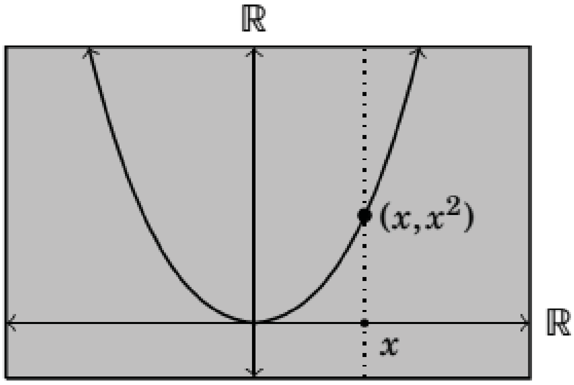
مقدمه

در حسابان و جبر با تابع ها آشنا شدید. تابع ها نقش اساسی در ریاضیات دارند. احتمالا ، شما یک تابع را به عنوان یک نوع رابطه بین دو یا چند مقدار در نظر دارید. اما تابع چیزی بیش از رابطه بین اعداد است.

۸.۱ - تابع ها

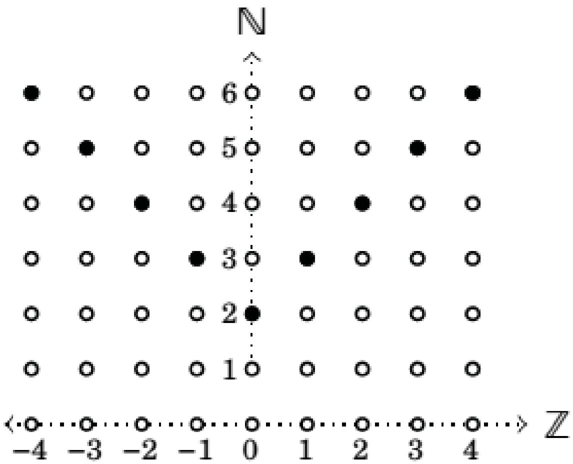
اجازه دهید با یک زمینه اشنا شروع کنیم. تابع $f(x) = x^{۲}$ از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. نمودار این تابع ، مجموعه نقاط $R = \{(x, x^{۲}) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ است. تصویر ۸.۱.۱

تصویر ۸.۱.۱ یک تابع اشنا



اگر فصل ۶ را به خاطر بیاورید ملاحظه می کنید که f یک جلوه جدید است. گراف $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ یک رابطه روی مجموعه $\mathbb{R}$ است. همان طور که خواهیم دید ، در حقیقت تابع فقط یک نوع مخصوص رابطه است. قبل از بیان یک تعریف برای تابع ، به مثال دیگری توجه کنید. مثلا تابع زیر را در نظر بگیرید. $f(n) = |n| + ۲$ ، این تابع اعداد صحیح n را به اعداد طبیعی $|n| + ۲$ تبدیل می کند. گراف آن $R = \{(n, |n| + ۲) : n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ است.

تصویر ۸.۱.۲



تصویر ۸.۱.۲ گراف R به صورت نقاط تاریک در زمینه نقاط $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ نشان می دهد. توجه داشته باشید که در این مثال ، R یک رابطه روی یک مجموعه واحد نیست. مجموعه مقادیر ورودی $\mathbb{Z}$ با مجموعه خروجی $\mathbb{N}$ فرق دارد. پس گراف $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ یک رابطه از $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{N}$ است.

این مثال سه چیز را توضیح می دهد. اولا ، یک تابع عبارت است از ارسال عناصر یک مجموعه A به یک مجموعه دیگر B. در مورد این مثال $A = \mathbb{Z}$ و $B = \mathbb{N}$ است. ثانیا ، یک تابع را می توان یک رابطه از A به B تلقی کرد. ثالثا ، برای هر مقدار ورودی n دقیقا یک مقدار خروجی $f(n)$ وجود دارد. در جبر خواندیم که این موضوع سوم با تست خط عمودی بیان شد. یعنی یک خط عمودی ، نمودار یک تابع را فقط در یک نقطه قطع می کند. یعنی برای هر مقدار ورودی x, نمودارشامل فقط یک نقطه به شکل $(x, f(x))$ است.

تعریف ۸.۱.۱
فرض می کنیم A و B دو مجموعه باشند. **یک تابع** f از A به B ، که با نماد $f: A \to B$ نشان داده می شود ، عبارت است از یک رابطه $f \subseteq A \times B$ از A به B, به شرطی که برای هر $a \in A$ رابطه f فقط شامل یک زوج مرتب (a, b) باشد. گزاره $(a, b) \in f$ را به صورت $f(a) = b$ می نویسیم.

مثال ۸.۱.۱
تابع f در گراف ۸.۱.۲ را در نظر بگیرید. بر اساس تعریف ۸.۱.۱ ما f را به عنوان مجموعه نقاط تلقی کردیم. یعنی $f = \{(n, |n| + ۲): n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. این یک رابطه از $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{N}$ است ، و در حقیقت برای هر $a \in \mathbb{Z}$, مجموعه f فقط شامل یک زوج مرتب $(a, |a| + ۲)$ است ، بطوری که مختص اول آن a است. چون $(۱, ۳) \in f$ است ، می نویسیم $f(۱) = ۳$ و چون $(-۳, ۵) \in f$ است می نویسیم $f(-۳) = ۵$ و غیرو. بطور کلی، $(a, b) \in f$ یعنی f مقدار ورودی a را به مقدار خروجی b می فرستد ، می نویسیم $f(a) = b$. برای هر مقدار ورودی n, مقدار خروجی $|n| + ۲$ است. پس می نویسیم $f(n) = |n| + ۲$. تمام اینها ، با آنچه در جبر و حسابان دیدیم ، همخوانی دارند. تنها اختلاف این است که اینجا تابع را به صورت یک رابطه تصور می کنیم.

تعریف ۸.۱.۲
برای یک تابع $f: A \to B$, مجموعه A **دامنه f** می نامیم. مجموعه B را **هم دامنه f** می نامیم.
برد f مجموعه $\{f(a): a \in A\} = \{b: (a, b) \in f\}$ است.
برد را مجموعه تمام مقادیرممکن خروجی f تصور کنید. و هم دامنه را به عنوان یک هدف برای خروجی ها تصور کنید.

دامنه: Domain
هم دامنه : Codomain
برد: Range

در بعضی کتب فارسی زبان ، هم دامنه و برد را یکی دانسته اند و یکی را بجای دیگر بکار می برند.

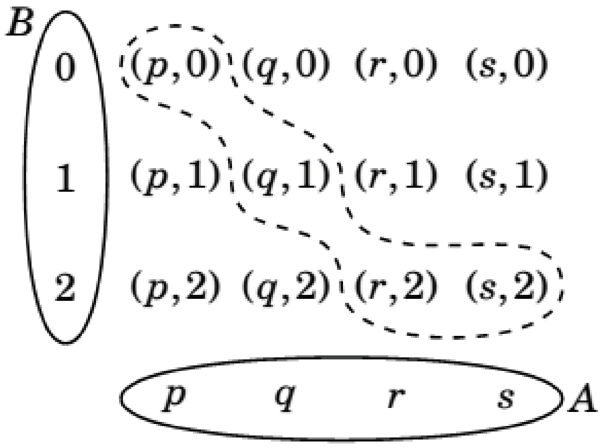
در ادامه مثال ۸.۱.۱ , دامنه f , مجموعه $\mathbb{Z}$ است. و هم دامنه $\mathbb{N}$ است. برد آن
$\{f(a): a \in \mathbb{Z}\} = \{|a| + ۲ : a \in \mathbb{Z}\} = \{۲, ۳, ۴, ۵, \cdots\}$
برد یک زیر مجموعه هم دامنه است، اما ، در این مورد ، مساوی هم دامنه نیست.

تا کنون ، در مثال های ما ، دامنه ها و هم دامنه ها مجموعه های اعداد هستند. اما این لزوما یک حالت کلی نیست. مانند مثال بعد.

مثال ۸.۱.۲
فرض کنید $A = \{p, q, r, s\}$ و $B = \{0, ۱, ۲\}$ باشد. همچنین
$$f = \{(p, 0), (q, ۱), (r, ۲), (s, ۲)\} \subseteq A \times B$$
باشد. این یک تابع $f: A \to B$ است. زیرا هر عضو A دقیقا یک مرتبه به عنوان اولین مختص زوج مرتب در f وجود دارد. داریم $f(s) = ۲$ و $f(r) = ۲$ ، $f(q) = ۱$ ، $f(p) = 0$. دامنه f مجموعه $\{p, q, r, s\}$ است و هم دامنه و برد هر دو $\{0, ۱, ۲\}$ است.

اگر A و B هر دو مجموعه ای از اعداد نیستند ، رسم یک گراف $f: A \to B$ به صورت مرسوم ، می تواند مشکل باشد. تصویر a.۸.۱.۳ کوششی است برای رسم مثال ۸.۱.۲

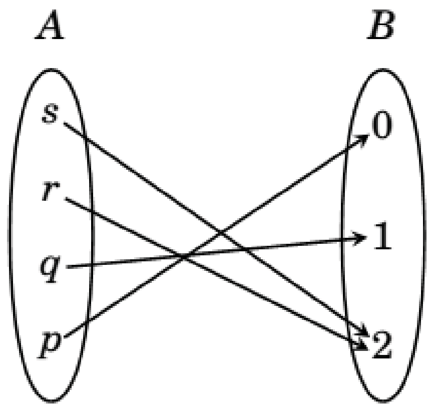
تصویر **a.۸.۱.۳**



(a)

مجموعه های A و B تقریبا به عنوان محور های x و y ردیف شده اند. و ضرب دکارتی $A \times B$ متناسب پر شده است. زیر مجموعه $f \subseteq A \times B$ با خط چین مشخص شده است. و این می تواند به عنوان گراف f تلقی شود. تصویر b.۸.۱.۳ توصیف طبیعی تر f است. مجموعه های A و B پهلو به پهلو رسم شده اند. و هنگامی که $f(a) = b$ است ، بردار هایی از a به b ترسیم شده است.

