# فصل هفتم
# رابطه ها
# Relations
## بخش اول
## رابطه چیست ؟
## What is Relation?

در ریاضیات طرق مختلفی وجود دارد که نشان دهیم دو شئی به یکدیگر مربوط هستند. به گزاره های زیر توجه کنید.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $5<10$ | $5\leq 5$ | $6=\frac{30}{5}$ | $5\mid 80$ | $7>4$ | $x\neq y$ | $8\nmid 3$ |
| $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)$ | $6\in \mathbb{Z}$ | $X\subseteq Y$ | $\pi\approx 3.14$ | $0\geq -1$ | $\sqrt{2}\notin \mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z}\not\subseteq \mathbb{N}$ |

یاد آوری : $a\equiv b(mod\ m)$ خوانده می شود عدد $a$ به پیمانه یا سنجش $m$ با $b$ همنهشت است. و یا $m|(a-b)$ یا به عبارت دیگر اگر $a-b$ را بر $m$ تقسیم کنیم ، باقیمانده صفر است. و یا $a-b$ بر $m$ بخش پذیر است. مثلا $۷|(۳۰-۹)$ زیرا اگر ۲۱ را بر ۷ تقسیم کنیم ، باقیمانده صفر است.

در مثال های بالا ، هر یک از دو شئی در طرفین یک نماد قرار می گیرند. این نماد ها یک ارتباط بین دو شئی بر قرار می کنند. نماد های $<,\leq,=,|,>,\in,\notin,\cdots$ رابطه ها نامیده می شوند ، زیرا بین دو شئی رابطه بوجود می آورند.

رابطه ها در ریاضیات مهم هستند. در حقیقت می توان گفت ، اگر رابطه ها را از ریاضیات حذف کنیم ، دیگر موضوع مهمی باقی نمی ماند که مورد بحث قرار گیرد.

### ۷.۱ ـ رابطه چیست؟

**تعریف** ۷.۱.۱
**یک رابطه** در یک مجموعه $A$ عبارت است از یک زیر مجموعه $R\subseteq A\times A$ است. به خاطر بیاورید که گفتیم $A\times B$ ضرب دکارتی دو مجموعه است. اینجا ضرب دکارتی مجموعه $A$ در خودش.
برای این که بگوییم $(x,y)\in R$ بطور خلاصه می نویسیم $xRy$
برای این که بگوییم $(x,y)\notin R$ بطور خلاصه می نویسیم $x \not R\, y.$

توجه داشته باشید که ، یک رابطه یک مجموعه است ، پس آنچه درمورد مجموعه می دانیم ، می توانیم در مورد رابطه بکار بریم. قبل از بحث بیشتر در مورد رابطه ، چند مثال می آوریم.

**مثال** ۷.۱.۱
فرض می کنیم $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ باشد. ومجموعه زیر را هم در نظر بگیرید.

$$R=\{(۱,۱),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۳,۲),(۳,۱),(۴,۴),(۴,۳),(۴,۲),(۴,۱)\}\subseteq A\times A$$

بر اساس تعریف ۷.۱.۱ مجموعه $R$ یک رابطه روی $A$ است. چون $(۱,۱)\in R$ است ، پس داریم $۱R۱$ همچنین $۲R۱$ و $۲E۲$ است. اما $(۳,۴)\notin R$ پس $3\not R 4$
ملاحظه می کنید که $R$ همان رابطه $\geq$ برای مجموعه $A$ است.

در فصل دوم ادعا کردیم که همه ریاضیات می تواند بوسیله مجموعه ها ، توصیف کرد.

**یاد آوری** ضرب دکرتی مجموعه $A$ بالا به صورت زیر است.

| | ۱ | ۲ | ۳ | ۴ |
|---|---|---|---|---|
| ۱ | $(۱,۱)$ | $(۱,۲)$ | $(۱,۳)$ | $(۱,۴)$ |
| ۲ | $(۲,۱)$ | $(۲,۲)$ | $(۲,۳)$ | $(۲,۴)$ |
| ۳ | $(۳,۱)$ | $(۳,۲)$ | $(۳,۳)$ | $(۳,۴)$ |
| ۴ | $(۴,۱)$ | $(۴,۲)$ | $(۴,۳)$ | $(۴,۴)$ |

**مثال** ۷.۱.۲
فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ باشد. مجموعه زیر را هم در نظر بگیرید.
$$S=\{(۱,۱),(۱,۳),(۳,۱),(۳,۳),(۲,۲),(۲,۴),(۴,۲),(۴,۴)\}\subseteq A\times A$$
اینجا داریم $۱S۱, ۱S۳, ۴S۲$ اما $3\not S 4$ و $2\not S 1$
مجموعه $S$ چه مفهومی دارد؟ در مورد این معنی فکر کنید. $۱S۱$ یک ویک *هر دو یک خصوصیات دارند ، یعنی هر دو فرد هستند.*
همچنین $۴S۲$ *یعنی چهار و دو هر دو یک خصوصیت دارند. یعنی هر دو زوج هستند*
اما $3\not S 4$ و $2\not S 1$.

**مثال** ۷.۱.۳
رابطه های $S$ و $R$ در دو مثال قبل در نظر بگیرید. حالا به مجموعه زیر توجه کنید.
$$R\cap S=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۳,۱),(۴,۴),(۴,۲)\}\subseteq A\times A$$
مجموعه بالا یک رابطه روی $A$ است. عبارت $x(R\cap S)y$ یعنی "$x\geq y$" است و $y$ و $x$ "یک خصوصیات دارند"

**مثال** ۷.۱.۴

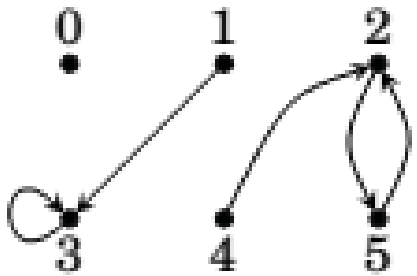
فرض کنید $B = \{0, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ باشد همچنین مجموعه زیر را در نظر بگیرید.

$$U = \{(۱, ۳), (۳, ۳), (۵, ۲), (۲, ۵), (۴, ۲)\} \subseteq B \times B$$

پس $U$ یک رابطه روی $B$ است. زیرا $U \subseteq B \times B$ است. ممکن است برای $U$ یک معنی پیدا نکنید، هر زیر مجموعه اختیاری $B \times B$ یک رابطه روی $B$ است، خواه معنی داشته باشد یا نداشته باشد.

بعضی از رابطه ها می توانند با تصویر توصیف شوند. مثلا ، می توانیم رابطه $U$ را تصویر کینیم ، به این صورت که عناصر $B$ را با نقاطی روی صفحه رسم کنیم. سپس عبارت $(x, y) \in U$ را با بردار هایی از $x$ به $y$ نشان دهیم. این بردار ها یک معنی سیمبلیک دارد یعنی " $x$ به $y$ مربوط است."
در تصویر ۷.۱.۱ نما یش $U$ را ملاحظه می کنید.

**تصویر** ۷.۱.۱

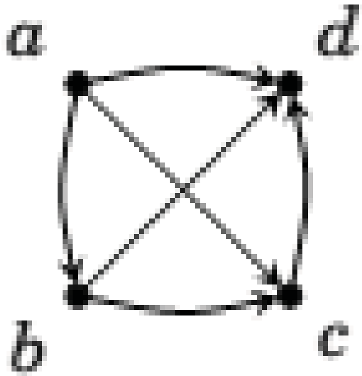



تصویر ۷.۱.۲ نمایش رابطه $R$ روی مجموعه $A = \{a, b, c, d\}$ است. $xRy$ یعنی $x$ قبل از $y$ در حروف الفبا قرار درد. بر اساس تعریف ۷.۱.۱ رابطه $R$ به صورت زیر است.

$$R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$$

ممکن است احساس کنید که تصویر ، رابطه را بهتر از مجموعه بیان می کند. آنها دو راه بیان دو چیز به طرق مختلف هستند. گاهی اوقات تصاویر ، برای بحث در مورد رابطه ها ، راحت تر هستند.

**تصویر** ۷.۱.۲



گر چه این نوع گراف ها می توانند به ما کمک کنند که رابطه ها را مجسم کنیم ، اما محدودیت هایی هم دارند. اگر $B$ و $A$ بی کران باشند ، پس رسم گراف غیر ممکن می شود. در این مورد از نماد **مجموعه ساز** **Set Builder Notation** استفاده می کنیم.

**مثال** ۷.۱.۵
مجموعه زیر را در نظر بگیرید.

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: x - y \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

مجموعه بالا رابطه $>$ روی $A = \mathbb{Z}$ است. این یک مجموعه بی کران است. زیرا بی نهایت طریق برای نشان دادن $x > y$ وجود دارد ، اگر $x$ و $y$ اعداد صحیح باشند.

**مثال** ۷.۱.۶
مجموعه زیر را در نظر بگیرید.

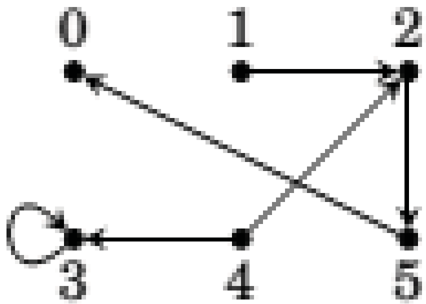
$$R = \{(x, x): x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

مجموعه بالا رابطه $=$ روی مجموعه $\mathbb{R}$ است. زیرا $xRy$ یعنی $x = y$ لذا $R$ مجموعه ای است که نماد تساوی اعداد حقیقی را بیان می کند.

**تمرینات** ۷.۱
۱ - فرض کنید $A = \{0, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ باشد. رابطه $R$ بنویسید که نماد $<$ روی $A$ بیان می کند. سپس آنرا با رسم یک گراف نشان دهید.

۲ - فرض کنید $A = \{0, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ باشد. رابطه $R$ بنویسید که نماد $\geq$ روی $A$ بیان می کند. سپس آنرا با رسم یک گراف نشان دهید.

۳ - در ذیل یک گراف برای یک رابطه $R$ روی مجموعه $A$ ملاحظه می کنید. مجموعه های $A$ و $R$ را بنویسید.

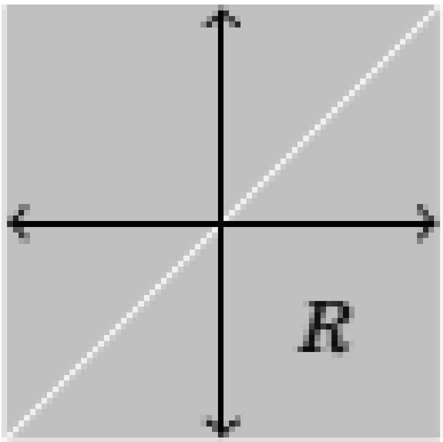


۴ – فرض کنید $A = \mathbb{Z}$ و $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ باشد. رابطه $>$ را روی $A$ بنویسید. این یک مجموعه بی کران است ، پس باید از نماد مجموعه ساز استفاده کنید.

