فصل نهم
تعداد عناصر مجموعه ها
Cardinality of Sets
بخش اول
مجموعه ها با اندازه های مساوی

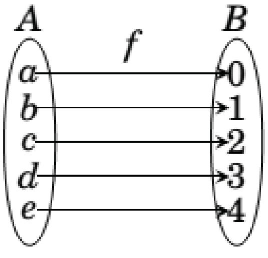
مقدمه –تمام این فصل در موردتعداد عناصر مجموعه ها است.   در نگاه اول یک موضوع ساده به نظر می رسد. برای پیدا کردن تعداد عناصر یک مجموعه ، فقط کافی است که عناصر آنرا شمارش کنیم.
مثلا اگر $A = \{a, b, c, d\}$ باشد ، پس $|A| = ۴$; اگر $B = \{n \in \mathbb{Z} : -۵ \leq n \leq ۵\}$ باشد ، پس $|B| = ۱۱$ است. در این حالت $|A| \leq |B|$ است.
در حقیقت ، موضوع تعداد عناصر ، کاملا پیچیده و غامض می شود هنگامی که مجموعه ها بی کران می شوند. موضوع مهم این فصل این است که توضیح دهیم چگونه انواع مختلف بی کرانی وجود دارد. و این که بعضی بی کران ها از دیگر بی کران ها بزرگ تر هستند. دو مجموعه A و B ممکن است بی کران باشند ، اما داشته باشیم $|A| < |B|$.

۹.۱ - مجموعه های با اندازه های مساوی Sets with Equal Cardinalities

وقتی می گوییم دو مجموعه یک اندازه دارند ، یعنی چه؟ تا کنون گفته ایم که $|A| = |B|$ است اگر A و B دارای تعداد عناصر یکسان باشند. عناصر A را شمارش می کنیم ، سپس عناصر B را شمارش می کنیم ، اگر یک عدد بدست آوردیم ، می گوییم $|A| = |B|$ است.
گر چه این روش خوبی است اگر مجموعه ها کران دار باشند و خیلی هم بزرگ نباشند. این روش بر مجموعه های بی کران ، عملی نیست. زیرا هرگز شمارش به پایان نمی رسد. روش دیگری لازم داریم که هم برای مجموعه های کران دار و هم برای مجموعه های بی کران قابل استفاده باشد. این روش اینجا است.

تعریف ۹.۱.۱
دو مجموعه A و B **یک اندازه دارند** ، و می نویسیم $|A| = |B|$, اگر یک تابع دو سویه $f: A \to B$ وجود داشته باشد. اگر چنین تابعی وجود نداشته باشد ، پس مجموعه ها **اندازه های نا مساوی** دارند ، یعنی $|A| \neq |B|$.

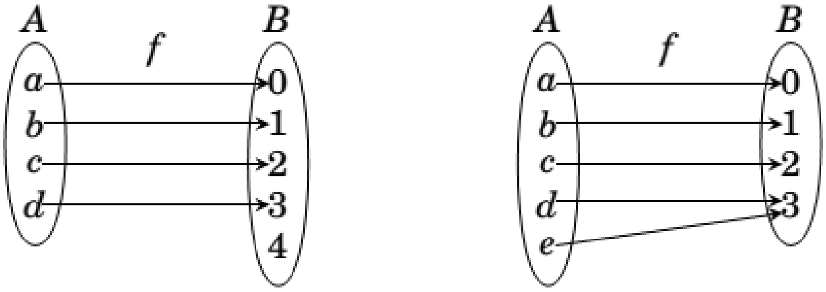
تصویر ۹.۱.۱



تصویر ۹.۱.۱ تعریف بالا را به تصویر می کشد. یک تابع دو سویه $f: A \to B$ وجود دارد ، پس $|A| = |B|$ است. تابع f مجموعه A را با مجموعه B جور می کند.

از طرف دیگر ، اگر A و B مانند دو اشکال در تصویر ۹.۱.۲ باشند ، پس هیچ تابع دو سویه $f: A \to B$ وجودندارد. پس $|A| \neq |B|$ است.

تصویر ۹.۱.۲



مثال ۹.۱.۱
تابع های $A = \{n \in \mathbb{Z}: 0 \leq n \leq ۵\}$ و $B = \{n \in \mathbb{Z}: -۵ \leq n \leq 0\}$ دارای یک اندازه هستند ، زیرا یک تابع دو سویه $f: A \to B$ با قاعده $f(n) = -n$ وجود دارد.

اگر $|A| = |B|$ است ، پس تعداد زیادی تابع های دو سویه از A به B وجود دارد. فقط کافی است که یکی از انها را پیدا کنیم تا نتیجه بگیریم $|A| = |B|$ است.
تاکید می کنیم که تعریف ۹.۱.۱ هم برای تابع های کران دار و هم برای تابع های بی کران کار برد دارد.

مثال ۹.۱.۲
این مثال نشان می دهد $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ است. برای این که ببینید چرا ، جدول ۹.۱.۳ را ملاحظه کنید ، که یک دو سویه $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ توصیف می کند.

جدول ۹.۱.۳

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…
$f(n)$	0	1	−1	2	−2	3	−3	4	−4	5	−5	6	−6	7	−7	…

ملاحظه می کنید که f به نحوی توصیف شده که هم یک به یک است و هم پوشا. هر عدد صحیحی فقط یک مرتبه در ردیف دوم بی نهایت طولانی آمده است. پس بر اساس جدول ، برای هر $b \in \mathbb{Z}$ یک عدد طبیعی n وجود دارد با $f(n) = b$, پس f پوشا است. یک به یک هم است زیرا بر اساس جدول داریم $f(m) \neq f(n)$ است ، هر گاه $m \neq n$ باشد. به همین دلیل دو سویه بودن $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ باید بر اساس تعریف ۹.۱.۱ نتیجه بگیریم که $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ است.

مثال ۹.۱.۲ ممکن است باعث آشفتگی شود. از یک طرف منطقی به نظر می رسد که $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$

باشد ، زیرا $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ هر دو بی کران هستند. پس اندازه آنها هر دو بی کران است. از طرف دیگر ، $\mathbb{Z}$ ممکن است دو برابر $\mathbb{N}$ به نظر آید. زیرا $\mathbb{Z}$ شامل هم اعداد مثبت و هم منفی است. تعریف ۹.۱.۱ این مشکل را حل می کند. زیرا دو سویه بودن $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ مجموعه $\mathbb{N}$ را با مجموعه $\mathbb{Z}$ جور می کند. قضیه زیر این موضوع را خلاصه می کند

قضیه ۹.۱.۱
چون $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ دو سویه است ، پس $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ است.