تصویر $\boldsymbol{b}$.۸.۱.۳



(b)

بطور کلی ، اگر $f: A \to B$ آن نوع تابعی باشد که در جبر و حساب به آن بر خورد می کردید ، همان روش مرسوم ، بهترین روش برای تصویر آن تابع است. از طرف دیگر ، اگر A و B کران دار و یا اگر آنها را به صورت کلی‌مجموعه ها می توان تصور کرد ، پس f را با بردار ها رسم کنید. ماند تصویر b.۸.۱.۳

باز تاکید می کنیم ، بر اساس تعریف ۸.۱.۱ یک تابع در حقیقت یک نوع رابطه است. هر تابع $f: A \to B$ یک زیر مجموعه $A \times B$ است. اما در حسابان ، یک تابع را یک قاعده تعریف می کردیم. مشکل اینجا است که کلمه قاعده ، بغرنج و نا مفهوم بنظر می رسد. اما تعریف یک تابع به عنوان یک مجموعه این بغرنجی را بر طرف می کند. مثلا این تعریف به ما اجازه می دهد که در مورد مجموعه تابع ها صحبت کنیم. یک مجموعه از تابع ها ، همان مجموعه مجموعه ها است.

مثال ۸.۱.۳

فرض می کنیم یک تابع $\varphi: \mathbb{Z}^۲ \to \mathbb{Z}$ این چنین تعریف شود: $\varphi(m,n) = ۶m - ۹n$
ملاحظه می کنید که به عنوان یک مجموعه ، این تابع

$$\varphi\left\{\left((m,n), ۶m - ۹n\right) : (m,n) \in \mathbb{Z}^۲\right\} \subseteq \mathbb{Z}^۲ \times \mathbb{Z}$$

است. برد φ کدام است؟

برای پاسخ به این سوال ، ابتدا ملاحظه می کنید که برای هر $(m,n) \in \mathbb{Z}^۲$, مقدار

$$f(m,n) = ۶m - ۹n = ۳(۲m - ۳n)$$

یک ضریب ۳ است. پس هر عددی در برد ، یک مضرب ۳ است ، پس برد، یک زیر مجموعه مجموعه تمام مضرب های ۳ است. از طرف دیگر ، اگر $b = ۳k$ یک مضرب ۳ باشد ، پس داریم

$$\varphi(-k,-k) = ۶(-k) - ۹(-k) = ۳k = b$$

یعنی هر مضربی از ۳ در برد φ است. لذا برد φ مجموعه $\{۳k: k \in \mathbb{Z}\}$ تمام مضرب های ۳ است.

حالا می پردازیم به مفهوم دو تابع f و g برابر هستند ، یعنی چه. بر اساس تعریف ما، تابع های f و g عبارتند از زیر مجموعه های $f \subseteq A \times B$ و $g \subseteq C \times D$. پس صحیح است اگر بگوییم f و g برابرند اگر $f = g$ باشد. یعنی آنها مجموعه های مساوی هستند.

پس دو تابع $f = \{(۱,a),(۲,a),(۳,b)\}$ و $g = \{(۳,b),(۲,a),(۱,a)\}$ با هم برابر هستند. زیرا مجموعه های f و g برابر هستند. توجه دارید که دامنه هر دو تابع $A = \{۱,۲,۳\}$ است یعنی مجموعه اعضای اول x در زوج مرتب $(x,y) \in f = g$
بطور کلی تابع های مساوی باید دارای دامنه های مساوی باشند.

تعریف ۸.۱.۳
دو تابع $f: A \to B$ و $g: A \to D$ **مساوی هستند** اگر $f(x) = g(x)$ باشد ، برای هر $x \in A$

ملاحظه می کنید که f و g می توانند دارای هم دامنه های متفاوت باشند و باز هم مساوی باشند. مثلا تابع های $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ و $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ با تعریف های $f(x) = |n| + ۲$ و $g(x) = |n| + ۲$ با هم برابر هستند ، زیرا $f(x) = g(x)$ است برای هر x در دامنه. ملاحظه می کنید که هم دامنه ها متفاوت هستند.

تمرینات ۸.۱

۱ - فرض کنید $A = \{0,۱,۲,۳,۴\}$ و $B = \{۲,۳,۴,۵\}$ و $f = \{(0,۳),(۱,۳),(۲,۴),(۳,۲),(۴,۲)\}$ باشد. دامنه و برد f معین کنید. $f(۲)$ و $f(۱)$ را پیدا کنید.

۲ - چهار تابع مختلف $f: \{a,b\} \to \{0,۱\}$ وجود دارد. آنها را ردیف کنید

۳ - مثالی برای رابطه از $\{a,b,c,d\}$ به $\{d,e\}$ ذکر کنید که تابع نباشد.

۴ - مجموعه $f = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: ۳x + y = ۴\}$ را در نظر بگیرید. آیا این یک تابع از $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}$ است؟ توضیح دهید.

۵ - مجموعه $f = \left\{\left(x^{۲},x\right): x \in \mathbb{R}\right\}$ را در نظر بگیرید. آیا این یک تابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است؟ توضیح دهید.

۶ - آیا مجموعه $\theta = \left\{(X,|X|): X \subseteq \mathbb{Z}_۵\right\}$ یک تابع است؟ اگر چنین است ، دامنه و برد آن کدام است؟

پاسخ تمرینات ۸.۱

۱ - فرض کنید $A = \{0,۱,۲,۳,۴\}$ و $B = \{۲,۳,۴,۵\}$ و
$f = \{(0,۳),(۱,۳),(۲,۴),(۳,۲),(۴,۲)\}$ باشد. دامنه و برد f معین کنید. $f(۲)$ و $f(۱)$
را پیدا کنید.

پاسخ

دامنه A است ؛ برد $\{۲,۳,۴\}$ است ؛ $f(۲) = ۴$ است ؛ $f(۱) = ۳$ است.

۲ - چهار تابع مختلف $f:\{a,b\} \to \{0,۱\}$ وجود دارد. آنها را ردیف کنید.

پاسخ

$f_1 = \{(a,0),(b,0)\}$　$f_2 = \{(a,1),(b,0)\}$,　$f_3 = \{(a,0),(b,1)\}$　$f_4 = \{(a,1),(b,1)\}$

۳ - مثالی برای رابطه از $\{a,b,c,d\}$ به $\{d,e\}$ ذکر کنید که تابع نباشد.

پاسخ

یک مثال می تواند $\{(a,d),(a,e),(b,d),(c,d),(d,d)\}$ باشد .

۴ - مجموعه $f = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: ۳x + y = ۴\}$ را در نظر بگیرید. آیا این یک تابع از $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}$ است؟ توضیح دهید.

پاسخ

آری ، چون $۳x + y = ۴$ است اگر و فقط اگر $y = ۴ - ۳x$ باشد. این تابع $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ است که به صورت $f(x) = ۴ - ۳x$ تعریف می شود.

۵ - مجموعه $f = \{(x^{۲},x) : x \in \mathbb{R}\}$ را در نظر بگیرید. آیا این یک تابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است؟ توضیح دهید.

پاسخ

خیر ، این یک تابع نیست. ملاحظه کنید که f شامل زوج مرتب $(۴,۲)$ و $(۴,-۲)$ است. برای عدد حقیقی ۴ به عنوان مختص اول ، دو زوج مرتب وجود دارد.

۶ - آیا مجموعه $\theta = \{(X,|X|): X \subseteq \mathbb{Z}_۵\}$ یک تابع است؟ اگر چنین است ، دامنه و برد آن کدام است؟

پاسخ

آری ، این یک تابع است. دامنه $\mathscr{P}(\mathbb{Z}_5)$ است و برد $\{0,۱,۲,۳,۴,۵\}$ است.

۸.۲ - تابع های یک به یک و پوشا Injective and Surjective Functions

ممکن است از جبر و حسابان ، بخاطر بیاورید که یک تابع ممکن است یک به یک و پوشا باشد. این خصوصیات مربوط می شود به این که آیا آن تابع معکوس پذیر است یا نه. در این بخش به این موضوع مهم می پردازیم.

یک به یک :Injective, one-to-one

پوشا :Surjective, onto

تعریف ۸.۲.۱

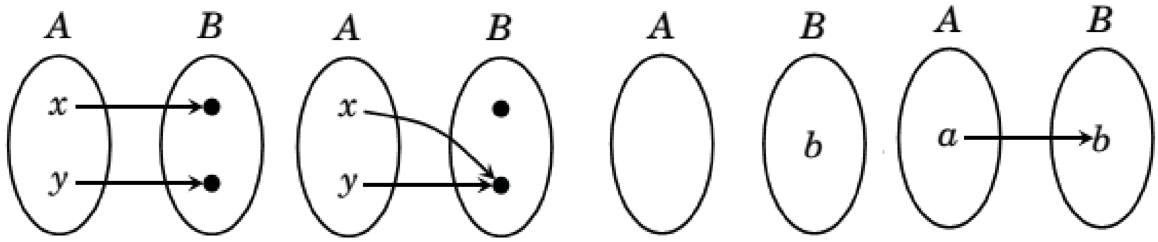
یک تابع $f: A \to B$

یک به یک Injective است اگر برای هر $x, y \in A$ و $x \neq y$ ، پس $f(x) \neq f(y)$ باشد.

پوشا Surjective است اگر برای هر $b \in B$ یک $a \in A$ وجود دارد، بطوری که $f(a) = b$ باشد.

دو سویه Bijective است اگر هم یک به یک باشد و هم پوشا باشد.

