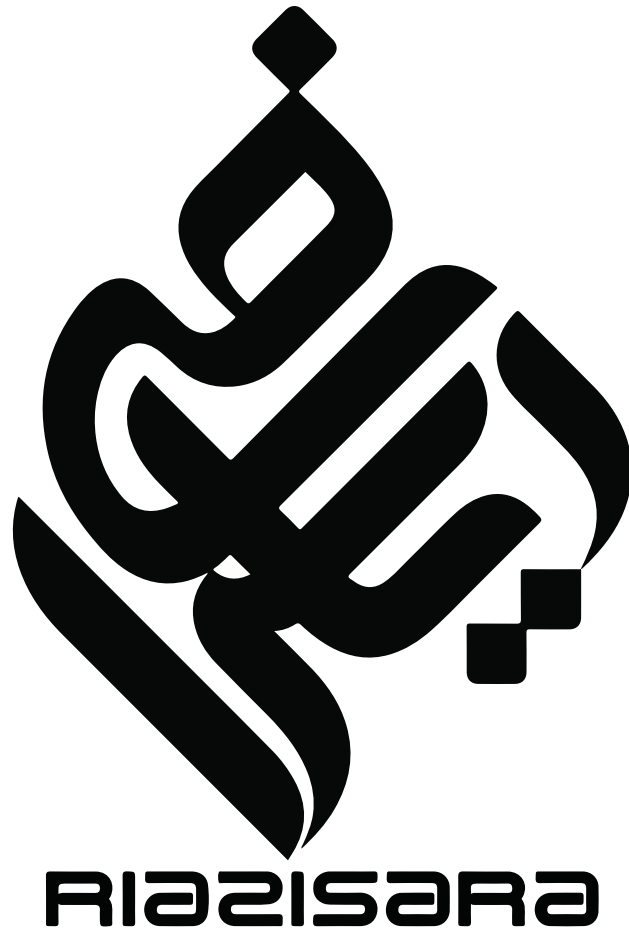




سایت ویژه ریاضیات www.riazisara.ir

درسنامه ها و جزوه های ریاضی
سوالات و پاسخنامه تشریحی کنکور
نمونه سوالات امتحانات ریاضی
نرم افزارهای ریاضیات
و...

ریاضی سرا در تلگرام: (@riazisara)

<https://t.me/riazisara>



ریاضی سرا در اینستاگرام: (@riazisara.ir)

<https://www.instagram.com/riazisara.ir>



فصل ششم

مقدمه ای بر تئوری گراف

Introduction to Graph Theory

بخش اول

گراف ها و زیر گراف ها

Graphs and Subgraphs

مقدمه - در ریاضیات کلمه **گراف** *Graph* دو معنی دارد. یک معنی گراف عبارت است از یک وسیله تصویری که ارتباط بین دو یا چند متغیر را توصیف می کند ، مانند گراف یک تابع ، ما این نوع گراف در جبر و حسابان دیده ایم. لذا برای رفع ابهام ، ما این نوع گراف را در جبر و حسابان **نمودار** نامیدیم.

معنی دیگر ، گراف عبارت است از مجموعه ای از گره ها و خطوط که این گره ها را به هم وصل می کنند. پس در ریاضیات گسسته به این نوع نمایش تصویری ، **گراف** می گوئیم.

گراف ها مهم هستند ، زیرا آنها ارتباط بین اشیایی را به تصویر می کشند که به هیچ طریق دیگری در حساب یا جبر یا حسابان به تنهایی ممکن نیست.

یک ملکول ، یک گراف است. گره ها اتم ها هستند و یال ها ارتباط بین اتم ها هستند.

نقشه پرواز یک هوا پیمایک گراف است. شهر ها ، گره ها هستند و یال ها ، مسیر بین شهر ها.

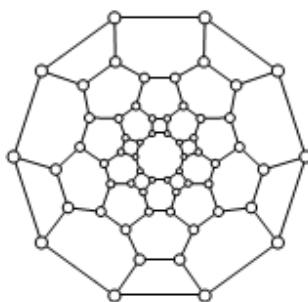
شجره خانوادگی شما یک گراف است.

در علوم کمپیوتری ، **ساختمان داده ها** *Data Structures* را می توان گراف تصور کرد.

در ریاضیات ، خصوصیات گراف ها **تئوری گراف ها** *Graph Theory* نامیده می شوند.

گر چه چند مقاله در مورد گراف ها از نیمه قرن نوزدهم باقی است ، اما مطالعه جدی و کاربرد گراف از سال ۱۹۵۰ شروع می شود.

یک گراف



۶.۱ - گراف ها و زیر گراف ها **Graphs and Subgraphs**

در گراف، به هر گره **Node**، **Vertex**، **راس** می گویند. جمع راس را، **Vertices** می نامند. گراف ها را معمولاً با حروف بزرگ نامگذاری می کنند مانند G یا H

برای مشخص کردن یک گراف، معمولاً آنرا با رئوس و یال‌های **Edges** آن توصیف می‌کنند. در زیر تعریف گراف را ملاحظه می‌کنید.

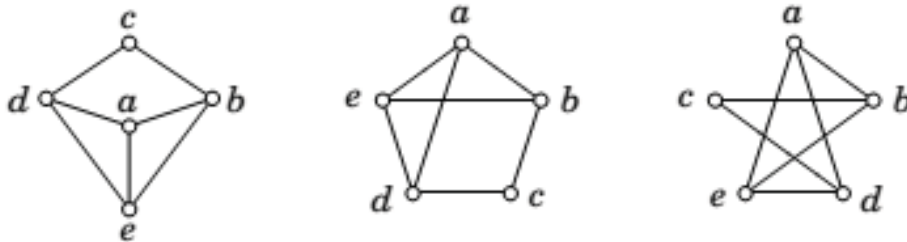
تعریف ۶.۱.۱

یک گراف Graph عبارت است از یک مجموعه متناهی $V(G)$ از اشیاء، بنام رئوس با یک مجموعه $E(G)$ دو عضوی زیر مجموعه $V(G)$ بنام یال‌ها. یک یال $\{x, y\} \in E(G)$ را به صورت های xy یا yx می‌نویسند.

برای مثال، گراف G را در نظر بگیرید با رئوس $V(G) = \{a, b, c, d, e\}$ و یال‌های $E(G) = \{ab, bc, cd, de, ea, ad, eb\}$

برای ساختن یک تصویر از G می‌توانیم یک نقطه یا یک دایره کوچک برای هر راس، ترسیم کنیم و سپس با رسم پاره خط‌هایی، هر دو راس را به یکدیگر متصل کنیم. در تصویر ۶.۱.۱ سه تصویر مختلف از این گراف را ملاحظه می‌کنید. مهم نیست که یال‌ها با یکدیگر تلاقی کنند. اما، نباید اجازه دهیم یک یال، به راسی که نقطه پایانی آن یال نیست برسد.

تصویر ۶.۱.۱



توجه، حرف V در $V(G)$ حرف اول Vertex است به معنی راس و حرف E در $E(G)$ حرف اول Edge است به معنی یال.

می‌گوییم دو راس $x, y \in V(G)$ هم‌جوار **Adjacent** هستند، اگر $xy \in E(G)$ باشد. پس برای گراف G در تصویر ۶.۱.۱ راس‌های a و b هم‌جوار هستند. اما a و c هم‌جوار نیستند.

نقاط انتهایی Endpoints یال xy عبارتند از راس‌های x و y

دو یال مجاور **Incident** هستند، اگر دارای یک نقطه انتهایی باشند. پس ab و bc دو یال مجاور هستند، اما ab و cd دو یال مجاور نیستند.

یک راس و یک یال مجاور **Incident** هستند، اگر آن راس یک نقطه انتهایی آن یال باشد. پس ab مجاور هر دو راس a و b است.

توجه داشته باشید که مجموعه‌های $V(G)$ و $E(G)$ فقط اطلاعاتی در مورد این که راس‌ها کدام هستند و کدام دو راس مجاور هستند، به ما می‌دهند و نه بیشتر. راه‌های مختلفی برای رسم این نمودار وجود دارد.

معمولا ، یک گراف را ، با رسم آن مشخص می کنیم. مثلا نمودار در تصویر ۶.۱.۲ می گوید H یک گراف است با راس های $V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$ و یال های $E(G) = \{12, 23, 34, 41, 13\}$ رسم تصویر آسان تر از نوشتن $E(G)$ و $V(G)$ است.

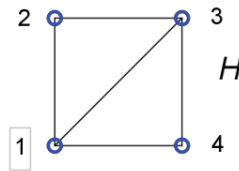
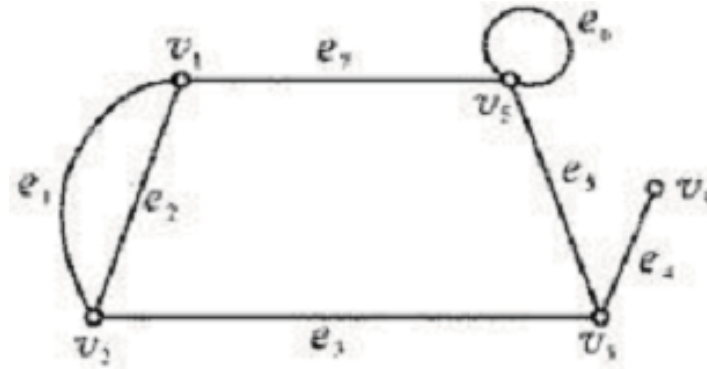


Figure 6.1.2

حلقه Loop

یک یال را حلقه می نامیم ، اگر یک یال وجود داشته باشد که یک راس را به خودش متصل کنند. در تصویر زیر یال e_5 راس v_5 را به خودش متصل کرده است.

تصویر یک حلقه



یال های موازی Parallel Edge

دو یا چند یال با نقاط انتهایی مشترک را یال های موازی می نامند. در تصویر بالا e_1 و e_2 یال های موازی هستند. زیرا نقاط انتهایی هر دو رؤس v_1 و v_2 هستند.

گراف ساده Simple Graph

یک گراف ساده است اگر هیچ یال موازی یا حلقه ای نداشته باشد.