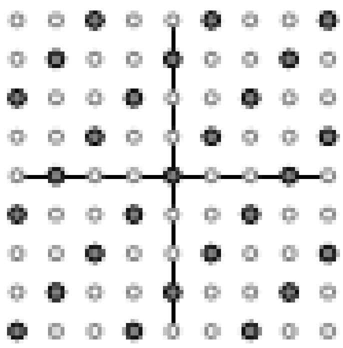
۵ - فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ باشد. چند نوع رابطه مختلف روی $A$ وجود دارد؟

در تمرینات زیر ، زیر مجموعه های $R$ از $\mathbb{R}^۲ = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ یا $\mathbb{Z}^۲ = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ با سایه طوسی رنگ مشخص شده اند. در هر مورد ، رابطه $R$ را مشخص کنید.

۶ -




۷ -

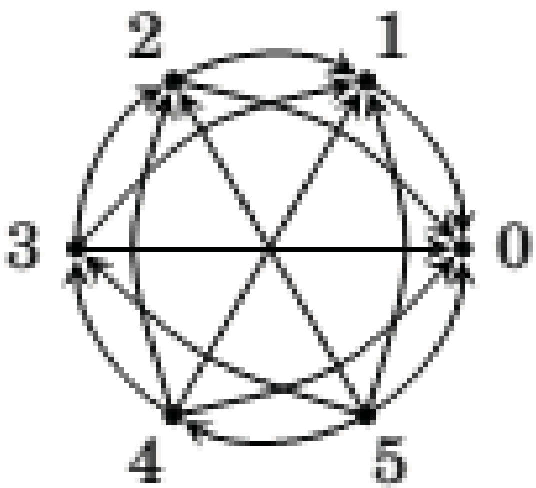


**پاسخ تمرینات** ۷.۱

۱ - فرض کنید $A = \{0, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ باشد. رابطه $R$ بنویسید که نماد $<$ روی $A$ بیان می کند. سپس آنرا با رسم یک گراف نشان دهید.

**پاسخ**

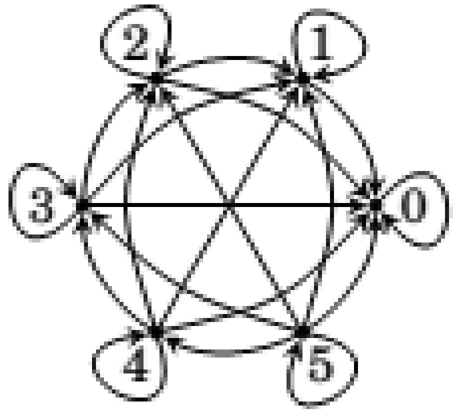
$$R = \{(۵, ۴), (۵, ۳), (۵, ۲), (۵, ۱), (۵, 0), (۴, ۳), (۴, ۲), (۴, ۱), (۴, 0), (۳, ۲), (۳, ۱), (۳, 0), (۲, ۱), (۲, 0), (۱, 0)\}$$



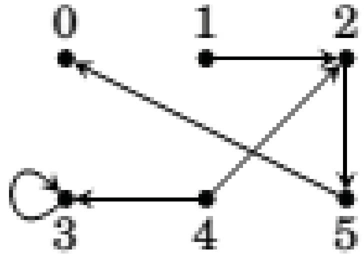

۲ - فرض کنید $A = \{0, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ باشد. رابطه $R$ بنویسید که نماد $\geq$ روی $A$ بیان می کند. سپس آنرا با رسم یک گراف نشان دهید.

**پاسخ**

$$R = \{(۵, ۵), (۵, ۴), (۵, ۳), (۵, ۲), (۵, ۱), (۵, 0), (۴, ۴), (۴, ۳), (۴, ۲), (۴, ۱), (۴, 0), (۳, ۳), (۳, ۲), (۳, ۱), (۳, 0), (۲, ۲), (۲, ۱), (۲, 0), (۱, ۱), (۱, 0), (0,0)\}$$



۳ - در ذیل یک گراف برای یک رابطه $R$ روی مجموعه $A$ ملاحظه می کنید. مجموعه های $A$ و $R$ را بنویسید.




**پاسخ**

$$A = \{0, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} \qquad R = \{(۳, ۳), (۴, ۳), (۴, ۲), (۱, ۲), (۲, ۵), (۵, 0)\}$$

۴ – فرض کنید $A = \mathbb{Z}$ و $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ باشد. رابطه $>$ را روی $A$ بنویسید. این یک مجموعه بی کران است ، پس باید از نماد مجموعه ساز استفاده کنید.

**پاسخ**

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}: y - x \in \mathbb{N}\}$$

۵ - فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ باشد. چند نوع رابطه مختلف روی $A$ وجود دارد؟

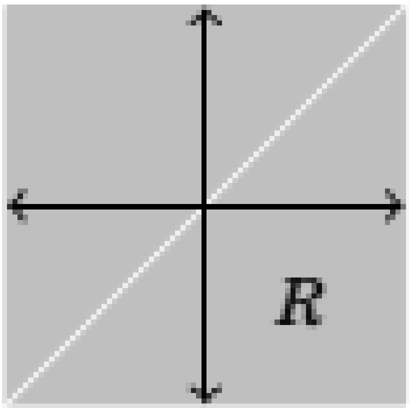
**پاسخ**

رابطه $R \subseteq A \times A$ روی $A$ در نظر بگیرید. برای هر زوج مرتب $(x, y) \in A \times A$ دو حالت داریم. یا می توانیم $(x, y)$ را در $R$ در نظر بگیریم و یا نه. در این صورت $۶ * ۶ = ۳۶$ زوج مرتب در $A \times A$ داریم. بر اساس اصل ضرب ، $۲^{۳۶}$ زیر مجموعه $R$ داریم. لذا تعداد زیادی رابطه روی $A$ داریم. یعنی

$$۲^{(A|^{۲})}$$

در تمرینات زیر ، زیر مجموعه های $R$ از $\mathbb{R}^۲ = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ یا $\mathbb{Z}^۲ = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ با سایه طوسی رنگ مشخص شده اند. در هر مورد ، رابطه $R$ را مشخص کنید.

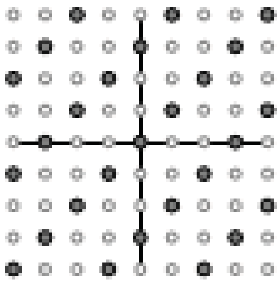
۶ -




**پاسخ**

$$\neq$$

۷ -



**پاسخ**

$$\equiv (mod\ ۳)$$

## ۷.۲ - خصوصیات رابطه ها Properties of Relations

یک عبارت ربطی مانند $xRy$ یک گزاره است که می تواند صحیح یا غلط باشد. مثلا $۹ > ۵$ صحیح است و $۵ > ۹$ غلط است. لذا عمل $+$ یک رابطه نیست ، زیرا مثلا $۹ + ۵$ یک مقدار عددی دارد ، نه یک مقدار $T / F$ ، چون عبارت های رابطه یی ، مقادیر $T/F$ دارند، می توانیم آنها را با عمل گرا های منطقی با هم ارتباط دهیم. مثلا $xRy \Rightarrow yRz$ یک گزاره است که صحیح یا غلط بودن آن بستگی به $x$ و $y$ دارد.

با توجه به مطالب بالا ، توجه داشته باشید که بعضی رابطه ها خصوصیاتی دارند که دیگران ندارند. مثلا رابطه $x \le x$ برای هر $x \in \mathbb{Z}$ بر قرار است. اما برای $<$ صادق نیست. زیر $x < x$ هرگز صحیح نیست. تعریف زیر سه خصوصیات مهم که رابطه ها ممکن است داشته باشند ، اشکار می کند.

**تعریف ۷.۲.۱**
فرض کنید $R$ یک رابطه روی مجموعه $A$ باشد. پس
الف - $R$ انعکاسی است اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $xRx$ ، یعنی $R$ انعکاسی است اگر $\forall x \in A, xRx$
ب - $R$ متقارن است اگر $xRy$ دلالت کند $yRx$ است برای تمام $x, y \in A$ ، یعنی $R$ انعکاسی است اگر $\forall x, y \in A, xRy \Rightarrow yRx$
ج - $R$ انتقال پذیر است اگر داشته باشیم $xRy$ و $yRz$ ، پس $xRz$ است. یعنی $R$ انتقال پذیر است اگر $\forall x, y, z \in A, \big((xRy) \wedge (yRz)\big) \Rightarrow xRz$

انعکاسی : Reflexive
متقارن : Symmetric
انتقال پذیر : Transitive

برای شرح و توضیح تعریف بالا ، مجموعه $A = \mathbb{Z}$ را در نظر بگیرید.
مثال های انعکاسی روی $\mathbb{Z}$ شامل $|$ ، $=$ ، $\le$ است. زیرا $x|x$ ، $x = x$ ، $x \le x$ برای هر $x \in \mathbb{Z}$ همگی صحیح هستند. از طرف دیگر $\nmid$ , $\neq$ ، $<$ ، $>$ انعکاسی نیستند. هیچ کدام از گزاره های $x \neq x$ ، $x \nmid x$ ، $x > x$ ، $x < x$ هرگز صحیح نیستند.
رابطه $\neq$ متقارن است. زیرا اگر $x \neq y$ باشد ، مسلم است که $y \neq x$ است. همچنین $=$ متقارن است . زیرا $y = x$ یعنی $x = y$ است.
رابطه $\le$ متقارن نیست. زیرا $x \le y$ لزوما به معنی $y \le x$ نیست. زیرا $۵ \le ۶$ صحیح است اما $۶ \le ۵$ صحیح نیست. اما اگر مثلا $x = ۲$ و $y = ۲$ باشد ، آنوقت می توان گفت

$$(x \le y) \Rightarrow (y \le x)$$

رابطه $\le$ انتقال پذیر است. زیرا اگر $x \le y$ و $y \le z$ باشد ، پس $x \le z$ است.
همچنین $=$ , $\ge$ ، $<$ همگی انتقال پذیر هستند.
جدول زیر را به دقت مورد مطالعه قرار دهید.

| رابطه روی $\mathbb{Z}$ | $<$ | $\leq$ | $=$ | $\mid$ | $\nmid$ | $\neq$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| انعکاسی | خیر | آری | آری | آری | خیر | خیر |
| متقارن | خیر | خیر | آری | خیر | خیر | آری |
| انتقال پذیر | آری | آری | آری | آری | خیر | خیر |

**مثال** ۷.۲.۱

فرض کنید $A = \{b, c, d, e\}$ باشد. و $R$ رابطه زیر روی $A$ باشد.

$$R = \{(b,b), (b,c), (c,b), (c,c), (d,d), (b,d), (d,b), (c,d), (d,c)\}$$

رابطه **انعکاسی نیست** زیرا ، اگر چه $bRb, cRc, dRd$ صحیح است اما $eRe$ صحیح نیست. برای این که یک رابطه انعکاسی باشد ، $xRx$ باید برای تمام $x \in A$ صحیح باشد.

رابطه $R$ متقارن است ، زیرا هر وقت $xRy$ داریم ، $yRx$ هم داریم. ملاحظه کنید که

$$bRc \text{ و } cRb \text{ ؛ } bRd \text{ و } d\,Rb \text{ ؛ } dRc \text{ و } cRd$$

داریم. اگرزوج مرتب $(c,b)$ از $R$ برداریم ، $R$ دیگر متقارن نیست.