تصویر ۸.۲.۱



در تصویر ۸.۲.۱ از چپ به راست.

تصویر اول یک به یک.

تصویر دوم یک به یک نیست.

تصویر سوم اگر $b \in B$ باشد ، پس

تصویر چهارم اتفاق می افتد. یعنی پوشا است.

یک به یک یعنی عناصر متفاوت در A همیشه عناصر متفاوت در B بوجود می آورند.

پوشا یعنی یک بردار به طرف تمام عناصر B اشاره می کند.

برسی یک مثال عینی . تابع های زیر از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید.

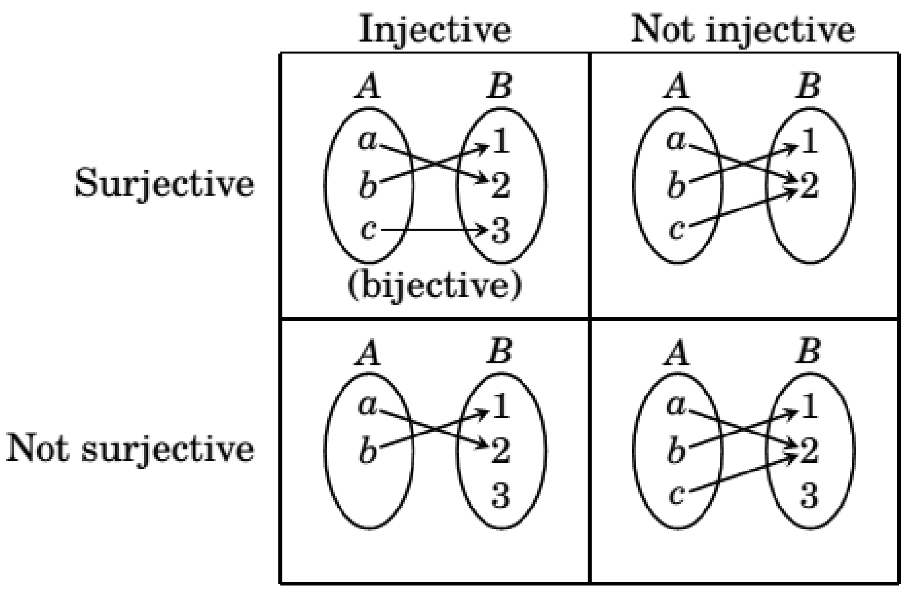
تابع $f(x) = x^۲$ یک به یک نیست ، زیرا $۲ \neq -۲$ اما $f(-۲) = f(۲)$ است. پوشا هم نیست. زیرا اگر $b = -۱$ یا هر عدد منفی دیگری باشد ، پس هیچ عدد $a \in \mathbb{R}$ وجود ندارد که $f(a) = b$ باشد.

از طرف دیگر $g(x) = x^{۳}$ هم یک به یک است و هم پوشا . پس دو سویه است.

چهار ترکیب مختلف یک به یک /پوشا وجود دارد که یک تابع ممکن است دارا باشد. این موضوع در تصویر ۸.۲.۲ برای تابع های از A به B نشان داده شده است. تابع های ستون اول ، یک به یک هستند. اما تابع های ستون دوم یک به یک نیستند. تابع های ردیف اول پوشا هستند ، اما تابع های ردیف دوم پوشا نیستند.

یک به یک: Injective
پوشا: Surjective
دو سویه: Bijective

تصویر ۸.۲.۲



بر اساس تعریف ها که تا کنون داشته ایم ، یک تابع پوشا است اگر و فقط اگر هم دامنه و برد آن مساوی باشند. اغلب لازم است ثابت کنیم که یک تابع $f: A \to B$ یک به یک است. برای این کار باید ثابت کنیم برای دو عنصر $x, y \in A$ گزاره $(x \neq y) \Rightarrow \big(f(x) \neq f(y)\big)$ صحیح است.

برای اثبات این که تابع $f: A \to B$ یک به یک است ، دو روش زیر می توانید بکار برید.

چگونه ثابت کنید تابع $f: A \to B$ یک به یک است.

طریق مستقیم Direct Approach

فرض کنید $x, y \in A$ و $x \neq y$

⋮

پس $f(x) \neq f(y)$ است.

طریق عکس نقیض Contrapositive

فرض کنید $x, y \in A$ و $f(x) = f(y)$ است.

$\vdots$

پس $x = y$ است.

برای این که ثابت کنید یک تابع **یک به یک نیست** ، باید ثابت کنید گزاره زیر صحیح نیست.

$$(x \neq y) \Rightarrow \big(f(x) \neq f(y)\big)$$

برای این کار ، کافی است یک مثال برای دو عنصر $x, y \in A$ پیدا کنید بطوری که $x \neq y$ باشد ، اما $f(x) = f(y)$ باشد.

حالا می پردازیم به چگونه ثابت کنیم $f: A \to B$ **پوشا است** . بر اساس تعریف ۸.۲.۱ باید گزاره زیر را ثابت کنیم. $\forall b \in B$، $\exists\, a \in A$، $f(a) = b$ به عبارت دیگر ، باید نشان دهیم برای هر $b \in B$
حد اقل یک $a \in A$ وجود دارد بطوری که $f(a) = b$ در ذیل خلاصه این مطلب ملاحظه می کنید.

چگونه ثابت کنیم تابع $f: A \to B$ پوشا است

فرض کنید $b \in B$ باشد.

ثابت کنید یک $a \in A$ وجود دارد ، بطوری که $f(a) = b$ است.

برای این که نشان دهیم f **پوشا نیست** باید نفی $\forall b \in B$، $\exists\, a \in A$، $f(a) = b$ ثابت کنیم. یعنی باید ثابت کنیم $\exists\, b \in B, \forall a \in A$، $f(a) \neq b$ است.

مثال ۸.۲.۱

نشان دهید که تابع $f: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ با تعریف $f(x) = \frac{۱}{x} + ۱$ یک به یک است ، اما پوشا نیست.

اثبات

برهان عکس نقیض بکار می بریم. Contrapositive

فرض می کنیم $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ و $f(x) = f(y)$ باشد. این یعنی $\frac{۱}{x} + ۱ = \frac{۱}{y} + ۱$ است. از طرفین ۱ کسر می کنیم و سپس معکوس می کنیم. پس داریم $x = y$ ، **لذا f یک به یک است**.

تابع پوشا نیست ، زیرا یک $b = ۱ \in \mathbb{R}$ وجود دارد ، بطوری که $f(x) = \frac{۱}{x} + ۱ \neq ۱$ است برای هر $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ،

مثال ۸.۲.۲

نشان دهید که $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ تعریف شده توسط فرمول $g(m,n) = (m+n, m+2n)$

هم یک به یک است و هم پوشا.

اثبات

برهان عکس نقیض بکار می بریم تا نشان دهیم g یک به یک است.

پس باید صحت گزاره زیر را ثابت کنیم.

$$g(m,n) = g(k,l) \Rightarrow (m,n) = (k,l)$$

فرض می کنیم $(m,n),(k,l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ و $g(m,n) = g(k,l)$ باشد. پس داریم

$$(m+n, m+2n) = (k+l, k+2l)$$

نتیجه می شود $m+n = k+l$ و $m+2n = k+2l$ است ، تساوی اول را از دوم کم می کنیم.

پس داریم. $n = l$ است. سپس $n = l$ را از $m+n = k+l$ کم می کنیم. پس داریم $m = k$

است. چون $m = k$ و $n = l$ است ، پس $(m,n) = (k,l)$ است. لذا g یک به یک است.

برای این که نشان دهیم g پوشا است ، یک عضو تصادفی $(b,c) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ در نظر بگیرید. باید

نشان دهیم یک $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ وجود دارد بطوری که $g(x,y) = (b,c)$. برای پیدا کردن

(x,y) ملاحظه می کنید که $g(x,y) = (b,c)$ یعنی $(x+y, x+2y) = (b,c)$. این ما را به

سیستم معادلات زیر می رساند.

$$\begin{aligned} x + y &= b \\ x + 2y &= c \end{aligned}$$

با حل سیستم بالا داریم. $x = 2b - c$ و $y = c - b$. پس $(x,y) = (2b-c, c-b)$. حال

داریم $g(2b-c, c-b) = (b,c)$ و این نشان می دهد g پوشا است.

مثال ۸.۲.۳

تابع $h: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ در نظر بگیرید که چنین تعریف شده

$$h(m,n) = \frac{m}{|n|+1}$$

مشخص کنید که آیا این تابع ، یک به یک است و یا پوشا است.

پاسخ

این تابع یک به یک نیست. زیرا برای دو عنصر نا مساوی مثلا $(1,2)$ و $(1,-2)$ در $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ داریم

$$h(1,2) = h(1,-2) = \frac{1}{3}$$

اما ، h پوشا است. یک عنصر $b \in \mathbb{Q}$ در نظر بگیرید. پس $b = \frac{c}{d}$ است برای یک $c,d \in \mathbb{Z}$.

می توانیم فرض کنیم d مثبت باشد و c منفی. پس داریم

$$h(c, d-۱) = \frac{c}{|d-۱|+۱} = \frac{c}{d} = b$$

تمرینات ۸.۲

۱ - فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $B = \{a, b, c\}$ باشد. مثالی برای یک تابع $f: A \to B$ پیدا کنید که نه یک به یک باشد و نه پوشا.

۲ - تابع کسینوس $cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در نظر بگیرید. مشخص کنید که آیا این تابع یک به یک است و یا پوشا است. اگر تعریف آن به صورت $cos: \mathbb{R} \to [-۱, ۱]$ باشد چگونه فکر می کنید؟

۳ - یک تابع $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ با تعریف $f(n) = ۲n + ۱$ در نظر بگیرید. مشخص کنید آیا این تابع ، یک به یک است ، آیا پوشا است.

