً به تعداد درجه جذر، اعداد مشترک را انتخاب می‌کنیم، در صورتی که اعداد جذر کامل نداشته باشد قسمتی از عبارت مجذور را از تحت جذر بیرون می‌آوریم. و از فورمول ذیل استفاده می‌کنیم.

$$\sqrt[n]{a^n \pm b} = a \pm \frac{b}{n \times a^{n-1}}, \text{ ex: } \sqrt[7]{125} = \sqrt[7]{2^7 - 3} = 2 - \frac{3}{7 \times 2^{7-1}} = 1.99$$

مثال‌ها: جذر اعداد ذیل را دریابید.

$$\begin{array}{r}
 1) \quad \sqrt[3]{8} \\
 2 \quad | \quad 8 \\
 2 \quad | \quad 4 \\
 2 \quad | \quad 2 \\
 \hline
 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2) \quad \sqrt[3]{343} \\
 7 \quad | \quad 343 \\
 7 \quad | \quad 49 \\
 7 \quad | \quad 7 \\
 \hline
 \Rightarrow \sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7
 \end{array}$$

3) $\sqrt[5]{7776}$ 2 7776 $\Rightarrow \sqrt[5]{7776}$ 2 3888 $= \sqrt[5]{2^5 \times 3^5}$ 2 1944 $= 2 \times 3$ 2 972 $= 6$ 2 486 3 243 3 81 3 27 3 9 3 3	4) $\sqrt[5]{64}$ 2 64 $\Rightarrow \sqrt[5]{64}$ 2 32 $= \sqrt[5]{2^5 \times 2}$ 2 16 $= 2\sqrt[5]{2}$ 2 8 2 4 2 2
---	---

هم درجه کردن جذور

هنگامی که جذور مختلف الدرجه باشند برای هم درجه کردن آنها، اولاً کوچک‌ترین مضرب مشترک درجه‌های جذور را به دست آورده آنرا تقسیم درجه هر یک از جذور می‌نمائیم، بعداً حاصل تقسیم را ضرب توان مجذور می‌نمائیم.

مثال‌ها: جذور ذیل را هم درجه سازید.

- 1) $\sqrt[3]{x^2}, \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x^4}, \sqrt{x} = \sqrt[6]{x^3}$
- 2) $\sqrt{x^3}, \sqrt[4]{y} \Rightarrow \sqrt{x^3} = \sqrt[8]{x^{12}}, \sqrt[4]{y} = \sqrt[8]{y^2}$
- 3) $\sqrt[3]{z}, \sqrt[5]{x} \Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt[15]{z^5}, \sqrt[5]{x} = \sqrt[15]{x^3}$
- 4) $\sqrt[4]{x}, \sqrt[3]{y} \Rightarrow \sqrt[4]{x} = \sqrt[12]{x^3}, \sqrt[3]{y} = \sqrt[12]{y^4}$
- 5) $\sqrt[6]{3}, \sqrt[5]{2} \Rightarrow \sqrt[6]{3} = \sqrt[30]{3^5}, \sqrt[5]{2} = \sqrt[30]{2^6}$
- 6) $\sqrt[3]{2^4}, \sqrt[5]{3^2} \Rightarrow \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[15]{(2^4)^5}, \sqrt[5]{3^2} = \sqrt[15]{(3^2)^3}$
 $\Rightarrow \sqrt[15]{2^{20}}, \sqrt[15]{3^6}$

مقایسه جذور

برای مقایسه کردن چندین جذر سه حالت ذیل را در نظر می‌گیریم.
الف) هنگامی که جذرها هم درجه باشند، جذر بزرگ‌تر است که مجذور آن بزرگ است. مانند:

$$\sqrt[12]{32}, \sqrt[12]{25} \Rightarrow \sqrt[12]{32} > \sqrt[12]{25}$$

ب) هنگامی که اعداد تحت جذر مساوی باشند، جذری بزرگ‌تر است که درجه آن کوچک‌تر باشد. مانند:

$$\sqrt{5}, \sqrt[3]{5} \Rightarrow \sqrt{5} > \sqrt[3]{5}$$

ج) اگر مجذور و درجه جذور متفاوت باشند، اولاً آن را هم درجه نموده و بعد مقایسه می‌کنیم.

مثال‌ها: جذور ذیل را مقایسه نمایید.

$$1) \sqrt[3]{a}, \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt[3]{a} < \sqrt{a}$$

$$2) \sqrt[3]{81}, \sqrt[5]{81} \Rightarrow \sqrt[3]{81} > \sqrt[5]{81}$$

$$3) \sqrt[5]{31}, \sqrt[5]{82} \Rightarrow \sqrt[5]{31} < \sqrt[5]{82}$$

$$4) \sqrt[12]{3}, \sqrt[3]{5} \Rightarrow \sqrt[12]{3} = \sqrt[12]{3}$$

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4} \Rightarrow \sqrt[12]{3} < \sqrt[12]{5^4}$$

قوانین جذرها

قانون اول

$$\boxed{\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}}, \quad \boxed{\sqrt[n]{a^n} = |a| : n=2k}$$

$$\text{ex: } 1) \sqrt{3^4} = 3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 9 \quad 2) \sqrt[3]{x^{15}} = x^{\frac{15}{3}} = x^5 \quad 3) \sqrt{x^6} = x^{\frac{6}{2}} = x^3$$

قانون دوم

$$\boxed{\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ex: } 1) \quad & \sqrt{4a^2b^4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^4} = 2ab^2 \\
 2) \quad & \frac{\sqrt{31 \times 2 \times 3}}{\sqrt[4]{31^2 \times 4 \times 9}} = \frac{\sqrt{31} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[4]{31^2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[4]{9}} = \frac{\sqrt{31} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{31} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = 1 \\
 3) \quad & \sqrt[5]{32a^5} = \sqrt[5]{32^5} \cdot \sqrt[5]{a^5} = 2a
 \end{aligned}$$

قانون سوم

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

ex:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{32}{2}} = \sqrt{16} = 4 \qquad 2) \quad \frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x^3}} = \sqrt{\frac{x^5}{x^3}} = \sqrt{x^2} = x \\
 3) \quad & \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3
 \end{aligned}$$

قانون چهارم

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

ex:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \sqrt[4]{\sqrt{5}} = \sqrt[4 \cdot 2]{5} = \sqrt[8]{5} \qquad 2) \quad \sqrt[3]{\sqrt[2]{\sqrt[5]{3 \sqrt{32}}}} = \sqrt[3 \cdot 2 \cdot 5]{3 \sqrt{32}} = \sqrt[90]{32} \\
 3) \quad & \sqrt[3]{\sqrt[4]{2 \sqrt{x^{24}} 2^{12}}} = \sqrt[3 \cdot 4 \cdot 2]{2 \sqrt{x^{24}} 2^{12}} = \sqrt[24]{2 \sqrt{x^{24}} 2^{12}} = x \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

قانون پنجم

$$\sqrt[a]{x^b \sqrt[b]{z}} = \sqrt[ab]{x^b z}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ex: } 1) \quad & \sqrt{2 \sqrt[3]{8}} = \sqrt[2 \cdot 3]{2^2 \times 8} = \sqrt[6]{64} = 2 \\
 2) \quad & \sqrt[3]{5 \sqrt{3 \sqrt{2}}} = \sqrt[3 \cdot 2 \cdot 2]{(5^2)^2 \times 3^2 \times 2} = \sqrt[12]{5^4 \times 3^2 \times 2} \\
 3) \quad & \sqrt[3]{2 \sqrt{16}} = \sqrt[3 \cdot 2]{2^2 \times 16} = \sqrt[6]{2^2 \times 2^4} = \sqrt[6]{2^6} = 2
 \end{aligned}$$

$$\left(\sqrt[n]{a^m} \right)^z = \sqrt[n]{\left(a^m \right)^z}$$
$$\begin{aligned} 1) \quad & \left(\sqrt[6]{2^2}\right)^3 = \sqrt[6]{(2^2)^3} = \sqrt[6]{2^6} = 2 & 2) \quad \left(\sqrt{3^{-1}}\right)^{-2} = \sqrt[2]{(3^{-1})^{-2}} = \sqrt{3^2} = 3 \\ 3) \quad & \left(\sqrt[3]{2}\right)^{-6} = \sqrt[3]{2^{-6}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^6}} = \frac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 4^{-1} \end{aligned}$$
$$\boxed{x^n \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^n y}}$$

ex: 1) $-3\sqrt{2} = (-1)3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \times 2} = -\sqrt{18}$
 2) $2^5\sqrt[5]{12} = \sqrt[5]{2^5 \times 12} = \sqrt[5]{384}$
 3) $x^n\sqrt[n]{32x^n} = \sqrt[n]{x^n x^n 32} = \sqrt[n]{x^{2n} 32} = x^2 \sqrt[n]{32}$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{a}}}}\dots\sqrt{a}} = \sqrt[n]{a^{(2^n-1)}}$$
$$\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \dots}}} = \frac{\sqrt{4a+1}+1}{2}$$
$$\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots}}} = \frac{\sqrt{4a+1}-1}{2}$$

دانلود از سایت ریاضی سرا
www.riazisara.ir

$$\sqrt[n]{a \sqrt[n]{a \sqrt[n]{a} \dots}} = \sqrt[n-1]{a}$$

قانون دوازدهم

$$\sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a : \sqrt[n]{a} \dots}} = \sqrt[n+1]{a}$$

مثال‌ها: با استفاده از قوانین نهم، دهم، یازدهم و دوازدهم جذور ذیل را ساده سازید.

- 1) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}} = \sqrt[2^4]{3^{2^4-1}} = \sqrt[16]{3^{15}}$
- 2) $\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots}}} = \frac{\sqrt{4 \times 20 + 1} + 1}{2} = 5$
- 3) $\sqrt{56 - \sqrt{56 - \sqrt{56 - \dots}}} = \frac{\sqrt{4 \times 56 + 1} - 1}{2} = 7$
- 4) $\sqrt[4]{27\sqrt[4]{27\sqrt[4]{27} \dots}} = \sqrt[4-1]{27} = \sqrt[3]{27} = 3$
- 5) $\sqrt[3]{16 : \sqrt[3]{16 : \sqrt[3]{16} \dots}} = \sqrt[3+1]{16} = \sqrt[4]{16} = 2$

قانون سیزدهم:

$$\sqrt{a(a+1) + \sqrt{a(a+1) + \sqrt{a(a+1) + \dots}}} = a+1$$

قانون چهاردهم:

$$\sqrt{a(a+1) - \sqrt{a(a+1) - \sqrt{a(a+1) - \dots}}} = a$$

مثال: اگر $A = \sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{\dots}}}}$ ، پس قیمت A را دریابید.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{3 + 2A} & \Rightarrow A^2 &= 3 + 2A & \Rightarrow A^2 - 2A - 3 &= 0 \\ \Rightarrow A_1 &= 3, & A_2 &= -1 \end{aligned}$$

جمع و تفریق افاده ای جذری

جمع و تفریق افاده‌های جذری در صورت امکان پذیر است که جذرها مشابه باشند، و جذرهای مشابه به جذور گفته می‌شود که هم درجه و مجذورها باهم مساوی باشند.

مثال‌ها: جذور ذیل را جمع و تفریق نمائید.

$$1) \quad 3\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = (3+2)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

$$2) \quad \sqrt[3]{5} + 2\sqrt[3]{5} - 6\sqrt[3]{5} = (1+2-6)\sqrt[3]{5} = -3\sqrt[3]{5}$$

$$3) \quad \sqrt[4]{3} + 13\sqrt[4]{3} = (1+13)\sqrt[4]{3} = 14\sqrt[4]{3}$$

ضرب و تقسیم افاده‌های جذری

در صورت افاده‌های جذری ضرب و تقسیم شده می‌تواند که هم درجه باشند، و اگر مختلف درجه باشند، اولاً آن‌ها را هم درجه نموده و بعداً ضرب و تقسیم را انجام می‌دهیم.

مثال‌ها: افاده‌های جذری ذیل را ضرب و تقسیم نمائید.

$$1) \quad \sqrt[5]{a^8} \div \sqrt[5]{a^3} = \sqrt[5]{\frac{a^8}{a^3}} = \sqrt[5]{a^5} = a$$

$$2) \quad 3\sqrt{x} \cdot 5\sqrt{x^3} = 15\sqrt{x^4} = 15x^2$$

$$3) \quad 2x \cdot \sqrt{x^3} = 2x \cdot x\sqrt{x} = 2x^2\sqrt{x}$$

$$4) \quad \sqrt[3]{32} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{32 \times 2} = \sqrt[3]{2^5 \times 2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$$

$$5) \quad \sqrt[5]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[15]{x^3} \cdot \sqrt[15]{y^5} = \sqrt[15]{x^3 y^5}$$

عبارت‌های الجبری

فصل چهارم

آشنایی: در این فصل راجع به عبارت‌های الجبری، خواص و عملیه‌های آن بحث می‌کنیم.

افاده الجبری: عبارتی می‌باشد که از یک ثابت یا یک متحول و یا از ترکیب ثابت‌ها و متحول‌ها تشکیل شده باشد. مانند:

$$8, -3, x, y^2, \sqrt{x}, 3\sqrt{x}, \frac{8}{x}, 2x+y, \dots$$

متحول و ثابت: متحول یک سمبول است که به جای هر عنصر یک ست غیر خالی وضع شود. مثلاً: $A = \{x : x \geq 3\}$ طوری که می‌توان برای x قیمت‌های بزرگ‌تر و مساوی از 3 را تعریف نمود. و حروف (x, y, z) را بنام متحول (*variable*) یاد می‌کنند، و ثابت (*constants*) به قیمت معین اعداد گفته می‌شود که قیمت آن تغییر نمی‌کند، مثلاً اعداد $\{1, 2, 3, \dots\}$ هیچگاه باهم دیگر مساوی شده نمی‌تواند، بلکه هر کدام قیمت معین خود را دارد.

حد الجبری: به ترکیبی از اعداد و حروف که باهم به حالت ضرب و یا تقسیم قرار داشته باشد، حد الجبری گفته می‌شود. مانند:

$$3x, 3, y, x^2z, \sqrt{x}, \dots$$

ضریب یک حد: اعداد ثابت که در حالت ضرب به یک متحول است، بنام ضریب عددی همان حد یاد می‌کنند، و یا چندین حروف با عدد ثابت در حالت ضرب قرار داشته باشد، ضریب یک حد اعداد و حروف دیگر می‌باشد. مانند:

$$3xy \quad \text{نظر به } y \text{ ضریب } 3x \text{ است} \quad 3 \text{ ضریب عددی}$$

حدود مشابه: عبارت از افاده‌های الجبری می‌باشد که صرف ضرایب آن‌ها متفاوت باشند. مانند:

$$3x^2 \rightarrow 12x^2 \quad zy \rightarrow 5zy \quad 2x^5 \rightarrow -3x^5$$

حدود غیر مشابه: عبارت از افاده‌های الجبری می‌باشد که حروف آنها باهم مساوی نباشند. مانند:

$$8xy^2 \rightarrow 2xy \quad 3za^3 \rightarrow 4z^2a^3 \quad 3ax \rightarrow 3ab$$

عبارت‌های الجبری: به صورت عموم عبارات الجبری به سه نوع است که هر کدام عبارتند از:

الف) پولینومی ب) ناطق (گویا) ج) غیر ناطق

برای این که پولینوم‌ها را مفصل تشریح نمائیم ابتدا افاده‌های ناطق و غیرناطق را مطالعه می‌نمائیم.

افاده‌های الجبری ناطق: اگر بتوانیم که یک افاده الجبری را به شکل

$$\frac{p_{(x)}}{q_{(x)}} \quad q_{(x)} \neq 0$$

بنویسیم طوری که $p_{(x)}, q_{(x)}$ عبارت الجبری باشد این نوع

عبارت را بنام افاده‌های الجبری ناطق (گویا) یاد می‌کنند. مانند:

$$\frac{x^2}{x^3}, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{x}{y^2}, \dots$$

افاده‌های غیرناطق: عبارت از افاده الجبری است که آن را به شکل خارج

قسمت دو پولینوم نوشته کرده نمی‌توانیم. مانند:

$$\frac{3}{\sqrt{x}}, \quad \sqrt{ab}, \quad \sqrt[3]{ab^2}, \quad \frac{x}{\sqrt{2x}}, \dots$$

ملتی نوم: عبارت چندین حده الجبری که توان متحول آن کسری یا منفی

باشد بنام ملتی نوم یاد می‌کنند. مانند:

$$3\sqrt{x}, \quad 8\sqrt[3]{xy}, \quad a^{\frac{1}{2}} + b^{-1}, \dots$$

افاده‌های الجبری پولینومی

افاده الجبری یک یا چند حده که توان‌های حروف شان در ست اعداد کامل $IW = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ شامل باشد، بنام پولینوم یاد می‌کنند که شکل عمومی آن عبارت از:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0 x^0 \quad a_n \neq 0$$

طوری که n یک عدد مکمل و نشان دهنده درجه متحول و $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$ ضرایب اعداد حقیقی اند.

ex:

$$x^2 + x, \quad y - 2, \quad x + 1, \quad 8, \dots$$

مشخصات پولینوم عبارتند از:

- ❖ توان تمام متحولین اعداد کامل باشند.
- ❖ در مخرج متحول نداشته باشد.
- ❖ متحول تحت جذر نباشد.

مثال‌ها:

$$a^2 + a, \quad a + 1, \quad x^2 + 2x + 12, \dots$$

مونوم (یک حده): به عبارت گفته می‌شود که دارای یک علامه + و یا - باشد. مانند:

$$-x, \quad +xy, \quad 3xyz, \dots$$

بینوم (دو حده): به عبارت الجبری گفته می‌شود که دارای دو علامه الجبری باشد، به عبارت دیگر، از دو مونوم تشکیل شده باشد. مانند:

$$3x + y, \quad 2 + x, \quad a + b, \dots$$

ترینوم (سه حده): به عبارت گفته می‌شود که دارای سه علامه الجبری باشد. یعنی از سه مونوم تشکیل شده باشد. مانند:

$$x+y-z, \quad 2x-z+4, \quad a+b-c, \dots$$

درجه یک مونوم: عبارت از حاصل جمع توان‌های متحولین یک مونوم می‌باشد. مانند:

$3x^2y$ درجه این عبارت سه می‌باشد، و نظر به x درجه دو، اما نظر به y درجه یک می‌باشد.

$2x^3y^5z$ درجه این حد $3+5+1=9$ یعنی درجه 9 می‌باشد، نظر به x درجه سه می‌باشد، نظر به y درجه پنج می‌باشد و اما نظر به z درجه یک می‌باشد.

درجه یک پولینوم

عبارت از بزرگترین درجه حد (مونوم) همان پولینوم می‌باشد.