رابطه $R$ انتقال پذیر است. اما باید مقداری روی آن کار کرد تا بتوانیم بگوییم این رابطه انتقال پذیر است. باید چک کنیم آیا گزاره $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRy$ برای تمام $x, y, z \in A$ صحیح است.
مثلا ، فرض می کنیم $z = d$ و $y = c$ ، $x = b$ باشد. پس داریم $(bRc \wedge cRd) \Rightarrow bRd$ که گزاره صحیح $(T \wedge T) \Rightarrow T$ است. همچنین $(bRd \wedge dRc) \Rightarrow bRc$ که گزاره صحیح $(T \wedge T) \Rightarrow T$ است.

توجه دارید که اگر $z = c$ و $y = e$ ، $x = b$ باشد ، پس $(bRe \wedge eRc) \Rightarrow bRc$ می شود $(F \wedge F) \Rightarrow T$ که باز هم صحیح است.
این کار خیلی تفریحی نیست ، اما باید تمام حالت ها را در نظر گرفت تا بتوانید درستی

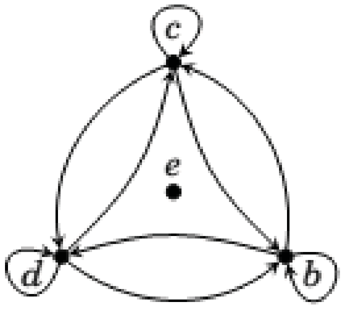
$$(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRy$$

را برای تمام $x, y, z \in A$ نشان دهید.

رابطه مثال ۷.۲.۱ یک معنی دارد. می توانید تصور کنید $xRy$ یعنی $x$ و $y$ هر دو اعداد ثابت هستند. پس $bRc$ یعنی $b$ و $c$ هر دو اعداد ثابت هستند ، اما $b\not R e$ زیرا صحیح نیست که بگوییم $b$ و $e$ هر دو اعداد ثابت هستند. اگر به مساله به این طریق فکر کنیم ، فورا واضح می شود که $R$ انتقال پذیر است. اگر $y$ و $x$ هر دو اعداد ثابت هستند و $z$ و $y$ هر دو اعداد ثابت هستند ، پس مسلما $z$ و $x$ هر دو اعداد ثابت هستند.

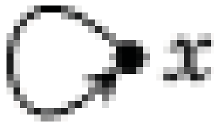
در تصویر ۷.۲.۱ گراف $R$ را ملاحظه می کنید. فورا متوجه چند خصوصیات $R$ می شود. در صورتی که از روی توصیف آن به صورت یک مجموعه آن خصوصیات آشکار نبودند. مثلا ، متوجه می شویم که $R$ انعکاسی نیست زیرا در $e$ حلقه ای مشاهده نمی شود. پس $e\not R e$.

**تصویر** ۷.۲.۱



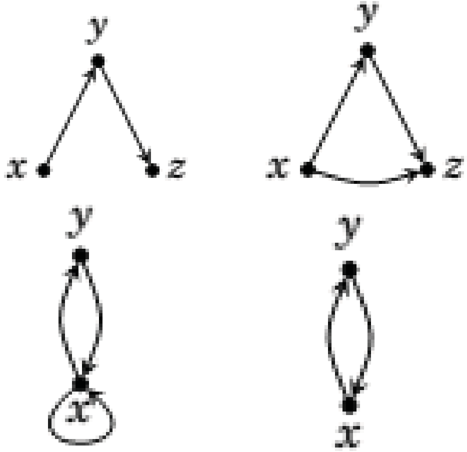

در ذیل شرح می دهیم که چگونه از روی گراف خصوصیات یک رابطه را تشخیص دهید.

الف –یک رابطه **انعکاسی** است اگر برای هر نقطه $x$ یک حلقه در $x$ وجود داشته باشد.




ب –یک رابطه **متقارن** است اگر هر گاه یک بردار از $x$ به $y$ وجود داشته باشد ، یک بردار هم از $y$ به $x$ وجود داشته باشد.


ج – یک رابطه **انتقال پذیر** است اگر هرگاه یک بردار از $x$ به $y$ و از $y$ به $z$ وجود داشته باشد ، یک بردار هم از $x$ به $z$ وجود داشته باشد. همچنین یک حلقه از $x$ به $x$ وجود دارد.



به دو تصویر آخر توجه کنید. خاصیت انتقالی می گوید $(xRy \wedge yRx) \Rightarrow xRx$ پس اگر $xRy$ و $yRx$ وجود دارد ، $xRx$ هم وجود دارد ، یعنی یک حلقه در $x$ وجود دارد.
همچنین اگر $(yRx \wedge xRy) \Rightarrow yRy$ باشد ، پس یک حلقه در $y$ باید باشد.

اگر چه گراف کمک می کند ، اما گاهی رابطه ها آنقدر پیچیده هستند ، که نمایش آنها از طریق گراف ممکن نیست.

**قضیه ۷.۲.۱**
رابطه همنهشتی به پیمانه $m$ روی مجموعه اعداد صحیح یک رابطه هم ازی است. یعنی این رابطه ، انعکاسی ، متقارن و انتقالی است.

**اثبات**
ابتدا ثابت می کنیم رابطه همنهشتی یعنی $\equiv (mod\ n)$ انعکاسی است. یک عدد صحیح دلخواه $x \in \mathbb{Z}$ در نظر بگیرید. ملاحظه می کنید که $n|0$ پس $n|(x-x)$ ، بر اساس تعریف همنهشتی به پیمانه $n$ داریم. $x \equiv x(mod\ n)$ ، این نشان می دهد برای هر $x \in \mathbb{Z}$ داریم $x \equiv x(mod\ n)$ پس $\equiv (mod\ n)$ انعکاسی است.
حالا نشان می دهیم $\equiv (mod\ n)$ متقارن است. برای این کار باید نشان دهیم برای تمام $x, y \in \mathbb{Z}$ اگر $x \equiv y(mod\ n)$ باشد ، پس $y \equiv x(mod\ n)$ است.
فرض می کنیم $x \equiv y(mod\ n)$ باشد. پس براساس تعریف همنهشتی به پیمانه $n$ داریم $n|(x-y)$ ، لذا بر اساس تعریف بخش پذیری اعداد داریم $x-y = na$ است برای یک عدد $a \in \mathbb{Z}$ ، طرفین را در $-۱$ ضرب می کنیم ، پس داریم $y-x = n(-a)$ ، لذا $n|(y-x)$ این یعنی $y \equiv x(mod\ n)$ ، نشان داده ایم $x \equiv y(mod\ n)$ یعنی $y \equiv x(mod\ n)$ و این یعنی $\equiv (mod\ n)$ متقارن است.
در نهایت نشان می دهیم $\equiv (mod\ n)$ انتقالی است. بر این کار باید نشان دهیم اگر $x \equiv y(mod\ n)$ و $y \equiv z(mod\ n)$ باشد ، پس $x \equiv z(mod\ n)$ است. فرض می کنیم داشته باشیم $x \equiv y(mod\ n)$ و $y \equiv z(mod\ n)$ ، این یعنی $n|(x-y)$ و $n|(y-z)$ لذا اعداد صحیح $a$ و $b$ وجود دارند ، بطوری که $x-y = na$ و $y-z = nb$ ، این دو تساوی را جمع می کنیم ، پس داریم $x-z = na+nb$ ، در نتیجه $x-z = n(a+b)$, پس $n|(x-z)$ و لذا $x \equiv z(mod\ n)$ این یعنی $\equiv (mod\ n)$ انتقالی است.

**تمرینات ۷.۲**

۱ - رابطه $R=\{(a,a),(b,b),(c\ ,c),(d,d),(a,b),(b,a)\}$ روی مجموعه $A=\{a,b,c,d\}$ را در نظربگیرید . آیا $R$ انعکاسی است ؟ متقارن است؟ انتقالی است؟ اگر یکی از این خصوصیات بر قرار نیست ، بگویید چرا.

۲ - رابطه $R=\{(a,b),(a,c),(c,b),(b,c)\}$ روی مجموعه $A=\{a,b,c\}$ را در نظر بگیرید. آیا $R$ انعکاسی است ؟ متقارن است؟ انتقالی است؟ اگر یکی از این خصوصیات بر قرار نیست ، بگویید چرا.

۳ - رابطه $R=\left\{(0,0),\left(\sqrt{۲},0\right),\left(0,\sqrt{۲}\right),\left(\sqrt{۲},\sqrt{۲}\right)\right\}$ روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید.
آیا $R$ انعکاسی است ؟ متقارن است؟ انتقالی است؟ اگر یکی از این خصوصیات بر قرار نیست ، بگویید چرا.

۴ - تعداد ۱۶ رابطه مختأف روی مجموعه $A=\{a,b\}$ ممکن است وجود داشته باشد. هر یک را توصیف کنید. یک تصویر برای هر کدام کافی است. اما رئوس را نام گزاری کنید و مشخص کنید کدام انعکاسی ؟ متقارن؟ انتقالی؟ است.

۵ . ـیک رابطه روی $\mathbb{Z}$ تعریف کنید که نشان دهد $xRy$ است اگر و فقط اگر $x$ و $y$ هم ارز باشند. بگویید آیا این رابطه انعکاسی است ، متقارن است ، انتقالی است. اگر یک خصوصیات بر قرار نیست ، بگویید چرا. این کدام رابطه اشنا است؟

۶ - فرض کنید $A=\{a,b,c,d\}$ و $R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)\}$ باشد.
آیا $R$ انعکاسی است ؟ متقارن است؟ انتقالی است؟ اگر یکی از این خصوصیات بر قرار نیست ، بگویید چرا.

۷ - رابطه $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}: x-y\in\mathbb{Z}\}$ روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. ثابت کنید ، این رابطه انعکاسی ، متقارن و انتقالی است.

۸ - صحت یاعدم صحت گزاره زیر را ثابت کنید.
اگر یک رابطه متقارن و انتقالی باشد ، پس انعکاسی هم است.

**پاسخ تمرینات ۷.۲**

۱ - رابطه $R = \{(a,a),(b,b),(c\ ,c),(d,d),(a,b),(b,a)\}$ روی مجموعه $A = \{a,b,c,d\}$ را در نظربگیرید . آیا $R$ انعکاسی است ؟ متقارن است؟ انتقالی است؟ اگر یکی از این خصوصیات بر قرار نیست ، بگویید چرا.

**پاسخ**
**انعکاسی است** ، زیرا $(x,x) \in R$ یعنی $xRx$ است برای تمام $x \in A$
**متقارن است.** زیر غیر ممکن است که یک $(x,y)\epsilon R$ پیدا کنید که $(y,x) \notin R.$
**انتقالی است** ، زیرا $xRz \Rightarrow (xRy \wedge yRz)$همیشه بر قرار است.

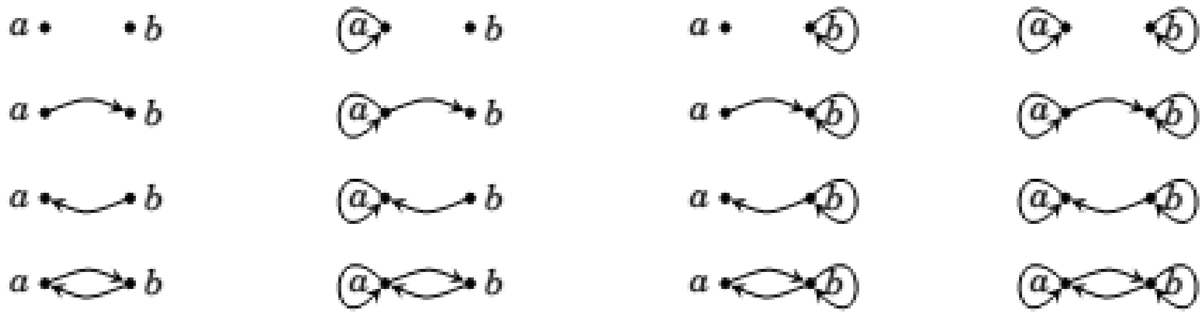
۲ - رابطه $R = \{(a,b),(a,c),(c,b),(b,c)\}$ روی مجموعه $A = \{a,b,c\}$ را در نظر بگیرید. آیا $R$ انعکاسی است ؟ متقارن است؟ انتقالی است؟ اگر یکی از این خصوصیات بر قرار نیست ، بگویید چرا.