۴ - یک تابع $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ به صورت $f((m, n)) = ۲n - ۴m$ تعریف شده است. مشخص کنید آیا این تابع ، یک به یک است ، آیا پوشا است.

۵ - ثابت کنید تابع $f: \mathbb{R} - \{۲\} \to \mathbb{R} - \{۵\}$ با تعریف $f(x) = \frac{۵x+۱}{x-۲}$ دو سویه است.

۶ - تابع $\theta: \{0, ۱\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ تعریف شده به صورت $\theta(a, b) = (-۱)^a b$ را در نظر بگیرید. آیا این تابع یک به یک است؟ پوشا است؟ دو سویه است؟ توضیح دهید.

۷ - تابع $f: \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ با تعریف $f(x, y) = (xy, x^۳)$ را در نظر بگیرید. آیا f یک به یک است؟ پوشا است؟ دو سویه است؟ توضیح دهید.

پاسخ تمرینات ۸.۲

۱ - فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴\}$ و $B = \{a, b, c\}$ باشد. مثالی برای یک تابع $f: A \to B$ پیدا کنید که نه یک به یک باشد و نه پوشا.

پاسخ

تابع $f = \{(۱, a), (۲, a), (۳, a), (۴, a)\}$ را در نظر بگیرید. f یک به یک نیست ، زیرا $f(۱) = f(۲)$ است. همچنین f پوشا نیست ، زیرا ، این تابع هیچ عضوی از A را به $c \in B$ نمی فرستد.

۲ - تابع کسینوس $cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ در نظر بگیرید. مشخص کنید که آیا این تابع یک به یک است و یا پوشا است. اگر تعریف آن به صورت $cos: \mathbb{R} \to [-۱, ۱]$ باشد چگونه فکر می کنید؟

پاسخ

تابع $cos: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **یک به یک نیست** زیرا ، مثلا $\cos(0) = \cos(۲\pi)$ است. این تابع **پوشا هم نیست** زیرا ، مثلا اگر $b = ۵ \in \mathbb{R}$ باشد ، هیچ عدد حقیقی وجود ندارد بطوری که $\cos(x) = b$ باشد. تابع $cos: \mathbb{R} \to [-۱, ۱]$ پوشا است ، اما یک به یک نیست.

۳ - یک تابع $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ با تعریف $f(n) = ۲n + ۱$ در نظر بگیرید. مشخص کنید آیا این تابع ، یک به یک است ، آیا پوشا است.

پاسخ

این تابع یک به یک است. به این دلیل. فرض کنید $m, n \in \mathbb{Z}$ و $f(m) = f(n)$ باشد. این یعنی $۲m + ۱ = ۲n + ۱$ است. ، که در نتیجه بدست می آوریم $۲m = ۲n$ است و در نتیجه $m = n$ است. لذا f یک به یک است.

این تابع پوشا نیست. ملاحظه کنید $f(n)$ برای تمام $n \in \mathbb{Z}$, فرد است. پس برای یک عدد زوج مثلا ۲ در هم دامنه $\mathbb{Z}$, هیچ عدد n وجود ندارد که داشته باشیم $f(n) = ۲$

۴ - یک تابع $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ به صورت $f((m, n)) = ۲n - ۴m$ تعریف شده است. مشخص کنید آیا این تابع ، یک به یک است ، آیا پوشا است.

پاسخ

این تابع یک به یک نیست. زیرا $(0, ۲) \neq (-۱, 0)$ است اما $f((0, ۲)) = f((-۱, 0)) = ۴$

این تابع پوشا نیست. زیرا $f((m, n)) = ۲n - ۴m = ۲(n - ۲m)$ همیشه زوج است. اگر $b \in \mathbb{Z}$ فرد باشد ، پس $f((m, n)) \neq b$ است ، برای تمام $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

۵ - ثابت کنید تابع $f:\mathbb{R}-\{۲\}\to\mathbb{R}-\{۵\}$ با تعریف $f(x)=\frac{۵x+۱}{x-۲}$ دو سویه است.

پاسخ

ابتدا ، ببینیم آیا f یک به یک است. فرض می کنیم $f(x)=f(y)$ باشد. پس

$$\frac{۵x+۱}{x-۲}=\frac{۵y+۱}{y-۲}$$
$$(۵x+۱)(y-۲)=(۵y+۱)(x-۲)$$
$$۵xy-۱۰x+y-۲=۵yx-۱۰y+x-۲$$
$$-۱۰x+y=-۱۰y+x$$
$$۱۱y=۱۱x$$
$$y=x$$

چون $f(x)=f(y)$ است ، پس $x=y$ است و لذا f یک به یک است.

حال ، چک می کنیم آیا f پوشا است. برای این کار ، یک عضو اختیاری $b\in\mathbb{R}-\{۵\}$ انتخاب می کنیم. می خواهیم ببینیم آیا یک $x\in\mathbb{R}-\{۲\}$ وجود دارد ، بطوری که $f(x)=b$ یا $\frac{۵x+۱}{x-۲}=b$ باشد. تساوی آخر را برای x حل می کنیم. پس داریم.

$$۵x+۱=b(x-۲)$$
$$۵x+۱=bx-۲b$$
$$۵x-xb=-۲b-۱$$
$$x(۵-b)=-۲b-۱$$

چون فرض کرده ایم $b\in\mathbb{R}-\{۵\}$, جمله $(۵-b)$ صفر نیست ، پس می توان بر آن تقسیم کرد و $x=\frac{-۲b-۱}{۵-b}$ بدست آورد. این همان x است که $f(x)=b$ است. پس f پوشا است. و چون f هم یک به یک است و هم پوشا ، پس دو سویه است.

۶ - تابع $\theta:\{0,۱\}\times\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ تعریف شده به صورت $\theta(a,b)=(-۱)^a b$ را در نظر بگیرید. آیا این تابع یک به یک است؟ پوشا است؟ دو سویه است؟ توضیح دهید.

پاسخ

ابتدا نشان می دهیم θ یک به یک است. فرض می کنیم $\theta(a,b)=\theta(c,d)$ باشد. پس $(-۱)^a b=(-۱)^c d$ است. چون b و d هر دو در $\mathbb{N}$ است ، پس هر دو مثبت هستند. پس چون $(-۱)^a b=(-۱)^c d$ است ، لذا $(-۱)^a$ و $(-۱)^c$ هر دو یک علامت دارند. چون هر یک از $(-۱)^a$ و $(-۱)^c$ مساوی ±۱ هستند ، پس داریم $(-۱)^a=(-۱)^c$ است. پس

$$(-۱)^a b = (-۱)^c d \Rightarrow b = d$$

اما ، $(-۱)^c = (-۱)^a$ یعنی a و c یک خصوصیات دارند. و چون $a, c \in \{0, ۱\}$ است ، نتیجه می گیریم $a = c$ است. پس $(a, b) = (c, d)$ است. لذا θ یک به یک است.

اما θ پوشا نیست. زیرا ، $\theta(a, b) = (-۱)^a b$ یا مثبت است و یا منفی ، اما هرگز صفر نیست. پس هیچ عضوی $(a, b) \in \{0, ۱\} \times \mathbb{N}$ پیدا نمی شود ، بطوری که $\theta(a, b) = 0 \in \mathbb{Z}$ باشد.

۷ - تابع $f: \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}^۲$ با تعریف $f(x, y) = (xy, x^۳)$ را در نظر بگیرید. آیا f یک به یک است؟ پوشا است؟ دو سویه است؟ توضیح دهید.

پاسخ

ملاحظه کنید که $f(0, ۱) = (0,0)$ و $f(0,0) = (0,0)$ است ، پس f **یک به یک نیست.**

برای نشان دادن f **پوشا هم نیست** ، نشان می دهیم که غیر ممکن است یک زوج مرتب (x, y) پیدا کنیم ، بطوری که $f(x, y) = (۱, 0)$ باشد. اگر چنین زوجی پیدا شود ، پس

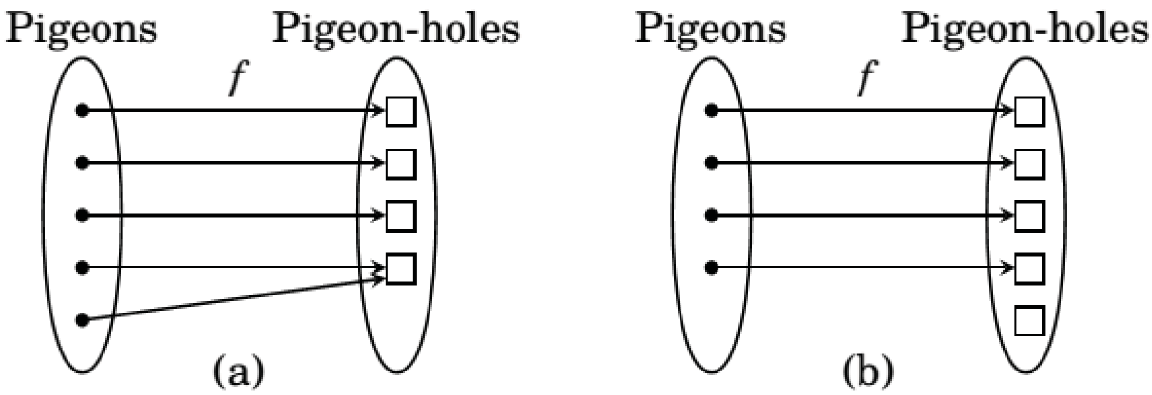
$$f(x, y) = (xy, x^۳) = (۱, 0)$$

باید به این نتیجه منجر شود که $xy = ۱$ و $x^۳ = 0$ باشد. از $x^۳ = 0$ ، نتیجه می گیریم $x = 0$ است ، پس $xy = 0$ است. این یک تناقض است.