این حقیقت که $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ یک اندازه دارند ، ممکن است بی درنگ ما را وادار کند که تابع های بی کران دیگر را با هم مقایسه کنیم. مثلا چگونه $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ را مقایسه می کنیم؟

در حقیقت $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$ ۰ این موضوع را اولین مرتبه جرج کانتور کشف کرد. او با هوشمند ی نشان داد که هیچ تابع دو سویه $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ وجود ندارد. پس $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$ بر اساس تعریف ۹.۱.۱

اثبات $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$
نشان می دهیم نمی توانیم اعداد حقیقی و طبیعی را کنار هم قرار دهیم بطوری که دقیقا یک عدد حقیقی به یک عدد طبیعی تخصیص داده شود. برای این کار از برهان خلف استفاده می کنیم.
فرض می کنیم اعداد حقیقی بی کران و قابل شمارش هستند. پس می توانیم اعداد حقیقی و طبیعی را طوری ترتیب دهیم که ارتباط یک به یک بین آنها بر قرار باشد. پس فرض می کنیم چند زوج ارتباط به صورت زیر ، یعنی جدول ۹.۱.۴ باشد. ستون سمت چپ اعداد طبیعی و سمت راست اعداد حقیقی هستند.

جدول ۹.۱.۴

$$1 \to 0.500000000\ldots$$
$$2 \to 0.333333333\ldots$$
$$3 \to 3.1415926535\ldots$$
$$4 \to 4.56497494138\ldots$$
$$5 \to 0.67676767676767\ldots$$
$$\vdots$$

فرض ما این است که هر کدام و هر یک از عدد حقیقی در یک جایی درلیست ظاهر شود. حالا نشان می دهیم این تصور ما اشتباه است. جدول ۹.۱.۵

جدول ۹.۱.۵

$$1 \to 0.500000000\ldots$$
$$2 \to 0.333333333\ldots$$
$$3 \to 3.1415926535\ldots$$
$$4 \to 4.56497494138\ldots$$
$$5 \to 0.676767676767\ldots$$

برای هر عدد طبیعی n, ستون سمت چپ ، به عدد حقیقی متناظر ، سمت راست ، نگاه می کنیم. برای هر عدد طبیعی n به رقم اعشاری n ام نگاه کنید. مثلا برای عدد طبیعی ۱ , اولین رقم اعشاری مربوط به عدد حقیقی ۵ است. برای عدد طبیعی ۲ , دومین رقم اعشاری عدد حقیقی ۳ است. برای عدد طبیعی ۳ , سومین رقم اعشاری عدد حقیقی ۱ است. برای عدد طبیعی ۴، چهارمین رقم اعشاری عدد حقیقی ۹ است و الی آخر. پس فرض اولیه ما غلط است. و ارتباط یک به یک بین اعداد طبیعی و حقیقیوجود ندارد.

یک جدول دیگر هم ملاحظه کنید. جدول شماره ۹.۱.۶ ، در این جدول ، بردار سایه دار اریب، رقم n ام اعشاری عدد حقیقی را نشان می دهد. ستون سمت چپ عدد طبیعی n است و سمت راست عدد حقیقی $f(n)$ است. ملاحظه می کنید که هیچ رابطه یک به یک بین این دو مجموعه وجود ندارد. پس $|\mathbb{N}| \neq |\mathbb{R}|$

جدول ۹.۱.۶

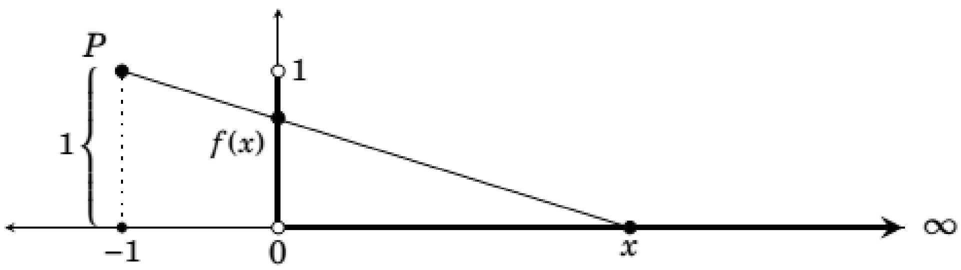
n	$f(n)$
1	0.40000000000000...
2	8.50060708666900...
3	7.50500940044101...
4	5.50704008048050...
5	6.90026000000506...
6	6.82809582050020...
7	6.50505550655808...
8	8.72080640000448...
9	0.55000088880077...
10	0.50020722078051...
11	2.90000880000900...
12	6.50280008009671...
13	8.89008024008050...
14	8.50008742080226...
$\vdots$	$\vdots$

قضیه ۹.۱.۲

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. دو سویه نیست، پس $|\mathbb{N}|\neq|\mathbb{R}|$

مثال بعد نشان می دهد که بازه های $(0,\infty)$ و $(0,۱)$ روی $\mathbb{R}$ دارای اندازه های مساوی هستند.
تصویر ۹.۱.۷

تصویر ۹.۱.۷



A bijection $f:(0,\infty)\to(0,1)$

مثال ۹.۱.۳

نشان دهید $|(0,\infty)|=|(0,۱)|$

پاسخ

برای این کار لازم است نشان دهیم $f:(0,\infty) \to (0,1)$ دو سویه است. این تابع را از طریق هندسی توصیف می کنیم. بازه $(0,\infty)$ را به صورت قسمت مثبت محور x روی $\mathbb{R}^2$ در نظر بگیرید. فرض کنید $(0,1)$ روی محور y باشد ، آنطور که در تصویر ۹.۱.۷ ملاحظه می کنید، $(0,\infty)$ و $(0,1)$ بر هم عمود هستند.
تصویر یک نقطه $P=(-1,1)$ نشان می دهد. $f(x)$ را به صورت زیرتعریف می کنیم :
نقطه $(0,1)$ جایی که خط از P تا $x\in(0,\infty)$ ،محور y را قطع می کند.
بر اساس مثلث های متشابه داریم.

$$\frac{1}{x+1}=\frac{f(x)}{x}$$

پس

$$f(x)=\frac{x}{x+1}$$

نکته مهم این که مساوی بودن اندازه های مجموعه ها ، یک کلاس هم ارز روی مجموعه ها است. یعنی انعکاسی است ، متقارن است و انتقالی است. فرض می کنیم A یک مجموعه باشد. تابع همانی $A\to A$ یک دو سویه است. پس $|A|=|A|$ است. این خاصیت انعکاسی است. برای خاصیت متقارن بودن ، اگر $|A|=|B|$ باشد ، پس یک دو سویه $f:A\to B$ وجود دارد و وارون آن هم یک دو سویه $f^{-1}:B\to A$ است ، پس $|B|=|A|$ است. برای انتقالی بودن ، فرض کنید $|A|=|B|$ و $|B|=|C|$ باشد. پس دو سویه های $f:A\to B$ و $g:B\to C$ وجود دارند ، پس بر اساس قضیه ۸.۴.۲ بخش ۸.۴ داریم $g\circ f:A\to C$ یک دو سویه است. و لذا $|A|=|B|$ است.