**پاسخ**
**انعکاسی نیست.** زیرا مثلا $(a,a) \notin R$
**متقارن نیست.** $(a,b) \in R$ است ، اما $(b,a) \notin R.$
**انتقالی نیست.** زیرا ، $bRc$ و $cRb$ صحیح است ، اما $cRc$ غلط است.

۳ - رابطه $R = \left\{(0,0),\left(\sqrt{۲},0\right),\left(0,\sqrt{۲}\right),\left(\sqrt{۲},\sqrt{۲}\right)\right\}$ روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید.
آیا $R$ انعکاسی است ؟ متقارن است؟ انتقالی است؟ اگر یکی از این خصوصیات بر قرار نیست ، بگویید چرا.

**پاسخ**
**انعکاسی نیست.** زیرا مثلا $(1,1) \notin R$
**متقارن است.** زیر غیر ممکن است که یک $(x,y)\epsilon R$ پیدا کنید که $(y,x) \notin R.$
**انتقالی است** ، زیر $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$ همیشه بر قرار است.

۴ ـ تعداد ۱۶ رابطه مختأف روی مجموعه $A = \{a,b\}$ ممکن است وجود داشته باشد. هر یک را توصیف کنید. یک تصویر برای هر کدام کافی است. اما رئوس را نام گزاری کنید و مشخص کنید کدام انعکاسی ؟ متقارن؟ انتقالی؟ است.
**پاسخ**
تصویر در ذیل ملاحظه می کنید. فقط چهار گراف ستون سمت راست انعکاسی هستند. فقط گراف هشتم در ردیف اول و ردیف چهارم متقارن هستند. بقیه انتقالی هستند ، بجز سه گراف اول ردیف چهارم.



۵ ۰ -یک رابطه روی $\mathbb{Z}$ تعریف کنید که نشان دهد $xRy$ است اگر و فقط اگر $x$ و $y$ هم ارز باشند. بگویید آیا این رابطه انعکاسی است ، متقارن است ، انتقالی است. اگر یک خصوصیات بر قرار نیست ، بگویید چرا. این کدام رابطه اشنا است؟

**پاسخ**

**انعکاسی است.** زیرا $xRx$ است و مسلم است که $x$ هم ارز خودش است.

**متقارن است.** زیرا اگر $x$ و $y$ هم ارز باشند ، پس $y$ و $x$ هم ، هم ارز هستند.

یعنی $xRy \Rightarrow yRx$

**انتقالی است.** چون، اگر $x$ و $y$ هم ارز هستند ، پس $y$ و $x$ هم ارز هستند.

یعنی $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$ همیشه بر قرار است.

این رابطه $\equiv \left(mod\ ۲\right)$ است.

۶ - فرض کنید $A = \{a, b, c, d\}$ و $R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d)\}$ باشد.

آیا $R$ انعکاسی است ؟ متقارن است؟ انتقالی است؟ اگر یکی از این خصوصیات بر قرار نیست ، بگویید چرا.

**پاسخ**

**انعکاسی است** ، زیرا $(x,x) \in R$ یعنی $xRx$ برای تمام $x \in A$

**متقارن است.** زیر غیر ممکن است که یک $(x,y) \epsilon R$ پیدا کنید که $(y,x) \notin R.$

**انتقالی است** ، زیر $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$ همیشه بر قرار است.

۷ - رابطه $R = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y \in \mathbb{Z}\}$ روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. ثابت کنید ، این رابطه انعکاسی ، متقارن و انتقالی است.

**اثبات**

در این رابطه ، $xRy$ یعنی $x - y \in \mathbb{Z}$

برای نشان دادن $R$ انعکاسی است، یک $x \in R$ در نظر بگیرید، ملاحظه می کنید $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$ پس $xRx$ است و لذا $R$ انعکاسی است.

برا نشان دادن $R$ متقارن است، باید ثابت کنیم $xRy \Rightarrow yRx$ است برای تمام $x, y \in \mathbb{R}$

فرض کنید $xRy$ باشد. این یعنی $x - y \in \mathbb{Z}$ پس داریم $-(x-y) = y - x$ هم در $\mathbb{Z}$ است.

اما $y - x \in \mathbb{Z}$ یعنی $yRx$ است. پس نشان دادیم $xRy \Rightarrow yRx$ لذا $R$ متقارن است.

برای نشان دادن $R$ انتقالی است ، لازم است ثابت کنیم $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$ همیشه صادق است. فرض کنید $xRy$ و $yRz$ باشد. چون $xRy$ است ، پس $x - y \in \mathbb{Z}$ است. چون $yRz$ است ، پس $y - z \in \mathbb{Z}$ است. لذا $x - y$ و $y - z$ هر دو اعداد صحیح هستند. با جمع کردن دو عدد صحیح ، یک عدد صحیح دیگر بدست می آوریم. یعنی

$$(x - y) + (y - z) = x - z$$

پس $x - z \in \mathbb{Z}$ است و این یعنی $xRz$ لذا $R$ انتقالی است.

۸ ـ صحت یاعدم صحت گزاره زیر را ثابت کنید.
اگر یک رابطه متقارن و انتقالی باشد ، پس انعکاسی هم است.

**پاسخ**

این گزاره **غلط است.** مثال نقض می اوریم. رابطه $R = \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$ روی مجموعه $A = \{a,b,c\}$ در نظر بگیرید. این رابطه متقارن و انتقالی است ، اما انعکاسی نیست.

## ۷.۳ - رابطه های هم ارز Equivalence Relations

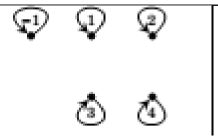
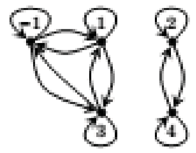
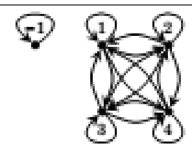
رابطه $=$ روی مجموعه $\mathbb{Z}$ یا هر مجموعه $A$, انعکاسی ، متقارن و انتقالی است. بسیاری دیگر از رابطه هستند که هر سه این خصوصیات را دارا هستند. رابطه ای که هر سه خصوصیات را داشته باشد ، مکررا ، در ریاضیات به آنها بر خورد می کنیم. و البته نقش های مهمی هم دارند. به این نوع رابطه ها می گوییم **رابطه های هم ارز**. **Equivalence Relations**

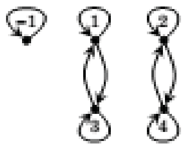
**تعریف ۷.۳.۱**
یک رابطه $R$ روی یک مجموعه $A$ یک **رابطه هم ارز** است اگر انعکاسی ، متقارن و انتقالی باشد.

مثلا جدول ۷.۳.۱ چهار رابطه $R_۱, R_۲, R_۳, R_۴$ روی $A=\{-۱,۱,۲,۳,۴\}$ را نشان می دهد. هر کدام معنی خاص خود را دارند، همان طور که در جدول مشخص شده است. مثلا ، در ردیف دوم ، رابطه $R_۲$ یعنی *"دارای همان خاصیت است که "*

پس $۱R_۲۳$ یعنی *"۱ همان خصوصیات دارد که ۳ "*

**جدول ۷.۳.۱**

| رابطه $R$ | گراف | کلاس های هم ارز |
|---|---|---|
| *"مساوی است با "* $=$<br>$R_۱$<br>$=\{(-۱,-۱),(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴)\}$ |  | $\{-۱\},\{۱\},\{۲\},\{۳\},\{۴\}$ |
| *"همان خصوصیات دارد که"*<br>$R_۲$<br>$=\{(-۱,-۱),(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),$<br>$(-۱,۱),(۱,-۱),(-۱,۳),(۳,-۱),$<br>$(۱,۳),(۳,۱),(۲,۴),(۴,۲)\}$ |  | $\{-۱,۱,۳\},\{۲,۴\}$ |
| *"همان علامت دارد که "*<br>$R_۳$<br>$=\{(-۱,-۱),(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),$<br>$(۱,۲),(۲,۱),(۱,۳),(۳,۱),(۱,۴),(۴,۱),$<br>$(۳,۴),(۴,۳),(۲,۳),(۳,۲),(۲,۴),(۴,۲),$<br>$(۱,۳),(۳,۱)\}$ |  | $\{-۱\},\{۱,۲,۳,۴\}$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\{-۱\}, \{۱,۳\}, \{۲,۴\}$ |  | “همان علامت و همان خاصیت دارد که ” $R_۴ = \{(-۱,-۱),(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۱,۳),(۳,۱),(۲,۴),(۴,۲)\}$ |

گراف های بالا ، کار چک کردن را برای شما آسان می کنید. به راحتی می توانید چک کنید که هر رابطه انعکاسی ، متقارن و انتقالی است. یعنی هر رابطه هم ارز است. مثلا ، $R_۱$ متقارن است ، زیرا $xR_۱y \Rightarrow yR_۱x$ همیشه صادق است. هنگامی که $x = y$ است، داریم $T \Rightarrow T$ و هنگامی که $x \neq y$ است ، داریم $F \Rightarrow F$ که باز هم ، صحیح است. به همین طریق $R_۱$ انتقالی است ، زیرا $(xR_۱y \wedge yR_۱z) \Rightarrow xR_۱z$ همیشه صحیح است. همیشه یکی از سه حالت های زیر کار می کند.

$T \Rightarrow T$ ،$F \Rightarrow F$ یا $F \Rightarrow T$

حالا لازم است یک تعریف مهم معرفی کنیم. هنگامی که یک رابطه هم ارز $R$ روی یک مجموعه $A$ تعریف می کنیم ، این رابطه ، $A$ را به زیر مجموعه هایی بنام **کلاس های هم ارز** **Equivalence Classes** تقسیم می کند. سه تعریف زیر را می آوریم. هر کدام برای شما قابل فهم است، آنرا قبول کنید. هر سه یک مفهوم را بیان می کنند.

**تعریف ۷.۳.۲**
فرض کنید $R$ یک رابطه هم ارز روی یک مجموعه $A$ باشد. اگر $a \in A$ باشد ، کلاس هم ارز که شامل $a$ است ، زیر مجموعه $\{x \in A: xRa\}$ است که شامل تمام عناصر $A$ که مربوط به $a$ است ، می باشد. این مجموعه با نماد $[a]$ نشان داده می شود. پس کلاس هم ارز که شامل $a$ است ، مجموعه $[a] = \{x \in A: xRa\}$ است.