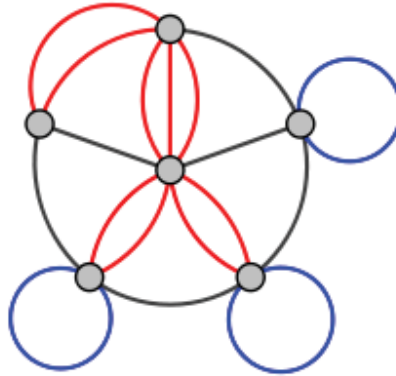
گراف کران دار Finite Graph

یک گراف کران دار است ، اگر تعداد رؤس و یال های آن محدود و کران دار باشند.

گراف چند گانه Multigraph

گرافی است که میتواند چند یال بین دو راس داشته باشد و همچنین چند یال حلقوی

گراف چند گانه



چند اصطلاح مربوط به گراف Some Terminologies

- ۱ - یال هایی که دارای رئوس انتهایی مشترک هستند ، یال های موازی **Parallel Edges** هستند.
- ۲ - یک گراف ساده **Simple** است ، اگر هیچ یال موازی یا حلقوی نداشته باشد.
- ۳ - یک گراف بدون یال را گراف خالی **Empty** می نامند.
- ۴ - یک گراف بدون راس را گراف تهی **Null** می نامند.
- ۵ - یک گراف با فقط یک راس را گراف بدیهی **Trivial Graph** می نامند.
- ۶ - حد اقل درجه رئوس را بانماد $\delta(G)$ و حد اکثر درجه رئوس را با نماد $\Delta(G)$ نشان می دهند.

بعضی از گراف ها آنقدر متداول هستند که برای آنها یک نماد مخصوص در نظر می گیریم. مثلا عدد صحیح مثبت n را در نظر بگیرید، مسیر P_n عبارت است از یک گراف با n راس

$$v_1, v_2, \dots, v_n$$

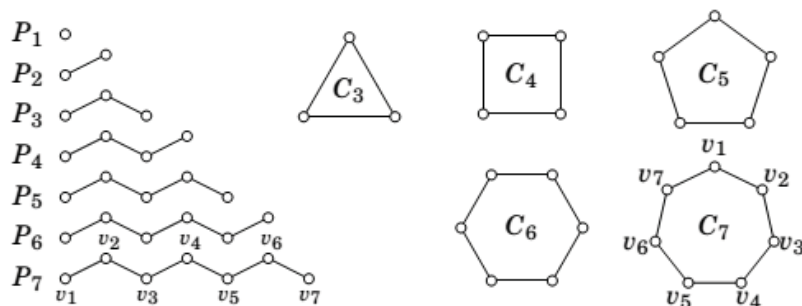
و یال های

$$E(P_n) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4, \dots, v_{n-1} v_n, v_n v_1\}$$

پس P_n دارای n راس و $n - 1$ یال است.

دور یا چرخه Cycle که با C_n نمایش می دهیم ، گرافی است که تعداد برابری از یال و راس دارد. بطوری که رئوس می توانند روی یک دایره قرار گیرند. همان طور که در تصویر ۶.۱.۳ ملاحظه می کنید.

تصویر ۶.۱.۳ مسیر ها و دور ها



می گوئیم یک مسیر پته زوج است اگر تعداد راس های آن زوج باشد ، در غیر این صورت به آن مسیر یا دور ، فرد می گویند.

چند تعریف

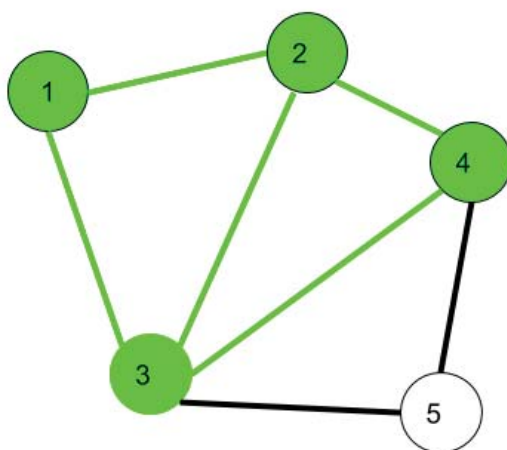
گشت Walk

یک گشت عبارت است از یک دنباله از راس ها و یال ها ی یک گراف. یعنی اگر یک گراف را ببینیم ، یک گشت بدست می آوریم.

در گشت راس ها می توانند تکرار شوند.

در گشت یال ها می توانند تکرار شوند. در تصویر زیر $۱ \rightarrow ۲ \rightarrow ۳ \rightarrow ۴ \rightarrow ۲ \rightarrow ۱ \rightarrow ۳$ یک گشت است.

تصویر یک گشت



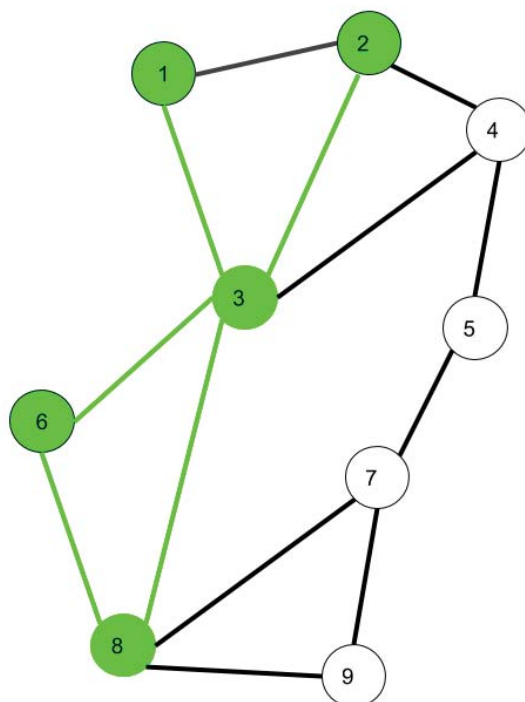
گشت باز Open Walk

اگر در یک گشت ، راس های شروع و پایانی متفاوت باشند ، به آن گشت باز می گویند. در تصویر بالا $۱ \rightarrow ۲ \rightarrow ۳ \rightarrow ۴ \rightarrow ۵ \rightarrow ۳$ یک گشت باز است.

گشت بسته Closed Walk

اگر در یک گشت ، راس های شروع و پایانی یکی باشند ، به آن گشت بسته می گویند. در تصویر بالا $۱ \rightarrow ۲ \rightarrow ۳ \rightarrow ۴ \rightarrow ۵ \rightarrow ۳ \rightarrow ۱$ یک گشت بسته است.

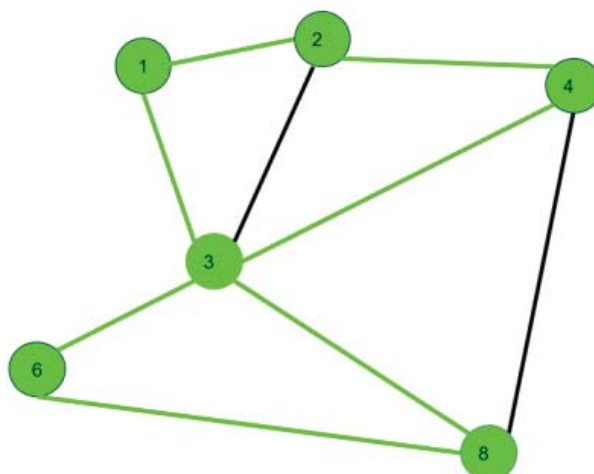
رد پا Trail عبارت است از یک گشت باز بطوری که هیچ یالی تکرار نشود. اما راس ها می توانند تکرار شوند. تصویر زیر یک رد پا است.

تصویر رد پا

در تصویر بالا $۱ \rightarrow ۳ \rightarrow ۸ \rightarrow ۶ \rightarrow ۳ \rightarrow ۲$ یک رد پا است. و همچنین $۱ \rightarrow ۳ \rightarrow ۸ \rightarrow ۶ \rightarrow ۳ \rightarrow ۲ \rightarrow ۱$ یک رد پای بسته است.

مدار Circuit

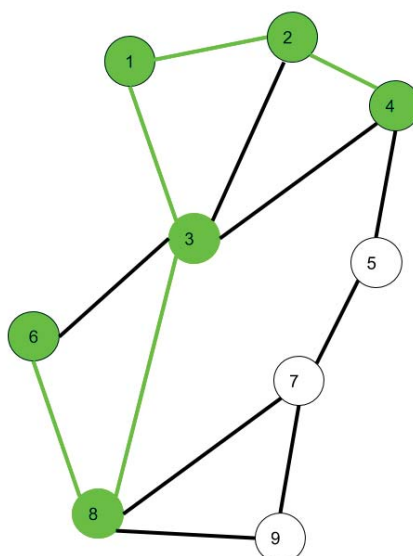
پیمودن یک گراف بطوری که هیچ یالی تکرار نشود ، اما راس می تواند تکرار شود و بسته است.
تصویر مدار



در تصویر بالا $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ یک مدار است.

مسیر Path

مسیر یک رد پا است که در آن نه راس ها و نه یال ها تکرار نمی شوند.
تصویر یک مسیر

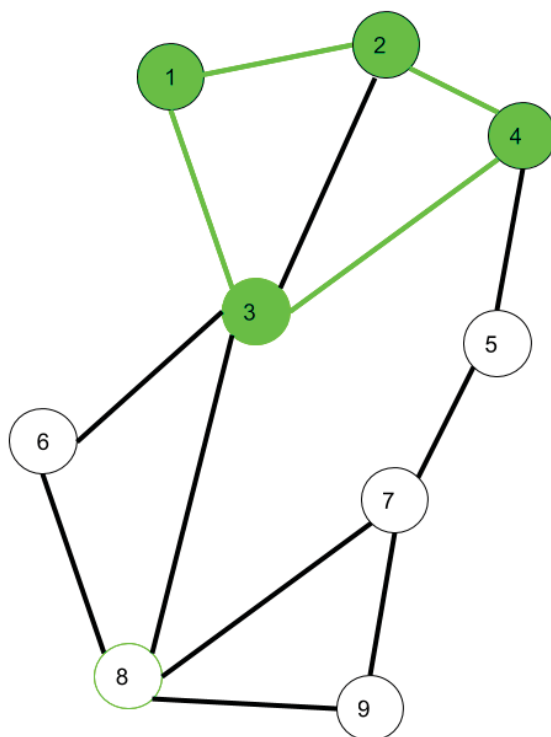


در تصویر بالا $6 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ یک مسیر است.