مثال‌ها: درجه پولینوم‌های ذیل را تعیین نمایید.

$$3x^2 + 2x - 1 \xrightarrow{\text{for } x} \text{is } 2 \quad 2x + 3 \xrightarrow{\text{for } x} \text{is } 1 \quad 4 \xrightarrow{\text{for } x} \text{is } 0$$

پولینوم ثابت: عبارت از پولینوم است که درجه آن صفر باشد، یا به عبارت دیگر پولینوم که ضرایب تمام متحولین آن صفر باشد. مانند:

$$12 = 12x^0, \quad c = cx^0, \quad 2 = 2x^0, \quad (m-2)x^2 + (2m-4)x + 2 \quad m = 2$$

مثال: قیمت‌ها ی a و b را دریابید طوری که پولینوم $(3-a)x^2 + bx + 3$ یک پولینوم ثابت باشد.

حل: چون پولینوم ثابت است، پس ضرایب آن مساوی به صفر است.

$$(3-a)x^2 + bx + 3 \Rightarrow 3-a=0 \Rightarrow a=3 \quad b=0$$

$$\begin{cases} a=3 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow (3-3)x^2 + 0x + 3 = 3$$

پولینوم صفری

اگر حد ثابت پولینوم ثابت صفر باشد بنام پولینوم صفری یاد می‌کنند. یعنی:

$$p_{(x)} = 0$$

مثال: قیمت a را دریابید اگر $(c-2)x^2 + (2b-2)x + (a+b-c)$ یک پولینوم صفری باشد.

حل: چون پولینوم صفری است، پس هر حد صفر می‌باشد.

$$(c-2)x^2 + (2b-2)x + (a+b-c) \Rightarrow \begin{cases} a=1=b \\ c=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow c-2=0 \Rightarrow c=2 \quad \Rightarrow 2b-2=0 \Rightarrow b=1$$

$$a+b-c=0 \Rightarrow a+1-(+2)=0 \Rightarrow a=1$$

پولینوم‌های معادل: پولینوم‌های اند که دارای متحول یکسان بوده و ضرایب حدود شان باهم دیگر مشابه باشند.

مثال: اگر پولینوم $x^2 - 2x + 4$ با پولینوم $mx^2 + nx + (c-2)$ معادل باشد، قیمت‌های m, n و c را دریابید.

$$mx^2 = x^2 \Rightarrow m=1 \quad nx = -2x \Rightarrow n=-2 \quad c-2=4 \Rightarrow c=6$$

پولینوم‌های متجانس

اگر درجه‌های تمام حدود یک پولینوم باهم مساوی باشند، بنام پولینوم متجانس یاد می‌کنند. مانند:

$$z^2 + y^2, \quad x^2 + xy, \dots$$

مثال: اگر پولینوم $2x^m + 2xy + z^n$ متجانس باشند، قیمت‌های m و n را دریابید.

حل: درجه یکی از حدود 2 بوده، پس درجه حدود دیگر نیز باهم مساوی می‌باشد.

$$m = n = 1 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad m = n = 2$$

پولینوم کامل: عبارت از پولینوم است که تمام حدود آن از بزرگ‌ترین توان متحول تا آخرین حد موجود باشد. مانند:

$$ax^2 + bx + c \qquad 2x^2 + x - 1 \qquad 2x - 1 \qquad 12$$

پولینوم ناقص

پولینوم که یک یا چند توان متحول آن موجود نباشد بنام پولینوم ناقص یاد می‌کنند. مانند:

$$x^2 - 2 \qquad x \qquad x^3 + 2x, \dots$$

و پولینوم ناقص را با گذاشتن صفر به حیث ضریب آن حد، می‌توان پولینوم را کامل کرد. مانند:

$$3x^2 - 1 \longrightarrow 3x^2 + 0x - 1 \qquad 2x^3 - x + 1 \longrightarrow 2x^3 + 0x^2 - x + 1$$

پولینوم منظم و غیر منظم

اگر در یک پولینوم توان‌های آن به صورت صعودی و یا نزولی ترتیب شود، بنام پولینوم منظم و در غیر آن بنام پولینوم غیر منظم یاد می‌کنند. مانند:

پولینوم‌های غیر منظم	پولینوم‌های منظم
$3x^2 - 2x - 1$	$3x^2 + 1 - 2x$
$1 + x - 2x^2$	$x - x^2 + 1$
$x + 1$	$x - 2 + x^2$

دریافت قیمت پولینوم

اگر در یک پولینوم به عوض متحول یک عدد حقیقی وضع شود، یک عدد حقیقی به دست می‌آید که همین عدد، قیمت این پولینوم از این عدد می‌باشد. و

برای دریافت قیمت پولینوم صرف عدد مورد نظر را به متحول آن وضع می‌نمائیم.

مثال‌ها:

$$\begin{array}{ll} 1) & p(x) = 3x^2 - 2x + 1 \\ & \Rightarrow p(2) = 3(2)^2 - 2(2) + 1 \\ & \Rightarrow p(2) = 3 \cdot 4 - 4 + 1 = 9 \\ 2) & p(x) = x - 2 \\ & p(8) = (8) - 2 = 6 \end{array}$$

دریافت مجموع ضرایب پولینوم‌ها

برای دریافت مجموع ضرایب پولینوم‌ها، صرف بجای متحول‌ها عدد (1) را وضع می‌نمائیم.

مثال‌ها: قیمت پولینوم‌های ذیل را دریابید.

$$\begin{array}{ll} 1) & p(x) = 2x^2 - x + 8 \\ & p(1) = 2(1)^2 - (1) + 8 \\ & p(1) = 2 - 1 + 8 = 9 \\ 2) & p(x) = (2x - 4x)^2 \\ & p(1) = [2(1) - 4(1)]^2 \\ & p(1) = (2 - 4)^2 = 4 \end{array}$$

عملیه جمع پولینوم‌ها

در عملیه جمع صرف حدود مشابه را می‌توان باهم جمع کرد، که به شکل سطر و ستونی انجام شده می‌تواند.

مثال ۱: افاده‌های $A = 2x$ و $B = 8x$ است، پس $A + B$ را دریابید.

$$A + B = 2x + 8x \Rightarrow A + B = 10x$$

مثال ۲: افاده $A = 3 - x + 2y$ و $B = 8 + y - 2x$ است، پس $A + B$ را دریابید.

$$\begin{array}{rcl} A & = & 3 - x + 2y \\ B & = & 8 - 2x + y \\ + & & \\ \hline A + B & = & 11 - 3x + 3y \end{array} \quad \begin{array}{rcl} A & = & 3 - x + 2y \\ B & = & 8 - 2x + y \\ \Rightarrow A + B & = & (3 - x + 2y) + (8 - 2x + y) \\ \Rightarrow A + B & = & 11 - 3x + 3y \end{array}$$

برای جمع نمودن افاده‌ها ابتدا آن را ترتیب نموده بعداً جمع می‌کنیم.

عملیه تفریق پولینوم‌ها

برای تفریق افاده‌های الجبری صرف علامه مفروق را تغییر داده، بعداً جمع می‌کنیم.

مثال ۱: افاده $A = 2xy$ و $B = 8xy$ است، پس $A - B$ را دریابید.

$$A - B = (2xy) - (8xy) = 2xy - 8xy = -6xy$$

$$A = 2xy$$

$$B = \pm 8xy$$

$$A - B = -6xy$$

مثال ۲: افاده $A = y^2 - y + 3$ و $B = 2y - 8y^2$ است پس $A - B$ را دریابید.

$$A = y^2 - y + 3$$

$$B = \mp 8y^2 \pm 2y$$

$$A - B = 9y^2 - 3y + 3$$

عملیه ضرب افاده‌های الجبری

برای ضرب نمودن افاده‌های الجبری اولاً علامه ضرب علامه بعداً ضرایب و در اخیر متحول‌ها را به اساس قوانین طاقت‌ها باهم ضرب می‌نمائیم.

ضرب یک حده‌ها

$$1) \quad (8x)(2y) = 16xy$$

$$2) \quad (-2ab^3)(-5ab) = 10a^2b^4$$

$$3) \quad (-3x^3)(2xy) = -6x^4y$$

$$4) \quad (am)(3bm)(7ab) = 21a^2m^2b^2$$

ضرب یک حده در پولینوم

- 1) $3a(a - a^2b^2) = 3a^2 - 3a^3b^2$
- 2) $2m(za - 2m + 1) = 2amz - 4m^2 + 2m$
- 3) $8a\left(\frac{1}{8} + \frac{a}{8} - 8\right) = a + a^2 - 64a = a^2 - 63a$

ضرب پولینوم‌ها: برای انجام این عملیه هر یک از حدود پولینوم اول را در پولینوم دوم ضرب نموده بعداً در صورت امکان ساده می‌سازیم.

- 1) $(3x - 2y)(8a - 3y) = 24ax - 9xy - 16ay + 6y^2$
- 2) $(3a + 1)(8a - 1) = 24a^2 - 3a + 8a - 1 = 24a^2 + 5a - 1$
- 3) $(x - y)(2 + x) = 2x + x^2 - 2y - xy$

عملیه تقسیم پولینوم‌ها: در عملیه تقسیم پولینوم‌ها اولاً علامه بعداً ضرایب و متحول‌ها را به اساس قوانین طاقت تقسیم می‌نمائیم.

تقسیم یک حده‌ها

- 1) $(8xy^2) \div (2xy) = \frac{(8xy^2)}{(2xy)} = 4y$
- 2) $(-3xy^2) \div (3y^2) = \frac{(-3xy^2)}{(3y^2)} = -x$
- 3) $(2ab^2c) \div (4abc) = \frac{(2ab^2c)}{(4abc)} = \frac{1}{2}b = \frac{b}{2}$

تقسیم پولینوم بر یک حده

برای انجام این عملیه تمام حدود پولینوم را بر مونوم تقسیم نموده و بعداً ساده می‌سازیم.

- 1) $(3a^2b + b) \div (b) = \frac{3a^2b}{b} + \frac{b}{b} = 3a^2 + 1$

$$2) \quad (8x^3y - 2x^2y^2) \div (y) = \frac{8x^3y}{y} - \frac{2x^2y^2}{y} = 8x^3 - 2x^2y$$

تقسیم پولینوم‌ها

برای اجرای این عملیه نکات ذیل را بخاطر داشته باشید.

- ❖ پولینوم‌ها را به اساس یک حرف کامل و ترتیب می‌نمائیم.
 - ❖ حد اول مقسوم را بالای اولین حد مقسوم‌علیه به اساس قوانین طاقت تقسیم نموده و حاصل تقسیم را به حیث خارج قسمت انتخاب می‌نمائیم.
 - ❖ حد اول خارج قسمت را به تمام حدود مقسوم‌علیه ضرب نموده و حاصل تقسیم آن را از مقسوم تفریق می‌نمائیم.
 - ❖ عملیه‌های فوق را تا زمانی ادامه می‌دهیم که درجه افاده باقی‌مانده نسبت به درجه مقسوم علیه کوچک گردد.
- مثال‌ها: پولینوم‌های ذیل را تقسیم نمائید.

$$1) \quad (3a^2 + a - 2) \div (a - 1)$$

$$\begin{array}{r} 3a^2 + a - 2 \quad \left| \begin{array}{l} a - 1 \\ 3a + 4 \end{array} \right. \\ \underline{\pm 3a^2 \mp 3a} \\ 4a - 2 \\ \underline{\pm 4a \mp 4} \\ +2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2) \quad (a^3 + a^2 - 2a + 1) \div (a + 1) \\
 \begin{array}{r}
 a^3 + a^2 - 2a + 1 \quad \left| \begin{array}{l} a + 1 \\ a^2 - 2 \end{array} \right. \\
 \hline
 \pm a^3 \pm a^2 \\
 \hline
 -2a + 1 \\
 \hline
 \mp 2a \mp 2 \\
 \hline
 3
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3) \quad (m^4 - m^3 + 2m^2 - 2m + 1) \div (m + 2) \\
 \begin{array}{r}
 m^4 - m^3 + 2m^2 - 2m + 1 \quad \left| \begin{array}{l} m + 2 \\ m^3 - 3m^2 + 8m - 18 \end{array} \right. \\
 \hline
 \pm m^4 \pm 2m^3 \\
 \hline
 -3m^3 + 2m^2 \\
 \hline
 \mp 3m^3 \mp 6m^2 \\
 \hline
 8m^2 - 2m \\
 \hline
 \pm 8m^2 \pm 16m \\
 \hline
 -18m + 1 \\
 \hline
 \mp 18m \mp 36 \\
 \hline
 +37
 \end{array}
 \end{array}$$

قضیه باقی‌مانده

هرگاه پولینوم در حالت تقسیم قرار داشته باشد، در صورتی که مقسوم‌علیه درجه اول $(x - b)$ باشد، برای دریافت باقی‌مانده بدون عملیه تقسیم قیمت مقسوم را $p(b)$ دریافت نموده و قیمت که به دست می‌آید عبارت از باقی‌مانده می‌باشد. مانند:

$$P(x) = Q(x)(x-b) + R \quad x-b=0$$

$$P(b) = Q(b)(b-b) + R \quad \Rightarrow x=b$$

$$P(b) = Q(b)(0) + R$$

$$P(b) = R$$

در صورتی که $P(b) = R = 0$ گردد، در این صورت پولینوم $P(x)$ بالای $(x-b)$ پوره قابل تقسیم است که بنام قضیه فکتور یاد می‌گردد. یعنی:

$$P(x) = Q(x)(x-b) + R \quad x-b=0$$

$$P(b) = Q(b)(b-b) + 0 \quad \Rightarrow x=b$$

$$P(b) = Q(b)(0) + 0 \quad \text{if } R=0$$

$$P(b) = 0 + 0 = 0$$

مثال ۱: اگر پولینوم $P(x) = x^3 - x^2 - 2$ بر $(x-3)$ تقسیم گردد باقی‌مانده را دریافت نمائید.

$$P(x) = x^3 - x^2 - 2$$

$$P(3) = (3)^3 - (3)^2 - 2 \quad x-3=0$$

$$\Rightarrow x=3$$

$$P(3) = 27 - 9 - 2 = 16$$

مثال ۲: هرگاه پولینوم $P(x) = 2x^2 - 3x$ بر $x-2$ تقسیم گردد، باقی‌مانده را دریافت نمائید.

$$P(x) = 2x^2 - 3x \quad x-2=0$$

$$P(2) = 2(2)^2 - 3(2) \quad \Rightarrow x=2$$

$$P(2) = 2 \times 4 - 6 = 2$$

مثال ۳: هرگاه پولینوم $P(x) = x^2 - 5x + 6$ بر $x-3$ تقسیم گردد، باقی‌مانده را دریافت نمائید.

$$P(x) = x^2 - 5x + 6 \quad x - 3 = 0$$

$$P(3) = (3)^2 - 5(3) + 6 \quad \Rightarrow x = 3$$

$$P(3) = 9 - 15 + 6 = 0$$

در مثال فوق پولینوم $P(x) = x^2 - 5x + 6$ بر $x - 3$ پوره قابل تقسیم است که بنام قضیه فکتور یاد می‌گردد.

مثال ۴: در تقسیم $x^3 - 3mx + 4$ بر $x - 2$ اگر باقی‌مانده ۵ شود. قیمت m چند است.

$$P(x) = x^3 - 3mx + 4 \quad x - 2 = 0$$

$$P(2) = (2)^3 - 3m(2) + 4 = 5 \quad \Rightarrow x = 2$$

$$P(2) = 8 - 6m + 4 = 5$$

$$P(2) = 12 - 5 = 6m$$

$$P(2) = 7 = 6m \quad \Rightarrow \boxed{m = \frac{7}{6}}$$

مثال ۵: در پولینوم $ax^3 + bx^2 - 2$ مقادیر a و b را طوری حساب کنید که بر $x - 1$ پوره قابل تقسیم بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $x + 1$ مساوی به ۴ باشد.

$$\begin{aligned} x - 1 = 0 &\Rightarrow x = 1 & R = f(1) & \begin{cases} a + b - 2 = 0 \\ -a + b - 2 = 4 \end{cases} \\ x + 1 = 0 &\Rightarrow x = -1 & R' = f(-1) & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = -2, \quad b = 4$$

همچنان برای تعیین باقی‌مانده $f(x)$ بر بینوم $ax^n + b$ ابتدا بینوم را مساوی به صفر قرار داده، طوری که $x^n = -\frac{b}{a}$ به دست می‌آید. پولینوم را نظر به x^n ترتیب می‌کنیم و بجای x^n مقدارش $-\frac{b}{a}$ را وضع می‌کنیم تا باقی‌مانده به دست آید.

مثال ۶: باقی‌مانده $f(x) = x^7 - 3x^5 + x^4 - 2x - 1$ را بر $x^3 - 2$ دریافت نمائید.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^7 - 3x^5 + x^4 - 2x - 1 & x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x^3 &= 2 \\ f(x) &= (x^3)^2 x - 3x^3 \cdot x^2 + x^3 \cdot x - 2x - 1 \\ R &= (2)^2 x - 3(2) \cdot x^2 + (2) \cdot x - 2x - 1 & R &= 4x - 6x^2 + 2x - 2x - 1 \\ R &= -6x^2 + 4x - 1 & \Rightarrow & \boxed{R = -6x^2 + 4x - 1} \end{aligned}$$

مثال ۷: باقی‌مانده $x^{10} + x^5 + x + 2$ را بر $x^2 + 2$ به‌دست آورید.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{10} + x^5 + x + 2 & x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 &= -2 \\ f(x) &= (x^2)^5 + (x^2)^2 \cdot x + x + 2 \\ R &= (-2)^5 + (-2)^2 \cdot x + x + 2 \\ R &= -32 + 4x + x + 2 \\ \boxed{R} &= \boxed{5x - 30} \end{aligned}$$

تقسیم ترکیبی

برای تقسیم کردن پولینوم $p(x)$ بالای $x - a$ ، تقسیم ترکیبی یک طریقه کوتاه می‌باشد که به صورت عموم برای سهولت از آن استفاده می‌شود.

مثال ۱: اگر پولینوم $p(x) = 3x^2 - 2x + 3$ بالای $x - 3$ تقسیم گردد، خارج قسمت را دریافت نمائید.

$$p(x) = [3x^2 - 2x + 3] \div (x - 3) \quad x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & -2 & 3 & \\ & 9 & 21 & \\ \hline 3 & 7 & 24 & \end{array} \quad \left| \begin{array}{c} 3 \\ Q(x) \end{array} \right. \Rightarrow Q(x) = 3x + 7 \quad R = 24$$

مثال ۲: اگر پولینوم $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 1$ بالای $x - 2$ تقسیم گردد، خارج قسمت را دریافت نمائید.

$$p(x) = [3x^3 - 2x^2 + x - 1] \div (x - 2) \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -2 & 1 & -1 \\ & & 6 & 8 & 18 \\ \hline & 3 & 4 & 9 & 17 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ Q(x) \end{array}$$

$$\Rightarrow Q(x) = 3x^2 + 4x + 9, \quad R = 17$$

فکتوریل

عبارت از حاصل ضرب اعداد طبیعی می‌باشد و به علامه ! نمایش می‌دهند. مانند:

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3) \cdots (3)(2)(1)$$

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

$$\prod_{n=1}^7 i = 7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$$

مثال: نشان دهید که $0! = 1$ است.

$$3! = \frac{4!}{4} = \frac{24}{4} = 6, \quad 2! = \frac{3!}{3} = \frac{6}{3} = 2,$$

$$1! = \frac{2!}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad 0! = \frac{1!}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

مطابقت‌ها

فصل پنجم

آشنایی: در این فصل مطابقت‌ها را مورد بحث قرار می‌دهیم.