**تعریف ۷.۳.۲**
اگر $R$ یک رابطه هم ارز روی یک مجموعه $A$ باشد ، دسته یا کلاس هم ارز $a \in A$ که با نماد $[a]$ نشان داده می شود ، مجموعه $[a] = \{x \in A: xRa\}$
به عبارت دیگر ، یک دسته یا کلاس هم ارز نامی است که به زیر مجموعه $R$ می دهیم که شامل کلیه عناصر ی است که نسبت به یکدیگر هم ارز هستند.

**تعریف ۷.۳.۲**
یک دسته یا کلاس هم ارز عبارت است از یک زیر مجموعه $\{x \in A : xRa\}$ ، اینجا $a$ یک عضو $A$ است. پس مجموعه اعضای $R$ که نسبت به هم ، هم ارز هستند ، دسته یا کلاس هم ارز نامیده می شوند.

**مثال** ۷.۳.۱
رابطه $R_{۱}$ در جدول ۷.۳.۱ در نظر بگیرید. کلاس هم ارز که شامل ۲ باشد ، مجموعه زیر است.

$$[۲] = \{x \in A: xR_{۱}۲\}$$

چون در این رابطه تنها عضوی که با ۲ رابطه دارد ، خود ۲ است ، پس داریم $\{۲\} = [۲]$ . دیگر کلاس های هم ارز برای $R_{۱}$ عبارتند از

$$[-۱] = \{-۱\} ، [۱] = \{۱\} ، [۳] = \{۳\} \text{ و } [۴] = \{۴\}$$

پس این رابطه دارای پنج کلاس هم ارز جداگانه دارد.

**مثال** ۷.۳.۲
رابطه $R_{۲}$ در جدول ۷.۳.۱ در نظر بگیرید. کلاس هم ارز که شامل ۲ باشد ، مجموعه زیر است.

$$[۲] = \{x \in A: xR_{۲}۲\}$$

چون ۲ و ۴ با ۲ رابطه دارد ، پس داریم $\{۲,۴\} = [۲]$ .ملاحظه می کنید که همچنین داریم

$$[۴] = \{x \in A: xR_{۲}۴\} = \{۲,۴\}$$

پس $[۴] = [۲]$ است. کلاس هم ارز دیگر برای $R_{۲}$ مطابق زیر است.

$$[۱] = \{x \in A: xR_{۲}۱\} = \{-۱,۱,۳\}$$

علاوه بر این ، توجه کنید که $\{-۱,۱,۳\} = [۳] = [-۱] = [۱]$ . لذا این رابطه فقط دو کلاس هم ارز دارد ، یعنی $\{-۱,۱,۳\}$ و $\{۲,۴\}$

**مثال** ۷.۳.۳
رابطه $R_{۴}$ در جدول ۷.۳.۱ سه کالاس هم ارز دارد. آنها عبارتند از.

$$[-۱] = \{-۱\} \text{ و } [۱] = [۳] = \{۱,۳\} \text{ و } [۲] = [۴] = \{۲,۴\}$$

جدول ۷.۳.۱ شما را به اشتباه نیندازد. لازم است بدانید که همه رابطه های هم ارز را نمی‌توان با رسم گراف نشان داد. مثلا $R = \{(x,x): x \in \mathbb{R}\}$ که تساوی را در مجموعه $\mathbb{R}$ بیان می کند ، بزرگ تر از آن است که بشود ، آنرا رسم کرد.

**مثال** ۷.۳.۴
فرض می کنیم $P$ مجموعه تمام چند جمله ای ها باضریب های حقیقی باشند. یک رابطه $R$ روی $P$ مطابق زیر تعریف می کنیم.
اگر داشته باشیم $f(x), g(x) \in P$ , فرض می کنیم $f(x)Rg(x)$ به این مفهوم باشد که $f(x)$ و $g(x)$ دارای یک درجه هستند. پس $\left(۳x^{۲} - ۲\right) R \left(x^{۲} + ۳x - ۴\right)$ و $(x^3 + 3x^2 - 4) \not R (3x^2 - 2)$.

با یک امتحان ساده می توان دید که $R$ یک رابطه هم ارز است. همچنین توصیف کلاس های هم ارز $R$ ساده است. مثلا $\left[۳x^۲+۲\right]$ مجموعه تمام چند جمله ای های هم درجه $۳x^۲+۲$ است. یعنی ، مجموعه تمام چند جمله ای های درجه ۰۲ می توان این را به صورت زیر نوشت.

$$\left[۳x^۲+۲\right]=\left\{ax^۲+bx+c : a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0\right\}$$

در قضیه ۷.۲.۱ بخش ۷.۲ ثابت کردیم برای $n\in\mathbb{N}$ رابطه $\equiv (mod\ n)$ انعکاسی ، متقارن و انتقالی است. پس ، با بیان جدید ، $\equiv (mod\ n)$ یک رابطه هم ارز روی $\mathbb{Z}$ است. مثلاً $n=۳$ را در نظر بگیرید. کلاس های هم ارز $\equiv \left(mod\ ۳\right)$ را پیدا می کنیم. به نظر می رسد که کلاس هم ارز $0$ برای شروع کار منطقی باشد. توجه کنید

$$[0]=\left\{x\in\ \mathbb{Z}: x\equiv 0\left(mod\ ۳\right)\right\}=\left\{x\in\ \mathbb{Z}: ۳|(x-0)\right\}=\left\{x\in\ \mathbb{Z}: ۳|x\right\}$$
$$=\left\{\cdots,-۳,0,۳,۶,۹,\cdots\right\}$$

پس کلاس $[0]$ شامل تمام ضریب های ۳ است. یا به عبارت دیگر ، $[0]$ شامل تمام اعداد صحیحی است که اگر بر ۳ تقسیم شوند ، باقیمانده $0$ است. ملاحظه می کنید که $\cdots=\left[۶\right]=\left[۳\right]=[0]$

عدد ۱ در مجموعه $[0]$ پیدا نیست ، اجازه دهید به کلاس هم ارز $\left[۱\right]$ نگاه کنیم.

$$\left[۱\right]=\left\{x\in\ \mathbb{Z}: x\equiv ۱\left(mod\ ۳\right)\right\}$$
$$=\left\{x\in\ \mathbb{Z}: ۳|\left(x-۱\right)\right\}=\left\{\cdots,-۵,-۲,۱,۴,۷,۱۰,\cdots\right\}$$

عدد ۲ نه در مجموعه های $[0]$ است و نه در $\left[۱\right]$ پس به کلاس هم ارز $\left[۲\right]$ نگاهمی کنیم.

$$\left[۲\right]=\left\{x\in\ \mathbb{Z}: x\equiv ۲\left(mod\ ۳\right)\right\}=\left\{x\in\ \mathbb{Z}: ۳|\left(x-۲\right)\right\}$$
$$=\left\{\cdots,-۴,-۱,۲,۵,۸,۱۱,\cdots\right\}$$

کلاس هم ارز $\left[۲\right]$ شامل تمام اعداد صحیحی است که اگر بر ۳ تقسیم شوند ، باقیمانده ۲ است.

ملاحظه می کنید که هر عدد صحیح در یکی از مجموعه های $\left[۲\right]$ یا $\left[۱\right]$ ,$[0]$ است. پس تمام کلاس های هم ارز را ردیف کرده ایم. لذا $\equiv \left(mod\ ۳\ \right)$ دقیقا سه کلاس هم ارز دارد. همان طور که در بالا ردیف کردیم.

به همین طریق می توانید نشان دهید که رابطه هم ارز $\equiv (mod\ n\ )$ دارای $n$ کلاس هم ارز دارد ، به صورت زیر.

$$[0],\left[۱\right],\left[۲\right],\cdots,\left[n-۱\right]$$

**تمرینات ۷.۳**

۱- فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ باشد و رابطه هم ارز روی $A$ به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$R = \{(۱, ۱), (۲, ۲), (۳, ۳), (۴, ۴), (۵, ۵), (۶, ۶), (۲, ۳), (۳, ۲), (۴, ۵), (۵, ۴), (۴, ۶), (۶, ۴), (۵, ۶), (۶, ۵)\}$$

کلاس های هم ارز $R$ را ردیف کنید.

۲ - فرض کنید $A = \{a, b, c, d, e\}$ باشد. فرض کنید $R$ یک رابطه هم ارز روی $A$ باشد. و فرض کنید $R$ سه کلاس هم ارز داشته باشد. همچنین $aRd$ و $bRc$ باشد. $R$ را به عنوان یک مجموعه بنویسید.

۳ - تعداد دو رابطه هم ارز متفاوت روی مجموعه $A = \{a, b\}$ وجود دارد. آنها را توصیف کنید. گراف کافی است.

۴ - یک رابطه $R$ روی $\mathbb{Z}$ به صورت $xRy$ تعریف کنید ،بطوری که اگر و فقط اگر $۳x - ۵y$ زوج باشد. ثابت کنید $R$ یک رابطه هم ارز است. کلاس های هم ارز را توصیف کنید.

۵ - یک رابطه $R$ روی $\mathbb{Z}$ به صورت $xRy$ اگر و فقط اگر $۴|(x + ۳y)$ باشد. ثابت کیند $R$ یک رابطه هم ارزاست. کلاس های هم ارز را توصیف کنید.

۶ - صحت یا عدم صحت گزاره زیر را ثابت کنید.

اگر $R$ یک رابطه هم ارز روی یک مجموعه بی کران $A$ باشد ، پس $R$ بی نهایت کلاس های هم ارز دارد.

۷ - فرض کنید $R$ یک رابطه هم ارز روی یک مجموعه کران دار $A$ باشد ، و تعداد اعضای همه کلاس های هم ارز، $m$ باشد. $|R|$ را بر حسب $m$ و $|A|$ بیان کنید.

۸ - فرض کنید $R$ یک رابطه هم ارز روی یک مجموعه $A$ باشد، با چهار کلاس هم ارز. چند رابطه مختلف $S$ روی $A$ وجود دارد ، بطوری که $R \subseteq S$ باشد؟

**پاسخ تمرینات ۷.۳**

**تمرینات ۷.۳**

۱- فرض کنید $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ باشد و رابطه هم ارز روی $A$ به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$R = \{(۱,۱), (۲,۲), (۳,۳), (۴,۴), (۵,۵), (۶,۶), (۲,۳), (۳,۲), (۴,۵), (۵,۴), (۴,۶), (۶,۴), (۵,۶), (۶,۵)\}$$

کلاس های هم ارز $R$ را ردیف کنید.

**پاسخ**

کلاس های هم ارز عبارتند از

$$[۱] = \{۱\}; \quad [۲] = [۳] = \{۲,۳\}; \quad [۴] = [۵] = [۶] = \{۴,۵,۶\}$$

۲ - فرض کنید $A = \{a, b, c, d, e\}$ باشد. فرض کنید $R$ یک رابطه هم ارز روی $A$ باشد. و فرض کنید $R$ سه کلاس هم ارز داشته باشد. همچنین $aRd$ و $bRc$ باشد. $R$ را به عنوان یک مجموعه بنویسید.

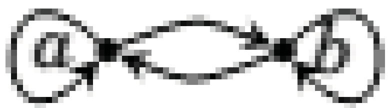
**پاسخ**

$$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,d), (d,a), (b,c), (c,b)\}$$

۳ - تعداد دو رابطه هم ارز متفاوت روی مجموعه $A = \{a, b\}$ وجود دارد. آنها را توصیف کنید. گراف کافی است.