تعریف مجدد یک دور Cycle

پیمودن یک گراف بطوری که نه یک راس و نه یک یال تکرار نشود و راس شروع و پایانی، یکی باشد. در زیر تصویر دیگری از دور را ملاحظه می کنید.

تصویر دیگری از دور



در تصویر بالا $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ یک دور است. این تعریف با تعریف قبلی منافات ندارد. هر دو در حقیقت یکی هستند با جمله بندی متفاوت.

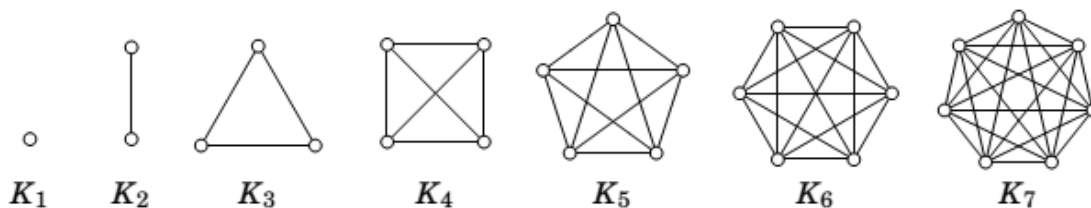
گراف کامل A Complete Graph یک گراف است با n راس بطوری که بین هر دو راس آن دقیقاً

یک یال وجود داشته باشد. تصویر ۶.۱.۴

تعداد یال ها در گراف K_n مساوی است با

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

تصویر ۶.۱.۴

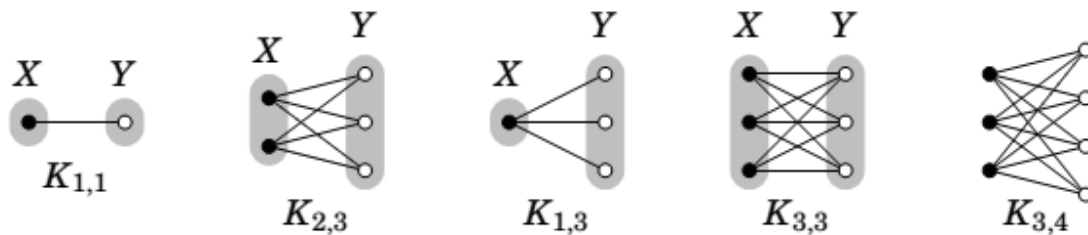


گراف دو قسمتی کامل Complete Bipartite Graph

برای دو عدد صحیح مثبت m و n گراف دو قسمتی کامل $K_{m,n}$ عبارت است از گرافی که مجموعه راس آن $V(K_{m,n}) = X \cup Y$ شامل اتحاد دو مجموعه جدا از هم X و Y است بطوری که تعداد عناصر آنها به ترتیب m و n باشد، و با $E(K_{m,n}) = \{xy: x \in X, y \in Y\}$

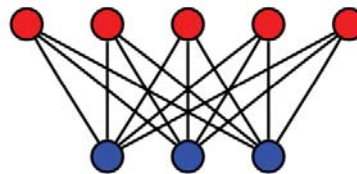
به عبارت ساده تر، دو مجموعه از راس داریم که نسبت به هم منفصل هستند و هیچ یک از راس های یک مجموعه با هم ارتباط ندارند و بر عکس هر راس از یک مجموعه به تمام راس های مجموعه دیگر توسط یال ها به هم مربوط می شوند. تصویر ۶.۱.۵

تصویر ۶.۱.۵



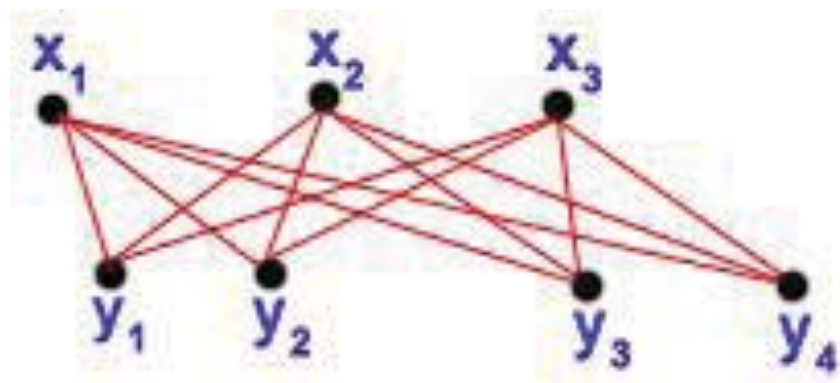
در تصویر ۶.۱.۶ مجموعه راس های آبی رنگ و مجموعه راس های قرمز رنگ از هم جدا هستند. هیچ کدام از راس های آبی رنگ به هم متصل نیستند. به همین طریق هیچ کدام از راس های قرمز رنگ به هم متصل نیستند. اما هر یک از راس های آبی رنگ به تمام راس های قرمز رنگ متصل هستند.

تصویر ۶.۱.۶



در تصویر ۶.۱.۷ $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ و $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ دو مجموعه رئوس هستند. هر یک از اعضای سه گانه X به تمامی اعضای چهار گانه Y متصل هستند.

تصویر ۶.۱.۷

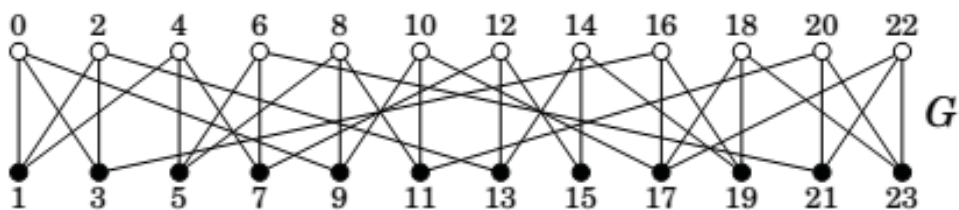


گراف های دو بخشی کامل $K_{m,n}$ گراف های مخصوصی از یک گروه بزرگ تر بنام گراف های دو بخشی هستند.

یک گراف G یک گراف دو بخشی **Bipartite** است اگر بتوانیم آنرا به دو بخش X و Y تقسیم کنیم بطوری که $V(G) = X \cup Y$ و $X \cap Y = \emptyset$ باشد و هر یال G یک نقطه انتهایی در X و یک نقطه انتهایی در Y داشته باشد.

مثلا در تصویر ۶.۱.۸ گراف دو بخشی G شامل $X = \{0, 2, 4, \dots, 22\}$ و $Y = \{1, 3, \dots, 23\}$ است.

تصویر ۶.۱.۸

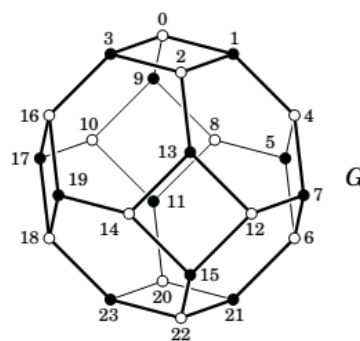


در تصویر ۶.۱.۸ یک گراف دو بخشی را ملاحظه می کنید که راس های آن به رنگ سیاه X و سفید Y هستند بطوری که هر یال ، یک راس سیاه را به یک راس سفید متصل می کند.

توجه داشته باشید ، نمی گوئیم هر راس از X به تمام رئوس Y متصل است، بلکه حد اقل هر راس از یک مجموعه به یک راس از مجموعه دیگر متصل باشد، اما نه تمام راس های مجموعه دیگر.

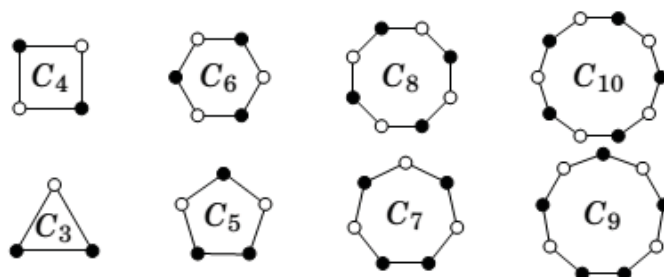
در تصویر ۶.۱.۸.b نمایش دیگری از گراف G را ملاحظه می کنید.

تصویر ۶.۱.۸.b



تصویر ۶.۱.۹ نشان می دهد که دورهای زوج $C_2, C_4, C_6, \dots$ دو بخشی هستند. اما ، دور های فرد $C_3, C_5, C_7, \dots$ دو بخشی نیستند.

تصویر ۶.۱.۹



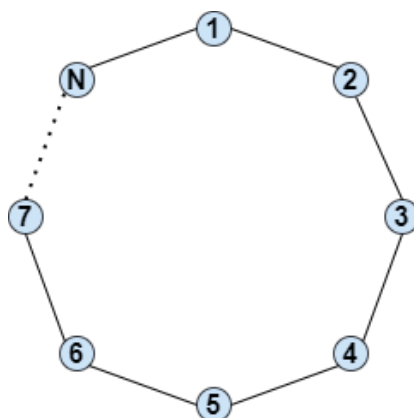
قضیه

یک گراف دو بخشی است اگر و فقط اگر شامل چرخه فرد نباشد.

اثبات

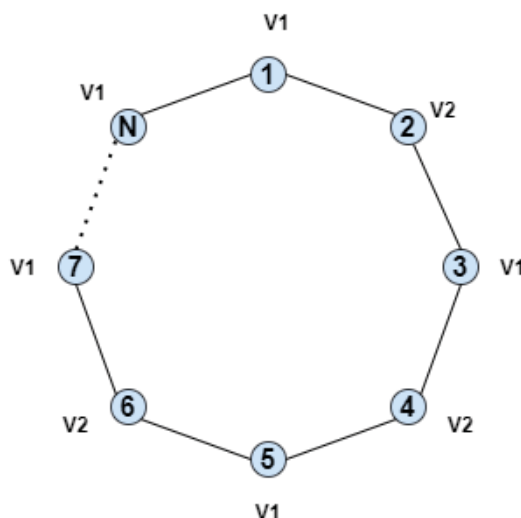
ثابت می کنیم یک گراف دو بخشی شامل یک چرخه فرد نیست. از طریق تناقض فرض می کنیم یک گراف دو بخشی $G(V, E)$ داریم. و فرض می کنیم V_1 و V_2 بخش های G باشند. و فرض می کنیم گراف G دارای یک چرخه فرد بطول N باشد. تصویر ۶.۱.۱۰

تصویر ۶.۱.۱۰

Odd cycle of length N

چون گراف، دو بخشی است، باید بتوانیم راس های چرخه فرد در مجموعه های V_1 و V_2 را بطوری تقسیم کنیم که هیچ راس مجاور، متعلق به یک مجموعه نباشد. همان طور که در تصویر ۶.۱.۱۱ ملاحظه می کنید، بطور در میان، V_1 را به چرخه های فرد اختصاص داده ایم و V_2 را به چرخه های زوج. اما هم ۱ و هم N فرد هستند و به یک مجموعه تعلق دارند. اما این غیر ممکن است. زیرا راس های مجاور نمی توانند به یک مجموعه تعلق داشته باشند.