مثال ۹.۱.۴
نشان دهید $|(0,1)|=|\mathbb{R}|$ است.
پاسخ
چون $g:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ با تعریف $g(x)=2^x$ دو سویه است ، پس داریم $|(0,\infty)|=|\mathbb{R}|$.
همچنین مثال ۹.۱.۳ نشان می دهد که $|(0,1)|=|(0,\infty)|$ است. پس $|(0,1)|=|\mathbb{R}|$ است.

تا کنون در این فصل گفته ایم ، دو مجموعه یک اندازه دارند اگر یک دو سویه ای بین آنها وجود داشته باشد. آنها اندازه های متفاوت دارند اگر هیچ دو سویه ای بین آنها وجود نداشته باشد. با استفاده از این ایده ، نشان دادیم $|(0,1)|=|(0,\infty)|=|\mathbb{R}|\neq|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|$, پس یک وسیله داریم تا مشخص کنیم چه زمان دو مجموعه دارای اندازه های مساوی هستند و چه زمان دارای اندازه های مساوی نیستند. اما ، تقریبا پرهیز کرده ایم که بگوییم اندازه های آنها دقیقا چقدر است. مثلا می توانیم بگوییم $|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|$ اما $|\mathbb{N}|$ و $|\mathbb{Z}|$ چقدر است؟ مسلما نمی توانیم برای آنها عددی انتخاب کنیم ، زیر آنها خیلی بزرگ هستند. و این که بگوییم آنها بی کران هستند هم صحیح نیست.
در این بخش فقط توضیح دادیم که چگونه مشخص کنیم دو مجموعه دارای اندازه مساوی هستند یا نه.

تمرینات ۹.۱
نشان دهید که دو به دو مجموعه های داده شده دارای اندازه های مساوی هستند. برای این کار توضیح دهید که یک دو سویه ای از یکی به دیگری وجود دارد. توضیح خود را با فرمول نشان دهید ، نه به صورت یک جدول.

1) $\mathbb{R}$ و $(0,\infty)$

2) $\mathbb{R}$ و $(0,1)$

3) $A=\{3k: k\in\mathbb{Z}\}$ و $B=\{7k: k\in\mathbb{Z}\}$

4) $\mathbb{Z}$ و $S=\left\{\cdots,\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,4,8,16,\cdots\right\}$

5) $\{0,1\}\times\mathbb{N}$ و $\mathbb{N}$

6) $[0,1]$ و $(0,1)$

پاسخ تمرینات ۹.۱
نشان دهید که دو به دو مجموعه های داده شده دارای اندازه های مساوی هستند. برای این کار توضیح دهید که یک دو سویه ای از یکی به دیگری وجود دارد. توضیح خود را با فرمول نشان دهید ، نه به صورت یک جدول.

1) $\mathbb{R}$ و $(0,\infty)$

پاسخ
تابع $f(x)=e^x$ راملاحظه کنید.
این تابع $\mathbb{R}$ را به $(0,\infty)$ می فرستد. این تابع یک به یک است ، زیرا $f(x)=f(y)$ یعنی $e^x=e^y$ ، حالا اگر لگاریتم طبیعی دو طرف را بگیریم ، داریم $x=y$ ۰
این تابع پوشا است ، زیرا اگر $b\in(0,\infty)$ باشد ، پس $f(\ln(b))=b$ ۰ لذا بخاطر دو سویه بودن $f:\mathbb{R}\to(0,\infty)$ نتیجه می گیریم $|\mathbb{R}|=|(0,\infty)|$

2) $\mathbb{R}$ و $(0,1)$

پاسخ

ملاحظه کنید $f(x) = \cos^{-1}(x)$ $\frac{۱}{n}$ ۰ این تابع $\mathbb{R}$ را به $(0,۱)$ می فرستد. بر اساس آنچه در مثلثات خوانده ایم ، این تابع یک به یک و پوشا است ، لذا چون $f: \mathbb{R} \to (0,۱)$ دو سویه است ، نتیجه می گیریم $|\mathbb{R}| = |(0,۱)|$ است.

3) $A = \{3k: k \in \mathbb{Z}\}$ و $B = \{7k: k \in \mathbb{Z}\}$

پاسخ

ملاحظه می کنید که $f(x) = \frac{۷}{۳}x$ تابع A را به B می فرستد. یک به یک است زیرا داریم $f(x) = \mathrm{f}(y) \Rightarrow \frac{۷}{۳}\mathrm{x} = \frac{۷}{۳}y$ ۰ طرفین تساوی آخر را در $\frac{۳}{۷}$ ضرب می کنیم ، پس داریم $x = y$۰ پوشا است زیرا اگر $b \in B$ باشد ، پس $b = ۷k$ است برای یک عدد صحیح k ۰ پس $۳k \in A$ است. و $f(۳k) = ۷k = b$ ۰ لذا چون $f: A \to B$ دو سویه است ، نتیجه می گیریم $|A| = |B|$ است.

4) $\mathbb{Z}$ و $S = \left\{\cdots, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1,2,4,8,16, \cdots\right\}$

پاسخ

ملاحظه کنید تابع $f: \mathbb{Z} \to S$ تعریف شده به صورت $f(n) = ۲^n$ دو سویه است. یک به یک است ، زیرا $f(m) = f(n) \Rightarrow ۲^m = ۲^n$ ۰ از دو طرف تساوی آخر لگاریتم پایه دو می گیریم ، پس داریم $m = n$۰ پوشا است زیرا هر عنصری $b \in S$ دارای شکل $b = ۲^n$ است، برای یک عدد صحیح n۰ پس $f(n) = ۲^n = b$ است. چون تابع $f: \mathbb{Z} \to S$ دو سویه است ، پس داریم $|\mathbb{Z}| = |S|$ است.

5) $\{0,1\} \times \mathbb{N}$ و $\mathbb{N}$

پاسخ

تابع $f: \{0,۱\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ تعریف شده به صورت $f(a,n) = ۲n - a$ در نظر بگیرید. این تابع یک به یک است ، زیرا اگر $f(a,n) = f(b,m)$ باشد ، پس $۲n - a = ۲m - b$ است. حال اگر a مساوی b نباشد ، یکی از a یا b صفر است و دیگری ۱ , و لذا یک طرف معادله $۲n - a = ۲m - b$ فرد خواهد بود و طرف دیگر زوج ، و این متناقض است. لذا $a = b$ است. پس $۲n - a = ۲m - b$ می شود $۲n - a = ۲m - a$ پس $(a,n) = (b,m)$ است و لذا f یک به یک است. برای این که ببینیم f پوشا است ، یک $b \in \mathbb{N}$ در نظر بگیرید. اگر b زوج باشد ، پس $b = ۲n$ است برای یک عدد صحیح n, و $f(0,n) = ۲n - 0 = b$ است. اگر b فرد باشد ، پس $b = ۲n + ۱$ است ، برای یک عدد صحیح n۰ پس

$$f(۱, n+۱) = ۲(n+۱) - ۱ = ۲n + ۱ = b$$

پس f پوشا است. و لذا f دو سویه است. و در نهایت داریم. $|\{0,1\} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$