۸.۳ ـ نگاهی مجدد به اصل لانه کبوتری The Pigeonhole Principle Revisited

یک مثال ساده اما مفید. یک مجموعه A از کبوتر ها و یک مجموعه از لانه های کبوتر را در نظر بگیرید و تصور کنید همه کبوتر ها بداخل لانه ها پرواز کنند. می توان این را به عنوان یک تابع $f: A \to B$ تصور کرد ، به این صورت که کبوتر X بداخل لانه $f(X)$ پرواز می کند. تصویر ۸.۳.۱ این موضوع را به تصویر می کشد.

تصویر ۸.۳.۱



در تصویر a.۸.۳.۱ تعداد کبوتر ها از تعداد لانه ها بیشتر است. واضح است که در این صورت حد اقل دو کبوتر مجبور هستند به یک لانه داخل شوند. یعنی f یک به یک نیست.
در تصویر b.۸.۳.۱ تعداد کبوتر ها از تعداد لانه ها کمتر است ، پس واضح است که حد اقل یک لانه خالی می ماند. یعنی f پوشا نیست.

این ایده به **اصل لانه کبوتر ی** موسوم است. اولین مرتبه اصل لانه کبوتری را در بخش ۴.۸ فصل چهارم دیدیم. اینجا ، آنرا به زبان تابع ها مجددا بیان می کنیم.

امر مسلم ۸.۳.۱ اصل لانه کبوتری "نسخه تابع"
فرض کنید A و B تابع های کران دار باشند و $f: A \to B$ یک تابع باشد. پس
اگر $|B| > |A|$ باشد ، پس f یک به یک نیست.
اگر $|B| < |A|$ باشد ، پس f پوشا نیست.

درذیل دو مثال می آوریم که برای اثبات یک مساله ، از اصل لانه کبوتری استفاده می شود.

مثال ۸.۳.۱
قضیه زیر را ثابت کنید.

قضیه ۸.۳.۱
اگر A یک مجموعه از ۱۰ عدد صحیح بین ۱ و ۱۰۰ باشد ، پس دو زیر مجموعه متفاوت $X \subseteq A$ و $Y \subseteq A$ وجود دارد بطوری که حاصل جمع اجزای X مساوی حاصل جمع اجزای Y است.

برای نشان دادن این که این قضیه چه می گوید، مجموعه تصادفی زیر را ملاحظه کنید.

$$A = \{5,7,12,11,17,50,51,80,90,100\}$$

مجموعه A شامل ۱۰ عدد صحیح بین ۱ و ۱۰۰ است. ملاحظه می کنید که A دارای زیر مجموعه های $X = \{۵, ۸۰\}$ و $Y = \{۷, ۱۱, ۱۷, ۵۰\}$ است.

حال داریم $۵ + ۸۰ = ۸۵$ و $۷ + ۱۱ + ۱۷ + ۵۰ = ۸۵$ یعنی حاصل جمع اعضای X مساوی حاصل جمع اعضای Y است.

حالا ۵ را با ۶ عوض می کنیم.

$$A = \{6,7,12,11,17,50,51,80,90,100\}$$

اینک زیر مجموعه ها عبارتند از $X = \{۷, ۱۲, ۱۷, ۵۰\}$ و $Y = \{۶, ۸۰\}$. اجزا را جمع می کنیم.

$۶ + ۸۰ = ۸۶$ و $۷ + ۱۲ + ۱۷ + ۵۰ = ۸۶$

قضیه می گوید این همیشه ممکن است ، مهم نیست A چه باشد.

اثبات

همان طور که در صورت قضیه گفته شد ، فرض می کنیم $A \subseteq \{۱, ۲, ۳, ۴, \cdots, ۹۹, ۱۰۰\}$ باشد و $|A| = ۱۰$. اگر $X \subseteq A$ باشد ، پس X بیش از ۱۰ عنصر ندارد. هر کدام از این عناصر بین ۱ و ۱۰۰ هستند و لذا حاصل جمع تمام عناصر X کمتر از $۱۰۰۰ = ۱۰ * ۱۰۰$ است. تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f : \mathscr{P}(A) \to \{0,1,2,3,4,\ldots,1000\}$$

در تابع بالا $f(X)$ حاصل جمع اعضای X است. مثلا $f(\{۳, ۷, ۵۰\}) = ۶۰$ ؛ همچنین $f(\{۱, ۷۰, ۸۰, ۹۵\}) = ۲۴۶$ است. چون

$$|\mathscr{P}(A)| = 2^{10} = 1024 > 1001 = \left|\{0,1,2,3,\ldots,1000\}\right|$$

است ، پس بر اساس اصل لانه کبوتری f یک به یک نیست. لذا دو مجموعه نا مساوی

$$X, Y \in \mathscr{P}(A)$$

وجود دارد بطوری که $f(X) = f(Y)$ است. به عبارت دیگر، زیر مجموعه های $X \subseteq A$ ، و $Y \subseteq A$ وجود دارند ، بطوری که حاصل جمع عناصر X مساوی حاصل جمع عناصر Y است.

مثال ۸.۳.۲

قضیه زیر را ثابت کنید.

قضیه ۸.۳.۲

حد اقل دو نفر در استان تهران وجود دارد که تعداد موی های سر آنها با هم مساوی است.

فرض می کنیم جمعیت تهران و حومه بیش از دوازده میلیون نفر باشد.

این حقیقت تقریبا از نظر بیولوژیکی آشکار شده است که تعداد مو های سر هر انسان کمتر از یک میلیون است.

اثبات

فرض می کنیم A مجموعه تمام تهرانی ها باشد. و فرض می کنیم $B = \{0, ۱, ۲, \cdots, ۱\,۰۰۰۰۰۰\}$
فرض می کنیم $f; A \to B$ تابعی باشد، بطوری که $f(x)$ مساوی تعداد مو های سر x باشد. چون $|A| > |B|$ است ، بر اساس اصل لانه کبوتری ، f یک به یک نیست. پس دو تهرانی x و y وجود دارند ، بطوری که $f(x) = f(y)$ است. یعنی تعداد موی های سر آنها با هم مساوی است.
اثبات از طریق اصل لانه کبوتری ، یک اثبات ساختاری نیست. قضیه بالا صریحا نمی گوید تعداد موی های سر دو تهرانی مساوی است ، بلکه فقط نشان می دهد که چنین افرادی وجود دارند. اگر بخواهیم صریحا اثبات کنیم ، مثلا می توانیم دو نفر تاس رامثال بزنیم. تعداد مو های دو نفر تاس مساوی صفر است.

تمرینات ۸.۳

۱ ـ ثابت کنید اگر بطور تصادفی ، شش عدد صحیح انتخاب کنیم ، حد اقل دو عدد وجود دارد بطوری که اگر آنها را بر ۵ تقسیم کنیم باقیمانده مساوی دارند.

۲ ـ ثابت کنید اگر بطور تصادفی ، شش عدد طبیعی انتخاب کنیم ، پس مجموع یا تفاضل دو تا از آنها بر ۹ بخش پذیر است.

۳ ـ ثابت کنید هر مجموعه ای از هفت عدد طبیعی شامل دو عدد است که مجموع یا اختلاف آنها بر ۱۰ بخش پذیر است.

پاسخ تمرینات ۸.۳

۱ ـ ثابت کنید اگر بطور تصادفی ، شش عدد صحیح انتخاب کنیم ، حد اقل دو عدد وجود دارد بطوری که اگر آنها را بر ۵ تقسیم کنیم، باقیمانده مساوی دارند.

پاسخ

مجموعه $\mathbb{Z}$ را بصورت زیر می نویسیم.

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{j=0}^{۴} \{۵k + j : k \in \mathbb{Z}\}$$

عبارت بالا یک افراز $\mathbb{Z}$ است در ۵ مجموعه. اگر شش عدد صحیح را بطور تصادفی انتخاب کنیم .بر اساس اصل لانه کبوتری ، حد اقل دو تا از آنها در یک مجموعه خواهند بود. اما ، هر مجموعه مربوط است به با قیمانده یک عدد بعد از تقسیم بر ۵. مثلا ، $\{۵k + ۱ : k \in \mathbb{Z}\}$ تمام اعداد صحیحی است که باقیمانده ۱ دارند بعد از تقسیم بر ۵.

۲ ـ ثابت کنید اگر بطور تصادفی ، شش عدد طبیعی انتخاب کنیم ، پس مجموع یا تفاضل دو تا از آنها بر ۹ بخش پذیر است.

پاسخ

اگر برای دو عدد صحیح n, m داشته باشیم $n \equiv m(mod\ ۹)$ پس $n - m \equiv 0(mod\ ۹)$

است ، و لذا کار ما انجام شده است. پس فرض می کنیم چنین نباشد. ملاحظه می کنید تنها زیر مجموعه های دو عضوی اعداد صحیح مثبت که مجموع آنها ۹ باشد ، عبارتند از $(۴,۵),\{۳,۶\},\{۲,۷\},\{۱,۸\}$ اما، چون حد اقل پنج تا از شش اعداد صحیح $\{۱,۲,\cdots,۸\}$ باید باقیمانده های متفاوت داشته باشند ، بر اساس اصل لانه کبوتری ، دو عدد صحیح n, m در یک مجموعه هستند. پس داریم.

$$n + m \equiv 0 (mod\ ۹)$$

۳ ـ ثابت کنید هر مجموعه ای از هفت عدد طبیعی شامل دو عدد است که مجموع یا اختلاف آنها بر ۱۰ بخش پذیر است.