تصویر ۶.۱.۱۱



از طرف دیگر ۱ و N مجاور راسی است که به V_2 تعلق دارد. پس نمی توانیم یکی از آنها را به مجموعه V_2 تغییر مکان دهیم. این نشان می دهد که اگر یک گراف دارای چرخه فرد باشد، نمی تواند دو بخشی باشد. زیرا نمی توانیم راس های چرخه فرد در مجموعه V_1 و V_2 جا دهیم بطوری که هیچ راس مجاور به یک مجموعه تعلق نداشته باشد. پس، فرض ما که گراف G شامل چرخه فرد است، صحیح نیست. قضیه ثابت می شود.

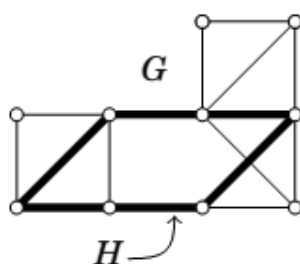
اگر یک گراف داخل یک گراف باشد، به آن **زیر گراف** *Subgraph* می گویند.

تعریف ۶.۱.۲

گفته می شود، گراف H **زیر گراف یک گراف** G است اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ باشد

مثلا در تصویر ۶.۱.۱۲ قسمت برجسته گراف G گراف H است، با $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$ پس H زیر گراف G است.

تصویر ۶.۱.۱۲



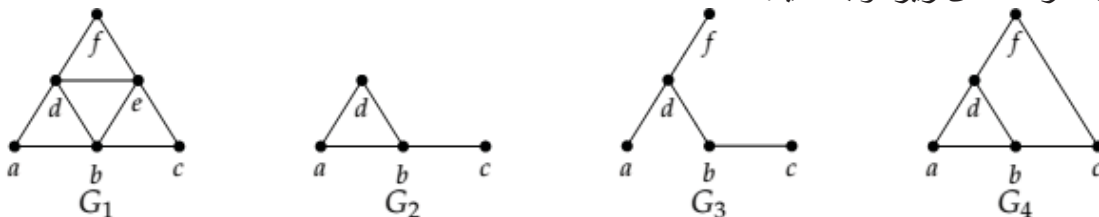
هنگامی که گراف H یک زیر گراف G است، می‌گوییم G شامل H است، یا H داخل G است. در تصویر ۶.۱.۱۲ گراف H تصادفاً یک دور C_4 است. پس می‌گوییم G شامل یک C_4 است. همچنین شما در این تصویر یک P_4 ملاحظه می‌کنید. در مورد P_n و C_n در تصویر ۶.۱.۳ صحبت کردیم.

زیر گراف القایی Induced Subgraph

می‌گوییم گراف H زیر گراف القایی G است در صورتی که $V(H) \subseteq V(G)$ باشد و هر یالی در $E(G)$ که رئوس آن هنوز در $V(H)$ است در $E(H)$ هم باشد.

توجه داشته باشید که هر زیر گراف القایی، یک زیر گراف معمولی هم است. اما عکس آن صادق نیست. می‌توان این طور تصور کرد که یک زیر گراف نتیجه پاک کردن چند راس و یال از گراف بزرگ تر است.

برای این که یک زیر گراف، یک زیر گراف القایی باشد، هنوز می‌توانیم رئوس را پاک کنیم، اما حالا فقط می‌توانیم آن یال هایی را پاک کنیم که شامل رئوس پاک شده باشد. مثلاً به گراف های زیر توجه کنید.

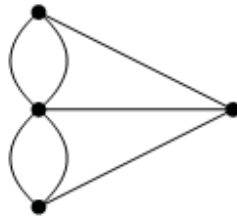


در تصویر بالا، هم G_2 و هم G_3 زیر گراف های G_1 هستند. اما فقط G_2 یک زیر گراف القایی است. تمام یال هایی در G_1 که رئوس در G_2 متصل می‌کنند، یال های G_2 هم هستند. در G_3 ، یال $\{ab\}$ در E_1 است اما در E_3 نیست، با وجود این که راس های a و b در V_3 هستند.

گراف G_4 زیر گراف G_1 نیست. گرچه بنظر می‌رسد که فقط راس e را حذف کرده ایم. دلیل این است که در E_4 یال $\{cf\}$ داریم اما این یال عضو E_1 نیست. پس شرط اینکه باید $E_4 \subseteq E_1$ باشد، نداریم.

بر می‌گردیم به چند تعریف بنیادی تئوری گراف. تا کنون توجه کرده اید که تمام گراف هایی که در بالا رسم کرده ایم این مشخصه را داشته اند که هیچ دو راسی بیش از یک مرتبه به هم وصل نشده اند. و هیچ راسی به خودش متصل نشده است. این قبیل گراف ها را ساده Simple می‌گویند. گرچه آنها را فقط گراف می‌نامیم. زیرا تعریف ما از یک گراف می‌گوید، یال ها تشکیل یک مجموعه زیر مجموعه دو عنصری رئوس هستند. بخاطر دارید که در مجموعه تکرار یک عنصر جایز نیست. پس هیچ دو راسی نمی‌توانند توسط یک یال بیش از دو مرتبه به هم متصل شوند. همچنین، چون هر یال باید یک مجموعه که شامل دو راس است، باشد پس نمی‌توانیم یک راس داشته باشیم که توسط یک یال به خودش متصل شود.

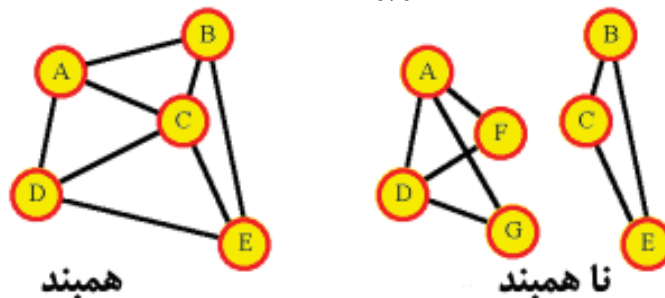
با همه این ها ، زمانی پیش می آید که می خواهیم دو یال یا بیشتر ، و یا یک یال حلقوی داشته باشیم. قبل از ادامه بحث ، به تصویر زیر توجه کنید. آیا ممکن است هر خط را یک مرتبه و تنها یک مرتبه بدون برداشتن قلم سیر کنیم، بطوری که نقطه شروع و پایانی یکی باشد؟



ملاحظه می کنید که در گراف بالا دو و یا حتی سه یال داریم. ما به این نوع شئی **یال چند گانه** **Multigraphs** می گوئیم. این نام خوبی است. زیرا **مجموعه چند گانه Multiset** یک مجموعه است که به ما اجازه می دهد که یک عنصر را چند مرتبه تکرار کنیم.

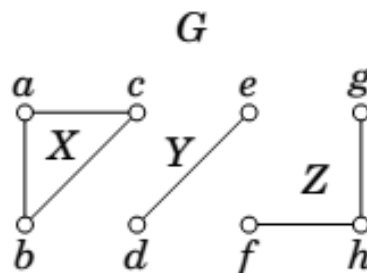
می گوئیم یک گراف **G همبند Connected** است ، اگر برای هر دو راس $x, y \in V(G)$ یک مسیر در G وجود داشته باشد که از x شروع و به y ختم شود. یک گراف که همبند نباشد ، به آن **همبند Disconnected** می گویند. تصویر ۶.۱.۱۳

تصویر ۶.۱.۱۳



مثال دیگر، تصویر ۶.۱.۱۴ را ملاحظه کنید.

تصویر ۶.۱.۱۴



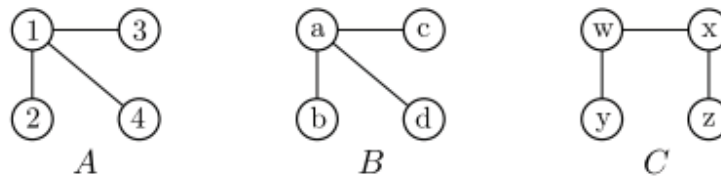
راس های G عبارتند از $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ و یالها $E(G) = \{ab, bc, ca, de, fh, gh\}$

این گراف همبند نیست، زیرا هیچ مسیری وجود ندارد که راس های a و d را متصل کند. قسمت های همبند یک گراف نا همبند را مولفه های **Components** آن گراف می نامند.

هم ریختی گراف Graph Isomorphism

دو گراف G_1 و G_2 هم ریخت هستند اگر بین راس های آنها یک همانندی وجود داشته باشد بطوری که دو راس توسط یک یال در G_1 توسط یک یال به هم متصل باشند، اگر و فقط اگر راس های متناظر در G_2 به هم متصل باشند.