6) $[0,1]$ و $(0,1)$

پاسخ

زیر مجموعه $X = \left\{\frac{۱}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq [0,۱]$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $f:[0,۱] \to [0,۱)$ به صورت $f(x) = x$ تعریف شده باشد، اگر $x \in [0,۱] - X$ باشد و $f\left(\frac{۱}{n}\right) = \frac{۱}{n+۱}$ باشد برای هر $\frac{۱}{n} \in X$ ۰ به اسانی می توان چک کرد که f دو سویه است. بعد ، فرض می کنیم

$$Y = \left\{۱ - \frac{۱}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq [0,۱)$$

باشد و $g:[0,۱) \to (0,۱)$ تعریف شده به صورت $g(x) = x$ اگر $x \in [0,۱) - Y$ باشد و $g\left(۱ - \frac{۱}{n}\right) = ۱ - \frac{۱}{n+۱}$ باشد برای هر $۱ - \frac{۱}{n} \in Y$ ۰ باز هم به اسانی می توان چک کرد که g دو سویه است. لذا ترکیب $g \circ f:[0,۱] \to (0,۱)$ دو سویه است و در نهایت نتیجه می گیریم

$$|[0,۱]| = |(0,۱)|$$

۹.۲ ـ مجموعه های قابل شمارش و غیر قابل شمارش Countable and Uncountable Sets

اجازه دهید موضوعات مهم بخش قبل را خلاصه کنیم.

گفتیم $|A| = |B|$ است اگر و فقط اگر یک تابع دو سویه $f: A \to B$ وجود داشته باشد.
گفتیم $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ است ، زیرا یک تابع دو سویه $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ وجود دارد.
گفتیم $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$ است ، زیرا هیچ تابع دو سویه ای برای $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ وجود ندارد.

پس ، با وجودی که $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{R}$ هر سه بی کران هستند ، اندازه های آنها همه یک نیست. $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ اندازه های مساوی دارند ، اما اندازه $\mathbb{R}$ با اندازه های آن دو دیگر ، متفاوت است. این یعنی مجموعه های بی کران می توانند اندازه های متفاوت داشته باشند. در این مورد تعریف هایی خواهیم داشت.

از یک جهت می توانیم اعضای $\mathbb{N}$ را شمارش کنیم. می توانیم اعضای آنرا به صورت $۱,۲,۳,\cdots$ شمارش کنیم ، اما باید این کار را تا ابد ادامه دهیم. پس $\mathbb{N}$ را تابع بی کران قابل شمارش می نامیم.
همین اصطلاح را برای هر مجموعه ای که اندازه اش مساوی $\mathbb{N}$ باشد ، بکار می بریم.

تعریف ۹.۲.۱
فرض می کیم A یک مجموعه باشد. پس A **بی کران قابل شمارش است** ، اگر $|A| = |\mathbb{N}|$ باشد. یعنی اگر یک تابع دو سویه $f: \mathbb{N} \to A$ وجود داشته باشد.مجموعه A **غیر قابل شمارش است** اگر بی کران باشد و $|A| \neq |\mathbb{N}|$ باشد. یعنی اگر A بی کران باشد و هیچ تابع دو سویه $f: \mathbb{N} \to A$ وجود نداشته باشد.

پس $\mathbb{Z}$ بی کران قابل شمارش است ، اما $\mathbb{R}$ غیر قابل شمارش است. این بخش به مجموعه های بی کران قابل شمارش اختصاص می‌دهیم. در مورد تابع های غیر قابل شمارش بعداً صحبت می کنیم.

اگر A بی کران قابل شمارش باشد ، پس $|A| = |\mathbb{N}|$ است ، لذا یک تابع دو سویه $f: \mathbb{N} \to A$ وجود دارد. می توانید این طور تصور کنید که f عناصر A را شمارش می کند. $f(۱)$ اولین عضو A است. بعدی $f(۲)$ و سپس $f(۳)$ و الی آخر. منطقی است یک مجموعه بی کران قابل شمارش را به صورت کوچک ترین نوع مجموعه بی کران تصور کنیم. زیرا اگر شمارش را متوقف کنیم ، مجموعه کران دار می شود ، نه بی کران. یک تابع بی کران قابل شمارش دارای کمترین عنصر ی است که یک مجموعه می تواند داشته باشد و باز هم بی کران باشد. متداول است که نماد $\aleph_0$ را برای نشان دادن اندازه مجموعه های بی کران قابل شمارش بکار برده شود.

تعریف ۹.۲.۲
اندازه عدد طبیعی با نماد $\aleph_0$ نشان داده می شود. یعنی $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ ، پس هر مجموعه بی کران قابل شمارش دارای اندازه $\aleph_0$ است

نماد $\aleph_0$ خوانده می شود الف نات
پس داریم $|\mathbb{Z}| = \aleph_0$ و $|\mathbb{R}| \neq \aleph_0$

مثال ۹.۲.۱

فرض کنید $E = \{۲k: k \in \mathbb{Z}\}$ مجموعه اعداد صحیح زوج باشد. تابع $f: \mathbb{Z} \to E$ تعریف شده به صورت $f(n) = ۲n$ به آسانی مشاهده می شود که یک تابع دو سویه است. پس $|E| = |\mathbb{Z}|$ است. لذا ، چون $|E| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$ است ، نتیجه می شود مجموعه E بی کران قابل شمارش است و $|E| = \aleph_0$ است.

یک حقیقت مهم :عناصر هر مجموعه بی کران قابل شمارش A را می توان به صورت یک لیست بلند بی کران $a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, \cdots$ نوشت بطوری که با یک عنصر $a_۱ \in A$ شروع می شود و شامل تمام عناصر A است. مثلا برای مجموعه E در مثال ۹.۲.۱ می توان نوشت $0, ۲, -۲, ۴, -۴, \ldots$ دلیل هم این است : چون A بی کران قابل شمارش است ، تعریف ۹.۲.۱ می گوید یک تابع دو سویه $f: \mathbb{N} \to A$ وجود دارد . این به ما اجازه می دهد مجموعه A را به صورت یک لیست بی کران $f(۱), f(۲), f(۳), f(۴), \cdots$ بنویسیم. در نتیجه اگر عناصر A را می توان در لیست به صورت $a_۱, a_۲, a_۳, \cdots$ نوشت ، پس تابع $f: \mathbb{N} \to A$ تعریف شده به صورت $f(n) = a_n$ یک تابع دو سویه است ، لذا A بی کران قابل شمارش است. گفته های بالا را به صورت یک قضیه ، خلاصه می کنیم.

قضیه ۹.۲.۱

یک تابع A بی کران قابل شمارش است اگر و فقط اگر عناصر آنرا بتوان در یک لیست بی کران $a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, \ldots$ مرتب کرد.