مطابقت‌ها: به مساواتی گفته می‌شود که به تمام قیمت‌های دل‌خواه دو طرف مساوات دارای عین قیمت گردد. مانند:

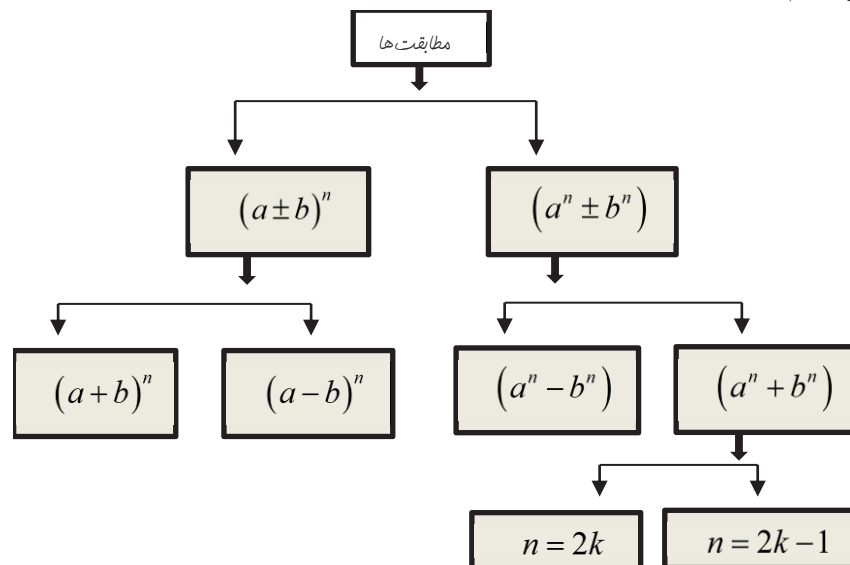
$$(a-2)^2 = a^2 - 4a + 4$$

$$a=4 \quad (4-2)^2 = 4^2 - 4(4) + 4 \quad \Rightarrow 4 = 4$$

$$a=5 \quad (5-2)^2 = 5^2 - 4(5) + 4 \quad \Rightarrow 9 = 9$$

انواع مطابقت‌ها

برای سهولت تشریح این موضوع مطابقت‌ها را طور ذیل به گروه‌ها تقسیم می‌کنیم.



انکشاف مطابقت $(a+b)^n$

- جهت انکشاف این نوع مطابقت‌ها نکات ذیل را بخاطر داشته باشید.
- ✓ حد اول را a^n می‌نویسیم.
 - ✓ برای دریافت ضرایب حدود بعدی، توان حد اول را ضرب ضریب خودش نموده، تقسیم تعداد حدود آن می‌نمائیم.
 - ✓ در انکشاف هر حد، از توان a^n یک واحد کم و به توان b یک واحد جمع می‌کنیم. طوری که مجموع توان‌های a, b در هر حد (n) گردد.
 - ✓ نکات فوق را تا زمانی ادامه می‌دهیم که حد اخیر b^n و a^0 گردد.
- توجه:** تعداد حدود انکشاف یافته $(n+1)$ حد می‌باشد.
- انکشاف مطابقت‌ها قرار ذیل است.

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

$$(a+b)^n = \frac{a^n}{0!} + \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} + \dots + b^n$$

مثال‌ها: مطابقت‌های ذیل را انکشاف دهید.

$$1) \quad (2x+y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$$

$$2) \quad (3+y)^2 = 3^2 + 2(3)y + y^2 = 9 + 6y + y^2$$

$$3) \quad \left(\frac{1}{2} + 2x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)2x + (2x)^2 = \frac{1}{4} + 2x + 4x^2$$

$$4) \quad (x+2)^3 = x^3 + 3x^2(2) + 3x(2)^2 + (2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

ثبوت: این نوع مطابقت‌ها را با استفاده از قوانین طاقث چنین ثبوت می‌نمائیم.

proof :

$$1) \quad (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned} 2) \quad (a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

انکشاف مطابقت $(a-b)^n$

برای انکشاف این مطابقت‌ها مانند مطابقت $(a+b)^n$ عمل نموده، صرف این که علایم حدود انکشاف یافته، بطور متناوب مثبت، منفی می‌باشد. انکشاف این نوع مطابقت‌ها قرار ذیل است.

$$(a-b)^0 = 1$$

$$(a-b)^1 = a-b$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$$

$$(a-b)^n = \frac{a^n}{0!} - \frac{na^{n-1}b}{1!} + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!} - \dots + (-1)^n b^n$$

مثال‌ها: مطابقت‌های ذیل را انکشاف دهید.

$$1) \quad \left(\frac{3}{2} - m\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right)m + m^2 = \frac{9}{4} - 3m + m^2$$

$$2) \quad (2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

$$3) \quad (100 - 1)^2 = 100^2 - 2(100)1 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$$

ثبوت: این نوع مطابقت‌ها را با استفاده از قوانین طاقت چنین ثبوت می‌نمائیم.

proof :

$$1) \quad (a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned} 2) \quad (a - b)^3 &= (a - b)(a - b)^2 = (a - b)(a^2 - 2ab + b^2) \\ &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

مثلث پاسکال

پاسکال عالم فرانسوی برای دریافت ضرایب در مطابقت‌های $(a \pm b)^n$ روش را ارائه کرده است که به مثلث پاسکال معروف می‌باشد، و به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$\begin{array}{l} n=0 \quad 1 \\ n=1 \quad 1 \quad 1 \\ n=2 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\ n=3 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ n=4 \quad 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ n=5 \quad 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ n=6 \quad 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \end{array}$$

مثال: مجموعه ضرایب انکشاف یافته $(2x - 6y)^2$ را دریابید.

$$p(x, y) = (2x - 6y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(6y) + (6y)^2 = 4x^2 - 24xy + 36y^2$$

$$\Rightarrow p(1,1) = 4(1)^2 - 24(1)(1) + 36(1)^1 = 4 - 24 + 36 = 16$$

$$p(x,y) = (2x - 6y)^2$$

$$\Rightarrow p(1,1) = (2(1) - 6(1))^2 = (2 - 6)^2 = 4^2 = 16$$

دریافت حد خواسته شده در انکشاف بینوم‌های $(a \pm b)^n$

برای انجام این عملیه ترکیب اعداد را بطور مختصر بیان می‌کنیم.

$$C\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad n \geq r, \quad n, r \in N$$

مثال‌ها: ترکیب‌های ذیل را حساب نمائید.

$$1) \quad C\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \times 2!}{2! \times 1} = 3$$

$$2) \quad C\binom{8}{6} = \frac{8!}{6!(8-6)!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{6! \times 2!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

$$3) \quad C\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

با استفاده از ترکیب اعداد حد خواسته شده انکشاف بینوم $(a \pm b)^n$ را از رابطه

ذیل به‌دست می‌آوریم.

$$C\binom{n}{r} a^{n-r}, b^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} a^{n-r}, b^r$$

برای حل مثال‌های این عملیه نکات زیر را بخاطر داشته باشید.

- حد خواسته شده $(r+1)$ می‌باشد.
- مطابقت‌های $(a+b)^n$ تمام ضرایب آن مثبت است.
- مطابقت‌های $(a-b)^n$ نظر به توان حد دوم (b) اگر تاق باشد ضریب منفی، اگر جفت باشد مثبت است.

مثال ۱: حد پنجم $(a-b)^8$ را دریافت نمائید.

$$n=8 \quad r+1=5 \Rightarrow r=4$$

$$\frac{8!}{4!(8-4)!} a^{8-4}, b^4 \Rightarrow \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70a^4b^4$$

لذا توان حد دوم (b) جفت است، پس ضریب آن $(+70)$ می‌باشد.

مثال ۲: حد سوم $(a+b)^5$ را دریافت نمائید.

$$\left. \begin{array}{l} n=5 \\ r+1=3 \\ r=2 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{5!}{2!(5-2)!} a^{5-2}, b^2 \Rightarrow \frac{5 \times 4 \times 3!}{2! \times 3!} = 20a^3b^2$$

مثال ۳: حد چهارم $(x-y)^7$ را دریافت نمائید.

$$\left. \begin{array}{l} n=7 \\ r+1=4 \\ r=3 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{7!}{3!(7-3)!} x^{7-3} y^3 \Rightarrow \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3! \times 4!} = 35x^4y^3$$

$$\boxed{-35x^4y^3}$$

چون توان حد دوم (y) تاق است، پس ضریب حد چهارم آن $-35x^4y^3$ است.

انکشاف مطابقت‌های $(a^n - b^n)$

این نوع مطابقت‌ها توسط رابطه ذیل انکشاف داده می‌شود.

$$(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

و به صورت ذیل انکشاف می‌دهیم.

$$a^0 - b^0 = 1$$

$$a^1 - b^1 = a - b$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

توجه: هرگاه n یک عدد جفت طبیعی باشد این مطابقت‌ها را از رابطه زیر نیز می‌توان انکشاف داد.

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - b^{n-1})$$

ex:

$$a^4 - b^4 = (a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3)$$

مثال‌ها: مطابقت‌های ذیل را انکشاف دهید.

$$1) \quad x^2 - 16 = x^2 - 4^2 = (x - 4)(x + 4)$$

$$2) \quad 9y^2 - 4 = (3y)^2 - 2^2 = (3y - 2)(3y + 2)$$

$$3) \quad x^6 - 1 = x^6 - 1^6 = (x - 1)(x^5 + x^4 \cdot 1 + x^3 \cdot 1^2 + x^2 \cdot 1^3 + x \cdot 1^4 + 1^5) \\ = (x - 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$4) \quad x^4 - 1 = x^4 - 1^4 = (x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$$

ثبوت

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= a^2 - b^2 + ab - ab \\ a^2 - b^2 &= a^2 + ab - b^2 - ab = a(a + b) - b(b + a) \\ \Rightarrow a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \end{aligned}$$

proof :

$$\begin{aligned}
 a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\
 \Rightarrow (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\
 \Rightarrow (a-b)^3 &= a^3 - b^3 + 3ab^2 - 3a^2b \\
 \Rightarrow a^3 - b^3 + 3ab^2 - 3a^2b &= (a-b)^3 \\
 \Rightarrow a^3 - b^3 &= (a-b)^3 + 3a^2b - 3ab^2 \\
 \Rightarrow a^3 - b^3 &= (a-b)^3 + 3ab(a-b) \\
 \Rightarrow a^3 - b^3 &= (a-b)[(a-b)^2 + 3ab] \\
 \Rightarrow a^3 - b^3 &= (a-b)[(a^2 - 2ab + b^2) + 3ab] \\
 \Rightarrow a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2)
 \end{aligned}$$

انکشاف مطابقت‌های $a^n + b^n$

الف) اگر n یک عدد تاق باشد، توسط رابطه ذیل انکشاف داده می‌شود.

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1}) \quad \text{if } n = 2k-1$$

ex:

$$a^1 + b^1 = a + b$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$$

مثال‌ها: مطابقت‌های ذیل را انکشاف دهید.

$$1) \quad 8 + x^3 = 2^3 + x^3 = (2+x)(2^2 - 2x + x^2)$$

$$2) \quad y^3 + 27 = y^3 + 3^3 = (y+3)(y^2 - 3y + 3^2)$$

$$\begin{aligned}
 & \text{proof :} \quad a^n + b^n \quad \text{if } n = 2k - 1 \\
 & a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\
 & \Rightarrow (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
 & \Rightarrow (a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 \\
 & \Rightarrow a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 = (a + b)^3 \\
 & \Rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 \\
 & \Rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) \\
 & \Rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] \\
 & \Rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) \\
 & \Rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)
 \end{aligned}$$

ب) اگر n یک عدد جفت باشد، مطابقت $a^n + b^n$ توسط رابطه ذیل انکشاف داده می‌شود.

$$a^n + b^n = \left(a^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}} + \sqrt{2(ab)^{\frac{n}{2}}} \right) \left(a^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}} - \sqrt{2(ab)^{\frac{n}{2}}} \right)$$

ex:

$$a^2 + b^2 = (a + b + \sqrt{2ab})(a + b - \sqrt{2ab})$$

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2 + \sqrt{2ab})(a^2 + b^2 - \sqrt{2ab})$$

ثبوت

proof :

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 &= (a+b)^2 \\ \Rightarrow a^2 + b^2 &= (a+b)^2 - 2ab = (a+b)^2 - \sqrt{(2ab)^2} \\ \Rightarrow a^2 + b^2 &= (a+b+\sqrt{2ab})(a+b-\sqrt{2ab})\end{aligned}$$

نظر به خاصیت تناسب می‌توان فورمول فوق را تعمیم داد.

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= (a+b+\sqrt{2ab})(a+b-\sqrt{2ab}) \\ \text{if } \frac{2}{n} \frac{1}{x} &\Rightarrow x = \frac{n}{2} \\ a^n + b^n &= \left(a^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}} + \sqrt{2(ab)^{\frac{n}{2}}} \right) \left(a^{\frac{n}{2}} + b^{\frac{n}{2}} - \sqrt{2(ab)^{\frac{n}{2}}} \right)\end{aligned}$$

مطابقت‌های مشهور

برای سهولت در اجرای عملیه‌های ریاضیکی، مطابقت‌های ذیل را بخاطر داشته باشید.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b)\end{aligned}$$

تجزیه افاده‌ها

فصل ششم

آشنایی: در این فصل به تجزیه افاده‌های الجبری می‌پردازیم، طوری که در ریاضیات (۱) تجزیه اعداد طبیعی را آموختید، تجزیه افاده‌های الجبری نیز تبدیل نمودن آن به عوامل ضربی مذکور می‌باشد.

تجزیه: تجزیه یک افاده الجبری عبارت از دریافت چند افاده دیگر به شکل عوامل ضربی آن می‌باشد، که به حالات ذیل یک افاده الجبری را تجزیه می‌نمائیم.

۱: تجزیه به اساس فکتورگیری

هرگاه در یک افاده الجبری یک حرف در تمام حدود آن شامل باشد، آنرا فکتور گرفته و هر یک از حدود را تقسیم این عامل نموده و حاصل تقسیم را در حالت ضرب با این عامل می‌نویسیم که عبارت از تجزیه افاده‌ها می‌باشد.

مثال‌ها: افاده‌های زیر را تجزیه نمائید.

- 1) $ma + mb - cm = m(a + b - c)$
- 2) $3xm - 2x^2m = xm(3 - 2x)$
- 3) $x - xy = x(1 - y)$
- 4) $am^2 - xym^4 = am^2(1 - xym^2)$
- 5) $3xy - 6x^2y = 3xy(1 - 2x)$

۲: تجزیه بینوم‌ها

هر گاه افاده‌های الجبری شکل $a^2 - b^2$ را داشته باشد به حاصل ضرب دو قوس تجزیه می‌نمائیم. مانند:

- 1) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
- 2) $4 - y^2 = 2^2 - y^2 = (2 - y)(2 + y)$
- 3) $9a^2 - 4b^2 = (3a)^2 - (2b)^2 = (3a - 2b)(3a + 2b)$
- 4) $0.09x^2 - y^2 = \frac{9}{100}x^2 - y^2 = \left(\frac{3}{10}x - y\right)\left(\frac{3}{10}x + y\right)$
- 5) $x^2 - y = x^2 - (\sqrt{y})^2 = (x - \sqrt{y})(x + \sqrt{y})$
- 6) $x^{-2} - y^6 = (x^{-1})^2 - (y^3)^2 = (x^{-1} - y^3)(x^{-1} + y^3)$

۳: تجزیه به اساس مطابقت‌های $(a \pm b)^2$

بعضی از افاده‌های الجبری که شکل انکشاف یافته مطابقت فوق را داشته، چنین تجزیه می‌نمائیم از حد اول و اخیر جذر مربع گرفته باهم ضرب نموده، اگر دو چند این عامل مساوی به حد وسط باشد می‌توان به این روش تجزیه نمود. مانند:

- 1)
$$\begin{array}{ccc} a^2 + 2ab + b^2 & & 2ab = 2ab \\ \downarrow & \downarrow & \\ a & b & \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)(a + b) \end{array}$$
- 2)
$$\begin{array}{ccc} 4x^2 - 4xy + y^2 & & 2 \times 2x \cdot y = 4xy \\ \downarrow & \downarrow & \\ 2x & y & \Rightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 = (2x - y)(2x - y) \end{array}$$
- 3)
$$\begin{array}{ccc} 4m^2x + 4mnx + n^2x = x(4m^2 + 4mn + n^2) & & 2 \times 2mn = 4mn \\ \downarrow & \downarrow & \\ 2m & n & \Rightarrow 4m^2x + 4mnx + n^2x = x(2m + n)(2m + n) \end{array}$$

۴: تجزیه به روش گروپ بندی

افاده‌های الجبری که عامل مشترک خاص نداشته باشد، چند مرتبه فکتور مشترک گرفته به عوامل آن تجزیه می‌نمائیم. مانند:

- 1) $am + bm + an + bn = am + bm + an + bn$
 $= m(a + b) + n(a + b) = (a + b)(m + n)$
- 2) $2mx - 2mb - x^2 + bx = 2m(x - b) - x(x - b)$
 $= (x - b)(2m - x)$
- 3) $3ax + 3xb - ay - by = 3x(a + b) - y(a + b)$
 $= (a + b)(3x - y)$

۵: تجزیه ترینوم‌ها

برای تجزیه ترینوم $ax^2 + bx + c$ حالات ذیل را در نظر می‌گیریم.
حالت اول: تجزیه ترینوم‌های که در آن $a = 1$ باشد، و شکل $x^2 + bx + c$ را اختیار نماید، برای تجزیه آن دو عدد را به دست می‌آوریم که حاصل ضرب آن‌ها c و حاصل جمع آن‌ها مساوی به b گردد. به صورت زیر تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 x^2 + bx + c \quad b &= (m + n) \quad c = m \cdot n \\
 \Rightarrow x^2 + bx + c &= x^2 + (m + n)x + m \cdot n \\
 &= x^2 + mx + nx + mn \\
 &= \underbrace{x^2 + mx}_x + \underbrace{nx + mn}_n = \underbrace{x(x + m) + n(x + m)}_{x+m} \\
 &= (x + m)(x + n) \quad \Rightarrow x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)
 \end{aligned}$$

مثال‌ها:

- 1) $x^2 + 4x + 4 = x^2 + \underset{2+2}{4}x + \underset{2 \times 2}{4} = (x + 2)(x + 2)$
- 2) $x^2 + 5x + 6 = x^2 + \underset{2+3}{5}x + \underset{2 \times 3}{6} = (x + 2)(x + 3)$

$$3) \quad x^2 - 6x + 9 = x^2 - \underset{-3-3}{6x} + \underset{-3 \times -3}{9} = (x-3)(x-3)$$

$$4) \quad x^2 + 2x - 3 = x^2 + \underset{3 \times -1}{2x} - 3 = (x+3)(x-1)$$

حالت دوم: تجزیه ترینوم‌های که در آن $a \neq 0$ باشد، توسط جدول می‌توان بطور ذیل تجزیه کرد.

$$1) \quad 2x^2 - 7x + 3 \Rightarrow \begin{array}{r} 2x \quad -1 \\ x \quad -3 \\ \hline -6x - x = -7x \\ 2x^2 - 3x - 2 \end{array} = (2x-1)(x-3)$$

$$2) \quad 2x^2 - 3x - 2 \Rightarrow \begin{array}{r} 2x \quad +1 \\ x \quad -2 \\ \hline -4x + x = -3x \\ 3x^2 + 7x + 2 \end{array} = (2x+1)(x-2)$$

$$3) \quad 3x^2 + 7x + 2 \Rightarrow \begin{array}{r} 3x \quad +1 \\ x \quad +2 \\ \hline 6x + x = 7x \\ 2x^2 - 3x + 1 \end{array} = (3x+1)(x+2)$$

$$4) \quad 2x^2 - 3x + 1 \Rightarrow \begin{array}{r} 2x \quad -1 \\ x \quad -1 \\ \hline -2x - x = -3x \\ -2x - x = -3x \end{array} = (2x-1)(x-1)$$

حالت سوم: طریقه تکمیل مربع، برای تجزیه نمودن ترینوم‌های $ax^2 + bx + c$

به روش تکمیل مربع نکات زیر را بخاطر داشته باشید.