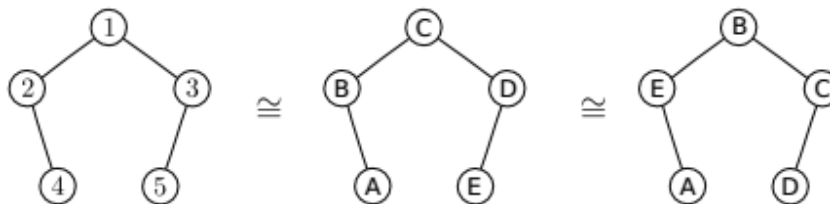
تصویر ۶.۱.۱۵



در تصویر ۶.۱.۱۵ گراف های A و B هم ریخت هستند. راس ها در هر دو گراف همانند هستند. گرچه نام آنها متفاوت است. مثل ۱ و a همانند هستند ۲ و b و الی آخر. در گراف A یک یال راس های ۱ و ۳ را به هم وصل می کند. به همین طریق در گراف B یک یال راس های a و c را به هم وصل می کند. و الی آخر. اما گراف های A و C هم ریخت نیستند. زیرا در گراف A راس های ۱ و ۴ توسط یک یال به هم متصل هستند، اما در گراف C راس های w و z توسط یک یال به هم ارتباط ندارند. چون گراف های A و B هم ریخت هستند، می نویسیم $A \cong B$ و چون A و C هم ریخت نیستند می نویسیم $A \not\cong C$

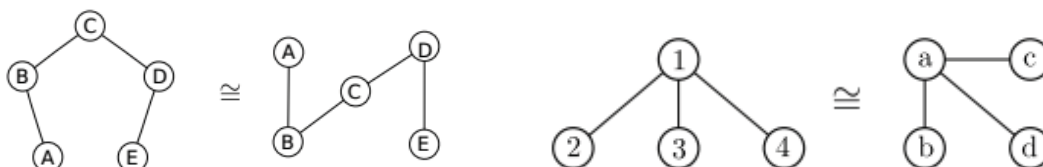
تصویر ۶.۱.۱۶ سه گراف هم ریخت را نشان می دهد.

تصویر ۶.۱.۱۶

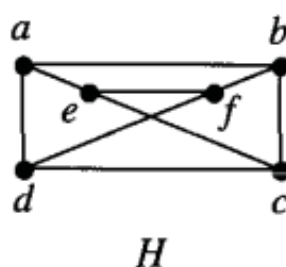
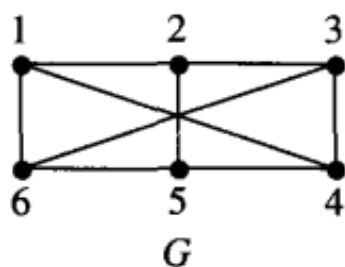


در تصویر ۶.۱.۱۷ گراف ها دو به دو هم ریخت هستند.

تصویر ۶.۱.۱۷



دو گراف زیر هم هم ریخت هستند. همراه با مشخصات



$$F: V(G) \rightarrow V(H)$$

$$1 \longrightarrow a$$

$$2 \longrightarrow b$$

$$3 \longrightarrow f$$

$$4 \longrightarrow e$$

$$5 \longrightarrow c$$

$$6 \longrightarrow d$$

$$E(G) \longrightarrow E(H)$$

$$(1, 2) \longrightarrow (F(1), F(2)) = (a, b)$$

$$(2, 3) \longrightarrow (F(2), F(3)) = (b, f)$$

$$(3, 4) \longrightarrow (F(3), F(4)) = (f, e)$$

$$(4, 5) \longrightarrow (F(4), F(5)) = (e, c)$$

$$(5, 6) \longrightarrow (F(5), F(6)) = (c, d)$$

$$(6, 1) \longrightarrow (F(6), F(1)) = (d, a)$$

$$(2, 5) \longrightarrow (F(2), F(5)) = (b, c)$$

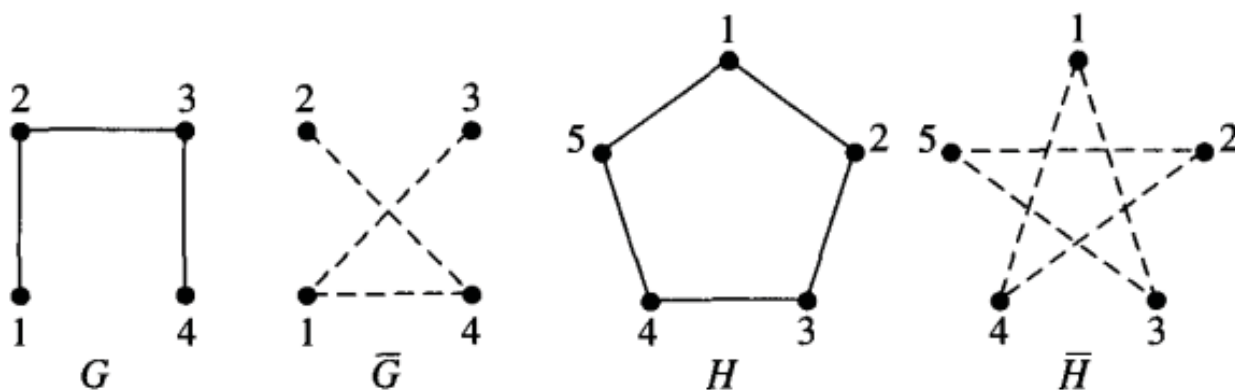
$$(1, 4) \longrightarrow (F(1), F(4)) = (a, e)$$

$$(3, 6) \longrightarrow (F(3), F(6)) = (f, d)$$

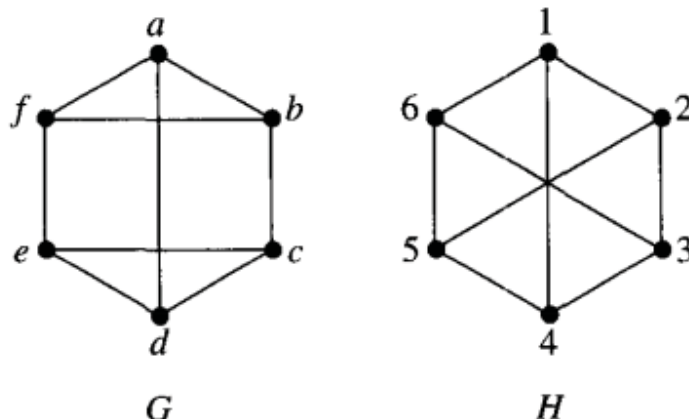
گراف خود متمم Self-Complementary Graph

یک گراف که همریخت متمم خودش است، گراف خود متمم نامیده می شود.

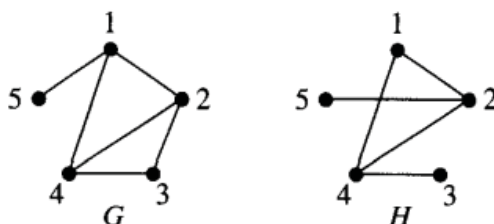
دو گراف خود متمم



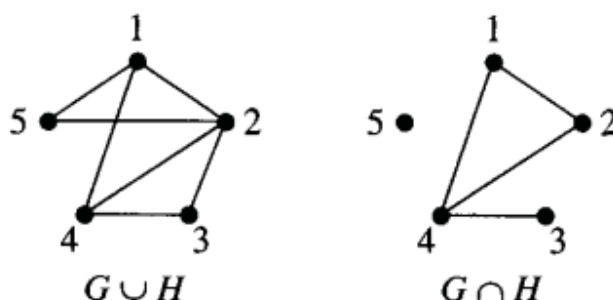
همانطور که باید نشان دهیم دو گراف همریخت هستند ، باید بتوانیم نشان دهیم دو گراف همریخت نیستند. در تصویر زیر ، گراف G دو مثلث abf و cdf داریم ولی در گراف H این دو مثلث نیستند. تصویر زیر دو گراف که هم ریخت نیستند.



اتحاد و اشتراک گراف ها — چون گراف ها خود نوعی مجموعه هستند ، پس می توان همان عملیات که روی مجموعه ها انجام می دادیم ، در مورد گراف ها هم بکار ببریم. اگر دو گراف G و H داشته باشیم ، پس اتحاد آنها $G \cup H$ و اشتراک آنها $G \cap H$ است. مثال اتحاد و اشتراک دو گراف زیر را رسم کنید.



پاسخ



گراف های متمم Complement Graphs

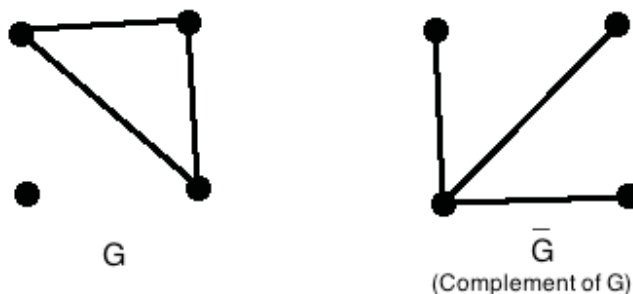
اگر گراف G داشته باشیم ، با رئوس $V(G)$ و یال های $E(G)$ پس متمم G که با نماد $\overline{G}$ نشان داده می شود ، عبارت است از گرافی که دارای همان تعداد راس است. یعنی

$$|V(\overline{G})| = |V(G)|$$

و تعداد یال های آن مطابق زیر است.

$$|E(\overline{G})| = \frac{n(n-1)}{2} - |E(G)|$$

تصویر زیر نمایش گراف G و $\overline{G}$ است.



گراف جهت دار یا **Digraph** یا **Directed Graph**
گرافی است که یال‌ها جهت دارند.

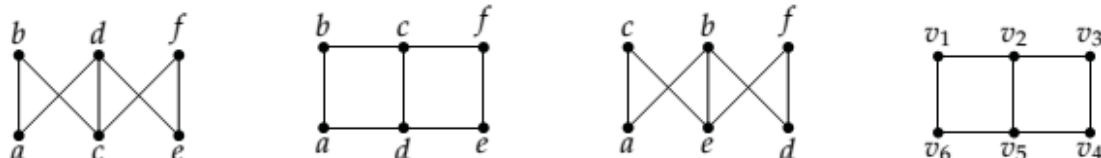
گراف‌های جهت دار



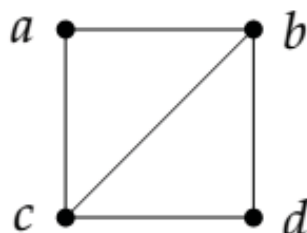
تمرینات ۶.۱

۱ - آرش، بهمن، کمال، دارا و اسفندیار اعضای یک شبکه اجتماعی فیس بوک هستند. این شبکه اجازه می‌دهد که اعضا با هم دوست باشند. مشخص می‌شود که آرش و کمال، بهمن و دارا با هم دوست هستند. اسفندیار با همه آنها دوست است. این موقعیت را با گراف نشان دهید.

۲ - راس‌ها و یال‌های گراف‌های زیر را مشخص کنید.