یک مثال که چگونه این قضیه را می توان بکار برد :فرض کنید P مجموعه تمام اعداد اول باشد. چون می توانیم عناصر آنرا به صورت $۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, \ldots$ بنویسیم ، پس P بی کران قابل شمارش است.

نتیجه دیگر قضیه ۹.۲.۱ این است که می گویم $\mathbb{R}$ بی کران غیر قابل شمارش است ، زیرا نمی توانیم تمام عناصر آنرا در یک لیست بی کران بنویسیم.

سئوالی پیش می آید. آیا $\mathbb{Q}$ یک مجموعه بی کران قابل شمارش است یا غیر قابل شمارش؟ قضیه زیر پاسخ این سئوال است.

قضیه ۹.۲.۲

مجموعه اعداد گویا ، یعنی $\mathbb{Q}$ بی کران قابل شمارش است.

اثبات

برای اثبات این قضیه ، لازم است نشان دهیم چگونه مجموعه $\mathbb{Q}$ را به شکل یک لیست بنویسیم. این کار را با ترتیب دادن تمام اعداد گویا در یک ارایه شروع می کنیم. این کار را با جدول ۹.۲.۱ انجام می دهیم. ردیف بالایی لیست تمام اعداد صحیح است ، که با 0 شروع می شود و سپس یک در میان علامت اعداد عوض می شود ، تا به آخر. هر ستون که با یک عدد صحیح k نامگزاری می کنیم ، شامل تمام

اعداد کسری است به صورت ساده شده. بطوری که صورت کسر k است. مثلا ، ستون شماره ۲ شامل کسر های $\cdots, \frac{۲}{۷}, \frac{۲}{۵}, \frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۱}$ و غیرو است. این ستون شامل $\frac{۲}{۶}, \frac{۲}{۴}, \frac{۲}{۲}$ و غیرو نیست. زیرا آنها گرد شده اند . در حقیقت شکل گرد شده آنها در ستون $k = ۱$ آمده. زیرا مثلا $\frac{۲}{۲} = ۱$ و $\frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$ و $\frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$ و غیرو است. می توانید این جدول را امتحان کنید و ملاحظه کنید که شامل تمام اعداد گویا در $\mathbb{Q}$ است.

جدول ۹.۲.۱

0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	$\cdots$
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{-4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{-5}{1}$	$\cdots$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{-5}{2}$	$\cdots$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{-5}{3}$	$\cdots$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{-4}{7}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{-5}{4}$	$\cdots$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{-2}{9}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{-4}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{-5}{6}$	$\cdots$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{-2}{11}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{-4}{11}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{-5}{7}$	$\cdots$
	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{-3}{10}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{-4}{13}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{-5}{8}$	$\cdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

حالا یک مسیر بی کران در این ارایه رسم کنید. جدول ۹.۲.۲ همانطور که ملاحظه می کنید ، تمام اعداد گویا در این مسیر قرار دارند. با $\frac{0}{۱}$ شروع کنید و مسیر را دنبال کنید. تمام اعداد گویا را در یک لیست بی کران پیدا می کنید.

$$0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, 2, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{2}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{2}{5}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -2, 3, \frac{3}{2}, \ldots$$

بر اساس قضیه ۹.۲.۱ مجموعه اعداد گویا بی کران قابل شمارش است. یعنی $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$

جدول ۹.۲.۲

0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	$\cdots$
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{-1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{-2}{1}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{-3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{-4}{1}$	$\frac{5}{1}$	$\frac{-5}{1}$	$\cdots$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{-4}{3}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{-5}{2}$	$\cdots$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{-2}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{-5}{3}$	$\cdots$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{-3}{5}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{-4}{7}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{-5}{4}$	$\cdots$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{-2}{9}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{-4}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{-5}{6}$	$\cdots$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{-2}{11}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{-3}{8}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{-4}{11}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{-5}{7}$	$\cdots$
	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{7}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{-2}{13}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{-3}{10}$	$\frac{4}{13}$	$\frac{-4}{13}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{-5}{8}$	$\cdots$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{-2}{15}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{-3}{11}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{-4}{15}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{-5}{9}$	$\cdots$
	$\frac{1}{9}$	$\frac{-1}{9}$	$\frac{2}{17}$	$\frac{-2}{17}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{-3}{13}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{-4}{17}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{-5}{11}$	$\cdots$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

همچنین صحیح است اگر بگوییم ضرب دکارتی مجموعه های بی کران قابل شمارش ، خود بی کران قابل شمارش هستند.

قضیه ۹.۲.۳

اگر مجموعه های A و B هر دو بی کران قابل شمارش باشند ، پس $A \times B$ هم بی کران قابل شمارش است.

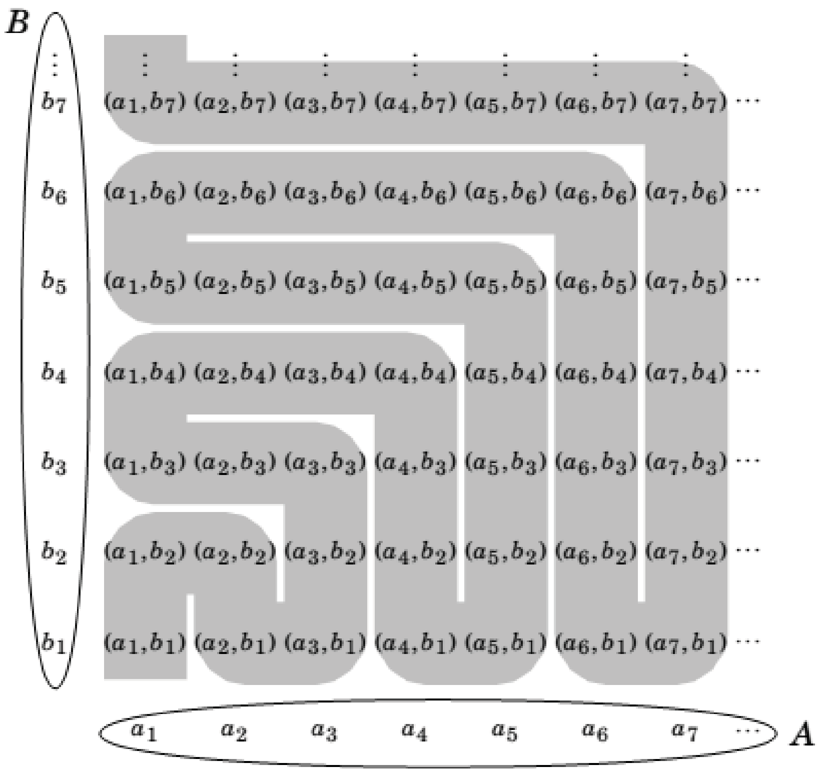
اثبات

فرض می کنیم A و B هر دو بی کران قابل شمارش باشند. بر اساس قضیه ۹.۲.۱ می توانیم A و B در لیست مانند زیر بنویسیم.