پاسخ

فرض می کنیم $S = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵, a_۶, a_۷\}$ یک مجموعه از ۷ عدد طبیعی باشد. و فرض می کنیم $a_۱ < a_۲ < a_۳ < \cdots < a_۷$ باشد. مجموعه زیر را ملاحظه کنید.

$$\begin{aligned} A \quad = \quad \{&a_1 - a_2, a_1 - a_3, a_1 - a_4, a_1 - a_5, a_1 - a_6, a_1 - a_7, \\ &a_1 + a_2, a_1 + a_3, a_1 + a_4, a_1 + a_5, a_1 + a_6, a_1 + a_7\} \end{aligned}$$

پس $|A| = ۱۲$ است. حالا فرض می کنیم $B = \{0, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ باشد پس $|B| = ۱۰$ است. فرض می کنیم $f: A \to B$ تابعی باشد بطوری که $f(n)$ مساوی آخرین رقم n باشد. مثلا $f(۹۷) = ۷$ یا $f(۱۲) = ۲$ یا $f(۲۳۰) = 0$ و غیرو.

پس چون $|A| > |B|$ است ، اصل لانه کبوتری تضمین می کند که f یک به یک نیست. پس A شامل عناصر $a_۱ \pm a_i$ و $a_۱ \pm a_j$ است بطوری که $f(a_۱ \pm a_i) = f(a_۱ \pm a_j)$ است. این یعنی آخرین رقم $a_۱ \pm a_i$ مانند آخرین رقم $a_۱ \pm a_j$ است. پس ، آخرین رقم تفاضل

$$(a_۱ \pm a_i) - (a_۱ \pm a_j) = \pm a_i \pm a_j$$

صفر است. لذا $\pm a_i \pm a_j$ مجموع یا تفاضل اعضای S است که بر ۱۰ بخش پذیر است.

۸.۴ - ترکیب تابع ها Composition of Functions

باید با ترکیب تابع ها اشنا باشد. اما ، لازم است نگاهی مجدد به آن داشته باشیم.

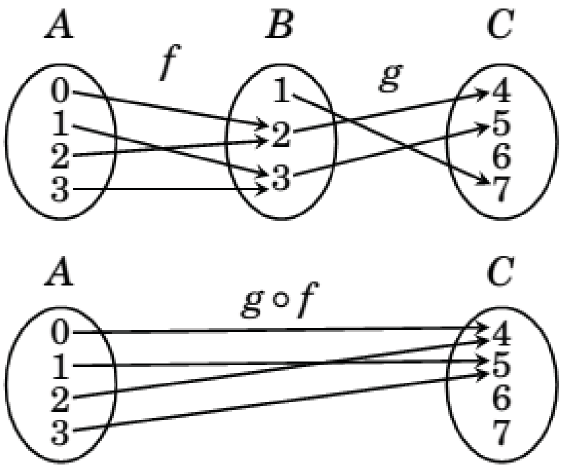
تعریف ۸.۴.۱
فرض می کنیم $f: A \to B$ و $g: B \to C$ تابع هایی باشند با این خصوصیات که هم دامنه f, دامنه g باشد. **ترکیب** f با g یک تابع دیگر است که با نماد $g \circ f$ نشان داده می شود و مطابق زیر تعریف می شود. اگر $x \in A$ باشد ، پس

$$g \circ f = g\big(f(x)\big)$$

است. پس $g \circ f$ اعضای A را به اعضای C می فرستد. پس $g \circ f: A \to C$

تصویر ۸.۴.۱ تعریف بالا را به تصویر می کشد.

تصویر ۸.۴.۱



در تصویر بالا ، $f: A \to B$, و $g: B \to C$ و $g \circ f: A \to C$ است. مثلا داریم

$$g \circ f(0) = g\big(f(0)\big) = g(۲) = ۴$$

به ترتیب نماد ها دقت کنید. گر چه g در نماد $g \circ f$ اول می آید ، $g \circ f(x)$ را به صورت $g\big(f(x)\big)$ عمل می کنیم ، یعنی f روی x عمل می کند بعد g روی $f(x)$ عمل می کند.

توجه کنید که در ترکیب $g \circ f$, برد f یک زیر مجموعه دامنه g است.

مثال ۸.۴.۱
فرض کنید $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{0, ۱\}$ و $C = \{۱, ۲, ۳\}$ باشد. همچنین فرض کنید
$f: A \to B$ تابع $f = \{(a, 0), (b, ۱), (c, 0)\}$ و $g: B \to C$ تابع $g = \{(0, ۳), (۱, ۱)\}$ باشد.
پس $g \circ f = \{(a, ۳), (b, ۱), (c, ۳)\}$ است.

مثال ۸.۴.۲

فرض کنید $A = \{a, b, c\}$ و $B = \{0, ۱\}$ و $C = \{۱, ۲, ۳\}$ باشد. فرض کنید $f: A \to B$ تابع $f = \{(a, 0), (b, ۱), (c, 0)\}$ و $g: C \to B$ تابع $g = \{(۱, 0), (۲, ۱), (۳, ۱)\}$ باشد. در این صورت $g \circ f$ تعریف شده نیست ، زیرا هم دامنه f یعنی B مساوی دامنه g یعنی C نیست.

بخاطر داشته باشید که برای این که $g \circ f$ مفهوم داشته باشد ، هم دامنه f باید **مساوی** دامنه g باشد. و یا حد اقل یک زیر مجموعه آن باشد.

مثال ۸.۴.۳

فرض کنید $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعریف شده به صورت $f = x^۲ + x$ و $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تعریف شده به صورت $g(x) = x + ۱$ باشند. پس $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی است که به صورت زیر تعریف شده.

$$g \circ f = g(f(x)) = g\left(x^۲ + x\right) = x^۲ + x + ۱$$

چون دامنه ها و هم دامنه های g و f یکی هستند ، در این حالت می توانیم ترکیب را به ترتیب دیگر انجام دهیم. ملاحظه می کنید که $f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$f \circ g = f(g(x)) = f(x + ۱) = (x + ۱)^۲ + (x + ۱) = x^۲ + ۳x + ۲$$

این مثال نشان می دهد که ، گر چه $f \circ g$ و $g \circ f$ هر دو تعریف شده هستند الزاما مساوی نیستند.
می توانیم این حقیقت را این طور بیان کنیم که ترکیب تابع ، جا به جا پذیر نیست.

Function composition is not commutative

اما نشان خواهیم داد که ترکیب تابع شرکت پذیر است. Associative

قضیه ۸.۴.۱

ترکیب تابع ها شرکت پذیر است. یعنی اگر $f: A \to B$ و $g: B \to C$ و $h: C \to D$ باشند ، پس $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ است.

اثبات

فرض می کنیم f, g, h همانطور که در قضیه گفته شده ، باشند. بر اساس تعریف ۸.۴.۱ هم $h \circ (g \circ f)$ و هم $(h \circ g) \circ f$ تابع هایی از A به D هستند. برای این که نشان دهیم آنها مساوی هستند ، باید نشان دهیم برای هر $x \in A$

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

است. توجد دارید که تعریف ۸.۴.۱ می گوید

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h\left(g(f(x))\right)$$

همچنین

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h(g \circ f(x)) = h\left(g(f(x))\right)$$

پس

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$$

چون هر دو طرف مساوی $h\left(g(f(x))\right)$ هستند.

قضیه ۸.۴.۲
فرض کنید $f: A \to B$ و $g: B \to C$ باشند. اگر هم f و هم g یک به یک باشند ، پس $g \circ f$ یک به یک است. اگر هم f و هم g پوشا باشند ، پس $g \circ f$ پوشا است.

اثبات
ابتدا فرض می کنیم f و g یک به یک باشند. برای این که ببینیم $g \circ f$ یک به یک است ، باید نشان دهیم که $g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y$ است. فرض می کنیم $g \circ f(x) = g \circ f(y)$ باشد. این یعنی $g\big(f(x)\big) = g\big(f(y)\big)$ است. پس نتیجه می شود $f(x) = f(y)$ است. در غیر این صورت g یک به یک نیست. اما ، چون $f(x) = f(y)$ و f یک به یک است ، پس باید $x = y$ باشد. لذا $g \circ f$ یک به یک است.
حالا ، فرض می کنیم هم f و هم g پوشا باشند. برای این که ببینیم $g \circ f$ پوشا است ، باید نشان دهیم برای هر عضو $c \in C$, یک عضو متناظر $a \in A$ وجود دارد ، بطوری که $g \circ f(a) = c$ است. پس یک $c \in C$ بطور تصادفی در نظر بگیرید. چون g پوشا است ، پس یک عضو $b \in B$ وجود دارد ، بطوری که $g(b) = c$ است. و چون f پوشا است ، پس یک $a \in A$ وجود دارد ، بطوری که $f(a) = b$ است. پس $g\big(f(a)\big) = g(b) = c$, یعنی $g \circ f(a) = c$. لذا $g \circ f$ پوشا است.

تمرینات ۸.۴

۱ - فرض کنید $A = \{۵, ۶, ۸\}$ ، و $B = \{0, ۱\}$ ، و $C = \{۱, ۲, ۳\}$ باشد. فرض کنید $f: A \to B$ تابع $f = \{(۵, ۱), (۶, 0), (۸, ۱)\}$ و $g: B \to C$ تابع $g = \{(0, ۱), (۱, ۱)\}$ باشد. $g \circ f$ را پیدا کنید.

۲ - فرض $A = \{۱, ۲, ۳\}$ باشد. فرض کنید $f: A \to B$ تابع $f = \{(۱, ۲), (۲, ۲), (۳, ۱)\}$ و $g: A \to A$ تابع $g = \{(۱, ۳), (۲, ۱), (۳, ۲)\}$ باشد. $f \circ g$ و $g \circ f$ را پیدا کنید.

۳ - تابع های $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ که به صورت $f(x) = \sqrt[۳]{x + ۱}$ و $g(x) = x^{۳}$ تعریف شده اند را در نظر بگیرید. فرمول ها یی برای $g \circ f$ و $f \circ g$ پیدا کنید.