**پاسخ**

$$R = \{(a,a), (b,b)\} \qquad R = \{(a,a), (b,b), (a,b), (b,a)\}$$




۴ - یک رابطه $R$ روی $\mathbb{Z}$ به صورت $xRy$ تعریف کنید ،بطوری که اگر و فقط اگر $۳x - ۵y$ زوج باشد. ثابت کنید $R$ یک رابطه هم ارز است. کلاس های هم ارز را توصیف کنید.

**پاسخ**

برای این که ثابت کنیم $R$ یک رابطه هم ارز است ، باید نشان دهیم $R$ انعکاسی ، متقارن و انتقالی است.

رابطه $R$ انعکاسی است ، به دلیل زیر.

اگر $x \in \mathbb{Z}$ است ، پس $۳x - ۵x = -۲x$ زوج است. اما ، اگر $۳x - ۵x$ زوج است ، پس داریم $xRx$ و لذا $R$ انعکاسی است.

برای این که ببینیم $R$ متقارن است ، فرض می کنیم $xRy$ باشد. باید نشان دهیم که $yRx$ است. چون $xRy$ است ، می دانیم که $۳x - ۵x$ زوج است ،پس $۳x - ۵y = ۲a$ است ، برای یک عدد صحیح $a$ حالا داریم.

$$۳x - ۵y = ۲a$$

$$۳x - ۵y + ۸y - ۸x = ۲a + ۸y - ۸x$$
$$۳y - ۵x = ۲(a + ۴y - ۴x)$$

از رابطه بالا ، نتیجه می گیریم $۳y - ۵x$ زوج است ، پس داریم $yRx$ پس نشان داده ایم که $xRy \Rightarrow yRx$ لذا $R$ متقارن است.

برای نشان دادن $R$ انتقالی است ، فرض می کنیم داریم $xRy$ و $yRz$. نشان می دهیم که پس خواهیم داشت $xRz$

چون داریم $xRy\ , yRz$ نتیجه می شود که $۳x - ۵y$ و $۳y - ۵z$ هر دو ، زوج هستند. پس داریم $۳x - ۵y = ۲a$ و $۳y - ۵z = ۲b$. هر دو رابطه را با هم جمع می کنیم ، پس داریم.

$$(۳x - ۵y) + (۳y - ۵z) = ۲a + ۲b$$
$$۳x - ۵z = ۲(a + b + y)$$

لذا $۳x - ۵z$ زوج است. و در نهایت داریم $xRz$. نشان دادیم اگر $xRy$ و $yRz$ باشد ، پس $xRz$ است. یعنی $R$ انتقالی است.

پس نشان دادیم ، $R$ انعکاسی ، متقارن و انتقالی است. و لذا $R$ یک رابطه هم ارز است.این قسمت اول مساله را کامل می کند. حالا به قسمت دوم می پردازیم.

برای پیدا کردن کلاس های هم ارز ، ابتدا توجه کنید که

$$[0] = \{x \in \mathbb{Z}: xR0\} = \{x \in \mathbb{Z}: ۳x - ۵ * 0 \text{ زوج است}\} = \{x \in \mathbb{Z}: ۳x \text{ زوج است}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{Z}: x \text{ زوج است}\}$$

پس کلاس هم ارز $[0]$ شامل تمام اعداد صحیح زوج است. سپس توجه کنید که

$$[۱] = \{x \in \mathbb{Z}: xR۱\} = \{x \in \mathbb{Z}: ۳x - ۵ * ۱ \text{ زوج است}\} = \{x \in \mathbb{Z}: ۳x - ۵ \text{ زوج است}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{Z}: x \text{ فرد است}\}$$

پس کلاس هم ارز $[۱]$ شامل تمام اعداد صحیح فرد است. در نتیجه دو کلاس هم ارز وجود دارد

$$\{\cdots, -۴, -۲, 0, ۲, ۴, \cdots\} \text{ و } \{\cdots, -۳, -۱, ۱, ۳, ۵, \cdots\}$$

۵ - یک رابطه $R$ روی $\mathbb{Z}$ به صورت $xRy$ اگر و فقط اگر $۴|(x + ۳y)$ باشد. ثابت کنید $R$ یک رابطه هم ارزاست. کلاس های هم ارز را توصیف کنید.

**پاسخ**

این رابطه ، انعکاسی است ، زیرا برای $x \in \mathbb{Z}$ داریم $۴|(x + ۳x)$ پس $xRx$ است.

برای اثبات این که $R$ متقارن است ، فرض کنید ، $xRy$. پس $۴|(x + ۳y)$. لذا $x + ۳y = ۴a$ است. طرفین را در ۳ ضرب می کنیم. پس داریم. $۳x + ۹y = ۱۲a$ یا $y + ۳x = ۱۲a - ۸y$ یا $y + ۳x = ۴(۳a - ۲y)$ پس $۴|(y + ۳x)$ لذا $yRx$. پس نشان دادیم $xRy \Rightarrow yRx$ یعنی $R$ متقارن است.

برای اثبات انتقالی ، فرض کنید $xRy$ و $yRz$ باشد. پس $۴|(x + ۳y)$ و $۴|(y + ۳z)$, پس $x + ۳y = ۴a$ و $y + ۳z = ۴b$. دو تساوی را با هم جمع می کنیم.

$$x + ۴y + ۳z = ۴a + ۴b$$
$$x + ۳z = ۴a + ۴b - ۴y = ۴(a + b - y)$$

در نتیجه $۴|(x+۳z)$ پس $xRz$, یعنی $R$ انتقالی است.
چون $R$ انعکاسی ، متقارن و انتقالی است ، پس $R$ یک رابطه هم ارز است. حالا کلاس های هم ارز را محاسبه می کنیم.

$$[0]=\{x\in\mathbb{Z}:xR0\}=\{x\in\mathbb{Z}:4\mid(x+3\cdot 0)\}=\{x\in\mathbb{Z}:4\mid x\}=\quad\{\ldots-4,0,4,8,12,16\ldots\}$$

$$[1]=\{x\in\mathbb{Z}:xR1\}=\{x\in\mathbb{Z}:4\mid(x+3\cdot 1)\}=\{x\in\mathbb{Z}:4\mid(x+3)\}=\{\ldots-3,1,5,9,13,17\ldots\}$$

$$[2]=\{x\in\mathbb{Z}:xR2\}=\{x\in\mathbb{Z}:4\mid(x+3\cdot 2)\}=\{x\in\mathbb{Z}:4\mid(x+6)\}=\{\ldots-2,2,6,10,14,18\ldots\}$$

$$[3]=\{x\in\mathbb{Z}:xR3\}=\{x\in\mathbb{Z}:4\mid(x+3\cdot 3)\}=\{x\in\mathbb{Z}:4\mid(x+9)\}=\{\ldots-1,3,7,11,15,19\ldots\}$$

۶ - صحت یا عدم صحت گزاره زیر را ثابت کنید.
اگر $R$ یک رابطه هم ارز روی یک مجموعه بی کران $A$
باشد ، پس $R$ بی نهایت کلاس های هم ارز دارد.

**پاسخ**

**این گزاره غلط است. مثال نقیض**

رابطه $\equiv (mod\ ۲)$ را در نظر بگیرید. این یک رابطه روی مجموعه بی کران $\mathbb{Z}$ است. اما این رابطه فقط دو کلاس هم ارز دارد.

۷ - فرض کنید $R$ یک رابطه هم ارز روی یک مجموعه کران دار $A$ باشد ، و تعداد اعضای همه کلاس های هم ارز، $m$ باشد. $|R|$ را بر حسب $m$ و $|A|$ بیان کنید.

**پاسخ**

$$|R|=m|A|$$

۸ - فرض کنید $R$ یک رابطه هم ارز روی یک مجموعه $A$ باشد، با چهار کلاس هم ارز. چند رابطه مختلف $S$ روی $A$ وجود دارد ، بطوری که $R\subseteq S$ باشد؟

**پاسخ**

۱۵

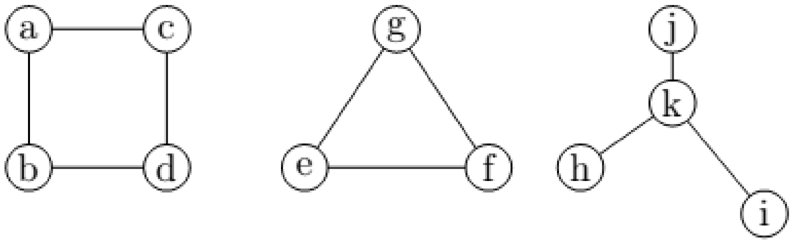
## ۷.۴ ـ کلاس های هم ارز و افراز ها Equivalence Classes and Partitions

کلمه افراز به کسر الف یعنی جدا کردن ، تفکیک کردن ، دسته بندی کردن مثلا اگر

$$A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k\}$$

باشد ، یک افراز می تواند مطابق زیر باشد.

$$\{\{a, b, c, d\}, \{e, f, g\}, \{h, i, j, k\}\}$$



**قضیه ۷.۴.۱**
فرض کنید $R$ یک رابطه هم ارز روی یک مجموعه $A$ باشد. همچنین فرض کنید $a, b, \in A$ باشد.
پس $[a] = [b]$ است ، اگر و فقط اگر $aRb$ باشد.

**اثبات**
فرض می کنیم $[a] = [b]$ باشد. می دانید که بر اساس خاصیت انعکاسی $R$ داریم $aRa$ , پس

$$a \in \{x \in A: xRa\} = [a] = [b] = \{x \in A: xRb\}$$

اما $a$ در مجموعه $\{x \in A: xRb\}$ بودن یعنی $aRb$ ، این قسمت اول قضیه را ثابت می کند.
حال بر عکس ، فرض می کنیم $aRb$ باشد. باید نشان دهیم $[a] = [b]$ است. برای این کار ، نشان می دهیم $[a] \subseteq [b]$ و $[b] \subseteq [a]$ است.
ابتدا نشان می دهیم $[a] \subseteq [b]$ است. فرض کنید $c \in [a]$ باشد. چون داریم

$$c \in [a] = \{x \in A: xRa\}$$

پس $cRa$ است. حالا داریم $cRa$ و $aRb$ , پس بر اساس انتقالی بودن $R$ داریم $cRb$ ، اما $cRb$ یعنی $c \in \{x \in A: xRb\} = [b]$ این نشان می دهد $c \in [a]$ یعنی $c \in [b]$ , پس $[a] \subseteq [b]$ است.
حالا نشان می دهیم که $[b] \subseteq [a]$ است. فرض کنید $c \in [b]$ باشد. چون داریم

$$c \in [b] = \{x \in A: xRb\}$$

پس داریم $cRb$ ، بخاطر داشته باشید که فرض می کنیم $aRb$ است. پس چون $R$ متقارن است ، پس $bRa$ است. حالا داریم $cRb$ و $bRa$ پس چون $R$ انتقالی است ، پس $cRa$ ، اما $cRa$ یعنی $c \in \{x \in A: xRa\} = [a]$ ، این نشان می دهد $c \in [b]$ یعنی $c \in [a]$ لذا $[b] \subseteq [a]$ است. و در نهایت نتیجه می گیریم $[a] = [b]$ است.