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}, \\ B &= \{b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\}. \end{aligned}$$

جدول ۹.۲.۳ نشان می دهد چگونه یک مسیر بی کران از میان تمام $A \times B$ تشکیل دهیم. لذا $A \times B$ را می توان به صورت یک لیست نوشت. پس $A \times B$ بی کران قابل شمارش است.

جدول ۹.۲.۳



یک نتیجه گیری از این قضیه این است که ، چون $\mathbb{Q}$ بی کران قابل شمارش است پس $|\mathbb{Q}| \times |\mathbb{Q}|$ هم بی کران قابل شمارش است.

قضیه تبعی ۹.۲.۱

اگر $n \geq ۲$ مجموعه بی کران قابل شمارش $A_۱, A_۲, A_۳,..., A_n$ داشته باشیم ، پس ضرب دکارتی $A_۱ \times A_۲ \times A_۳ \times \cdots \times A_n$ هم بی کران قابل شمارش است.

اثبات

اثبات از طریق استقرا

ملاحظه می کنید که برای $n = ۲$ مجموعه $A_۱ \times A_۲$ بی کران قابل شمارش است. قضیه ۹.۲.۳

فرض می کنیم برای $k \geq ۲$ ضرب دکارتی $A_۱ \times A_۲ \times A_۳ \times \cdots \times A_K$ بی کران قابل شمارش باشد. ضرب دکارتی $A_۱ \times A_۲ \times A_۳ \times \cdots \times A_{k+۱}$ مجموعه بی کران قابل شمارش است. به اسانی می توان تصدیق کرد که تابع زیر دو سویه است.

$$\begin{aligned} f : A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1} &\longrightarrow (A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1} \\ f(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}) &= ((x_1, x_2, \ldots, x_k), x_{k+1}) \end{aligned}$$

پس داریم

$$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_k \times A_{k+1}| = |(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}|.$$

بر اساس فرضیه استقرا ، ضرب زیر ، ضرب دو مجموعه بی کران قابل شمارش است.

$$(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1}$$

و لذا بر اساس قضیه ۹.۲.۳ یک مجموعه بی کران قابل شمارش است.

قضیه ۹.۲.۴

اگر A و B هر دو مجموعه های بی کران قابل شمارش باشند ، پس $A \cup B$ هم بی کران قابل شمارش است.

اثبات

فرض می کنیم A و B هر دو مجموعه های بی کران قابل شمارش باشند ، پس بر اساس قضیه ۹.۲.۱ می توان A و B را به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\}, \\ B &= \{b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots\}. \end{aligned}$$

می توانی A و B را به صورت زیر در هم و قاطی کرد تا به یک لیست بی کران $A \cup B$ تبدیل شود.

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, b_4, \ldots\}.$$

پس بر اساس قضیه ۹.۲.۱ مجموعه $A \cup B$ هم بی کران قابل شمارش است.

تمرینات ۹.۲

۱ - ثابت کنید $A = \{\ln(n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ بی کران قابل شمارش است.

۲ - ثابت کنید $A = \{(۵n, -۳n) : n \in \mathbb{Z}\}$ بی کران قابل شمارش است.

۳ - صحت یا سقم گزاره زیر را ثابت کنید.
یک زیر مجموعه از مجموعه اعداد گنگ وجود دارد که بی کران قابل شمارش است.

۴ - صحت یا سقم گزاره زیر را ثابت کنید.
مجموعه $\mathbb{Q}^{۱۰۰}$ بی کران قابل شمارش است.

۵ - صحت یا سقم گزاره زیر را ثابت کنید.
مجموعه $\mathbb{N} \times \{0, ۱\}$ بی کران قابل شمارش است.

۶ - یک افراز $\mathbb{N}$ توصیف کنید که $\mathbb{N}$ را به هشت زیر مجموعه بی کران قابل شمارش تقسیم کند.

پاسخ تمرینات ۹.۲

۱ ـ ثابت کنید $A = \{\ln(n) : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ بی کران قابل شمارش است.

پاسخ

کافی است که ملاحظه کنید که عناصر این مجموعه را می توان در یک لیست بی کران به صورت $\ln(۱), \ln(۲), \ln(۳), \cdots$ نوشت ، پس A بی کران قابل شمارش است.

۲ ـ ثابت کنید $A = \{(۵n, -۳n) : n \in \mathbb{Z}\}$ بی کران قابل شمارش است.

پاسخ

تابع $f: \mathbb{Z} \to A$ تعریف شده به صورت $f(n) = (۵n, -۳n)$ را در نظر بگیرید. این تابع بطور وضوح پوشا است. یک به یک هم است زیرا $f(n) = f(m)$ به ما $(۵n, -۳n) = (۵m, -۳m)$ می دهد. پس $۵n = ۵m$ و لذا $n = m$ است. پس چون f دو سویه است داریم.

$$|\mathbb{Z}| = |A| \quad \text{و} \quad |A| = |\mathbb{Z}| = \aleph_0$$

پس A بی کران قابل شمارش است.

۳ ـ صحت یا سقم گزاره زیر را ثابت کنید.

یک زیر مجموعه از مجموعه اعداد گنگ وجود دارد که بی کران قابل شمارش است.

پاسخ

این گزاره صحیح است .فقط کافی است اعداد گنگ $\frac{\pi}{۱}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۴}, \cdots$ در نظر بگیرید.

۴ ـ صحت یا سقم گزاره زیر را ثابت کنید.

مجموعه $\mathbb{Q}^{۱۰۰}$ بی کران قابل شمارش است.

پاسخ

صحیح است. توجه کنید $\mathbb{Q}^{۱۰۰} = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$ صد مرتبه ضرب می کنیم. چون $\mathbb{Q}$ بی کران قابل شمارش است ، پس بر اساس قضیه فرعی ۹.۲.۱ این حاصلضرب هم بی کران قابل شمارش است.

۵ ـ صحت یا سقم گزاره زیر را ثابت کنید.

مجموعه $\{0, ۱\} \times \mathbb{N}$ بی کران قابل شمارش است.

پاسخ

صحیح است. ملاحظه کنید که $\{0, ۱\} \times \mathbb{N}$ را بصورت یک لیست بی کران نوشت یعنی

$$(0,1), (1,1), (0,2), (1,2), (0,3), (1,3), (0,4), (1,4), \cdots.$$

پس مجموعه ، بی کران قابل شمارش است.

۶ ـ یک افراز $\mathbb{N}$ توصیف کیند که $\mathbb{N}$ را به هشت زیر مجموعه بی کران قابل شمارش تقسیم کند.