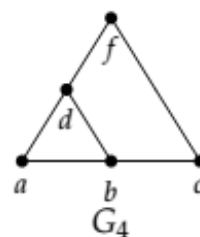
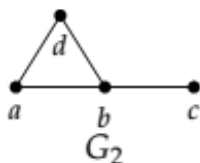
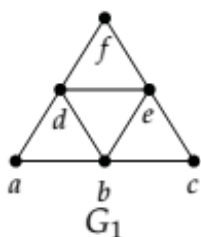
۳ - گراف زیر را به دو صورت دیگر رسم کنید.



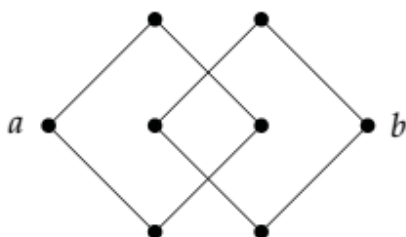
۴ - آیا گراف های زیر مساوی هستند؟

$$G_1 = (\{a, b, c\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}\}); \quad G_2 = (\{a, b, c\}, \{\{a, c\}, \{c, b\}\}).$$

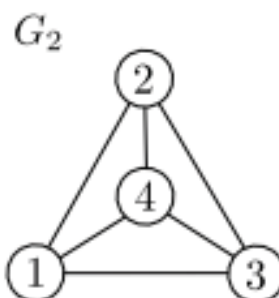
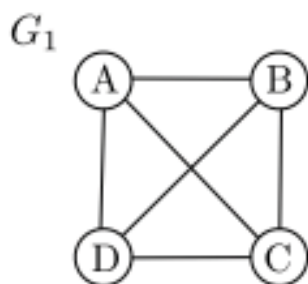
۵ - آیا گراف های G_1, G_2, G_3, G_4 زیر گراف های G_1 هستند؟



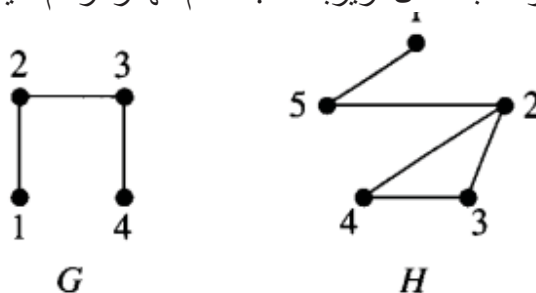
۶ - آیا گراف زیر همبند است یا نا همبند؟



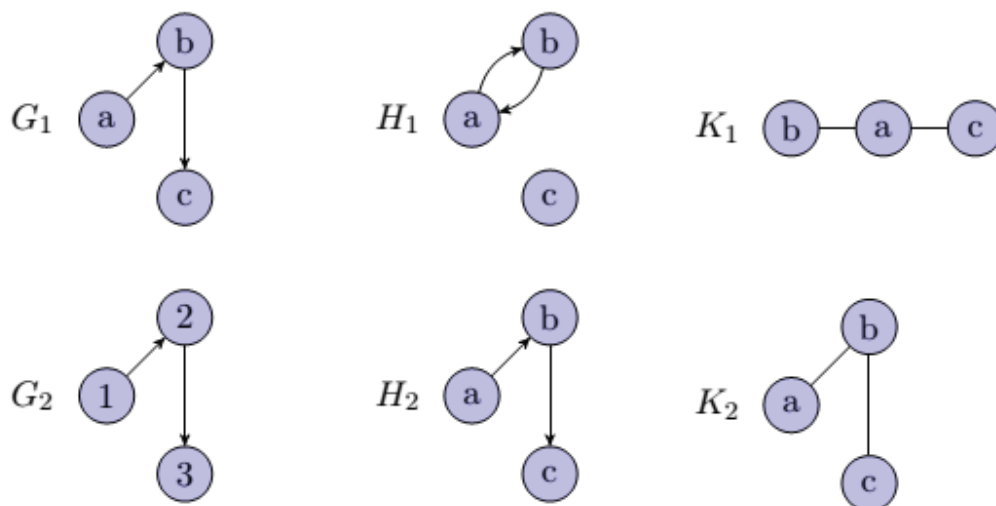
۷ - آیا گراف های زیر همریخت هستند؟



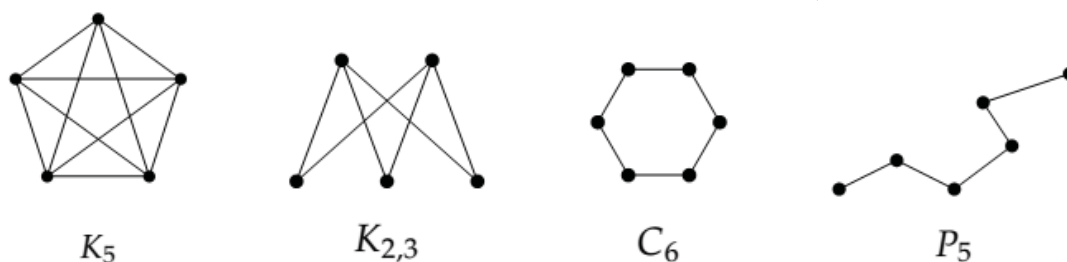
۸ - فرض G و H دو گراف به شکل زیر باشند. متمم آنها را رسم کنید.



۹ - آیا گراف های زیر همریخت هستند؟



۱۰ - گراف های زیر را نام ببرید.



۱۱ - اگر در یک مهمانی ۱۰ نفر با هم دست بدهند، چند عمل دست دادن صورت می گیرد؟

۱۲ - در یک گروه پنج نفره، آیا ممکن است هر یک دقیقاً با دو نفر در گروه دوست باشد؟

۱۳ - آیا یک گراف ساده با ۵ راس ، می تواند ۱۲ یال داشته باشد؟ اگر پاسخ آری است ، آنرا رسم کنید ، اگر پاسخ منفی است ، توضیح دهید.

۱۴ - فرض کنید در یک گروه پنج نفره A, B, C, D, E افراد زیر با هم آشنا هستند.

A و C

A و D

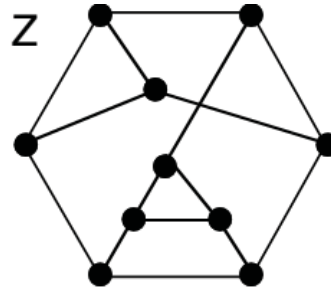
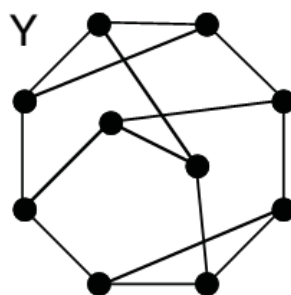
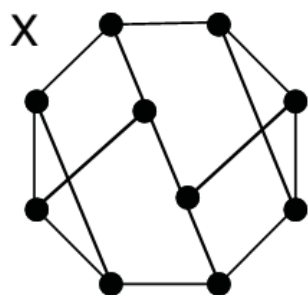
B و C

C و D

C و E

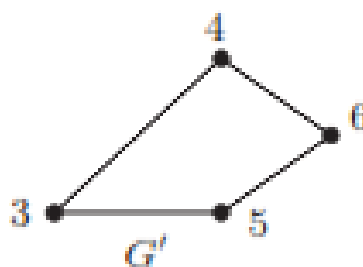
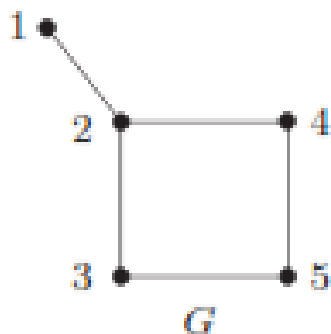
الف - یک گراف برای این حالت ، رسم کنید.
ب - مجموعه راس و یال را بنویسید.

۱۵ - سه گراف زیر را ملاحظه کنید.



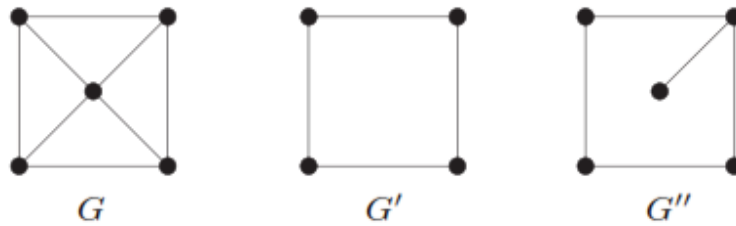
الف - آیا X و Y همریخت هستند؟
ب - آیا X و Z همریخت هستند؟

۱۶ - در تصویر زیر دو گراف G و G' داریم.

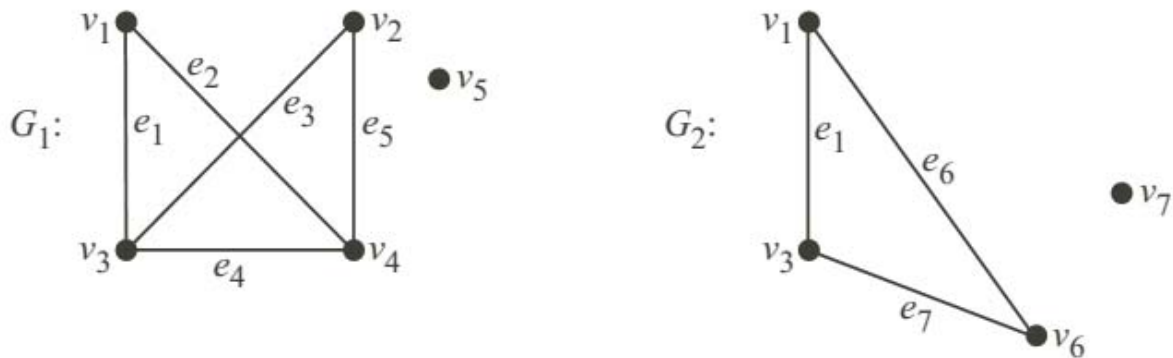


مطلوب است $G \cap G'$ و $G - G'$ و $G \cup G'$

۱۷ - گراف های زیر را ملاحظه کنید. آیا G' و G'' زیر گراف های القایی G هستند؟



۱۸ - گراف های زیر را ملاحظه کنید. مطلوب است $G_1 \cup G_2$ و $G_1 \cap G_2$

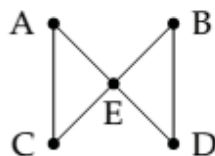


پاسخ تمرینات ۶.۱

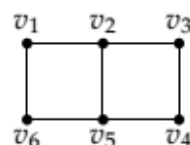
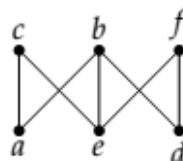
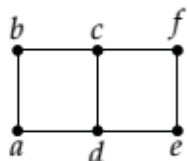
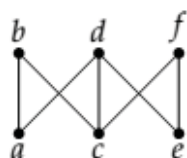
۱ - آرش، بهمن، کمال، دارا و اسفندیار اعضای یک شبکه اجتماعی فیس بوک هستند. این شبکه اجازه می دهد که اعضا با هم دوست باشند. مشخص می شود که آرش و کمال، بهمن و دارا با هم دوست هستند. اسفندیار با همه آنها دوست است. این موقعیت را با گراف نشان دهید.