❖ ضریب x^2 ، (a) را فکتور مشترک می‌گیریم.

❖ ضریب x ، (b) را نصف نموده، مربع می‌کنیم و این عدد را یک‌بار جمع و تفریق می‌نمائیم.

❖ سه حد اول را به مطابقت $(a+b)^2$ تبدیل می‌کنیم.

❖ حدود متباقی را بعد از عملیه‌های فوق به صورت مربع کامل می‌نویسیم.

❖ بعداً مانند تجزیه نوع دوم آنرا تجزیه می‌نمائیم.

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right] \\
 &= a \left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 + 4ac}{(2a)^2} \right] \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{(\sqrt{b^2 + 4ac})^2}{(2a)^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \right)^2 \right] \\
 &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \right) \right] \\
 &= a \left(x + \frac{b - \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \right) \left(x + \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \right)
 \end{aligned}$$

مثال:

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 3x - 2 &= 2 \left[x^2 + \frac{3}{2}x - 1 \right] = 2 \left[x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4} \right)^2 - \left(\frac{3}{4} \right)^2 - 1 \right] \\
 &= 2 \left[\left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} - 1 \right] = 2 \left[\left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{25}{16} \right]
 \end{aligned}$$

$$= 2 \left[\left(x + \frac{3}{4} \right)^2 - \left(\frac{5}{4} \right)^2 \right] = 2 \left[\left(x + \frac{3}{4} - \frac{5}{4} \right) \left(x + \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \right) \right]$$

$$= 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x + 2) = (2x - 1)(x + 2)$$

بزرگ‌ترین قاسم مشترک افاده‌های الجبری

عبارت از بزرگ‌ترین افاده الجبری است، که تمام افاده‌های داده شده بر این افاده الجبری پوره قابل تقسیم باشد، و برای دریافت آن از مطابقت‌ها و تجزیه استفاده می‌نمائیم.

مثال‌ها: بزرگ‌ترین قاسم مشترک افاده‌های ذیل را دریابید.

- 1) $3xz, 9x^2y, \Rightarrow GCD = 3x$
- 2) $5x^2, 15xy^2, 10zx^3, \Rightarrow GCD = 5x$
- 3) $a^2 - b^2, a - b, \Rightarrow GCD = a - b$
- 4) $2x^2 + 4, 2x \Rightarrow GCD = 2$
- 5) $x^2 - x - 6, x^2 - 2x - 6$
 $\Rightarrow (x - 3)(x + 2), (x + 2)(x - 4), \Rightarrow GCD = (x + 2)$

کوچک‌ترین مضرب مشترک افاده‌های الجبری

عبارت از کوچک‌ترین افاده الجبری است، که بر تمام افاده‌های داده شده پوره قابل تقسیم باشد. که می‌توان با استفاده از تجزیه و مطابقت‌ها دریافت کرد.

مثال‌ها: کوچک‌ترین مضرب مشترک افاده‌های ذیل را دریابید.

- 1) $3x^2, 6xy^2, \Rightarrow LCM = 6x^2y^2$
- 2) $(a + b)^2, (a - b), \Rightarrow LCM = (a^2 - b^2)(a + b)$
- 3) $2ab, a^2c, 7ab^2, \Rightarrow LCM = 14a^2b^2c$
- 4) $(x - 2), (x - 1), (x - 3), \Rightarrow LCM = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

کسور الجبری و اعداد مختلط

فصل هفتم

آشنایی: در این فصل عملیه‌های جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کسور الجبری و اعداد مختلط را تشریح و به معرفی هر یک می‌پردازیم.

کسور الجبری

کسرهای که صورت و مخرج شان افاده‌های الجبری باشد، بنام کسور الجبری یاد می‌گردد، و به شکل $\frac{p(x)}{g(x)}$ می‌باشد، طوری که $g(x) \neq 0$ باشد. مانند:

$$\frac{3x+1}{2x-1}, 2x-1 \neq 0$$

$$\frac{2x+3}{4x}, 4x \neq 0$$

$$\frac{3x^2-2x+3}{5x-2}, 5x-2 \neq 0$$

$$\frac{x}{x-3}, x-3 \neq 0$$

کسرواقعی

به کسر گفته می‌شود که درجه صورت آن کوچک‌تر از درجه مخرج‌اش باشد. مانند:

$$\frac{3x}{2x^2-5x+3}$$

$$\frac{3x+2}{x^3-2x^2+x+3}$$

$$\frac{2x^2-5x+6}{3x^3-2x^2}$$

کسر غیرواقعی

به کسرهای گفته می‌شود که درجه صورت بزرگ‌تر از درجه مخرج باشد. مانند:

$$\frac{2x^2-5x+3}{3x+2}$$

$$\frac{x^3-2x^2+x+3}{2x^2-5x+6}$$

$$\frac{3x^3-2x^2}{3x}$$

کسرناطق (نسبتی): به کسرهای گفته می‌شود که صورت و مخرج آن از پولینوم‌ها تشکیل شده باشد. مانند:

$$\frac{3x^2-2}{3x-1} \quad \frac{2x+3}{4x-2} \quad \frac{5x^2-x}{x^3-6}$$

کسر غیر ناطق: به کسرهای گفته می‌شود که یکی از حروف صورت یا مخرج

تحت جذر باشد. مانند:

$$\frac{\sqrt{x}+2}{3x-2} \quad \frac{\sqrt{x^3-2}}{3x-8} \quad \frac{x+2}{\sqrt{8x+2}} \quad \frac{\sqrt[3]{3x-3}}{\sqrt{3-x}}$$

اختصار کسرها

هرگاه صورت و مخرج کسرها را تقسیم مقسوم‌علیه مشترک آنها نماییم، این عملیه را بنام اختصار کسرها یاد می‌کنند. و برای اختصار کسرهای الجبری اولاً صورت و مخرج را تجزیه نموده بعداً عوامل مشترک را اختصار می‌نماییم.

مثال‌ها: کسور ذیل را اختصار نمائید.

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{ax+bx}{ax} &= \frac{x(a+b)}{a \cancel{x}} = \frac{a+b}{a} \\ 2) \quad \frac{2a^2-18}{a^2-3a} &= \frac{2(a^2-9)}{a(a-3)} = \frac{2\cancel{(a-3)}(a+3)}{a\cancel{(a-3)}} = \frac{2(a+3)}{a} \\ 3) \quad \frac{x^2+x-6}{2x-4} &= \frac{\cancel{(x-2)}(x+3)}{2\cancel{(x-2)}} = \frac{x+3}{2} \\ 4) \quad \frac{x^2-1}{(x+1)^2} &= \frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{(x+1)\cancel{(x+1)}} = \frac{x-1}{x+1} \\ 5) \quad \frac{a-2}{a^2-4} &= \frac{\cancel{a-2}}{\cancel{(a-2)}(a+2)} = \frac{1}{a+2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}}$$

توجه:

عملیه‌های کسور الجبری

عملیه جمع و تفریق کسره‌های الجبری: برای جمع و تفریق کسور الجبری دو حالت ذیل را در نظر می‌گیریم.

❖ اگر مخرج کسرها مساوی باشد، صورت‌ها را جمع و یا تفریق می‌نمائیم.

مثال‌ها: کسره‌های ذیل را جمع و تفریق نمائید.

$$1) \quad \frac{2x-1}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{3x-2}{x} = ? \quad \frac{2x-1}{x} + \frac{3x}{x} + \frac{3x-2}{x} \\ = \frac{(2x-1) + (3x) + (3x-2)}{x} = \frac{8x-3}{x}$$

$$2) \quad \frac{2+a^2}{y} - \frac{3a^2}{y} + \frac{8a^2}{y} = ? \quad \frac{2+a^2}{y} - \frac{3a^2}{y} + \frac{8a^2}{y} \\ = \frac{(2+a^2) - (3a^2) + (8a^2)}{y} = \frac{2+6a^2}{y}$$

$$3) \quad \frac{x+2}{m} + \frac{x^2-x}{m} - \frac{x+x^2}{m} = ? \quad \frac{x+2}{m} + \frac{x^2-x}{m} - \frac{x+x^2}{m} \\ = \frac{(x+2) + (x^2-x) - (x+x^2)}{m} = \frac{2-x}{m}$$

❖ در صورتی که مخرج‌های کسور متفاوت باشد، کوچک‌ترین مضرب آن‌ها را دریافت نموده، مانند کسره‌های حسابی ساده می‌سازیم.

مثال‌ها: کسره‌های ذیل را جمع و تفریق نمائید.

$$1) \quad \frac{3x^2-1}{x} - \frac{x-2}{x^2} = ? \quad \frac{3x^2-1}{x} - \frac{x-2}{x^2} = \\ \frac{x(3x^2-1) - (x-2)}{x^2} = \frac{3x^3 - x - x + 2}{x^2} = \frac{3x^3 - 2x + 2}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \frac{2x-1}{x-2} + \frac{3x+1}{2x} = ? \quad \frac{2x-1}{x-2} + \frac{3x+1}{2x} = \\
 & \frac{2x(2x-1) + (x-2)(3x+1)}{2x(x-2)} = \frac{4x^2 - 2x + 3x^2 + x - 6x - 2}{2x^2 - 4x} \\
 & = \frac{7x^2 - 7x - 2}{2x^2 - 4x} \\
 3) \quad & \frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b} = ? \quad \frac{a+b}{a} + \frac{a-b}{b} = \\
 & \frac{b(a+b) + a(a-b)}{ab} = \frac{ab + b^2 + a^2 - ab}{ab} = \frac{a^2 + b^2}{ab}
 \end{aligned}$$

عملیه ضرب کسور الجبری: برای ضرب کردن کسور الجبری مانند کسرهای حسابی صورت ضرب صورت و مخرج ضرب مخرج، در صورت امکان اختصار پذیری اولاً اختصار می‌نمائیم.

مثال‌ها: کسور ذیل را ضرب نمائید.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{2x-2}{4} \cdot \frac{2}{x-1} = ? \quad \frac{2x-2}{4} \cdot \frac{2}{x-1} = \\
 & \frac{2(\cancel{x-1}) \times 2}{4(\cancel{x-1})} = \frac{2 \times 2}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\
 2) \quad & \frac{(a-b)^2}{a} \cdot \frac{a+b}{a-b} = ? \quad \frac{(a-b)^2}{a} \cdot \frac{a+b}{a-b} = \\
 & \frac{(a-b)(\cancel{a-b})(a+b)}{(\cancel{a-b})a} = \frac{a^2 + b^2}{a} \\
 3) \quad & \frac{a+b}{a} \cdot \frac{(a+b)^2}{a-b} = ? \quad \frac{a+b}{a} \cdot \frac{(a+b)^2}{a-b} = \frac{(a+b)^3}{a^2 - ab} \\
 4) \quad & \frac{3x^3y}{a^5} \cdot \frac{a^3}{x^2} = ? \quad \frac{3x^3y}{a^5} \cdot \frac{a^3}{x^2} = \frac{3xy}{a^2}
 \end{aligned}$$

$$5) \quad \frac{2a+4b}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2} = ? \quad \frac{2a+4b}{a+b} \cdot \frac{a+b}{2} =$$

$$\frac{\cancel{2}(a+2b) \cancel{(a+b)}}{\cancel{(a+b)} \cancel{2}} = \frac{a+2b}{1} = a+2b$$

عملیه تقسیم کسور الجبری: برای تقسیم کسور الجبری کسر اول به حالت خودش گذاشته شده علامه تقسیم به ضرب تبدیل گردیده و کسر دوم را برعکس می‌نمائیم، و بعد ضرب را ساده می‌سازیم.

مثال‌ها: کسور ذیل را تقسیم نمائید.

$$1) \quad \frac{x}{y^2} \div \frac{x^2}{y} = \frac{x}{y^2} \cdot \frac{y}{x^2} = \frac{1}{xy}$$

$$2) \quad \frac{a^2-1}{a} \div \frac{a-1}{a+1} = \frac{a^2-1}{a} \cdot \frac{a+1}{a-1} = \frac{(a+1)^2}{a}$$

$$3) \quad \frac{x+1}{x^2-1} \div \frac{a-b}{a^2-b^2} = ? \quad \frac{x+1}{x^2-1} \div \frac{a-b}{a^2-b^2} =$$

$$\frac{x+1}{x^2-1} \cdot \frac{a^2-b^2}{a-b} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)} = \frac{(a+b)}{(x-1)}$$

کسر مرکب: کسری است که صورت و مخرج آن کسرها باشد. مانند:

$$1) \quad \frac{a+\frac{1}{3}}{a-\frac{a}{2}} = ? \quad \frac{a+\frac{1}{3}}{a-\frac{a}{2}} = \frac{\frac{3a+1}{3}}{\frac{a}{2}} = \frac{3a+1}{3} \cdot \frac{2}{a} = \frac{6a+2}{3a}$$

$$2) \quad \frac{\frac{a+b}{a^2}}{\frac{a-b}{a}} = ? \quad \frac{\frac{a+b}{a^2}}{\frac{a-b}{a}} = \frac{a+b}{a^2} \cdot \frac{a}{a-b} = \frac{a+b}{a^2-ab}$$

$$3) \quad \frac{a}{1 - \frac{1}{1 + \frac{a}{b}}} = ? \quad \frac{a}{1 - \frac{1}{1 + \frac{a}{b}}} = \frac{a}{1 - \frac{1}{\frac{b+a}{b}}} = \frac{a}{1 - \frac{b}{a+b}} =$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a+b}{a} = a+b$$

$$4) \quad 1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3 - \frac{2m-1}{2m+1}}} = ? \quad 1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{3 - \frac{2m-1}{2m+1}}} =$$

$$1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\frac{6m+3-2m+1}{2m+1}}} = 1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\frac{4m+4}{2m+1}}} =$$

$$1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\frac{1}{4m+4}}} = 1 - \frac{1}{2 - \frac{1}{\frac{1}{4m+4}}} = 1 - \frac{1}{\frac{8m+8-2m-1}{4m+4}} =$$

$$1 - \frac{1}{\frac{6m+7}{4m+4}} = 1 - \frac{4m+4}{6m+7} = \frac{6m+7-4m-4}{6m+7} = \frac{2m+3}{6m+7}$$

$$5) \quad \frac{a + \frac{2a}{a-2}}{1 + \frac{4}{a^2-4}} = ? \quad \frac{a + \frac{2a}{a-2}}{1 + \frac{4}{a^2-4}} = \frac{\frac{a^2-2a+2a}{a-2}}{\frac{a^2-4+4}{a^2-4}} =$$

$$\frac{a^2}{a^2-4} = \frac{a^2}{a-2} \cdot \frac{a^2-4}{a^2} = \frac{(a-2)(a+2)}{a-2} = a+2$$

گویا ساختن مخرج کسره‌های غیرناطق (جذری)

اگر مخرج یک کسر تحت جذر واقع باشد، برای گویا ساختن مخرج کسر غیرناطق، صورت و مخرج کسر را ضرب عامل متناسب مخرج نموده تا این که مخرج کسر به حالت ناطق قرار گیرد.

مثال‌ها: مخرج‌های کسور ذیل را گویا سازید.

$$1) \quad \frac{2}{\sqrt{3}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$2) \quad \frac{1}{\sqrt{3}-2} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}-2} \times \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}+2}{(\sqrt{3})^2-2^2} = \frac{\sqrt{3}+2}{3-4} = -(\sqrt{3}+2)$$

$$3) \quad \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}} = \frac{2\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}} =$$

$$\frac{2\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2}} = \frac{2\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}{\sqrt{1}} = 2\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

توجه: برای گویا ساختن کسر $\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}$ طوری که $m < n$ باشد، صورت و مخرج کسر

را ضرب $\sqrt[n]{b^{n-m}}$ می‌نمائیم.