پاسخ

برای هر $i \in \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$ فرض می کنیم X_i آن اعداد طبیعی باشد که همنهشت است با i به پیمانه ۸ یعنی

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \{1,9,17,25,33,\ldots\}\\
X_2 &= \{2,10,18,26,34,\ldots\}\\
X_3 &= \{3,11,19,27,35,\ldots\}\\
X_4 &= \{4,12,20,28,36,\ldots\}\\
X_5 &= \{5,13,21,29,37,\ldots\}\\
X_6 &= \{6,14,22,30,38,\ldots\}\\
X_7 &= \{7,15,13,31,39,\ldots\}\\
X_8 &= \{8,16,24,32,40,\ldots\}
\end{aligned}
$$

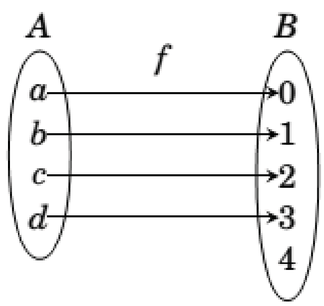
۹.۳ ـ مقایسه اندازه مجموعه ها Comparing Cardinalities

تا کنون یاد گرفته ایم که حد اقل دو نوع بی کرانی وجود دارد. از یک طرف ، مجموعه های بی کران قابل شمارش وجود دارند مانند $\mathbb{N}$, با اندازه $\aleph_0$ ، سپس مجموعه غیر قابل شمارش $\mathbb{R}$ است. آیا انواع دیگری از بی کرانی ، سوای این دو ، وجود دارد ؟ پاسخ اری است. اما برای بر رسی این موضوع باید چند تعریف و قضیه معرفی کنیم.

ابتدا باید مشخص کنیم منظور ما از این که می گوییم $|A| < |B|$ است ، چیست. البته اگر A و B کران دار باشند ، می دانیم منظور چیست. $|A| < |B|$ یعنی وقتی عناصر A و B را شمارش کردیم ، معلوم می شود که A عناصر کمتر از B دارد. اما اگر A و B بی کران باشند ، این کار عملی نیست. زیرا عناصر مجموعه بی کران را نمی توان شمرد.

زبان تابع ها کمک می کند که بر این مشکل فائق شویم. ملاحظه می کنید که در مورد مجموعه های کران دار ، واضح است که $|A| < |B|$ است اگر و فقط اگر یک تابع یک به یک $f: A \to B$ داشته باشد ، اما هیچ تابع پوشا $f: A \to B$ وجود نداشته باشد. دیاگرام ۹.۳.۱ این موضوع را تشریح می کند.

دیاگرام ۹.۳.۱



این ایده را بکار می بریم برای این که بگوییم $|A| < |B|$ است. تعریف زیر موضوعات بالا را مجددا بیان می کند.

تعریف ۹.۳.۱
فرض می کنیم A و B مجموعه باشند.
وقتی می گوییم $|A| = |B|$ یعنی یک تابع دو سویه $f: A \to B$ وجود دارد.
وقتی می گوییم $|A| < |B|$ یعنی یک تابع یک به یک $f: A \to B$ وجود دارد ، اما هیچ تابع پوشا $f: A \to B$ وجود ندارد.
وقتی می گوییم $|A| \leq |B|$ یعنی $|A| < |B|$ یا $|A| = |B|$ است.

مثلا $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. تابع $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ تعریف شده به صورت $f(n) = n$ واضح است که یک به یک است ، اما پوشا نیست. زیرا مثلا برای عنصر $\frac{۱}{۲} \in \mathbb{R}$ داریم $f(n) \neq \frac{۱}{۲}$ است برای هر $n \in \mathbb{N}$، در حقیقت بر اساس قضیه ۹.۱.۲ بخش ۹.۱ تصریح می کند که هیچ تابع پوشا $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ وجود ندارد. و تعریف ۹.۳.۱ در همین بخش می گوید

$$|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}| \qquad (۱)$$

یا به عبارت دیگر $|\mathbb{R}| > \aleph_0$ است.

آیا مجموعه ای مثلا X وجود دارد بطوری که $|\mathbb{R}| < |X|$ باشد؟ پاسخ اری است. قضیه بعدی توضیح می دهد، می توان گفت $|\mathbb{R}| < |\mathscr{P}(\mathbb{R})|$.
بخاطر آورید که وقتی می گوییم $\mathscr{P}(A)$ یعنی مجموعه توانی A و یا مجموعه کلیه زیر مجموعه های A

قضیه ۹.۳.۱

اگر A یک مجموعه باشد ، پس $|A| < |\mathscr{P}(A)|$ از

اثبات

قبل از شروع اثبات ، توجه کنید که اگر A کران دار باشد ، پس $|A| < 2^{|A|} = |\mathscr{P}(A)|$ اما اثبات ما باید مربوط به تمام مجموعه ها باشد ، هم کران دار و هم بی کران

فرض می کنیم A یک مجموعه اختیاری باشد. بر اساس تعریف ۹.۳.۱ همین بخش ، برای اثبات $|A| < |\mathscr{P}(A)|$ باید نشان دهیم یک تابع یک به یک $f : A \to \mathscr{P}(A)$, وجود دارد اما هیچ تابع پوشا $f : A \to \mathscr{P}(A)$, وجود ندارد.

برای این که ببینیم یک تابع یک به یک $f : A \to \mathscr{P}(A)$, وجود دارد ، f را $f(x) = \{x\}$ تعریف می کنیم. به عبارت دیگر ، f هر یک از عناصر $x \in A$ را به مجموعه یک عضوی $\{x\} \in \mathscr{P}(A)$ می فرستد.
پس $f : A \to \mathscr{P}(A)$ یک به یک است. توضیح می دهیم که چرا یک به یک است. فرض کنید $f(x) = f(y)$ باشد. پس $\{x\} = \{y\}$ است. تنها راهی که $\{x\}$ و $\{y\}$ می توانند مساوی باشند این است که اگر $x = y$ باشد. پس $x = y$ است و لذا تابع f ، یک به یک است.

حالا باید نشان دهیم هیچ تابع پوشا $f : A \to \mathscr{P}(A)$ وجود ندارد. فرض می کنیم بر عکس یک تابع پوشا $f : A \to \mathscr{P}(A)$ وجود داشته باشد. توجه کیند که برای هر عضو $x \in A$ داریم $f(x) \in \mathscr{P}(A)$ پس $f(x)$ یک زیر مجموعه A است. پس f تابعی است که عناصر A را به زیر مجموعه های A می فرستد. این یعنی برای هر $x \in A$ یا x یک عضو زیر مجموعه $f(x)$ است یا نیست. با این ایده برای A یک زیر مجموعه B را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$B = \{x \in A : x \notin f(x)\} \subseteq A.$$

حالا ، چون $B \subseteq A$ است ، پس داریم $B \in \mathscr{P}(A)$ و چون f پوشا است ، یک $a \in A$ وجود دارد بطوری که $f(a) = B$ است. حالا یا $a \in B$ یا $a \notin B$. این دو حالت را بر رسی می کنیم.

حالت اول :اگر $a \in B$ پس بر اساس تعریف B باید $a \notin f(a)$ باشد و چون $f(a) = B$ است ، پس داریم $a \notin B$ و این تناقض است.
حالت دوم :اگر $a \notin B$, پس بر اساس تعریف B داریم $a \in f(a)$ وچون $f(a) = B$ است پس داریم $a \in B$ و باز تناقض داریم.