پاسخ

آرش را با A بهمن را با B کمال را با C دارا را با D و اسفندیار را با E نشان می دهیم. هر شخص یک راس است و دوستی یک یال. دو راس همجوار هستند اگر و فقط اگر آن دو با هم دوست باشند. پس گراف به صورت زیر است.



۲ - راس ها و یال های گراف های زیر را مشخص کنید.



پاسخ

از چپ به راست.

گراف اول، دوم و سوم هر سه یک گراف هستند با مشخصات زیر.

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

$$E = \{ab, ad, bc, cd, de, fe, fc\}$$

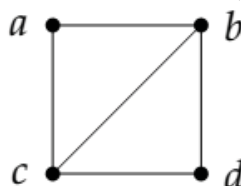
گراف چهارم

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$$

$$E = \{v_1v_2, v_1v_6, v_6v_5, v_5v_4, v_4v_3, v_3v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_5\}$$

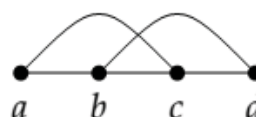
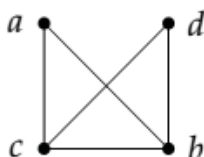
یال ها می توانند به ترتیب های دیگر هم نوشت. زیر جهت ها مشخص نشده اند.

۳ - گراف زیر را به دو صورت دیگر رسم کنید.



پاسخ

دو صورت زیر می توانند همان گراف داده شده باشند.



۴ - آیا گراف های زیر مساوی هستند؟

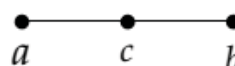
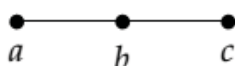
$$G_1 = (\{a, b, c\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}\}); \quad G_2 = (\{a, b, c\}, \{\{a, c\}, \{c, b\}\}).$$

پاسخ

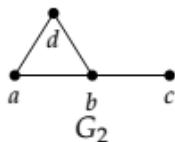
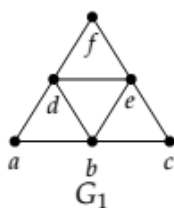
خیر. اینجا مجموعه راس ها یکی است. اما $\{a, b\} \neq \{a, c\}$ پس مجموعه یال ها با هم مساوی نیستند. این دو گراف را می توان به صورت زیر رسم کرد. ظاهراً مساوی هستند، اما در حقیقت چنین نیست.

G_1

G_2



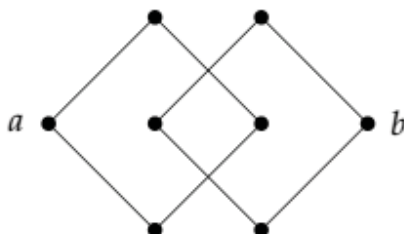
۵ - آیا گراف های G_2, G_3, G_4 زیر گراف های G_1 هستند؟



پاسخ

گراف های G_2 و G_3 زیر گراف های G_1 هستند. اما G_4 زیر گراف G_1 نیست. زیرا در G_4 پال cf داریم. ولی در گراف G_1 چنین یالی نداریم. پس $E_4 \not\subseteq E_1$

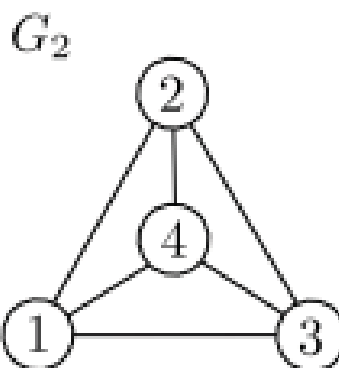
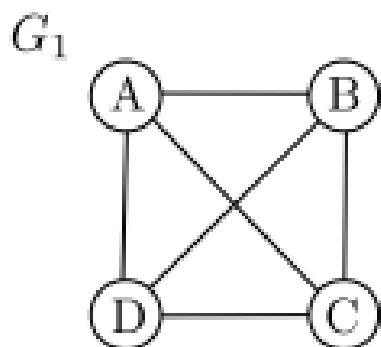
۶ - آیا گراف زیر همبند است یا نا همبند؟



پاسخ

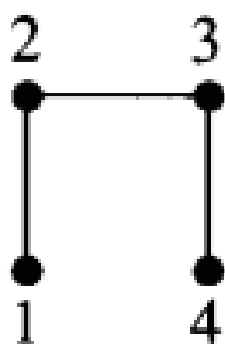
نا همبند است، زیرا مسیری بین a و b وجود ندارد.

۷ - آیا گراف های زیر همریخت هستند؟

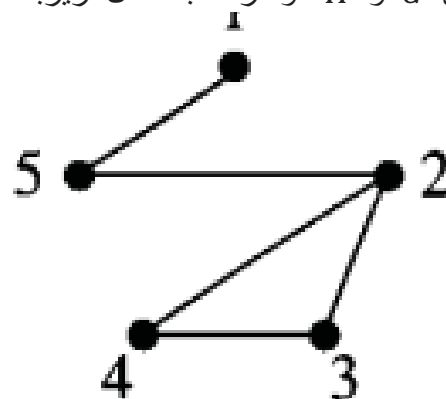


پاسخ
اری

۸ - فرض G و H دو گراف به شکل زیر باشند . متمم آنها را رسم کنید.

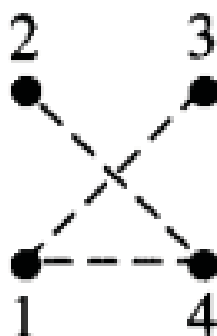


G

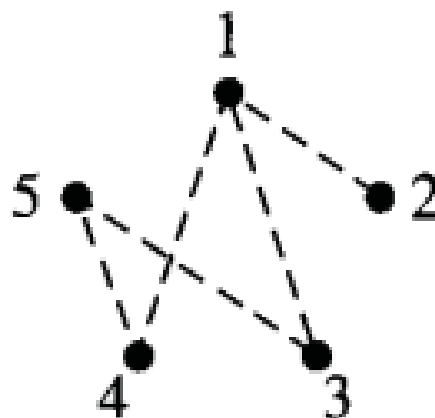


H

پاسخ

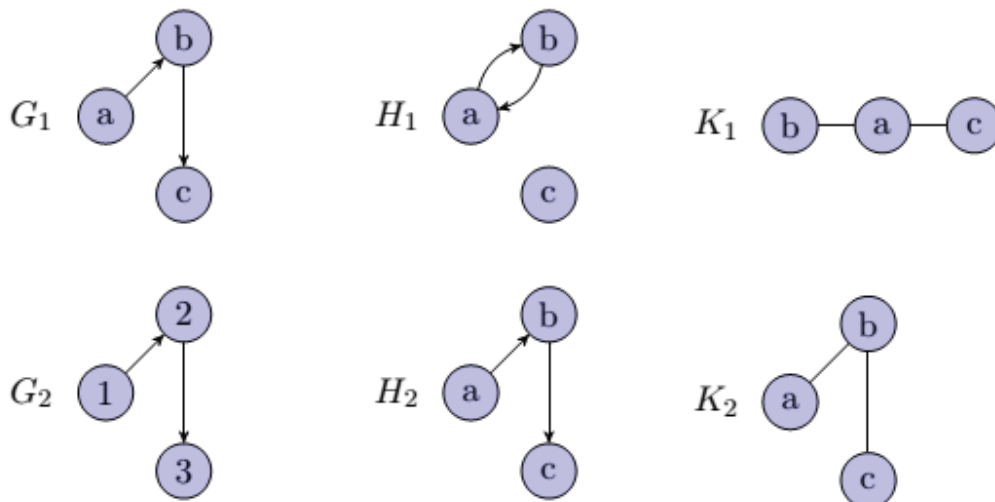


$\bar{G}$



$\bar{H}$

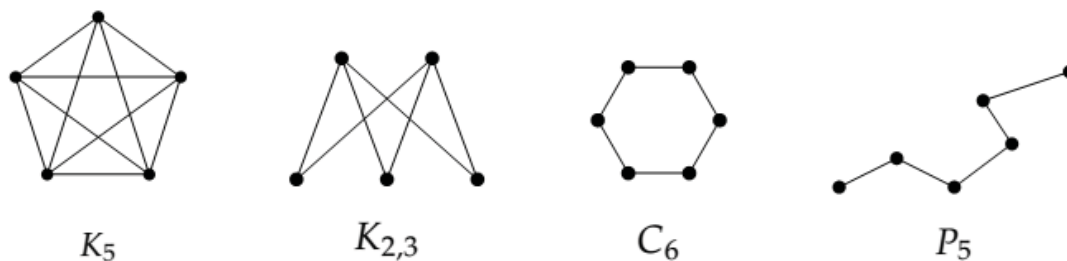
۹ - آیا گراف های زیر همریخت هستند؟



پاسخ

گراف های G_1 و G_2 همریخت هستند، اما آن دو زوج دیگر همریخت نیستند.

۱۰ - گراف های زیر را نام ببرید.



پاسخ

K_5 یک گراف کامل با ۵ راس

$K_{2,3}$ یک گراف دو بخشی کامل با مجموعه های رئوس ۲ و ۳

C_6 یک دور با ۶ راس.

P_5 یک مسیر با $6 = 5 + 1$ راس و ۵ یال.