برای روشن شدن قضیه ۷.۴.۱ به خاطر دارید که روی کلاس های هم ارز $\equiv (mod\ ۳)$ در پایان بخش ۷.۳ کار کردیم و مشاهده کردیم که

$$[-۳] = [۹] = \{\cdots, -۳, 0, ۳, ۶, ۹, \cdots\}$$

ملاحظه می کنید که $[۹] = [-۳]$ و $۹ \equiv -۳ \ (mod\ ۳)$ است. همان طور که قضیه ۷.۴.۱ پیش بینی می کند. این قضیه ما را مطمئن می کند که این موضوع برای هر رابطه هم عرض کار می کند.

موضوع دیگری که اینجا مطرح می کنیم ، در مورد این حقیقت است که یک رابطه هم ارز روی یک مجموعه $A$ , این مجموعه را به کلاس های هم ارز متعدد تقسیم می کند. یک لغت مخصوص برای این نوع موقعیت وجود دارد.

**تعریف ۷.۴.۱**
یک افراز **A Partition** یک مجموعه $A$ عبارت است از یک مجموعه نا تهی زیر مجموعه های $A$ , بطوری که اتحاد تمام این زیر مجموعه ها مساوی $A$ است ، اشتراک هر دو زیر مجموعه متفاوت $\emptyset$ است.

**مثال ۷.۴.۱**
فرض می کنیم $A = \{a, b, c, d\}$ باشد. یک افراز $A$ می تواند $\{\{a, b\}, \{c, \}, \{d\}\}$ باشد. این یک مجموعه از سه زیر مجموعه های $A$ , یعنی $\{d\}$ و $\{c\}$ , $\{a, b\}$ است. اتحاد این سه زیر مجموعه مساوی $A$
است. فصل مشترک هر دو زیر مجموعه ، تهی است.
افراز های دیگر ، می توانند به صورت زیر باشند.

$$\{\{a,b\},\{c,d\}\}, \quad \{\{a,c\},\{b\},\{d\}\}, \quad \{\{a\},\{b\},\{c\}\{d\}\}, \quad \{\{a,b,c,d\}\},$$

بطور ساده ، افراز یعنی تقسیم $A$ به قسمت ها یا بخش ها.

**مثال ۷.۴.۲**
رابطه های هم ارز جدول ۷.۳.۱ بخش ۷.۳ را به خاطر بیاورید. هر کدام از این ها یک رابطه روی مجموعه $A = \{-۱, ۱, ۲, ۳, ۴\}$ هستند. کلاس های هم ارز هر رابطه در ستون سمت راست ردیف شده اند. ملاحظه می کنید که در هر حالت ، مجموعه کلاس های هم ارز تشکیل یک افراز $A$ می دهد. مثلا ، رابطه $R_۱$ افراز $\{\{-۱\}, \{۱\}, \{۲\}, \{۳\}, \{۴\}\}$ را ایجاد می کند. همچنین ، کلاس های هم ارز $R_۲$ تشکیل افراز $\{\{-۱, ۱, ۳\}, \{۲, ۴\}\}$ می دهند.

**مثال ۷.۴.۳**
بخاطر آورید که روی کلاس های هم ارز رابطه $\equiv (mod\ ۳)$ روی مجموعه $\mathbb{Z}$ کار کردیم. این کلاس های هم ارز ، افراز $\mathbb{Z}$ را مطابق ذیل می دهند.

$$\{\{\ldots,-3,0,3,6,9,\ldots\},\{\ldots,-2,1,4,7,10,\ldots\},\{\ldots,-1,2,5,8,11,\ldots\}\}.$$

می توانیم آنرا فشرده تر به صورت $\{\{0\},\{۱\},\{۲\}\}$ بنویسیم.

مثال ها به ما می گویند که کلاس های هم ارز یک رابطه هم ارز روی یک مجموعه ، یک افراز آن مجموعه را تشکیل می دهند. پس به قضیه زیر می رسیم.

**قضیه ۷.۴.۲**
فرض کنید $R$ یک رابطه هم ارز روی یک مجموعه $A$ باشد. پس مجموعه کلاس های هم ارز $R$ یعنی $\{[a]: a \in A\}$ تشکیل یک افراز $A$ می دهد.

**اثبات**
برای این که نشان دهیم $\{[a]: a \in A\}$ یک افراز $A$ است، باید دو چیز را نشان دهیم. اولا، باید نشان دهیم اتحاد همه مجموعه های $[a]$ مساوی $A$ است. وثانیا نشان دهیم اگر $[b] \neq [a]$ باشد ، پس $[a] \cap [b] = \emptyset$ است.

اتحاد تمام مجموعه های $[a]$ با نماد $\cup_{a\in A}[a]$ نشان داده می شود. پس باید ثابت کنیم $\cup_{a\in A}[a] = A$ است.
فرض می کنیم $x \in \cup_{a\in A}[a]$ باشد. این یعنی $x \in [a]$ است برای یک $a \in A$. چون $[a] \subseteq A$ است ، پس $x \in A$ است. لذا $\cup_{a\in A}[a] \subseteq A$ است. از طرف دیگر ، فرض می کنیم $x \in A$ باشد. چون $x \in [x]$ است ، می دانیم $x \in [a]$ است برای یک $a \in A$. لذا $x \in \cup_{a\in A}[a]$ است. این نشان می دهد که $A \subseteq \cup_{a\in A}[a]$ است. چون داریم $\cup_{a\in A}[a] \subseteq A$ و $A \subseteq \cup_{a\in A}[a]$ در نتیجه $\cup_{a\in A}[a] = A$ است.
حالا باید نشان دهیم اگر $[b] \neq [a]$ باشد ، پس $[a] \cap [b] = \emptyset$ است. از طریق برهان خلف. فرض می کنیم $[a] \cap [b] \neq \emptyset$ پس یک $c$ وجود دارد ، بطوری که $c \in [a] \cap [b]$ است. پس $c \in [a]$ و $c \in [b]$ است. خوب ، $c \in [a]$ یعنی $cRa$ و پس $aRc$ است ، چون $R$ قرینه است. همچنین $c \in [b]$ یعنی $cRb$. حالا داریم $aRc$ و $cRb$, پس $aRb$ زیرا $R$ انتقالی است. پس بر اساس قضیه ۷.۴.۱ بالا ، $aRb$ یعنی $[a] = [b]$. پس فرض ما $[a] \neq [b]$ صحیح نیست.

قضیه ۷.۴.۲ می گوید کلاس های هم ارز هر رابطه هم ارز روی یک مجموعه $A$ تشکیل یک افراز $A$ می دهد. و بر عکس هر افراز $A$, یک رابطه هم ارز $R$ را توصیف می کند ، بطوری که $xRy$ اگر و فقط اگر $x$ و $y$ متعلق به همان مجموعه در افراز باشد.

**تمرینات** ۷.۴

۱ - تمام افراز های مجموعه $A = \{a, b\}$ را بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ تمرین شماره ۳ بخش ۷.۳ مقایسه کنید .

۲ - افراز $\mathbb{Z}$ که نتیجه رابطه هم ارز $\equiv (mod\ ۴)$ است را توصیف کنید.

۳ - افراز زیر که یک افراز $\mathbb{Z}$ است را ملاحظه کنید.

$$P = \{\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}, \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}\}$$

فرض کنید $R$ رابطه هم ارز ی است که کلاسهای هم ارز آن ، دو عضو $P$ هستند. $R$ کدام رابطه هم ارز آشنا است؟

**پاسخ تمرینات** ۷.۴

۱ - تمام افراز های مجموعه $A = \{a, b\}$ را بنویسید. پاسخ خود را با پاسخ تمرین شماره ۳ بخش ۷.۳ مقایسه کنید .

**پاسخ**

فقط دو افراز وجود دارد $\{[a], [b]\}$ و $\{\{a, b\}\}$ ، این ها با رابطه های هم ارز $R_۱ = \{(a, a), (b, b)\}$ و $R_۲ = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$ هم خوانی دارند.

۲ - افراز $\mathbb{Z}$ که نتیجه رابطه هم ارز $\equiv (mod\ ۴)$ است را توصیف کنید.

**پاسخ**

$$\{\{\dots, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}, \{\dots, -3, 1, 5, 9, 13, \dots\}, \{\dots, -2, 2, 4, 6, 10, 14, \dots\}, \{\dots, -1, 3, 7, 11, 15, \dots\}\}$$

۳ - افراز زیر که یک افراز $\mathbb{Z}$ است را ملاحظه کنید.

$$P = \{\{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}, \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}\}$$

فرض کنید $R$ رابطه هم ارز ی است که کلاسهای هم ارز آن ، دو عضو $P$ هستند. $R$ کدام رابطه هم ارز آشنا است؟

**پاسخ**

$$\equiv (mod\ ۲)$$

## ۷.۵ - همنهشتی اعداد صحیح به پیمانه $n$ The Integers Modulo n

در قضیه ۷.۲.۱ بخش ۷.۲ ثابت کردیم برای یک $n \in \mathbb{N}$, رابطه $\equiv (mod\ n)$, انعکاسی ، متقارن و انتقالی است ، پس یک رابطه هم ارز است. این یک رابطه مهم در ریاضیات است. در این بخش ، به چند خصوصیات آن می پردازیم.

برای آسان کردن موضوع ، یک عدد مثلا $n = ۵$ انتخاب می کنیم. حالا به کلاس های هم ارز رابطه $\equiv (mod\ ۵)$ نگاه می کنیم. پنج کلاس هم ارز وجود دارد، ,آنها به صورت زیر هستند.

$$\begin{array}{lllllll}
[0] & = & \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \ (\text{mod } 5))\} & = & \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid (x-0)\} & = & \{\ldots,-10,-5,0,5,10,15,\ldots\}, \\
[1] & = & \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1 \ (\text{mod } 5))\} & = & \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid (x-1)\} & = & \{\ldots,\ -9,-4,1,6,11,16,\ldots\}, \\
[2] & = & \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2 \ (\text{mod } 5))\} & = & \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid (x-2)\} & = & \{\ldots,\ -8,-3,2,7,12,17,\ldots\}, \\
[3] & = & \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 3 \ (\text{mod } 5))\} & = & \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid (x-3)\} & = & \{\ldots,\ -7,-2,3,8,13,18,\ldots\}, \\
[4] & = & \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 4 \ (\text{mod } 5))\} & = & \{x \in \mathbb{Z} : 5 \mid (x-4)\} & = & \{\ldots,\ -6,-1,4,9,14,19,\ldots\}.
\end{array}$$

ملاحظه می کنید که این کلاس های هم ارز ، تشکیل یک افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ را می دهند. این کلاس های هم ارز را $[0], [۱], [۲], [۳]$و$[۴]$ نامگزاری می کنیم. البته به طرق دیگر هم می توان آنها را نامگزاری کرد. مثلا $[۱۵] = [۱۰] = [۵] = [0]$ و غیرو و یا $[۱] = [۶] = [-۴]$ و غیرو اما برای بحث ، ما پنج کلاس $[0], [۱], [۲], [۳]$و$[۴]$ در نظر می گیریم.

این پنج کلاس تشکیل یک مجموعه می دهند ، که ما آنها را $\mathbb{Z}_۵$ می نامیم. پس

$$\mathbb{Z}_۵ = \{[0], [۱], [۲], [۳], [۴]\}$$

یک مجموعه پنج مجموعه ای است. چیز جالب در مورد $\mathbb{Z}_۵$ این است که ، گر چه اعضای آن ، خود مجموعه هستند ، می توان آنها را جمع یا ضرب کرد. توجه داشته باشید که اعضای $\mathbb{Z}_۵$ عدد نیستند ، بلکه مجموعه هستند.