چون فرض ما که $f : A \to \mathscr{P}(A)$ پوشا است به تناقض می رسیم ، نتیجه می گیریم که تابع پوشا وجود ندارد.

نتیجه این که یک تابع $f : A \to \mathscr{P}(A)$ یک به یک وجود دارد اما پوشا وجود ندارد و برا اساس تعریف ۹.۳.۱ داریم $|A| < |\mathscr{P}(A)|$.

با مجموعه $A = \mathbb{N}$ شروع می کنیم و با بکار بردن قضیه ۹.۳.۱ بطور مکرر در مکرر ، زنجیره اندازه های بی کران زیرا را بدست می آوریم.

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| < |\mathscr{P}(\mathbb{N})| < |\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))| < |\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N})))| < \cdots \quad (۲)$$

پس یک سلسله بی کران از انواع مختلف بی کران داریم. که با $\aleph_0$ شروع می شود و بتدریج بطور بی کران وسعت می یابد. مجموعه $\mathbb{N}$ قابل شمارش است اما ، مجموعه های $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ و $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N}))$ الی آخر، غیر قابل شمارش هستند. می توان ثابت کرد که $|\mathscr{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$. است پس $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ دو مجموعه اول در فرمول (۲) بالا است.

احتمال این که به مجموعه های بی کران بالا تر از $\aleph_0$ و $|\mathbb{R}|$ در آینده برخورد کنید ، کم است ، مگر بخواهید ریاضیات گسسته کاملا پیشرفته مطالعه کنید.

قضیه ۹.۳.۲
یک زیر مجموعه بی کران یک مجموعه بی کران قابل شمارش ، خود بی کران قابل شمارش است.
اثبات
فرض می کنیم A یک زیر مجموعه بی کران مجموعه بی کران قابل شمارش B باشد. چون B بی کران قابل شمارش است ، عناصر آنرا می توان در یک لیست $b_۱, b_۲, b_۳، \cdots$ نوشت. پس می توانیم عناصر A را در لیستی بنویسیم که از B انتخاب شده و به A تعلق دارند. پس A می تواند به صورت یک لیست نوشته شود. و چون A بی کران است ، لیست آن هم بی کران است و در نتیجه بی کران قابل شمارش است.

قضیه ۹.۳.۳
اگر $U \subseteq A$ و U غیر قابل شمارش باشد ، پس A غیر قابل شمارش است.
اثبات

فرض می کنیم $A \subseteq U$ و U غیر قابل شمارش باشد ، اما A غیر قابل شمارش **نباشد.** پس چون $A \subseteq U$ و U بی کران است ,پس A هم باید بی کران باشد. چون A بی کران است ، و **غیر قابل شمارش نیست** ، باید بی کران قابل شمارش باشد. پس U یک زیر مجموعه بی کران یک مجموعه بی کران قابل شمارش A است ، پس U باید بی کران قابل شمارش باشد. پس U هم بی کران غیر قابل شمارش و هم بی کران قابل شمارش. این تناقض است.

تمرینات ۹.۳

۱ ـ فرض کنید B یک مجموعه غیر قابل شمارش و A یک مجموعه باشد. اگر تابع $f: A \to B$ پوشا باشد ، در مورد اندازه A چه می توان گفت؟

۲ ـ صحت یا سقم گزاره زیر را ثابت کنید.

اگر A غیر قابل شمارش باشد ، پس $|A| = |\mathbb{R}|$ است.

۳ ـ صحت یا سقم گزاره زیر را ثابت کنید.

مجموعه $\mathbb{R} \times \{0, ۱\}$ غیر قابل شمارش است.

۴ ـ صحت یا سقم گزاره زیر را ثابت کنید.

اگر $A \subseteq B$ و A بی کران قابل شمارش و B غیر قابل شمارش باشد ، پس $B - A$ غیر قابل شمارش است.

پاسخ تمرینات ۹.۳

۱ ـ فرض کنید B یک مجموعه غیر قابل شمارش و A یک مجموعه باشد. اگر تابع $f: A \to B$ پوشا باشد ، در مورد اندازه A چه می توان گفت؟

پاسخ

مجموعه A باید غیر قابل شمارش باشد . به دلیل زیر.

برای هر $b \in B$, فرض می کنیم a_b یک عضو A باشد بطوری که $f(a_b) = b$ باشد. چنین عضوی باید وجود داشته باشد ، زیرا f پوشا است. حالا مجموعه $U = \{a_b : b \in B\}$ درست می کنیم. پس تابع $f: U \to B$ دو سویه است. پس چون B غیر قابل شمارش است ، U هم است. لذا U یک زیر مجموعه غیر قابل شمارش A است ، پس A غیر قابل شمارش است بر اساس قضیه ۹.۳.۳ همین بخش.

۲ ـ صحت یا سقم گزاره زیر را ثابت کنید.

اگر A غیر قابل شمارش باشد ، پس $|A| = |\mathbb{R}|$ است.

پاسخ

غلط است. فرض می کنیم $A = \mathscr{P}(\mathbb{R})$. باشد ، پس A غیر قابل شمارش است ، و بر اساس قضیه ۹.۳.۱ همین بخش $|\mathbb{R}| < |\mathscr{P}(\mathbb{R})| = |A|$ است.

۳ ـ صحت یا سقم گزاره زیر را ثابت کنید.

مجموعه $\mathbb{R} \times \{0, ۱\}$ غیر قابل شمارش است.

پاسخ

صحیح است. برای این که ببینیم چرا ، ابتدا توجه کنید که تابع $f: \mathbb{R} \to \{0\} \times \mathbb{R}$ تعریف شده به صورت $f(x) = (0, x)$ یک دو سویه است. پس $|\mathbb{R}| = |\{0\} \times \mathbb{R}|$ است ، و چون $\mathbb{R}$ غیر قابل شمارش است ، $\{0\} \times \mathbb{R}$ هم غیر قابل شمارش است. پس $\{0\} \times \mathbb{R}$ یک زیر مجموعه غیر قابل شمارش مجموعه $\{0, ۱\} \times \mathbb{R}$ است ، پس $\{0, ۱\} \times \mathbb{R}$ غیر قابل شمارش است بر اساس قضیه ۹.۳.۳ همین بخش.

۴ ـ صحت یا سقم گزاره زیر را ثابت کنید.

اگر $A \subseteq B$ و A بی کران قابل شمارش و B غیر قابل شمارش باشد ، پس $B - A$ غیر قابل شمارش است.

پاسخ

صحیح است. برای این که ببینیم چرا ، فرض می کنیم بر عکس ، $B - A$ بی کران قابل شمارش باشد. پس $B = A \cup (B - A)$ یک اتحاد مجموعه های بی کران قابل شمارش است ، و لذا بر اساس قضیه ۹.۲.۴ بخش ۹.۲ این اتحاد قابل شمارش است. این متناقض است. زیرا صورت مساله می گوید B غیر قابل شمارش است.