۴ - تابع $f, g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ که به صورت $f(m, n) = \left(mn, m^{۲}\right)$ و

$$g(m, n) = (m + ۱, m + n)$$

تعریف شده اندرا در نظر بگیرید. فرمول هایی برای $f \circ g$ و $g \circ f$ پیدا کنید.

۵ - تابع های $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ که به صورت $f(m, n) = m + n$ و $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ که به صورت $g(m) = (m, m)$ تعریف شده اند در نظر بگیرید. فرمول هایی برای $g \circ f$ و $f \circ g$ پیدا کنید.

پاسخ تمرینات ۸.۴

۱ - فرض کنید $A = \{۵, ۶, ۸\}$, و $B = \{0, ۱\}$, و $C = \{۱, ۲, ۳\}$ باشد. فرض کنید $f: A \to B$ تابع $f = \{(۵, ۱), (۶, 0), (۸, ۱)\}$ و $g: B \to C$ تابع $g = \{(0, ۱), (۱, ۱)\}$ باشد. $g \circ f$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$g \circ f = \{(۵, ۱), (۶, ۱), (۸, ۱)\}$$

۲ - فرض $A = \{۱, ۲, ۳\}$ باشد. فرض کنید $f: A \to B$ تابع $f = \{(۱, ۲), (۲, ۲), (۳, ۱)\}$ و $g: A \to A$ تابع $g = \{(۱, ۳), (۲, ۱), (۳, ۲)\}$ باشد. $f \circ g$ و $g \circ f$ را پیدا کنید.

پاسخ

$$g \circ f = \{(۱, ۱), (۲, ۱), (۳, ۳)\}؛ \quad f \circ g = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۲)\}$$

۳ - تابع های $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ که به صورت $f(x) = \sqrt[۳]{x + ۱}$ و $g(x) = x^۳$ تعریف شده اند را در نظر بگیرید. فرمول ها یی برای $g \circ f$ و $f \circ g$ پیدا کنید.

پاسخ

$$g \circ f(x) = x + ۱ ؛ \quad f \circ g(x) = \sqrt[۳]{x^۳ + ۱}$$

۴ - تابع $f, g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ که به صورت $f(m, n) = (mn, m^۲)$ و

$$g(m, n) = (m + ۱, m + n)$$

تعریف شده اندرا در نظر بگیرید. فرمول هایی برای $g \circ f$ و $f \circ g$ پیدا کنید.

پاسخ

ملاحظه می کنید که

$$g \circ f(m, n) = g(f(m, n)) = g(mn, m^۲) = (mn + ۱, mn + m^۲)$$

پس

$$g \circ f(m, n) = (mn + ۱, mn + m^۲)$$

هچنین ملاحظه می کنید که

$$f \circ g(m, n) = f(g(m, n)) = f(m + ۱, m + n) = \left((m + ۱)(m + n), (m + ۱)^۲\right)$$

پس

$$f \circ g(m, n) = (m^۲ + mn + m + n, m^۲ + ۲m + ۱)$$

۵ - تابع های $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ که به صورت $f(m,n) = m + n$ و $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ که به صورت $g(m) = (m,m)$ تعریف شده اند در نظر بگیرید. فرمول هایی برای $g \circ f$ و $f \circ g$ پیدا کنید.

پاسخ

$$g \circ f(m,n) = (m+n, m+n)$$
$$f \circ g(m) = ۲m$$

۸.۵ - تابع های وارون Inverse Functions

حتما به خاطر دارید که در حسابان گفتیم اگر یک تابع یک به یک و پوشا باشد ، پس یک تابع وارون f^{-1} دارد. این تابع وارون اثر f به حالت اول بر می گرداند. یعنی $f^{-1}(f(x)) = x$ است برای هر x در دامنه. مثلا اگر $f(x) = x^3$ باشد ، پس $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ است. این ایده را مجددا بر رسی می کنیم.

تعریف ۸.۵.۱
اگر A ، یک مجموعه باشد ، **تابع همانی The Identity Function** روی A, تابع $i_A: A \to A$ است با تعریف $i_A(x) = x$ برای هر $x \in A$ ·

مثلا اگر $A = \{1,2,3\}$ باشد ، پس $i_A = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ است. هچنین داریم.

$$i_{\mathbb{Z}} = \{(n,n): n \in \mathbb{Z}\}$$

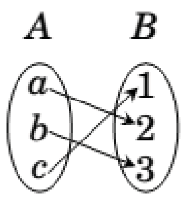
تابع همانی روی یک مجموعه ، تابعی است که هر عضو مجموعه را به خودش می فرستد.

ملاحظه می کنید که برای هر مجموعه A, تابع همانی i_A دو سویه است. این تابع دو یک به یک است زیرا $i_A(x) = i_A(y)$ فورا به $x = y$ کاهش پیدا می کند. این تابع پوشا است ، زیرا اگر هر عضو b را در هم دامنه A انتخاب کنیم ، پس b در دامنه A هم هست و $i_A(b) = b$ است.

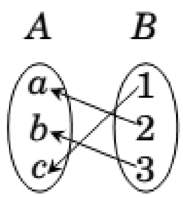
تعریف ۸.۵.۲
اگر R یک رابطه از A به B باشد ، **رابطه وارون Inverse Relation** R عبارت است از رابطه B به A تعریف شده به صورت $R^{-1} = \{(x,y): (x,y) \in R\}$ · به عبارت دیگر ، وارون R رابطه R^{-1} است که با جا بجا یی عناصر در هر زوج مرتب در R بدست می آید.

مثلا ، فرض کنید $A = \{a,b,c\}$ و $B = (1,2,3)$ باشد و فرض کنید f رابطه $f = \{(a,2),(b,3),(c,1)\}$ از A به B باشد. پس $f^{-1} = \{(2,a),(3,b),(1,c)\}$ است ، و این یک رابطه از B به A است. توجه کنید که f در حقیقت یک تابع از A به B است ، و f^{-1} یک تابع از B به A است. این دو رابطه در تصویر ۸.۵.۱ نشان داده شده است.

تصویر ۸.۵.۱



$f = \{(a,2),(b,3),(c,1)\}$



$f^{-1} = \{(2,a),(3,b),(1,c)\}$

ملاحظه می کنید که تصویررابطه f^{-1} عینا شبیه تصویر f است که جهت بردار ها وارون شده است.

مثال دگر ، فرض کنید A و B همان مجموعه های بالا باشند ، اما $g = \{(a,۲),(b,۳),(c,۳)\}$ رابطه از A به B باشد. پس $g^{-۱} = \{(۲,a),(۳,b),(۳,c)\}$ یک رابطه از B به A است.
این دو رابطه ها در تصویر ۸.۵.۲ تصویرشده اند.

تصویر ۸.۵.۲

$g = \{(a,2),(b,3),(c,3)\}$ $\qquad$ $g^{-1} = \{(2,a),(3,b),(3,c)\}$

این مرتبه ، گر چه رابطه g یک تابع است ، اما $g^{-۱}$ یک تابع نیست ، زیرا عنصر ۳ , دو مرتبه به عنوان اولین مختص یک زوج مرتب در $g^{-۱}$ تکرار شده است.

در مثال های بالا ، رابطه های f و g هر دو ، تابع هستند ، و $f^{-۱}$ یک تابع است و $g^{-۱}$ تابع نیست. این یک سوال پیش می آورد. چه خصوصیتی f دارد و g فاقد آن است ، که $f^{-۱}$ را تابع می کند و $g^{-۱}$ را تابع نمی‌کند؟ پاسخ مشکل نیست. تابع g یک به یک نیست ، زیرا
$g(b) = g(c) = ۳$, و لذا $(b,۳)$ و $(c,۳)$ هر دو در g هستند. این برای $g^{-۱}$ مساله ایجاد می کند ، زیرا این یعنی $(۳,b)$ و $(۳,c)$ هر دو در $g^{-۱}$ هستند ، پس $g^{-۱}$ نمی تواند یک تابع باشد.
پس برای این که $g^{-۱}$ یک تابع باشد ، باید g یک به یک باشد.

اما این کافی نیست. تابع g پوشا هم نیست. زیرا هیچ عضوی از A به عضو $۱ \in B$ فرستاده نمی شود. این یعنی $g^{-۱}$ شامل هیچ زوج مرتبی که مختص اول آن ۱ باشد ، نیست، پس نمی تواند یک تابع از B به A باشد. اگر قرار است $g^{-۱}$ یک تابع باشد ، لازم است g پوشا باشد.

دو پاراگراف بالا نشان می دهد اگر g یک تابع باشد ، پس باید دو سویه باشد ، تا رابطه وارون آن $g^{-۱}$ یک تابع باشد. بر عکس اگر یک تابع دو سویه باشد ، پس رابطه وارون آن یک تابع است.

قضیه ۸.۵.۲

فرض می کنیم $f: A \to B$ یک تابع باشد. پس f دوسویه است اگر و فقط اگر تابع وارون $f^{-۱}$ یک تابع از B به A باشد.

اثبات

فرض می کنیم $f: A \to B$ دو سویه باشد. ، پس بر اساس قضیه ، $f^{-۱}$ یک تابع است. ملاحظه می کنید که رابطه f شامل کلیه زوج های $(x, f(x))$ است برای $x \in A$, پس $f^{-۱}$ شامل کلیه زوج های $(f(x), x)$ است. اما $(f(x), x) \in f^{-۱}$ یعنی $f^{-۱}(f(x)) = x$ است.لذا داریم

$f^{-1} \circ f(x) = x$ است برای هر $x \in A$ ، پس نتیجه می گیریم $f^{-1} \circ f = i_A$. با همین استدلال نتیجه می گیریم $f \circ f^{-1} = i_B$ است. و این موضوع به تعریف زیر می رسیم.