در حقیقت ، قاعده زیر را می توان برای جمع و ضرب اعضای $\mathbb{Z}_۵$ تعریف کرد.

$$\begin{array}{rcl}
[a]+[b] & = & [a+b] \\
[a]\cdot[b] & = & [a\cdot b]
\end{array}$$

مثلا $[۳] = [۲ + ۱] = [۱] + [۲]$ و $[۴] = [۲ * ۲] = [۲] * [۲]$

مجددا اصرار می کنیم ، مجموعه ها را جمع و ضرب می کنیم ، نه اعداد. یا بهتر است بگوییم ، کلاس های هم ارز را جمع و ضرب می کنیم ، نه اعداد را. با جمع و ضرب کردن دو عضو $\mathbb{Z}_۵$, یک عضو دیگر $\mathbb{Z}_۵$ بدست می آوریم.

یک مثال که مستلزم دقت بیشتری است. ملاحظه کنید $[۵] = [۳] + [۲]$ ، اینجا اعضای $[۲], [۳] \in \mathbb{Z}_۵$ را جمع کردیم و عضو $[۵] \in \mathbb{Z}_۵$ بدست آوردیم. اما این پاسخ ما یعنی $[۵]$ در

مجموعه $\{[0],[۱],[۲],[۳],[۴]\}$ $\mathbb{Z}_۵ =$ کجا است؟ چون $[0]=[۵]$ است ، مناسب تر است بنویسیم $[0]=[۳]+[۲]$ است.
به همین طریق ، $[۶]=[۳]*[۲]$ باید بنویسیم $[۱]=[۳]*[۲]$ زیرا $[۱]=[۶]$ است. مهارت خود را با جدول های جمع و ضرب $\mathbb{Z}_۵$ امتحان کنید.

**جدول های جمع و ضرب $\mathbb{Z}_۵$**

| $+$ | $[0]$ | $[1]$ | $[2]$ | $[3]$ | $[4]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $[0]$ | $[0]$ | $[1]$ | $[2]$ | $[3]$ | $[4]$ |
| $[1]$ | $[1]$ | $[2]$ | $[3]$ | $[4]$ | $[0]$ |
| $[2]$ | $[2]$ | $[3]$ | $[4]$ | $[0]$ | $[1]$ |
| $[3]$ | $[3]$ | $[4]$ | $[0]$ | $[1]$ | $[2]$ |
| $[4]$ | $[4]$ | $[0]$ | $[1]$ | $[2]$ | $[3]$ |

| $\cdot$ | $[0]$ | $[1]$ | $[2]$ | $[3]$ | $[4]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $[0]$ | $[0]$ | $[0]$ | $[0]$ | $[0]$ | $[0]$ |
| $[1]$ | $[0]$ | $[1]$ | $[2]$ | $[3]$ | $[4]$ |
| $[2]$ | $[0]$ | $[2]$ | $[4]$ | $[1]$ | $[3]$ |
| $[3]$ | $[0]$ | $[3]$ | $[1]$ | $[4]$ | $[2]$ |
| $[4]$ | $[0]$ | $[4]$ | $[3]$ | $[2]$ | $[1]$ |

ما مجموعه $\mathbb{Z}_۵ = \{[0],[۱],[۲],[۳],[۴]\}$ را **همنهشتی اعداد صحیح به پیمانه** ۵ می نامیم. همان طور که جدول بالا نشان می دهد ، $\mathbb{Z}_۵$ بیش از یک مجموعه است. این خود یک سیستم اعداد است با جمع و ضرب مخصوص به خود. به این طریق این مثل همان $\mathbb{Z}$ آشنا است که مجهز به یک جمع و ضرب مخصوص به خود است.
البته این تنها مخصوص عدد ۵ نیست. می توانیم $\mathbb{Z}_n$ برای هر عدد طبیعی $n$ تعریف کنیم. این تعریف کلی است.

**تعریف ۷.۵.۱**
فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ باشد. کلاس های هم ارز رابطه هم ارز $\equiv (mod\ n)$ عبارتند از

$$[0],[۱],[۲],\cdots,[n-۱]$$

**همنهشتی اعداد صحیح به پیمانه $n$** عبارت است از $\mathbb{Z}_n = \{[0],[۱],[۲],\cdots,[n-۱]\}$
اعضای $\mathbb{Z}_n$ می توانند بر اساس قاعده $[a]+[b]=[a+b]$ جمع و بر اساس قاعده

$$[a]*[b]=[a*b]$$

ضرب شوند .

اگر یک عدد طبیعی $n$ داشته باشیم ، مجموعه $\mathbb{Z}_n$ عبارت است از یک سیستم اعداد که شامل $n$ عضو است. این مجموعه دارای بسیاری از خصوصیات $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ ، $\mathbb{Z}$ می باشد. مثلا ، ممکن است تا بحال متوجه شده اید که $\mathbb{Z}_n$ قواعد جابجایی را دارا است. یعنی

$$[a] + [b] = [b] + [a]$$
$$[a] * [b] = [b] * [A]$$

همچنین می توانید نشان دهید خاصیت بخش پذیری را هم دارا است. مطابق زیر

$$\begin{aligned}[a]\cdot([b]+[c]) &= [a]\cdot[b+c] \\ &= [a(b+c)] \\ &= [ab+ac] \\ &= [ab]+[ac] \\ &= [a]\cdot[b]+[a]\cdot[c].\end{aligned}$$

**تمرینات ۷.۵**

۱ - جدول های جمع و ضرب $\mathbb{Z}_۲$ را بنویسید.

۲ -جدول های جمع و ضرب $\mathbb{Z}_۴$ را بنویسید.

۳ - فرض کنید $[a],[b] \in \mathbb{Z}_۵$ و $[a] * [b] = [0]$ باشد. آیا الزاما صحیح است بگوییم یا $[a] = [0]$ است و یا $[b] = [0]$ است؟

۴ - محاسبات زیر را در $\mathbb{Z}_۹$ انجام دهید. پاسخ های خود را بصورت $[a]$ با $0 \le a \le ۸$ بنویسید.

**(a)** $[8]+[8]$　**(b)** $[24]+[11]$　**(c)** $[21]\cdot[15]$　**(d)** $[8]\cdot[8]$

## پاسخ تمرینات ۷.۵

۱ - جدول های جمع و ضرب $\mathbb{Z}_۲$ را بنویسید.

**پاسخ**

| + | [0] | [1] |
|---|---|---|
| [0] | [0] | [1] |
| [1] | [1] | [0] |

| · | [0] | [1] |
|---|---|---|
| [0] | [0] | [0] |
| [1] | [0] | [1] |

۲ -جدول های جمع و ضرب $\mathbb{Z}_۴$ را بنویسید.

**پاسخ**

| + | [0] | [1] | [2] | [3] |
|---|---|---|---|---|
| [0] | [0] | [1] | [2] | [3] |
| [1] | [1] | [2] | [3] | [0] |
| [2] | [2] | [3] | [0] | [1] |
| [3] | [3] | [0] | [1] | [2] |

| · | [0] | [1] | [2] | [3] |
|---|---|---|---|---|
| [0] | [0] | [0] | [0] | [0] |
| [1] | [0] | [1] | [2] | [3] |
| [2] | [0] | [2] | [0] | [2] |
| [3] | [0] | [3] | [2] | [1] |

۳ - فرض کنید $[a],[b] \in \mathbb{Z}_۵$ و $[a] * [b] = [0]$ باشد. آیا الزاما صحیح است بگوییم یا $[a] = [0]$ است و یا $[b] = [0]$ است؟

**پاسخ**

جدول ضرب $\mathbb{Z}_۵$ که در همین بخش آمده است ، نشان می دهد ، که تنها جایی که $[0]$ رخ داده است در اولین ستون و اولین ردیف است. ابتدای آن ردیف و ستون $[0]$ است. پس اگر $[a] * [b] = [0]$ است ، باید یا $[a]$ یا $[b]$ صفر باشد.

۴ - محاسبات زیر را در $\mathbb{Z}_۹$ انجام دهید. پاسخ های خود را بصورت $[a]$ با $0 \leq a \leq ۸$ بنویسید.

**(a)** $[8]+[8]$　**(b)** $[24]+[11]$　**(c)** $[21]\cdot[15]$　**(d)** $[8]\cdot[8]$

**پاسخ**

**(a)** $[8]+[8]=[7]$　**(b)** $[24]+[11]=[8]$　**(c)** $[21]\cdot[15]=[0]$　**(d)** $[8]\cdot[8]=[1]$

## ۷.۶ - رابطه بین مجموعه ها Relations between Sets

در ابتدای این فصل گفتیم رابطه روی یک مجموع $A$ عبارت است از یک زیر مجموعه $R \subseteq A \times A$ این تعریف ، یک چهار چوب ایجاد کرد که بتواند مدلی باشد برای حالت هایی که در آن عناصر $A$ با خودشان مقایسه می شوند. با این تعریف ، گزاره $xRy$ عناصر $x$ و $y$ از مجموعه $A$ در طرفین $R$ قرار دارند ، زیرا $R$ اعضای $A$ را با هم مقایسه می کند. اما نماد های رابطه ای هستند که به این طریق کار نمی کنند. نماد $\in$ را در نظر بگیرید. گزاره $۵ \in \mathbb{Z}$ یک رابطه بین ۵ و $\mathbb{Z}$ بیان می کند. یعنی می گوید عنصر ۵ در مجموعه $\mathbb{Z}$ است. اما ۵ و $\mathbb{Z}$ به هیچ عنوان ، عناصریک مجموعه $A$ قلمداد نمی شوند. برای رفع این مشکل ، یک رابطه روی $A$ به ارتباط از $A$ به $B$ تعمیم می دهیم.

**تعریف** ۷. ۶. ۱

یک **رابطه** از یک مجموعه $A$ به یک مجموعه $B$ عبارت است از یک زیر مجموعه $R \subseteq A \times B$ اغلب عبارت $(x,y) \in R$ را به صورت خلاصه $xRy$ می نویسیم. و عبارت $(x,y) \notin R$ را به صورت خلاصه $x \not R y$ می نویسیم.

این تعریف هم در مورد تابع ها که در فصل بعد مورد بحث قرار می گیرند ، کاربرد دارد.

**مثال** ۷. ۶. ۱

فرض کنید $A = \{۱,۲\}$ و $B = \wp(A) = \{\emptyset, \{۱\}, \{۲\}, \{۱,۲\}\}$ باشد. یک رابطه از $A$ به $B$ به شکل زیر است.

$$R = \{(1,\{1\}),(2,\{2\}),(1,\{1,2\}),(2,\{1,2\})\} \subseteq A \times B.$$

توجه کنید که داریم $۲R\{۱,۲\}$ و $۱R\{۱,۲\}$ ، $۲R\{۲\}$ ، $۱R\{۱\}$

گراف رابطه از $A$ به $B$ با گراف رابطه روی $A$ فرق دارد. چون دو مجموعه $A$ و $B$ در یک رابطه از $A$ به $B$ وجود دارد ، باید رئوس با نام ، برای هر دو مجموعه رسم کنیم. و سپس هر گاه داشته باشیم $xRy$ از $x$ به $y$ بردار رسم کنیم. گراف زیر مثال ۷. ۶. ۱ را توضیح می دهد.

**گراف ۷. ۶. ۱ یک رابطه از $A$ به $B$**