مثال‌ها: کسور ذیل را گویا سازید.

$$1) \quad \frac{a}{\sqrt[3]{b}} \rightarrow \frac{a}{\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^2}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{a\sqrt[3]{b^2}}{b}$$

$$2) \quad \frac{3}{\sqrt[4]{8}} \rightarrow \frac{3}{\sqrt[4]{2^3}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^3 \cdot 2}} = \frac{3\sqrt[4]{2}}{2}$$

$$3) \quad \frac{2}{\sqrt{2}} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

همچنان از مطابقت $a^3 + b^3$ نیز می‌توان استفاده نمود.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} \cdot \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} = \frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}}{a-b}$$

تجزیه جذر مرکب

جذری که به شکل $\sqrt{a \pm b}$ باشد بنام جذر مرکب یاد می‌شود، و برای تجزیه آن به جذور ساده، باید $a^2 - b$ شکل مربع کامل را داشته باشد، یا $a^2 - b = c^2$ باشد، که تجزیه آن قرار ذیل است.

$$\boxed{\sqrt{a \pm b} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-c}{2}}}$$

مثال‌ها: جذور مرکب ذیل را تجزیه نمائید.

$$1) \quad \sqrt{8+\sqrt{28}} \begin{cases} a=8 \\ b=28 \end{cases} \Rightarrow c^2 = 8^2 - 28 \Rightarrow c^2 = 64 - 28 = 36 \Rightarrow c = 6$$

$$\sqrt{8+\sqrt{28}} = \sqrt{\frac{8+6}{2}} + \sqrt{\frac{8-6}{2}} = \sqrt{7} + \sqrt{1} = 1 + \sqrt{7}$$

$$2) \quad \sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{7+\sqrt{2^2 \cdot 10}} = \sqrt{7+\sqrt{40}} \\ a=7, b=40 \Rightarrow c^2 = 7^2 - 40 = 49 - 40 = 9 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$$

$$\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{7+3}{2}} + \sqrt{\frac{7-3}{2}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$$3) \quad \sqrt{8+\sqrt{48}} \Rightarrow a=8, b=48 \Rightarrow c^2 = 8^2 - 48 = 64 - 48 = 16 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$$

$$\sqrt{8+\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{8+4}{2}} + \sqrt{\frac{8-4}{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

اعداد موهومی

اعداد منفی تحت جذر جفت در ساحه اعداد حقیقی دارای قیمت نمی باشد و این نوع اعداد را بنام عدد موهومی یاد می کنند، که به صورت ai ارائه می گردد، و a یک عدد حقیقی و i واحد اعداد موهومی بوده که قیمت آن $i = \sqrt{-1}$, $i^2 = -1$ می باشد و به صورت زیر ارائه می گردد.

$$I = \{x : x = ai, a \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

مثال ها

$$\sqrt{-25} = \sqrt{-1 \cdot 25} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{25} = 5i$$

$$\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = 2i$$

توان های عدد (i)

مربع یک عدد حقیقی مثبت، اما مربع یک عدد موهومی منفی می باشد.

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{-1} \\ i^2 &= (\sqrt{-1})^2 \Rightarrow i^2 = -1 \\ i^3 &= i \cdot i^2 = \sqrt{-1} \cdot -1 \Rightarrow i^3 = -i \\ i^4 &= i^2 \cdot i^2 = -1 \times -1 \Rightarrow i^4 = 1 \\ i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i \Rightarrow i^5 = i \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \\ i^5 = i \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i^{4n} = 1 \\ i^{4n+1} = i \\ i^{4n+2} = -1 \\ i^{4n+3} = -i \end{cases}$$

از بالا بردن توان واحد عدد موهومی نتیجه می گیریم که واحد عدد موهومی به هر توان یکی از اعداد $(1, -1, -i, i)$ می باشد.

مثال ۱: قیمت i^{44} را محاسبه نمائید.

$$i^{44} = (i^4)^{11} = 1^{11} = 1$$

مثال ۲: قیمت i^{87} را محاسبه نمائید.

$$\begin{aligned} \frac{87}{\frac{8}{7}} \Bigg| \frac{4}{21} &\Rightarrow 87 = 21 \times 4 + 3 \Rightarrow i^{87} = (i)^{4 \cdot 21 + 3} \\ &\Rightarrow (i^4)^{21} \cdot (i)^3 = 1^{21} \cdot -i = -i \\ &\Rightarrow i^{87} = -i \end{aligned}$$

عملیه‌های الجبری اعداد موهومی

جمع و تفریق اعداد موهومی: مانند اعداد الجبری صورت می‌گیرد. مانند:

- | | |
|---------------------|---------------------------------|
| 1) $3i + 2i = 5i$ | 2) $3i + 22i = i(3 + 22) = 25i$ |
| 3) $82i + 2i = 84i$ | 4) $8i - 4i = i(8 - 4) = 4i$ |
| 5) $7i - 12i = -5i$ | 6) $3i - i = 2i$ |

عملیه ضرب اعداد موهومی

- 1) $(2i)(3i) = 6i^2 = 6 \cdot -1 = -6$
- 2) $(5i)(3i) = 15i^2 = 15 \cdot -1 = -15$
- 3) $(-8i)(2i) = -16i^2 = -16 \cdot -1 = 16$

عملیه تقسیم اعداد موهومی

- 1) $\frac{4i}{2i} = 2$
- 2) $\frac{3i}{4i} = \frac{3}{4}$
- 3) $\frac{25i}{5i} = \frac{25}{5} \cdot \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = 5 \sqrt{\frac{-1}{-1}} = 5 \sqrt{1} = 5$

اعداد مختلط

ست اعدادی که شامل اعداد حقیقی و موهومی باشد بنام اعداد مختلط یاد می‌کنند، و به طور زیر ارائه می‌گردد.

$$C = \{a + bi, a \wedge b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$$

شکل معیاری عدد مختلط $a+bi$ می‌باشد که a قسمت حقیقی و bi را قسمت موهومی یاد می‌کنند. یعنی:

$$a = IR, bi = Img$$

عملیه جمع اعداد مختلط

برای جمع کردن اعداد مختلط عدد حقیقی را با عدد حقیقی و عدد موهومی را با عدد موهومی جمع الجبری می‌کنیم.

$$1) \quad (3-4i) + (2-2i) = 3+2-4i-2i = 5-6i$$

$$2) \quad (13i-2) + (2i+3) = 3-2+13i+2i = 15i+1$$

$$3) \quad (2i-3) + (4i-8) = 2i+4i-8-3 = 6i-11$$

➤ عنصر عینیت در عملیه جمع اعداد مختلط عدد $(0+0i)$ می‌باشد.

➤ معکوس جمعی در عملیه اعداد مختلط عدد $(a+bi)$ عدد $(-a-bi)$

می‌باشد.

تفریق اعداد مختلط

تفریق اعداد مختلط نیز مانند اعداد و افاده‌های الجبری صورت می‌گیرد.

مثال‌ها:

$$1) \quad (3i-2) - (2+3i) = (3i-2) + (-2-3i) = -4$$

$$2) \quad (8i-2) - (2i+1) = (8i-2) + (-2i-1) = 6i-3$$

$$3) \quad (3i-2) - (i+1) = (3i-2) + (-i-1) = 2i-3$$

ضرب اعداد مختلط

$$1) \quad (2+i)(3-2i) = 6-4i+3i-2i^2 = 6-i-2 \cdot -1 = 8-i$$

$$2) \quad (3+i)(3-i) = 9-i^2 = 9-1 \cdot -1 = 10$$

$$3) \quad (5+2i)(5-3i) = 25-15i+10i-6i^2$$

$$= 25-5i-6 \cdot -1 = 31-5i$$

➤ عنصر واحد در اعداد مختلط عدد $1+0i$ می‌باشد.

➤ معکوس ضربی عدد $a+bi$ عدد عبارت از عدد $\left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i\right)$ می باشد.

$$a+bi \Rightarrow \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2}}{1}$$

مثال: معکوس ضربی عدد $2-3i$ را دریابید.

$$\frac{1}{2-3i} \times \frac{2+3i}{2+3i} = \frac{2+3i}{2^2+3^2} = \frac{2}{13} + \frac{3i}{13}$$

مزدوج اعداد مختلط

مزدوج اعداد مختلط $z = x+iy$ ، عدد $\bar{z} = x-iy$ می باشد طوری که:

$$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$$

مثال: مزدوج $z = 3+2i$ را دریافت و ضرب نمائید.

$$z \cdot \bar{z} = (3+2i)(3-2i) = 9 - 6i + 6i - 4i^2 = 9 - 4 \cdot -1 = 9 + 4 = 13$$

$$z \cdot \bar{z} = (3+2i)(3-2i) = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$$

خواص مزدوج اعداد مختلط

$$1) \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$2) \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$3) \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \bar{z}_2 \cdot \bar{z}_1$$

$$4) \overline{\bar{z}} = z$$

$$5) \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$6) z - \bar{z} = 2yi$$

$$7) z + \bar{z} = 2x$$

مثال: اگر $z_1 = 4+5i$ و $z_2 = -3+2i$ باشند نشان دهید که $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{1+7i} = 1-7i \quad \overline{z_1 + z_2} = 1-7i \Rightarrow \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

تقسیم اعداد مختلط

برای تقسیم اعداد مختلط ابتدا مخرج آن را گویا نموده بعد ساده می سازیم.

مثال‌ها:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{7-i}{3-5i} &= \frac{7-i}{3-5i} \cdot \frac{3+5i}{3+5i} = \frac{21+35i-3i-5i^2}{3^2+5^2} = \frac{21+32i-5 \cdot -1}{34} \\
 &= \frac{32i+26}{34} = \frac{26}{34} + \frac{32i}{34} = \\
 2) \quad \frac{5-2i}{6-i} &= \frac{5-2i}{6-i} \cdot \frac{6+i}{6+i} = \frac{30+5i-12i-2i^2}{6^2+1^2} = \frac{30-7i-2 \cdot -1}{37} \\
 &= \frac{32-7i}{37} = \frac{32}{37} - \frac{7i}{37}
 \end{aligned}$$

تساوی اعداد مختلط

دو عدد مختلط وقتی باهم مساوی می‌باشند که قسمت‌های حقیقی و موهومی دو عدد باهم مساوی باشد.

مثال: اعداد $z_1 = a+bi$ و $z_2 = x+yi$ وقتی مساوی می‌شوند که:

باشد. $x=a$, $y=b$

قیمت مطلق اعداد مختلط

قیمت مطلق عدد $z = x+yi$ به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

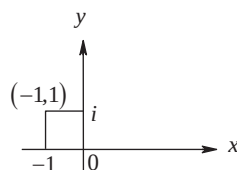
مثال: قیمت مطلق عدد $z = 4+3i$ را دریافت کنید.

$$z = 4+3i \Rightarrow |z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

نمایش هندسی اعداد مختلط

برای هر جوره‌های مرتب از اعداد حقیقی (x, y) که نشان دهنده یک عدد مختلط می‌باشد، نقطه‌ای را در صفحه مختصات x, y در نظر می‌گیریم، بنابراین هر عدد مختلط نظیر یک نقطه در صفحه x, y است. و بالعکس هر نقطه از

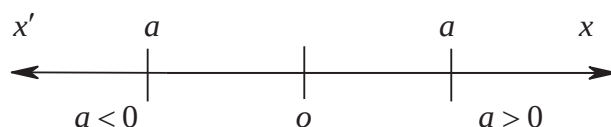
صفحه x, y را می‌توان یک عدد مختلط در نظر گرفت. مانند: $-1+i$ جوهره مرتب $(-1,1)$ را در صفحه نشان می‌دهد.



توجه: وقتی که از صفحه xy برای نمایش اعداد مختلط استفاده می‌شود، صفحه xy را صفحه اعداد مختلط می‌نامیم.

نمایش هندسی اعداد حقیقی

خط افقی x و x' را در نظر می‌گیریم و نقطه ای 0 را روی آن اختیار می‌کنیم، برای نمایش هندسی اعداد، فرض کنیم 0 نمایش هندسی عدد صفر باشد، حال اگر $a > 0$ (a مثبت باشد) نقطه ای در طرف راست 0 که فاصله‌اش از 0 برابر a باشد انتخاب می‌کنیم، این نقطه نمایش هندسی عدد a است. اگر $a < 0$ (a منفی باشد) نقطه ای به فاصله a در طرف چپ انتخاب می‌کنیم، این نمایش هندسی عدد a است. به صورت عموم نقاط طرف راست 0 ، نمایش هندسی اعداد مثبت و نقاط طرف چپ 0 ، نمایش هندسی اعداد منفی است.

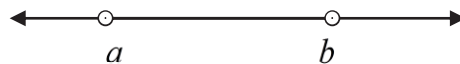


نوت: بخاطر داشته باشید که برای هر عدد حقیقی، تنها یک نقطه روی محور x, x' و برای هر نقطه روی محور x, x' ، تنها یک عدد حقیقی وجود دارد. یعنی بین مجموعه نقاط x, x' و مجموعه اعداد حقیقی یک تناظر یک‌به‌یک وجود دارد.

انترول‌ها

هر یک از فاصله‌هایی که ذیلاً معرفی می‌شوند، یک ست فرعی از اعداد حقیقی هستند.

❖ فاصله باز از a تا b : $(a, b) = \{x : a < x < b\}$



❖ فاصله نیمه باز از طرف چپ از a تا b : $(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$



❖ فاصله نیمه بسته از طرف راست از a تا b : $[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$



❖ فاصله باز از a تا $+\infty$: $(a, +\infty) = \{x : a < x\}$

❖ فاصله بسته از a تا b : $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$

❖ فاصله باز از $-\infty$ تا a : $(-\infty, a) = \{x : x < a\}$

❖ علامه $(+\infty, -\infty)$ نشان دهنده تمام اعداد حقیقی است. یعنی:

$$(+\infty, -\infty) = \mathbb{R}$$

مثال ۱: انتروال بسته -3 الی 4 را به بیان ریاضی بنویسید.

$$[-3, 4] = \{x : x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 4\}$$

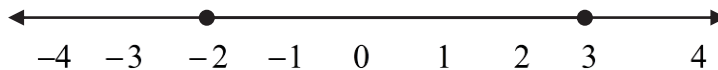
مثال ۲: انتروال باز -2 الی 3 را به بیان ریاضی بنویسید.

$$]-2, 3[= (-2, 3) = \{x : x \in \mathbb{R}, -2 < x < 3\}$$

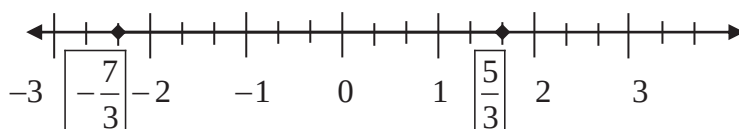
مثال ۳: انتروال نیمه بسته 3 الی 6 را به بیان ریاضی بنویسید.

$$[3, 6[= [3, 6) = \{x : x \in \mathbb{R}, 3 \leq x < 6\}$$

مثال ۴: اعداد 3 و -2 را در روی محور اعداد نشان دهید.

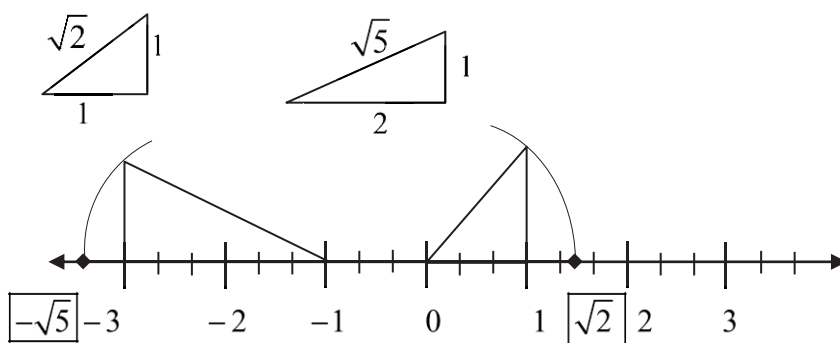


مثال ۵: اعداد $\frac{5}{3}$ و $-\frac{7}{3}$ را در روی محور اعداد نشان دهید.



مثال ۶: اعداد $\sqrt{2}$ و $-1-\sqrt{5}$ را در روی محور اعداد نشان دهید.

حل: نظر به مثلث قائم الزاویه وتر مثلث را تشکیل می‌دهیم.



سوالات

سوالات چهارگزینه‌یی	
۱	قیمت افاده $= ? [-1 - (3 - 4 \cdot 3) + 1 - 2]$ عبارت است از: الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۷
۲	قیمت افاده $\left[\left(2^{-1} + 3^{-1} \right)^{-1} + \left(\frac{5}{4} \right)^{-1} \right]^{-2}$ عبارت است از: الف) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{8}$ ج) $\frac{1}{16}$ د) $\frac{1}{4}$
۳	قیمت افاده $\left[\frac{\left(\frac{1}{4} \right)^{-2} \cdot (-8^{-2})}{\left(-\frac{1}{2} \right)^{-2}} \right]$ عبارت است از: الف) ۳۲ ب) ۱۶ ج) -16^{-1} د) 32^{-1}
۴	افاده $\left(\frac{3^2 \times 27 \times 81}{3^6} \right)^{\frac{1}{3}}$ مساوی است به: الف) $3^{\frac{1}{2}}$ ب) 3^3 ج) ۳ د) 3^{-3}
۵	افاده $\frac{(a^{-1} - b^{-1})}{(ab)^{-1}}$ مساوی است به: الف) $\frac{1}{a-b}$ ب) $\frac{1}{b-a}$ ج) $a-b$ د) $b-a$
۶	قیمت مطلق افاده $2 - 3\pi$ عبارت است از: الف) $2 - 3\pi$ ب) $3\pi - 2$ ج) $-3\pi - 2$ د) $3\pi + 2$
۷	افاده $(x^{-2}y^{-2})^{-\frac{1}{2}}$ مساوی است به:

الف) $\frac{x}{y}$	ب) $\frac{y}{x}$	ج) xy	د) $-xy$
۸	قیمت افاده $\frac{1}{4} + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}$ مساوی است به: الف) $\left(\frac{x}{y} + \frac{1}{2}\right)^2$ ب) $\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{y}\right)^2$ ج) $\left(1 + \frac{x}{2y}\right)^2$ د) $\left(1 - \frac{x}{2y}\right)^2$		
۹	قیمت مطلق $ \pi - \sqrt{2} $ مساوی است به: الف) $\pi - \sqrt{2}$ ب) $\sqrt{2} - \pi$ ج) $\pi + \sqrt{2}$ د) π		
۱۰	افاده $\frac{1}{2a-3b}(6b-4a)$ مساوی است به: الف) ۶ ب) ۲ ج) ۴ د) -۲		
۱۱	افاده $(5xy - 4.5xy) \div (2x - 1.5x)$ مساوی است به: الف) y ب) $2y$ ج) xy د) x		
۱۲	افاده $\frac{\left \frac{2}{9} - \frac{1}{2}\right }{1 + \frac{2}{3}} + \frac{1}{3}$ مساوی است به: الف) ۱ ب) $\frac{2}{3}$ ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{3}$		
۱۳	افاده $\frac{ -3x }{- -x }$ مساوی است به: الف) ۳ ب) -۳ ج) $3x$ د) -۱		
۱۴	افاده $\left[-\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right] \div \left[-2\frac{1}{3} - \left(-\frac{5}{4}\right)\right]$ مساوی است به:		