تعریف ۸.۵.۳
اگر $f: A \to B$ دو سویه باشد ، پس **وارون** آن تابع $f^{-1}: B \to A$ است. تابع های f و f^{-1} از تساوی های $f^{-1} \circ f = i_A$ و $f \circ f^{-1} = i_B$ تبعیت می کنند.

مثال ۸.۵.۱
تابع $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ که به صورت $f(x) = x^۳ + ۱$ تعریف شده ، دو سویه است. وارون آنرا پیدا کنید.
پاسخ
با $y = x^۳ + ۱$ شروع می کنیم. حالا جای متغیر ها را عوض می کنیم. پس داریم. $x = y^۳ + ۱$.
معادله بدست آمده را برای y حل می کنیم. داریم. $y = \sqrt[۳]{x - ۱}$ پس

$$f^{-1}(x) = \sqrt[۳]{x - ۱}$$

است. می توانیم پاسخ را امتحان کنیم.

$$f^{-1}(f(x)) = \sqrt[۳]{f(x) - ۱} = \sqrt[۳]{x^۳ + ۱ - ۱} = x$$

لذا $f^{-1}(f(x)) = x$ است. هر پاسخ دیگری بجز x دلالت می کند که اشتباه کرده ایم.

در مثال ۸.۲.۲ بخش ۸.۲ نشان دادیم که تابع $g: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ تعریف شده به صورت $g(m,n) = (m + n, m + ۲n)$ دو سویه است. می خواهیم وارون آنرا پید کنیم. روش بالا باید کار کند ، اما باید مواظب تغییر مختصات در $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ باشیم. با $(x,y) = g(m,n)$ شروع می کنیم ، سپس متقییر های (x,y) و (m,n) را جا بجا می کنیم. پس داریم $(m,n) = g(x,y)$. پس داریم.

$$(m,n) = (x + y, x + ۲y)$$

از تساوی بالا ، سیستم معادلات زیر را بدست می آوریم.

$$x + y = m$$
$$x + ۲y = n$$

با استفاده از روش هایی که در جبر دیدیدم ، سیستم را حل می کنیم ، پس داریم.

$$x = ۲m - n$$
$$y = n - m$$

پس $(x,y) = (۲m - n, n - m)$, لذ اداریم $g^{-1} = (m,n) = (۲m - n, n - m)$

پاسخ را چک می کنیم.

$$g^{-1}\big(g(m,n)\big) = g^{-1}(m+n, m+2n)$$
$$= \big(2(m+n)-(m+2n), (m+2n)-(m+n)\big)$$
$$= (m,n)$$

تمرینات ۸.۵

۱ - چک کنید که تابع $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ تعریف شده به صورت $f(n)=6-n$ دو سویه است. سپس f^{-1} را محاسبه کنید.

۲ - فرض کنید $B=\left\{2^n : n\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\cdots,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,4.8,\cdots\right\}$ باشد. نشان دهید $f:\mathbb{Z}\to B$ تعریف شده به صورت $f(n)=2^n$, دو سویه است. سپس f^{-1} را پیدا کنید.

۳ - تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریف شده به صورت $f(x)=\pi x-e$ دو سویه است. وارون آنرا پیدا کنید.

۴ - نشان دهید $f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ تعریف شده به صورت $f(x,y)=\left(\left(x^2+1\right)y, x^3\right)$ دو سویه است. سپس وارون آنرا پیدا کنید.

۵ - تابع $f:\mathbb{R}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که به صورت $f(x,y)=\left(y, 3xy\right)$ تعریف شده است. چک کنید این تابع دو سویه است ؛ وارون آنرا پیدا کنید.

پاسخ تمرینات ۸.۵

۱ - چک کنید که تابع $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ تعریف شده به صورت $f(n)=6-n$ دو سویه است. سپس f^{-1} را محاسبه کنید.

پاسخ

این تابع یک به یک است. فرض می کنیم $f(m)=f(n)$ باشد. پس $6-m=6-n$ است. پس $m=n$ است.

این تابع پوشا است. اگر $b\in\mathbb{Z}$ باشد ، پس $f\left(6-b\right)=6-\left(6-b\right)=b$ ۰

وارون $f^{-1}(n)=6-n$ است.

۲ - فرض کنید $B=\left\{2^n : n\in\mathbb{Z}\right\}=\left\{\cdots,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,4.8,\cdots\right\}$ باشد. نشان دهید $f:\mathbb{Z}\to B$ تعریف شده به صورت $f(n)=2^n$, دو سویه است. سپس f^{-1} را پیدا کنید.

پاسخ

این تابع یک به یک است. فرض می کنیم $f(m)=f(n)$ باشد ، یعنی $۲^{m}=۲^{n}$ است. لگاریتم دو طرف می گیریم ، پس داریم $\log_۲\left(۲^{m}\right)=\log_۲\left(۲^{n}\right)$ یعنی داریم $m=n$ است.
این تابع پوشا است. فرض می کنیم $b\in B$ باشد. بر اساس تعریف B این یعنی $b=۲^{n}$ است برای یک $n\in\mathbb{Z}$، پس $f(n)=۲^{n}=b$ است.
وارون این تابع $f^{-۱}(n)=\log_۲(n)$

۳ - تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ تعریف شده به صورت $f(x)=\pi\, x-e$ دو سویه است. وارون آنرا پیدا کنید.
پاسخ

$$f^{-۱}(x)=\frac{x+e}{\pi}$$

۴ - نشان دهید تابع $f:\ \mathbb{R}^۲\to\mathbb{R}^۲$ تعریف شده به صورت $f(x,y)=\left(\left(x^۲+۱\right)y,x^۳\right)$ دو سویه است. سپس وارون آنرا پیدا کنید.
پاسخ
ابتدا ثابت می کنیم تابع یک به یک است. فرض می کنیم $f\left(x_۱,y_۱\right)=f\left(x_۲,y_۲\right)$ باشد. پس داریم $\left(x_۱^۲+۱\right)y_۱=\left(x_۲^۲+۱\right)y_۲$ و $x_۱^۳=x_۲^۳$ است. چون تابع حقیقی مقدار $f(x)=x^۳$ یک به یک است ، پس $x_۱=x_۲$ است. چون $x_۱=x_۲$ و $x_۱^۲+۱>0$ است ، پس می توانیم هر دو طرف $\left(x_۱^۲+۱\right)y_۱=\left(x_۱^۲+۱\right)y_۲$ را بر $\left(x_۱^۲+۱\right)$ تقسیم کنیم تا $y_۱=y_۲$ بدست آوریم. لذا $\left(x_۱,y_۱\right)=\left(x_۲,y_۲\right)$ است.
حالا ثابت می کنیم این تابع پوشا است. فرض می کنیم $(a,b)\in\mathbb{R}^۲$ باشد. پس فرض می کنیم $x=b^{\frac{۱}{۳}}$ و $y=\frac{a}{b^{\frac{۲}{۳}}+۱}$ باشد ، پس

$$f(x,y)=\left(\left(b^{\frac{۲}{۳}}+۱\right)\frac{a}{b^{\frac{۲}{۳}+۱}},\left(b^{\frac{۱}{۳}}\right)^۳\right)=(a,b)$$

پس f دو سویه است. در نهایت وارون تابع را محاسبه می کنیم. می نویسیم $f(x,y)=(u,v)$، متغییر ها را جابجا می کنیم.
$(x,y)=f(u,v)=\left(\left(u^۲+۱\right)v,u^۳\right)$, پس داریم $x=\left(u^۲+۱\right)v$ و $y=u^۳$ ، لذا $u=y^{\frac{۱}{۳}}$ و $v=\frac{x}{y^{\frac{۲}{۳}}+۱}$ است. در نتیجه

$$f^{-1}(x,y)=(u,v)=\left(y^{\frac{1}{3}},\frac{x}{y^{\frac{2}{3}}+1}\right)$$

۵ - تابع $f:\mathbb{R}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}\times\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که به صورت $f(x,y)=(y,3xy)$ تعریف شده است. چک کنید این تابع دو سویه است ؛ وارون آنرا پیدا کنید.

پاسخ

برای این که ببینیم این تابع یک به یک است ، فرض می کنیم $f(a,b)=f(c,d)$ باشد ، این یعنی $(b,3ab)=(d,3cd)$ است. چون مختصات اول باید مساوی باشند ، پس داریم $b=d$. چون مختصات دوم مساوی هستند ، پس داریم $3ab=3dc$, این یعنی $3ab=3bc$. توجه دارید که بر اساس تعریف f داریم $b\in\mathbb{N}$ پس $b\neq 0$ است. پس می توانیم طرفین $3ab=3bc$ را بر $3b$ تقسیم کنیم تا $a=c$ بدست آوریم. حالا داریم $a=c$ و $b=d$ پس $(a,b)=(c,d)$ است.
لذا f یک به یک است.

حالا چک می کنیم که f پوشا است. برای هر (b,c) در هم دامنه $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$ ملاحظه می‌کنید که $\left(\frac{c}{3b},b\right)$ به دامنه $\mathbb{R}\times\mathbb{N}$ تعلق دارد ، و $f\left(\frac{c}{3b},b\right)=(b,c)$ است. پس f پوشا است.

چون تابع هم یک به یک است و هم پوشا است ، پس دو سویه است و لذا وارون دارد.

برای پیدا کردن وارون ، بخاطر بیاورید که $f\left(\frac{c}{3b},b\right)=(b,c)$ بدست آوردیم. پس داریم

$$f^{-1}f\left(\frac{c}{3b},b\right)=f^{-1}(b,c)$$

که به صورت زیر کاهش پیدا می کند.

$$\left(\frac{c}{3b},b\right)=f^{-1}(b,c)$$

با جا بجا کردن b و c با x و y داریم.

$$f^{-1}(x,y)=\left(\frac{y}{3x},x\right)$$