الف) $\frac{38}{10}$ ب) $\frac{10}{39}$ ج) $\frac{37}{10}$ د) $\frac{10}{38}$	
۱۵	افاده $\left[2\frac{1}{6} - \left(-\frac{5}{9}\right)\right] \div \left[-\frac{7}{54}\right]$ مساوی است به: الف) 21 ب) $-\frac{1}{21}$ ج) -21 د) -1
۱۶	افاده $\left[\frac{5}{21} - \left(-\frac{3}{14}\right)\right] \div \left[\frac{2}{3} - \frac{11}{7}\right]$ مساوی است به: الف) 2 ب) -2 ج) 3 د) -3
۱۷	افاده $\frac{-12 - (-39) + (-48)}{-23 - (-16)}$ مساوی است به: الف) 3 ب) 4 ج) 5 د) 6
۱۸	افاده $\frac{21}{25} \div \left[-1\frac{3}{5} - \left(-\frac{2}{3}\right)\right]$ مساوی است به: الف) $\frac{9}{10}$ ب) $-\frac{9}{10}$ ج) $\frac{10}{9}$ د) $-\frac{10}{9}$
۱۹	افاده $\left(\frac{11}{60}\right) \div \left[\left(-\frac{5}{12}\right) - \left(-\frac{7}{30}\right)\right]$ مساوی است به: الف) -1 ب) 1 ج) 2 د) -3
۲۰	افاده $\left(\frac{1}{12} + \frac{5}{18}\right) \div [-4 - (-30)]$ مساوی است به: الف) 72 ب) -72 ج) $-\frac{1}{72}$ د) $\frac{1}{72}$
۲۱	افاده $-7 \div \left(-\frac{1}{21} + \frac{3}{14}\right)$ مساوی است به: الف) 40 ب) 41 ج) -42 د) 24

۲۲	افاده $\left(\left(-\frac{4}{15}\right) - \left(+\frac{7}{10}\right)\right) \div \frac{1}{60}$ مساوی است به: الف) 58 ب) -58 ج) 53 د) -48
۲۳	افاده $\frac{25}{2} \times \left[\left(-\frac{6}{25}\right) - \left(-\frac{4}{15}\right)\right]$ مساوی است به: الف) $\frac{1}{3}$ ب) 3 ج) -3 د) $-\frac{1}{3}$
۲۴	افاده $\left(-\frac{5}{24}\right) \div \left[\left(-\frac{5}{16}\right) - \left(-\frac{3}{12}\right)\right]$ مساوی است به: الف) $\frac{3}{10}$ ب) $\frac{10}{3}$ ج) $\frac{10}{4}$ د) $\frac{4}{10}$
۲۵	افاده $\left[\left(-\frac{3}{8}\right) - \left(-\frac{1}{6}\right)\right] \times \frac{12}{5}$ مساوی است به: الف) -2 ب) $\frac{1}{2}$ ج) 2 د) $-\frac{1}{2}$
۲۶	افاده $\left(-\frac{1}{4}\right) \div \left[\left(-\frac{2}{9}\right) - \left(\frac{1}{36}\right)\right]$ مساوی است به: الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4
۲۷	افاده $\frac{12^8 \times 12^3}{(-3)^5 \times (-4)^5}$ مساوی است به: الف) 12^6 ب) 12^3 ج) 12^4 د) 12^7
۲۸	افاده $\frac{(-12)^{10} \times (-2)^{10}}{8^6 \times 8^4}$ مساوی است به: الف) 30^{10} ب) 3^{10} ج) 10^{30} د) 10^3
۲۹	افاده $20^n \times 4^{n+1} \times 15^n \times 3^{n+2}$ مساوی است به: الف) $2^{4n+2} \times 5^{2n} \times 3^{2n+1}$ ب) $2^{4n+2} \times 5^{2n} \times 3^{2n+3}$

ج) $2^{4n+2} \times 5^{2n} \times 3^{2n+2}$	د) $2^{4n+2} \times 5^{3n} \times 3^{2n+2}$	
۳۰	افاده $\frac{12^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 \times 3^0}{\left(\frac{6}{9}\right)^{-3} \times 2^{3^2}}$ مساوی است به:	الف) $\left(\frac{3}{2}\right)^4$ ب) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ ج) $\left(\frac{3}{2}\right)^5$ د) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$
۳۱	افاده $\frac{(4^2)^{-3} \times (5^2)^0}{(64)^{-2}}$ مساوی است به:	الف) -1 ب) 1 ج) 2 د) -3
۳۲	افاده $\frac{2^{1387} - 2^{1386}}{8 + 4^2}$ مساوی است به:	الف) $\frac{2^{1383}}{4}$ ب) $\frac{2^{1383}}{5}$ ج) $\frac{2^{1383}}{7}$ د) $\frac{2^{1383}}{3}$
۳۳	افاده $4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 4^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 4^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 \times \dots \times 4^{10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ مساوی است به:	الف) -1 ب) 2 ج) 1 د) -3
۳۴	در افاده $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times 25}{2^{-2} \times 5^3} = 2^x \times 5^y$ مقادیر x و y عبارت است از:	الف) $\begin{pmatrix} x = -3 \\ y = -1 \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} x = 3 \\ y = 1 \end{pmatrix}$ ج) $\begin{pmatrix} x = 3 \\ y = -1 \end{pmatrix}$ د) $\begin{pmatrix} x = -3 \\ y = 1 \end{pmatrix}$
۳۵	در افاده $\frac{16 \times 36^3 \times 27^{-1}}{125} = 2^a \times 3^b \times 5^c$ مقادیر a, b, c عبارت است از:	

	الف) $\begin{pmatrix} a=10 \\ b=-3 \\ c=3 \end{pmatrix}$ ب) $\begin{pmatrix} a=10 \\ b=-3 \\ c=-3 \end{pmatrix}$ ج) $\begin{pmatrix} a=-10 \\ b=3 \\ c=3 \end{pmatrix}$ د) $\begin{pmatrix} a=10 \\ b=3 \\ c=-3 \end{pmatrix}$
۳۶	اگر $A = 3^{25}$ باشد، حاصل $81A^2$ به صورت توان عبارت است از: الف) 3^{68} ب) 3^{69} ج) 3^{70} د) 3^{32}
۳۷	اگر $2^x = 9$ ، حاصل افاده $\frac{2^{x+2} - 4^{\frac{x}{2}}}{8^{x+1}}$ عبارت است از: الف) $\frac{1}{6}$ ب) $\frac{1}{8}$ ج) $\frac{1}{10}$ د) $\frac{1}{12}$
۳۸	افاده جذری $\sqrt[3]{\left(\frac{27}{9}\right)^{\sqrt{3}}}$ مساوی است به: الف) ۹ ب) ۲۷ ج) ۳ د) $\sqrt{3}$
۳۹	جذر $\sqrt{16\sqrt{4} \times 2^2}$ مساوی است به: الف) ۱۶ ب) ۸ ج) ۴ د) ۲
۴۰	افاده $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{24}$ مساوی است به: الف) $3\sqrt[3]{3}$ ب) $4\sqrt[3]{3}$ ج) $5\sqrt[3]{3}$ د) $6\sqrt[3]{3}$
۴۱	افاده $\frac{\sqrt[3]{-81x^5y^{-4}}}{\sqrt[3]{3x^2y^2}}$ مساوی می‌شود به: الف) $\frac{3y^2}{x}$ ب) $\frac{-3y}{x^2}$ ج) $\frac{3x}{y^2}$ د) $-\frac{3x}{y^2}$
۴۲	عدد $\frac{6}{\sqrt{3}}$ مساوی می‌شود به: الف) $3\sqrt{3}$ ب) $2\sqrt{3}$ ج) $4\sqrt{3}$ د) $6\sqrt{3}$

۴۳	افاده $\frac{5}{\sqrt{6}-1}$ مساوی می‌شود به: الف) $\frac{\sqrt{6}+1}{7}$ ب) $\frac{\sqrt{6}-1}{4}$ ج) $\sqrt{6}-1$ د) $\sqrt{6}+1$
۴۴	عدد $(\sqrt{2}\sqrt{3})\left(2^{\frac{3}{2}}3^{\frac{3}{2}}\right)$ مساوی است به: الف) ۱۸ ب) ۲۷ ج) ۳۶ د) ۹
۴۵	عدد $\sqrt[3]{0.001}\sqrt[3]{0.01}\sqrt[3]{0.1}$ مساوی است به: الف) ۱۰۰ ب) ۱ ج) ۱۰۰۰ د) ۰.۰۱
۴۶	عدد $\frac{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ مساوی است به: الف) ۲ ب) ۱ ج) $\sqrt[8]{8}$ د) $4\sqrt[3]{4}$
۴۷	افاده جذری $\sqrt[6]{5}\sqrt[5]{x^{20}}$ مساوی است به: الف) $\sqrt[3]{x}$ ب) $\sqrt[4]{x}$ ج) x^3 د) x^4
۴۸	افاده جذری $\sqrt[6]{5}\sqrt[5]{x^{20}} \div \sqrt[3]{x}$ مساوی است به: الف) $x^{\frac{1}{2}}$ ب) x^3 ج) ۱ د) $\sqrt[3]{x}$
۴۹	افاده جذری $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$ مساوی است به: الف) $\sqrt{3}-1$ ب) $\sqrt{3}+1$ ج) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ د) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
۵۰	افاده جذری $3\sqrt{147}+2\sqrt{75}-5\sqrt{108}$ مساوی است به: الف) ۰ ب) $\sqrt{3}$ ج) $-2\sqrt{7}$ د) $2\sqrt{7}$
۵۱	کسر $\frac{\sqrt{2}+5\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ مساوی است به:

الف) 3	ب) 2	ج) $3\sqrt{4}$	د) $\sqrt{2}$
۵۲	افاده $\frac{\sqrt[3]{27} + \sqrt{64}}{\sqrt{121}}$ مساوی است به:		
الف) 2	ب) $2\sqrt{8}$	ج) 3	د) 1
۵۳	افاده $2\sqrt{27} - \sqrt{12}$ مساوی می‌شود به:		
الف) $2\sqrt{12}$	ب) $4\sqrt{3}$	ج) $\sqrt{48}$	د) همه
۵۴	افاده $\sqrt[3]{5 + \sqrt[3]{25 + \sqrt{4}}}$ مساوی است به:		
الف) 8	ب) -1	ج) 2	د) 3
۵۵	افاده $(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})$ مساوی است به:		
الف) ۱	ب) ۲	ج) ۳	د) ۴
۵۶	کسر $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$ مساوی است به:		
الف) -2	ب) 2	ج) -1	د) 1
۵۷	شکل ساده افاده جذری $\sqrt{a\sqrt{a}\sqrt{a}}$ عبارت است از:		
الف) $\sqrt[8]{a^6}$	ب) $\sqrt[6]{a^8}$	ج) $\sqrt[8]{a^7}$	د) $\sqrt[7]{a^8}$
۵۸	افاده جذری $\left[\sqrt{5}\sqrt{4+\sqrt{1}}\right]$ مساوی است به:		
الف) ۵	ب) ۴	ج) ۳	د) ۲
۵۹	افاده کسری $\frac{2}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ مساوی است به:		
الف) $2\sqrt{5}$	ب) 10	ج) $\sqrt{2}$	د) 8
۶۰	افاده $\sqrt{4} - \sqrt[3]{-8}$ مساوی است به:		
الف) $\sqrt{5}$	ب) $2\sqrt{3}$	ج) $3\sqrt{4}$	د) 4

۶۱	افاده $\sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{-1}}$ مساوی است به:	الف) 4 ب) 3 ج) 2 د) 1
۶۲	افاده $\frac{x^2 \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^{10}}}$ مساوی است به:	الف) $\frac{1}{x}$ ب) $\frac{x^2}{2}$ ج) $\frac{3}{x}$ د) x
۶۳	افاده $\frac{\sqrt{8x^3y^2}}{\sqrt{2x}}$ مساوی است به:	الف) xy ب) $2xy$ ج) $3xy$ د) $-xy$
۶۴	افاده $\frac{\sqrt[3]{(x^2+4)^2} \times \sqrt[3]{(x^2+4)^2}}{\sqrt[3]{(x^2+4)^7}}$ مساوی است به:	الف) $x^2 - 4$ ب) $x^2 + 4$ ج) $\frac{1}{x^2 + 4}$ د) $\frac{1}{x^2 - 4}$
۶۵	اگر $\sqrt[3]{A} = \frac{3}{2}$ باشد، پس افاده $\sqrt{A}$ مساوی است به:	الف) $\frac{3}{2}$ ب) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ ج) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$ د) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$
۶۶	افاده $\frac{5 - \sqrt[3]{2}}{3\sqrt[3]{16}}$ مساوی است به:	الف) $\frac{5\sqrt[3]{4} - 2}{8}$ ب) $\frac{5\sqrt[3]{4} - 2}{9}$ ج) $\frac{5\sqrt[3]{4} - 2}{10}$ د) $\frac{5\sqrt[3]{4} - 2}{12}$
۶۷	افاده $\sqrt[3]{\frac{5}{4}}$ مساوی است به:	

الف) $\frac{\sqrt[3]{10}}{2}$ ب) $\frac{\sqrt[3]{12}}{2}$ ج) $\frac{\sqrt[3]{14}}{2}$ د) $\frac{\sqrt[3]{14}}{4}$	
۶۸	افاده $\frac{(\sqrt{2})^{-1}}{\sqrt{3}}$ مساوی است به: الف) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ب) $\frac{\sqrt{4}}{4}$ ج) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ د) $\frac{\sqrt{6}}{6}$
۶۹	افاده $\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{2}}{5a^2}}$ مساوی است به: الف) $\frac{\sqrt[3]{50a\sqrt{2}}}{5a}$ ب) $\frac{\sqrt[3]{50a\sqrt{2}}}{10a}$ ج) $\frac{\sqrt[3]{50a\sqrt{2}}}{2a}$ د) $\frac{\sqrt[3]{50a\sqrt{2}}}{3a}$
۷۰	افاده $\sqrt{\frac{4}{\sqrt{3a}}}$ مساوی است به: الف) $\frac{\sqrt{12a\sqrt{3a}}}{a}$ ب) $\frac{\sqrt{12a\sqrt{3a}}}{2a}$ ج) $\frac{\sqrt{12a\sqrt{3a}}}{3a}$ د) $\frac{\sqrt{12a\sqrt{3a}}}{4a}$
۷۱	افاده $2\sqrt{a^3} - 3\sqrt[3]{c^3} + \sqrt{b^2}$ مساوی است به: الف) $2a\sqrt{a} - 3c - b$ ب) $2a\sqrt{a} - 3c + b$ ج) $2a\sqrt{a} + 3c + b$ د) $2a\sqrt{a} + 3c - b$
۷۲	افاده $\sqrt{50} - 3\sqrt{2}$ مساوی است به: الف) $\sqrt{2}$ ب) $2\sqrt{3}$ ج) $-\sqrt{2}$ د) $2\sqrt{2}$
۷۳	افاده $2\sqrt{4^2 + 6^2} - 3\sqrt{13}$ مساوی است به: الف) $\sqrt{13}$ ب) $\sqrt{14}$ ج) $\sqrt{15}$ د) $\sqrt{17}$
۷۴	افاده $2\sqrt{8} - \sqrt{50} + \sqrt{72}$ مساوی است به:

الف) $3\sqrt{2}$ ب) $4\sqrt{2}$ ج) $5\sqrt{2}$ د) $6\sqrt{2}$	
۷۵	افاده $3\sqrt{2} + \sqrt{90} + 2\sqrt{160} - \sqrt{18}$ مساوی است به: الف) $11\sqrt{10}$ ب) $10\sqrt{11}$ ج) $-10\sqrt{11}$ د) $4\sqrt{13}$
۷۶	افاده $2\sqrt[3]{81} - 7\sqrt[3]{192} + 4\sqrt[3]{648}$ مساوی است به: الف) $3\sqrt[3]{2}$ ب) $2\sqrt[3]{3}$ ج) $\sqrt[3]{5}$ د) $5\sqrt[3]{7}$
۷۷	افاده $\sqrt{8} + 5\sqrt{\frac{8}{100}} + 2$ مساوی است به: الف) $\sqrt{2} + 1$ ب) $3\sqrt{2} + 2$ ج) $3\sqrt{2} + 1$ د) $\sqrt{2} - 3$
۷۸	افاده $5\sqrt{0.72} - 3\sqrt{98} + 5\sqrt{0.08}$ مساوی است به: الف) $17\sqrt{2}$ ب) $18\sqrt{2}$ ج) $-18\sqrt{2}$ د) $-17\sqrt{2}$
۷۹	افاده $\sqrt{\left(-1\frac{1}{3}\right)^2} + 3\sqrt{\frac{16}{9}} - 4\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2}$ مساوی است به: الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳
۸۰	افاده $2\sqrt{75} + \sqrt{12} - \sqrt{\sqrt{3}} \times \sqrt{\sqrt{3}}$ مساوی است به: الف) $7\sqrt{3}$ ب) $11\sqrt{3}$ ج) $-7\sqrt{3}$ د) $\sqrt{3}$
۸۱	افاده $3\sqrt{7}(5\sqrt{3} - \sqrt{7})$ مساوی است به: الف) $15\sqrt{21} - 21$ ب) $15\sqrt{21} + 21$ ج) $21\sqrt{15} - 21$ د) $21\sqrt{15} + 21$
۸۲	افاده $\frac{2\sqrt{75} - 5\sqrt{27} + 3\sqrt{12}}{3\sqrt{3}}$ مساوی است به: الف) $\frac{1}{3}$ ب) $\frac{1}{4}$ ج) $\frac{1}{5}$ د) $\frac{1}{6}$

۸۳	افاده $\frac{\sqrt[3]{54} - 3\sqrt[3]{250}}{4\sqrt[3]{16}}$ مساوی است به: (الف) $\frac{3}{2}$ (ب) $-\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{2}{3}$ (د) $-\frac{2}{3}$
۸۴	افاده $\sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}}$ مساوی است به: (الف) $-\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{3}$ (ج) $-\sqrt{2}$ (د) $\sqrt{2}$ افاده $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{\sqrt{12} + \sqrt{48}}$ مساوی است به: (الف) $\sqrt[3]{35}$ (ب) $\sqrt[3]{36}$ (ج) $\sqrt[3]{37}$ (د) $\sqrt[3]{38}$
۸۵	افاده $\frac{2}{3-\sqrt{7}}$ مساوی است به: (الف) $3+\sqrt{7}$ (ب) $3-\sqrt{7}$ (ج) $\sqrt{7}-3$ (د) $7-\sqrt{3}$
۸۶	افاده $\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}$ مساوی است به: (الف) $\frac{-\sqrt{6}}{2}$ (ب) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (ج) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (د) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$
۸۷	افاده $\frac{x-2}{x\sqrt{2}-2\sqrt{x}}$ مساوی است به: (الف) $\frac{x\sqrt{2}+2\sqrt{x}}{2x}$ (ب) $\frac{x\sqrt{2}-2\sqrt{x}}{2x}$ (ج) $\frac{x\sqrt{2}-2\sqrt{x}}{x}$ (د) $\frac{x\sqrt{2}+2\sqrt{x}}{x}$
۸۸	افاده $\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$ مساوی است به: (الف) $\sqrt{3+\sqrt{2}}$ (ب) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ (ج) $\sqrt{3-\sqrt{2}}$ (د) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$

۸۹	افاده $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ مساوی است به: الف) $\frac{\sqrt{10}-2}{3}$ ب) $\frac{\sqrt{2}-10}{3}$ ج) $\frac{\sqrt{2}+10}{3}$ د) $\frac{\sqrt{10}+2}{3}$
۹۰	افاده $\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ مساوی است به: الف) $\sqrt{x}+1$ ب) $1-\sqrt{x}$ ج) $\sqrt{x}+2$ د) $\sqrt{x}-1$
۹۱	افاده $\frac{x^2-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ مساوی است به: الف) $(x+\sqrt{3})\sqrt{x-\sqrt{3}}$ ب) $(x+\sqrt{3})\sqrt{x+\sqrt{3}}$ ج) $(x-\sqrt{3})\sqrt{x+\sqrt{3}}$ د) $(x-\sqrt{3})\sqrt{x-\sqrt{3}}$
۹۲	افاده $\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{1}{\sqrt{a}-1}$ مساوی است به: الف) $\frac{2}{a-1}$ ب) $\frac{2}{a+1}$ ج) $\frac{-2}{a-1}$ د) $\frac{-2}{1-a}$
۹۳	افاده $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ مساوی است به: الف) $\frac{\sqrt{x}-x}{x(1-x)}$ ب) $\frac{\sqrt{x}-x}{x(1+x)}$ ج) $\frac{\sqrt{x}+x}{x(1+x)}$ د) $\frac{\sqrt{x}+x}{x(1-x)}$
۹۴	افاده $1+\sqrt{y} + \frac{y}{1-\sqrt{y}}$ مساوی است به: الف) $\frac{1+\sqrt{y}}{1-y}$ ب) $\frac{1+\sqrt{y}}{1+y}$ ج) $\frac{1-\sqrt{y}}{1-y}$ د) $\frac{1-\sqrt{y}}{1+y}$

۹۵	افاده $\frac{1}{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2-\sqrt{3}} - 2$ مساوی است به: الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴
۹۶	افاده $\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18}+\sqrt{25}}$ مساوی است به: الف) $\frac{1}{7}$ ب) $\frac{2}{7}$ ج) $\frac{3}{7}$ د) $\frac{4}{7}$
۹۷	اگر $x = (2 + \sqrt{3})^{-1}$ و $y = (2 - \sqrt{3})^{-1}$ باشد، پس افاده $(1+x)^{-1} + (1+y)^{-1}$ مساوی است به: حل: $x = (2 + \sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{(2 + \sqrt{3})} \times \frac{(2 - \sqrt{3})}{(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}$ $y = (2 - \sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{(2 - \sqrt{3})} \times \frac{(2 + \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}$ $A = (1+x)^{-1} + (1+y)^{-1} = \frac{1}{(1+x)} + \frac{1}{(1+y)}$ $= \frac{1}{1+(2-\sqrt{3})} + \frac{1}{1+(2+\sqrt{3})} = \frac{1}{3-\sqrt{3}} + \frac{1}{3+\sqrt{3}}$ $= \left(\frac{1}{3-\sqrt{3}} \times \frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{3+\sqrt{3}} \times \frac{3-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \right)$ $= \frac{3+\sqrt{3}}{9-3} + \frac{3-\sqrt{3}}{9-3} = \frac{3+\sqrt{3}+3-\sqrt{3}}{6} = \frac{6}{6} = 1$
۹۸	در افاده‌های ذیل کدام رابطه صادق است.

الف) $\sqrt[4]{5} > 5^{0.2}$ ب) $\sqrt[4]{5} < 5^{0.2}$ ج) $\sqrt[4]{5} = 5^{0.2}$ د) همه	
اگر $a+b=9$ و $a-b=15$ باشد، پس قیمت a^2+b^2 مساوی است به:	۹۹
الف) 151 ب) 153 ج) 155 د) 157	
حاصل افاده‌ی $\frac{(x+1)^3 - (3x+3)^3}{26x+26}$ مساوی است به:	۱۰۰
الف) 72 ب) $(x-1)^2$ ج) $-(x+1)^2$ د) 1	
حاصل $\frac{20! \cdot 30!}{29 \cdot 19 \cdot 18! \cdot 28!} \div \frac{10! \cdot 20!}{19 \cdot 9 \cdot 18! \cdot 8!}$ مساوی است به:	۱۰۱
الف) 3 ب) 4 ج) 5 د) 6	
مجموعه ضرایب پولینوم $p(x) = (x-2)^{10} + 4(x-3)^2 + 5x$ مساوی است به:	۱۰۲
الف) 18 ب) 20 ج) 16 د) 22	
باقی مانده $\frac{20x^2 + 5x + 10}{x-2}$ مساوی است به:	۱۰۳
الف) 60 ب) 80 ج) 100 د) 118	
اگر $z = 7 - 2i$ باشد، پس $40\bar{z}$ مساوی است به:	۱۰۴
الف) $280 + 80i$ ب) $280 + 40i$ ج) $280 - 40i$ د) $240 - 40i$	
در پولینوم $p(x) = 20x^3 - 17$ قیمت $p(1)\ln 2 - p(1)$ مساوی است به:	۱۰۵
الف) $\ln 4$ ب) $\ln x$ ج) 2 د) $3\ln\left(\frac{2}{e}\right)$	
در افاده‌های ذیل کدام رابطه صادق است.	۱۰۶

الف) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}} > 3^{-\sqrt{5}}$ ج) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}} = 3^{-\sqrt{5}}$ ب) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{5}} < 3^{-\sqrt{5}}$ د) گزینه الف درست است	
باقی مانده پولینوم $p(x) = x^2 + x + 10$ بر $\left(x - \frac{2}{4}\right)$ مساوی است به: الف) $10\frac{5}{4}$ ب) $10\frac{3}{4}$ ج) $10\frac{1}{4}$ د) 35	۱۰۷
اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = \sqrt{x}$ باشد، پس $\left(\frac{1}{4}\right)(f \cdot g)$ مساوی است به: الف) 4 ب) 2 ج) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{1}{4}$	۱۰۸
اگر $f(x) = x^2 - 2x + 2$ باشد، پس $f(x+1)$ مساوی است به: الف) x^2 ب) $x^2 + 1$ ج) $x^2 - 1$ د) $2x$	۱۰۹
اگر پولینوم $p(x, y) = x^3y^2 + x^m y$ متجانس باشد، قیمت m مساوی است به: الف) 4 ب) 5 ج) 8 د) 3	۱۱۰
درجه پولینوم $3x^3y^2z^2 - 2x^2y^3z - 5xyz$ عبارت است از: الف) ۳ ب) ۶ ج) ۷ د) ۱۰	۱۱۱
درجه پولینوم $\frac{4x^4 - 3x^2y + 2x^2}{5x^2}$ عبارت است از: الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵	۱۱۲
از تقسیم پولینوم $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ به سه حده $x^2 + 2x + 1$ خارج ۱۱۳	

	قسمت عبارت است از: الف) $x-1$ ب) $x+1$ ج) $x+2$ د) $x-2$
۱۱۴	هرگاه قیمت پولینوم $p(x)$ در $x=a$ صفر شود یعنی $p(a)=0$ در این صورت $p(x)$ بر کدام افاده قابل تقسیم است. الف) $x+a$ ب) $x-a$ ج) x^2-a^2 د) x^2+a^2
۱۱۵	در صورتیکه $p(x)$ بر $x-a$ تقسیم شود عدد باقی مانده عبارت است از: الف) $R=p(0)$ ب) $R=p(1)$ ج) $R=p(a)$ د) $R=p(-a)$
۱۱۶	کدام یک از افاده‌های ذیل پولینوم گفته می‌شود: الف) $x^{-2}+x-3$ ب) $\frac{1}{x}+x^2$ ج) $1-x^{-9}$ د) x^8
۱۱۷	درجه پولینوم $p(x)=9-x^2+4x^3$ عبارت است از: الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴
۱۱۸	هرگاه $p(x)=x^3+6x^2+12x+8$ بر افاده $x+2$ تقسیم گردد باقی مانده عبارت است از: الف) ۸ ب) ۱۲ ج) ۱ د) ۰
۱۱۹	قیمت پولینوم $p(x)=2x^7+x^4-x^2+3$ در $x=0$ عبارت است از: الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۰
۱۲۰	هرگاه پولینوم $p(x)$ دارای خاصیت $p(1)=0=p(-1)$ باشد، بر کدام افاده پوره قابل تقسیم است.

الف) $x^2 - 5x$ ب) $x^2 + 5x$ ج) $x^2 - 1$ د) $x^2 + 1$	
۱۲۱	درجه پولینوم $p(x) = (x^2 - 4)^3$ چند است؟ الف) ۵ ب) ۶ ج) ۳ د) ۷
۱۲۲	هرگاه پولینوم $p(x)$ دارای خاصیت $p(2) = 0$ باشد، بالای کدام افاده ذیل قابل تقسیم است؟ الف) $x - 2$ ب) $x + 2$ ج) $2x + 2$ د) $x + 1$
۱۲۳	قیمت پولینوم $p(x) = 4x^2 - x^3 - 7x$ برای $x = 1$ مساوی است به: الف) ۲ ب) ۴ ج) -۲ د) -۴
۱۲۴	اگر پولینوم $p(x) = 4x^2 - 7x$ بالای بینوم $x - 2$ تقسیم شود باقی مانده عبارت است از: الف) ۲ ب) ۴ ج) -۲ د) -۴
۱۲۵	اگر $(x - 2)$ یک فکتور پولینوم $p(x) = x^4 + kx^2 - 8x + 8$ باشد، پس قیمت k مساوی است به: الف) ۳ ب) -۳ ج) ۲ د) -۲
۱۲۶	اگر $p(x) = x^4 - x^3 - x^2 - x - 1$ باشد، پس قیمت $p(0) + p(-1)$ مساوی است به: الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳
۱۲۷	اگر p یک عدد طبیعی باشد، پس درجه پولینوم $p(x) = 2x^{4p} - x^{8p+4} + x^{4p+1}$ مساوی است به: الف) $4p + 1$ ب) $8p + 4$ ج) $4p$ د) ۳
۱۲۸	مربع کامل افاده $a^2 - ab + \frac{1}{4}b^2$ عبارت است از:

الف) $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2$ ج) $\left(a + \frac{1}{4}b\right)^2$ ب) $\left(2a - \frac{1}{4}b\right)^2$ د) $\left(\frac{a}{2} - b\right)^2$	
اگر $a^2 + ab + b^2$ یک فکتور $a^3 - b^3$ باشد پس فکتور دومی آن عبارت است از: الف) $a^2 - b^2$ ب) $a - b$ ج) $a + b$ د) $a^2 + b^2$	۱۲۹
حاصل ضرب $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y^2}\right)$ مساوی است به: الف) $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{y^3}$ ب) $\frac{1}{x^3} + \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^3}$ ج) $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$ د) $\frac{1}{x^3} - \frac{2}{xy} + \frac{1}{y^3}$	۱۳۰
هرگاه $(t-1)(t+a) \equiv t^2 + 8t - 9$ باشد، پس قیمت a عبارت از: الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۸ د) ۱۱	۱۳۱
قیمت افاده $\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{y}\right)^2$ عبارت از: الف) $\frac{1}{4} + \frac{x}{2y} + \frac{x^2}{y^2}$ ب) $\frac{1}{4} + \frac{2x}{y} + \frac{x^2}{y^2}$ ج) $\frac{1}{4} + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}$ د) $\frac{1}{4} + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$	۱۳۲
قیمت عدد $(5!)(4!)$ مساوی می‌شود به: الف) $(24)(120)$ ب) $(4)(120)$ ج) $(24)(10)$ د) $(24)(25)$	۱۳۳

۱۳۴	عدد ترکیبی $\binom{5}{3}$ مساوی می‌شود به: الف) ۱۰ ب) ۱۵ ج) ۲ د) ۲۰
۱۳۵	عدد ترکیبی $\binom{10}{3}$ مساوی می‌شود به: الف) $\binom{10}{6}$ ب) $\binom{10}{7}$ ج) $\binom{10}{8}$ د) $\binom{10}{9}$
۱۳۶	حد چهارم حالت انکشاف یافته بینوم $(1+x^2)^3$ عبارت است از: الف) ۱ ب) x^3 ج) x^6 د) x^5
۱۳۷	کدام یک از مساوات ذیل مطابقت گفته می‌شود؟ الف) $(x-1)^3 = x^2 - 2x + 1$ ب) $7x^2 - 4 = 12 - x$ ج) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ د) $6 + 4x = 5x - 6$
۱۳۸	مجموع ضرایب حالت انکشاف یافته بینوم $(2+y)^2$ مساوی است به: الف) ۴ ب) ۵ ج) ۹ د) ۱۲
۱۳۹	حد ششم بینوم $(2x+1)^5$ مساوی است به: الف) ۲ ب) ۴ ج) $10x$ د) ۱
۱۴۰	حد دوم حالت انکشاف یافته $(2x-1)^3$ عبارت است از: الف) $-12x^2$ ب) $-8x^3$ ج) $4x^2$ د) $3x^2$
۱۴۱	اگر $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 2$ باشد، حاصل $\frac{x^3 y^3}{x^9 + y^9 - 8}$ مساوی است به: الف) $-\frac{1}{6}$ ب) $-\frac{1}{7}$ ج) $-\frac{1}{8}$ د) $-\frac{1}{9}$

۱۴۲	اگر $x + y = 10$ و $xy = 7$ باشد، پس مقدار $x^3 + y^3$ مساوی است به: الف) 740 ب) 760 ج) 780 د) 790
۱۴۳	افاده $(x^4 + 4x^2 + 16)(x + 2)(x - 2)$ مساوی است به: الف) $x^6 + 64$ ب) $x^6 - 64$ ج) $x^4 - 64$ د) $x^4 + 64$
۱۴۴	اگر $x + y = 5$ و $x^2 - y^2 = -45$ باشد، قیمت $x - y$ مساوی است به: الف) -6 ب) -7 ج) -8 د) -9
۱۴۵	افاده $(x^2 - \sqrt{2})(x^2 + \sqrt{2})$ مساوی است به: الف) $x^4 - 2$ ب) $x^4 + 2$ ج) $x^4 + 4$ د) $x^4 - \sqrt{2}$
۱۴۶	افاده $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$ مساوی است به: الف) $(a^6 - 1)$ ب) $(a^4 - 1)$ ج) $(a^6 + 1)$ د) $(a^4 + 1)$
۱۴۷	اگر $(2x + y)^2 = 2xy$ ، $\frac{(2x + y)^2}{4x^2 + y^2}$ مساوی است به: الف) -1 ب) 1 ج) 2 د) -2
۱۴۸	افاده $(\sqrt{8} - \sqrt{2})^2$ مساوی است به: الف) -1 ب) 1 ج) 2 د) -2
۱۴۹	تجزیه افاده $x^2 + 6x + 9$ به فکتورها مساوی است به: الف) $(x + 6)(x + 3)$ ب) $(x + 3)(x - 6)$ ج) $(x + 3)(x + 3)$ د) $(x - 3)(x - 3)$
۱۵۰	تجزیه افاده $9x^2 - 12xy + 4y^2$ به فکتورها عبارت است از: الف) $(3x - 2y)(3x - 2y)$ ب) $(3x - 2y)(3x + 2y)$ ج) $(3x + 2y)(3x - 2y)$ د) $(3x + 2y)(3x + 2y)$
۱۵۱	تجزیه افاده $x^8 - x^4 - 12$ به فکتورها عبارت از:

	الف) $(x^4+1)(x^4-3)$ ب) $(x^4-4)(x^4+3)$ ج) $(x^4+1)(x^4-3)$ د) $(x^4-1)(x^4-3)$
۱۵۲	تجزیه افاده $\left(\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}\right)$ مساوی است به: الف) $\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right)$ ب) $\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)$ ج) $\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)$ د) $\left(\frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{2}\right)$
۱۵۳	افاده $4a^2 + 4a + 1$ به صورت تجزیه عبارت از: الف) $(2a-1)^2$ ب) $(2a+1)^2$ ج) $(2a+2)^2$ د) $(a-2)^2$
۱۵۴	افاده $4 + a^4$ به صورت تجزیه عبارت از: الف) $(x^2 - 2x + 2)^2$ ب) $(x^2 + 2x - 2)(x^2 - 2x + 2)$ ج) $(x^2 + 2x)(x^2 - 2x)$ د) هیچکدام
۱۵۵	افاده $x^2 + 9x - 10$ به صورت تجزیه عبارت از: الف) $(x-9)(x+1)$ ب) $(x+10)(x-1)$ ج) $(x+9)(x+1)$ د) $(x-9)(x-1)$
۱۵۶	تجزیه افاده $3x^2 + 8x + 5$ عبارت است از: الف) $(3x+5)(x+1)$ ب) $(x-5)(x-1)$ ج) $(x+5)(x-1)$ د) $(x-5)(x+1)$
۱۵۷	تجزیه افاده $3x^2 - 12$ عبارت است از: الف) $3(x-2)(x+2)$ ب) $(3x-2)(x+2)$ ج) $(3x-2)(x-2)$ د) $(3x+2)(x-2)$
۱۵۸	افاده $x^4 - y^4$ به صورت تجزیه عبارت است از:

الف) $(x^2 + y^2)(x - y)$ ب) $(x + y)^2(x + y)^2$ ج) $(x + y)(x - y)(x^2 + y^2)$ د) $(x - y)(x^2 + y^2)$	
۱۵۹ افاده $\frac{1}{4} - m^2$ مساوی می‌شود به: الف) $\frac{1}{2}(1 - 2m)(1 + 2m)$ ب) $\frac{1}{4}(1 - 2m)(1 + 2m)$ ج) $(1 - 2m)(1 + 2m)$ د) $\left(\frac{1}{4} - m\right)\left(\frac{1}{4} + 2m\right)$	
۱۶۰ تجزیه افاده $27x^3 + 8$ عبارت است از: الف) $(3x - 2)(9x^2 - x + 4)$ ب) $(3x + 2)(9x^2 + x + 4)$ ج) $(3x - 2)(9x^2 + x + 4)$ د) $(3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$	
۱۶۱ افاده $1 - 3y + 3y^2 - y^3$ مساوی است به: الف) $(1 + y)^3$ ب) $(y - 1)^3$ ج) $(1 - y)^3$ د) $(1 + y)^3$	
۱۶۲ تجزیه افاده $y^2 - 3x^2$ عبارت است از: الف) $(y - \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x)$ ب) $(y - \sqrt{3}x)^3$ ج) $(y + \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x)$ د) $(y + \sqrt{3}x)(y + x)$	
۱۶۳ کسر $\frac{x^3 - y^3}{x^2 + xy + y^2}$ مساوی است به: الف) $x^2 + xy + y^2$ ب) $x^2 - xy + y^2$ ج) $x - y$ د) $x + y$	
۱۶۴ جمع کسر $\frac{2}{y-3} - \frac{3y+4}{y-3} + \frac{y^2+5}{y-3}$ مساوی است به: الف) $\frac{y^2 - 3y + 3}{y - 3}$ ب) $\frac{y^2 + 3y - 3}{y - 3}$	

$\frac{y^2 - 3y + 3}{y + 3}$ (د)	$\frac{y^2 + 3y + 3}{y - 3}$ (ج)	
$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{4}y^2$ کسر مساوی است به:		۱۶۵
$\frac{1}{9}x - \frac{1}{4}y$ (ب)	$\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y$ (الف)	
$\frac{1}{9}x + \frac{1}{4}y$ (د)	$\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y$ (ج)	
$\frac{3x^3y + 3x^2y + 9xy}{x^3 - 27}$ کسر مساوی است به:		۱۶۶
$\frac{x + y}{x + y}$ (ج)	$\frac{xy}{x - y}$ (ب)	$\frac{xy}{x + y}$ (الف)
(د) هیچکدام		
$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} \times \frac{x - 2}{2}$ ضرب کسور مساوی است به:		۱۶۷
$\frac{2}{x + y}$ (د)	$\frac{2}{x - y}$ (ج)	$\frac{x + 2}{2}$ (ب)
		$\frac{x - 2}{2}$ (الف)
$\frac{x}{1 - \frac{1}{1 + \frac{x}{y}}}$ مساوی است به:		۱۶۸
$x + y$ (د)	$x - y$ (ج)	y (ب)
		x (الف)
$\frac{6ac}{3c^2} = \frac{x}{c}$ در مساوات کسری $\frac{6ac}{3c^2}$ قیمت x عبارت است از:		۱۶۹
$3c$ (د)	$3a$ (ج)	$2c$ (ب)
		$2a$ (الف)

۱۷۰	حاصل کسر $\frac{x^2+x}{2+2x}$ مساوی است به: (الف) $\frac{2}{x}$ (ب) $\frac{x}{2}$ (ج) $x+1$ (د) x^2+x
۱۷۱	کسر $\frac{x^2-9x+20}{4x-x^2}$ مساوی است به: (الف) $\frac{5-x}{x}$ (ب) $\frac{x}{5-x}$ (ج) $\frac{x-5}{x}$ (د) $\frac{x}{x-5}$
۱۷۲	حاصل ضرب $\frac{9x}{3x-15} \times \frac{(x-5)^2}{2(5-x)}$ عبارت است از: (الف) $\frac{3x}{2}$ (ب) $\frac{-3x}{2}$ (ج) $\frac{2x}{3}$ (د) $\frac{-2x}{3}$
۱۷۳	حاصل تقسیم $\frac{a^2-100}{8} \div \frac{2a+20}{20}$ مساوی است به: (الف) $\frac{5(a+16)}{4}$ (ب) $\frac{5(a-16)}{4}$ (ج) $\frac{5a+10}{4}$ (د) $\frac{5(a-10)}{4}$
۱۷۴	افاده $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{1-x}$ مساوی است به: (الف) $\frac{2}{(x-1)(x-1)}$ (ب) $\frac{1}{x-1}$ (ج) $\frac{1}{1-x}$ (د) 0
۱۷۵	افاده $\frac{x-1}{x} - \frac{x^2-3}{x^2}$ مساوی است به: (الف) $\frac{x-3}{x^2}$ (ب) $\frac{2x^2+3}{x^2}$ (ج) $\frac{3-x}{x^2}$ (د) $\frac{3-2x^2}{x^2}$
۱۷۶	افاده $\frac{3x^2-4x}{4-3x}$ مساوی است به:

الف) $4-3x$ (ب) $3x-4$ (ج) x (د) $-x$	
۱۷۷ افاده $\frac{x+1}{x} - \frac{2x+1}{x}$ مساوی است به:	
الف) -1 (ب) 0 (ج) x (د) $-x$	
۱۷۸ افاده $\frac{(x^2-y^2)+(x-y)^2}{x^2-y^2}$ مساوی است به:	
الف) $\frac{2x}{x+y}$ (ب) $\frac{2x}{x-y}$ (ج) $\frac{x}{x+y}$ (د) $\frac{2}{x-y}$	
۱۷۹ افاده $\frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}$ مساوی است به:	
الف) $\frac{1}{x-1}$ (ب) $\frac{1}{1-x}$ (ج) $\frac{3x-1}{x^2-1}$ (د) $-\frac{3x^2-1}{x+1}$	
۱۸۰ افاده $\frac{4x^3-x}{x-2x^2}$ مساوی است به:	
الف) $2x+1$ (ب) $2x-1$ (ج) $-(2x+1)$ (د) $1-2x$	
۱۸۱ افاده $\frac{8xy}{-4z} \div \frac{-5z-2}{y^2}$ مساوی است به:	
الف) $\frac{8xy^3}{10z^2+8z}$ (ب) $\frac{8xy^3}{20z^2+8z}$ (ج) $\frac{8xy^3}{15z^2+8z}$ (د) $\frac{8xy^3}{20z^2+4z}$	
۱۸۲ افاده $\frac{x+3}{3} + \frac{x-2}{2}$ مساوی است به:	
الف) $\frac{5x}{3}$ (ب) $\frac{5x}{4}$ (ج) $\frac{5x}{6}$ (د) $\frac{5x}{7}$	
۱۸۳ افاده $\frac{1}{x} - \frac{3}{xy}$ مساوی است به:	

الف) $\frac{y+3}{xy}$ (ب) $\frac{3-y}{xy}$ (ج) $\frac{x+y}{-xy}$ (د) $\frac{y-3}{xy}$	
۱۸۴ افاده $\frac{x^2-y^4}{y^2+x}$ مساوی است به:	
الف) $x-y$ (ب) $x-y^2$ (ج) y^2-x (د) y^2+x	
۱۸۵ افاده $\frac{a+b}{a} - \frac{b-a}{b}$ مساوی است به:	
الف) $\frac{a^2-b^2}{ab}$ (ب) $\frac{a^2+b^2}{ab}$ (ج) $\frac{a^2-b^2}{-ab}$ (د) $\frac{a^2+b^2}{-ab}$	
۱۸۶ افاده $\frac{3}{x-6} - \frac{1}{x-2}$ مساوی است به:	
الف) $\frac{2x}{(x-6)(x-2)}$ (ب) $\frac{-2x}{(x-6)(x-2)}$ (ج) $\frac{2x}{(x+6)(x-2)}$ (د) $\frac{2x}{(x-6)(x+2)}$	
۱۸۷ افاده $\frac{x+2}{x-1} + \frac{x-7}{2x-2}$ مساوی است به:	
الف) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{3}{2}$ (ج) $\frac{5}{2}$ (د) $\frac{7}{2}$	
۱۸۸ افاده $\frac{a^2-64}{8-a}$ مساوی است به:	
الف) $-(8+a)$ (ب) $(a+8)$ (ج) $a-8$ (د) $-(a-8)$	
۱۸۹ افاده $\frac{x^2-5x+6}{4x-12}$ مساوی است به:	
الف) $\frac{x+2}{4}$ (ب) $\frac{x-2}{4}$ (ج) $\frac{x+4}{2}$ (د) $\frac{x-4}{2}$	

۱۹۰	افاده $\frac{4x^2 - 9y^2}{8x^2 - 12xy}$ مساوی است به: الف) $\frac{2x+3y}{2x}$ ب) $\frac{2x+3y}{3x}$ ج) $\frac{2x+3y}{4x}$ د) $\frac{2x+3y}{5x}$
۱۹۱	افاده $\frac{a^2 + 3a - 10}{a^2 + 10a + 25}$ مساوی است به: الف) $\frac{a+2}{a+5}$ ب) $\frac{a-2}{a-5}$ ج) $\frac{a+2}{a-5}$ د) $\frac{a-2}{a+5}$
۱۹۲	افاده $\frac{3a^2 - 6ab}{2a} \times \frac{8a}{6a - 12b}$ مساوی است به: الف) $2a$ ب) $3a$ ج) $4a$ د) a
۱۹۳	افاده $\frac{ax^2 - ay^2}{ab - b^2} \times \frac{a - b}{x^2 - y^2}$ مساوی است به: الف) $\frac{b}{a}$ ب) $\frac{a}{b}$ ج) $-\frac{b}{a}$ د) $-\frac{a}{b}$
۱۹۴	افاده $\frac{3a^2 - 27b^2}{ax + 3bx} \div \frac{a - 3b}{x}$ مساوی است به: الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵ د) ۶
۱۹۵	افاده $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x} \div \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x}$ مساوی است به: الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴
۱۹۶	افاده $\frac{x^2 - 16}{x^2 + 4x + 4} \times \frac{5x + 10}{5x}$ مساوی است به: الف) $\frac{(x^2 - 4^2)}{x(x+2)}$ ب) $\frac{(x^2 - 4^2)}{x(x-3)}$ ج) $\frac{(x^2 + 4^2)}{x(x+3)}$ د) $\frac{(x^2 + 4^2)}{x(x-3)}$

۱۹۷	افاده $\left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y}\right) \times \frac{x^2-y^2}{2y}$ مساوی است به: الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4
۱۹۸	افاده $\left(a^4 - \frac{1}{a^2}\right) \div \left(a^2 + \frac{1}{a}\right)$ مساوی است به: الف) $\frac{a^3+1}{a}$ ب) $\frac{a^3-1}{a}$ ج) $\frac{a^3-1}{a^2}$ د) $\frac{a^3+1}{a^{-2}}$
۱۹۹	افاده $\frac{\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x} - \frac{x}{1+x}}$ مساوی است به: الف) 1 ب) 2 ج) 3 د) 4
۲۰۰	افاده $\frac{3x+1}{x^2-1} - \frac{2}{x-1}$ مساوی است به: الف) $\frac{1}{x-1}$ ب) $\frac{1}{x+2}$ ج) $\frac{1}{x+1}$ د) $\frac{1}{2x}$
۲۰۱	اگر $x - \frac{1}{x} = 4$ باشد و $x > 0$ ، حاصل $x^2 + \frac{1}{x^2}$ عبارت است از: الف) 15 ب) 16 ج) 17 د) 18
۲۰۲	اگر $a + \frac{1}{a} = 3$ باشد، پس قیمت $a^2 + \frac{1}{a^2}$ عبارت است از: الف) 5 ب) 6 ج) 7 د) 8
۲۰۳	اگر $\frac{ax^2+ax}{6x} \times \frac{2x-6}{x^2-2x-3} = 3$ باشد، آن گاه قیمت a عبارت است از: الف) $a=9$ ب) $a=10$ ج) $a=8$ د) $a=3$

۲۰۴	افاده $(i)^{51}$ مساوی است به: الف) 1 ب) -1 ج) i د) $-i$
۲۰۵	عدد موهومی i^{-95} مساوی است به: الف) 1 ب) -1 ج) i د) $-i$
۲۰۶	عدد موهومی i^6 مساوی است به: الف) 1 ب) -1 ج) i د) $-i$
۲۰۷	مزدوج عدد $z = 3 + 2i$ عبارت است از: الف) $z = 3 - 2i$ ب) $z = 2i - 3$ ج) $z = 2i + 3$ د) $z = 2 + 3i$
۲۰۸	اگر $z = \sqrt{6}i$ باشد، پس $\frac{z}{z}$ مساوی است به: الف) 1 ب) -1 ج) $\sqrt{6}$ د) $-\sqrt{6}$
۲۰۹	اگر $z = 1 - \sqrt{3}i$ باشد، پس $z \cdot \bar{z}$ مساوی است به: الف) $-\sqrt{6}$ ب) 4 ج) $\frac{5}{3}\pi$ د) $\frac{2}{3}\pi$
۲۱۰	اگر $z = 3 - 3i$ باشد، پس $\bar{z}$ مساوی است به: الف) $z = 3 - 2i$ ب) $z = 2i - 3$ ج) $z = 2i + 3$ د) $3 - 3i$
هرف ما ارائه فرمات علمی و اکادمیک مبتنی بر اساس دینی و ملی است. استاد انجیر بقتیاری "بقتیار" استاد رمضان "میدری"	

مأخذ

- (۱) اشرفی، اسماعیل و دیگران. (۱۳۸۸). ریاضی سوم رهنمایی. چاپ هفتم، تهران: موسسه انتشاراتی گلواژه
- (۲) غوری، محمد انور. (۱۳۸۹). ریاضی عمومی. چاپ هفتم، کابل: انتشارات سعید
- (۳) فتح‌اللهی، ابراهیم. (۱۳۸۳). متدولوژی. چاپ هشتم، ناشر: دانشگاه پیام نور (با همکاری انتشارات دلیل‌ما)
- (۴) فولادی، یاسر احمدی/ فولادی، هادی احمدی. (۱۳۹۰). مسئله‌های مقدماتی المپیاد کامپیوتر. تهران: انتشارات فاطمی
- (۵) قرآن نویس، محمود و جوادی، حسین. (۱۳۸۵). فزیک پیش دانشگاهی. چاپ دهم، تهران: انتشارات ققنوس
- (۶) گردلو، پیمان. (۱۳۸۷). رادیكال‌ها. تهران: انتشارات نسل نو اندیش
- (۷) لیپ‌شوتس، سیمور و لیپسون، مارک. (۱۳۸۴). احتمال. مترجم: علی‌اکبر عالم زاده، تهران: انتشارات جنگل
- (۸) محمدی‌راد، ناصر. (۱۳۸۶). ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت ۱ (پایه). تهران: انتشارات جاودانه، جنگل
- (۹) نیکوکار، مسعود و مقسمی، حمید رضا. (۱۳۸۰). ریاضی ۳ (ریاضی ۵ قدیم). تهران: انتشارات گسترش علوم پایه
- (۱۰) نیکوکار، مسعود و دیگران. (۱۳۸۷). ریاضی عمومی (مقطع کاردانی). چاپ یازدهم، تهران: انتشارات گسترش علوم پایه
- (۱۱) و. لیتویننکو، آ. ماردکویچ. (۱۳۷۲). مروری بر جبر و مثلثات. مترجم: مسعود مشهوری، تهران: انتشارات گوتنبرگ
- (۱۲) یوسفی، مهدی. (۱۳۹۰). عدد: این صفرهای دوست داشتنی. تهران: انتشارات افق

کلید جوابات										
شماره	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
جواب	د	د	ج	ب	د	ب	ج	الف	الف	د
شماره	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
جواب	الف	ج	ب	ب	ب	الف	الف	الف	الف	د
شماره	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
جواب	ج	ب	الف	ب	د	الف	الف	ب	ج	د
شماره	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵	۳۶	۳۷	۳۸	۳۹	۴۰
جواب	ب	د	ج	الف	د	الف	ب	ج	ب	ج
شماره	۴۱	۴۲	۴۳	۴۴	۴۵	۴۶	۴۷	۴۸	۴۹	۵۰
جواب	د	ب	د	ج	د	ج	الف	ج	ب	ب
شماره	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۵۶	۵۷	۵۸	۵۹	۶۰
جواب	ب	د	ب	ج	الف	ج	ج	الف	الف	د
شماره	۶۱	۶۲	۶۳	۶۴	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰
جواب	ب	الف	ب	ج	د	د	الف	د	الف	ج
شماره	۷۱	۷۲	۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰
جواب	ب	د	الف	ج	الف	ب	ب	د	الف	ب
شماره	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵	۸۶	۸۷	۸۸	۸۹	۹۰
جواب	الف	الف	ب	ب	الف	ج	الف	ب	د	د
شماره	۹۱	۹۲	۹۳	۹۴	۹۵	۹۶	۹۷	۹۸	۹۹	۱۰۰
جواب	الف	ج	الف	الف	ب	ج		الف	ب	ج
شماره	۱۰۱	۱۰۲	۱۰۳	۱۰۴	۱۰۵	۱۰۶	۱۰۷	۱۰۸	۱۰۹	۱۱۰
جواب	الف	د	ج	الف	د	د	ب	د	ب	الف

شماره	۱۱۱	۱۱۲	۱۱۳	۱۱۴	۱۱۵	۱۱۶	۱۱۷	۱۱۸	۱۱۹	۱۲۰
جواب	ج	الف	ب	ب	ج	د	د	د	ج	ج
شماره	۱۲۱	۱۲۲	۱۲۳	۱۲۴	۱۲۵	۱۲۶	۱۲۷	۱۲۸	۱۲۹	۱۳۰
جواب	ب	الف	د	الف	د	الف	ب	الف	ب	الف
شماره	۱۳۱	۱۳۲	۱۳۳	۱۳۴	۱۳۵	۱۳۶	۱۳۷	۱۳۸	۱۳۹	۱۴۰
جواب	الف	د	الف	الف	ب	ج	ج	ج	د	ج
شماره	۱۴۱	۱۴۲	۱۴۳	۱۴۴	۱۴۵	۱۴۶	۱۴۷	۱۴۸	۱۴۹	۱۵۰
جواب	الف	د	ب	د	الف	ب	الف	ج	ج	الف
شماره	۱۵۱	۱۵۲	۱۵۳	۱۵۴	۱۵۵	۱۵۶	۱۵۷	۱۵۸	۱۵۹	۱۶۰
جواب	ب	د	ب	د	ب	الف	الف	ج	الف	د
شماره	۱۶۱	۱۶۲	۱۶۳	۱۶۴	۱۶۵	۱۶۶	۱۶۷	۱۶۸	۱۶۹	۱۷۰
جواب	ج	ج	ج	الف	ج	د	ب	د	الف	ب
شماره	۱۷۱	۱۷۲	۱۷۳	۱۷۴	۱۷۵	۱۷۶	۱۷۷	۱۷۸	۱۷۹	۱۸۰
جواب	الف	الف	د	د	ج	د	الف	الف	ج	ج
شماره	۱۸۱	۱۸۲	۱۸۳	۱۸۴	۱۸۵	۱۸۶	۱۸۷	۱۸۸	۱۸۹	۱۹۰
جواب	ب	ج	د	ب	ب	الف	ب	الف	ب	ج
شماره	۱۹۱	۱۹۲	۱۹۳	۱۹۴	۱۹۵	۱۹۶	۱۹۷	۱۹۸	۱۹۹	۲۰۰
جواب	د	الف	ب	الف	الف	الف	الف	ب	الف	ج
شماره	۲۰۱	۲۰۲	۲۰۳	۲۰۴	۲۰۵	۲۰۶	۲۰۷	۲۰۸	۲۰۹	۲۱۰
جواب	د	ج	الف	د	د	ب	الف	الف	ب	د

آثار مولف

- ❖ ریاضیات ۱ (حساب کامل): عملیه‌های اعداد کامل، تجزیه اعداد طبیعی، کسرعام، کسراشار، نسبت و تناسب، فیصد، سیستم شمارش اعداد، ستها و اعداد.
- ❖ ریاضیات ۲ (مفاهیم الجبری) همین اثر
- ❖ ریاضیات ۳ (الجبر): معادلات، متریکس، نامساوات، لوگاریتم و ترادف.
- ❖ مثلثات ویژه کانکور