۱۱ - اگر در یک مهمانی ۱۰ نفر با هم دست بدهند، چند عمل دست دادن صورت می گیرد؟

پاسخ

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{10(10-1)}{2} = \frac{90}{2} = 45$$

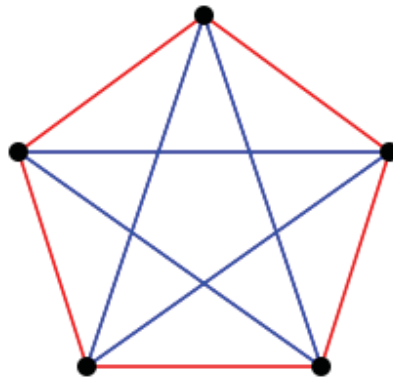
۱۲ - در یک گروه پنج نفره ، آیا ممکن است هر یک دقیقاً با دو نفر در گروه دوست باشد ؟

پاسخ

یک طریق که ممکن است کار کند به صورت زیر از.

$$A \Leftrightarrow B \Leftrightarrow C \Leftrightarrow D \Leftrightarrow E \Leftrightarrow A$$

یعنی A و B دوست هستند. B و C دوست هستند. الی آخر



۱۳ - آیا یک گراف ساده با ۵ راس ، می تواند ۱۲ یال داشته باشد؟ اگر پاسخ آری است ، آنرا رسم کنید ، اگر پاسخ منفی است ، توضیح دهید.

پاسخ

در یک گراف ساده ، بیش از یک یال نمی تواند بین هر دو راس وجود داشته باشد. به عبارت دیگر هیچ یال موازی وجود ندارد. در یک گراف ساده ، شلوغ ترین گرافی که می توانیم داشته باشیم ، این است که هر راس به تمام راس های دیگر وصل شود ، که در این صورت یک گراف کامل داریم و در یک گراف کامل با ۵ راس می توانیم

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = 10.$$

راس داشته باشیم. و $10 < 12$ است. پس پاسخ منفی است.

۱۴ - فرض کنید در یک گروه پنج نفره A, B, C, D, E افراد زیر با هم آشنا هستند.

A و C

A و D

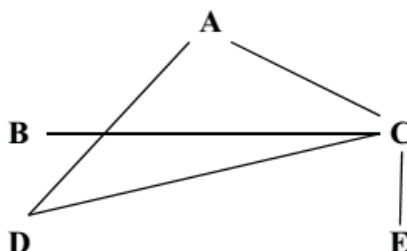
B و C

C و D

C و E

الف - یک گراف برای این حالت ، رسم کنید.

پاسخ



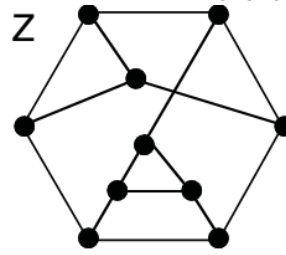
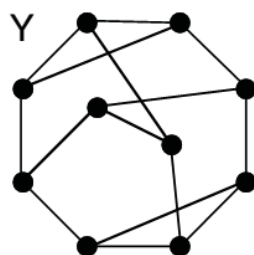
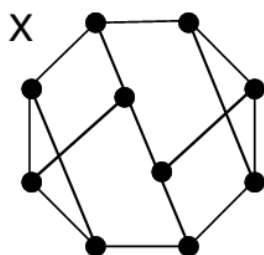
ب - مجموعه راس و یال را بنویسید.

پاسخ

$$V(G) = \{A, B, C, D, E\}$$

$$E(G) = \{AC, AD, BC, CD, CE\}$$

۱۵ - سه گراف زیر را ملاحظه کنید.



الف - آیا X و Y همریخت هستند؟

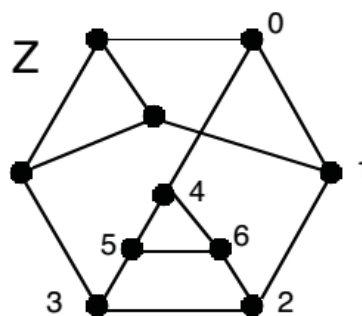
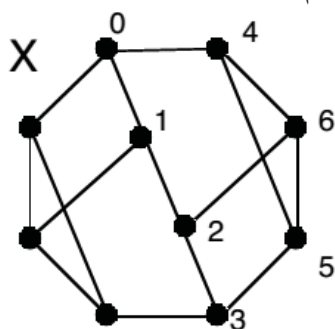
پاسخ

خیر

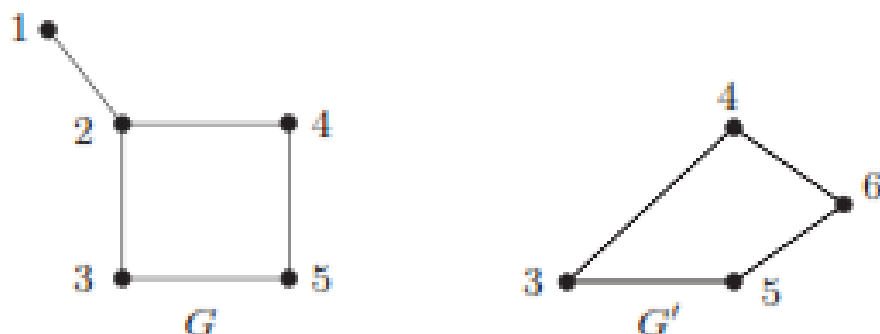
ب - آیا X و Z همریخت هستند؟

پاسخ

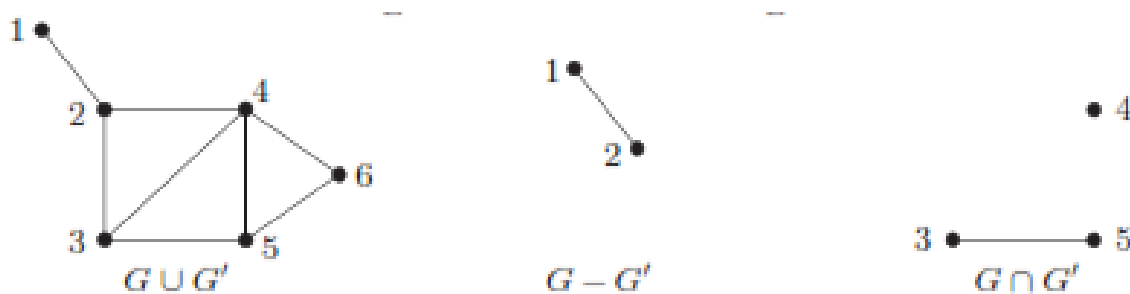
اری می توانیم این دو گراف را به صورت زیر ترسیم کنیم.



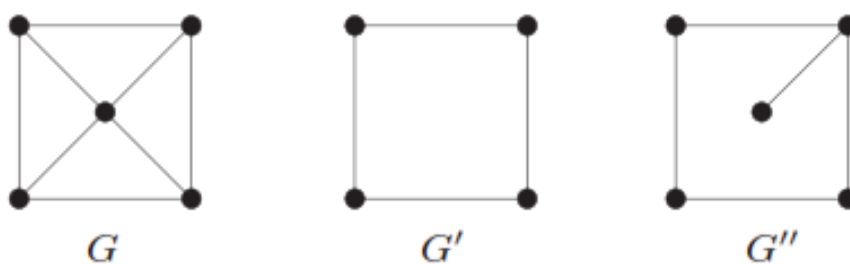
۱۶ - در تصویر زیر دو گراف G و G' داریم.



مطلوب است $G \cap G'$ و $G - G'$ و $G \cup G'$ پاسخ

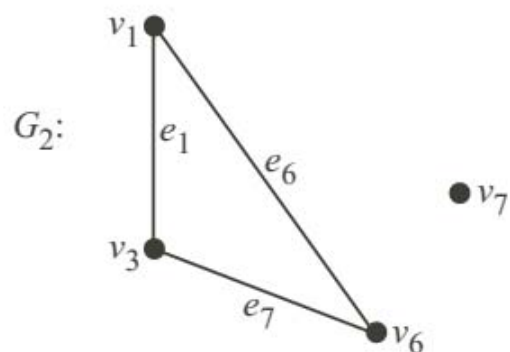
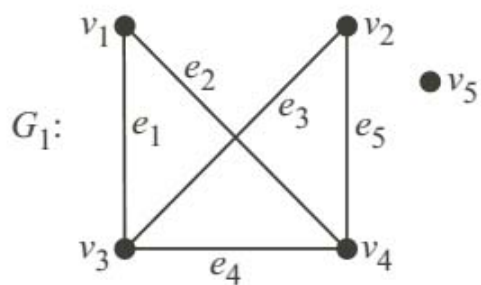


۱۷ - گراف های زیر را ملاحظه کنید. آیا G' و G'' زیر گراف های القایی G هستند؟

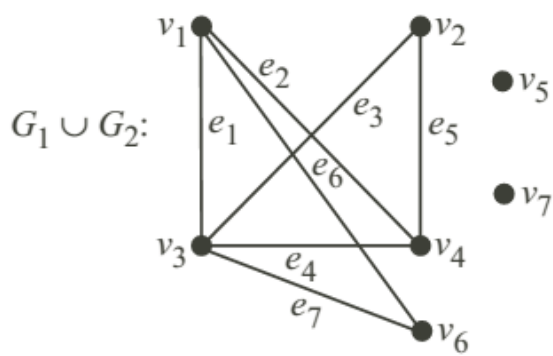
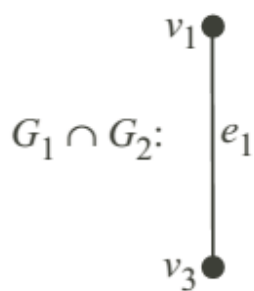


پاسخ G' زیر گراف القایی G است. اما G'' زیر گراف القایی G نیست.

۱۸ - گراف های زیر را ملاحظه کنید. مطلوب است $G_1 \cup G_2$ و $G_1 \cap G_2$



پاسخ

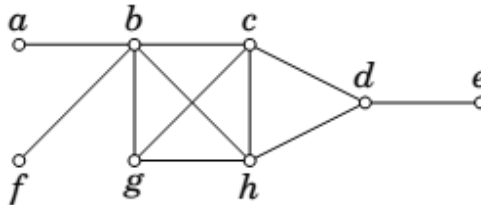


۶.۲ - درجه راس و درخت ها Vertex-Degree and Trees

اگر x یک راس گراف G باشد، درجه Degree x که با نماد $\deg(x)$ نشان داده می شود، عبارت است از تعداد یال هایی که با x بر خورد می کنند. در تصویر ۶.۲.۱ داریم.

$$\deg(a) = 1, \quad \deg(b) = 5, \quad \deg(c) = 4, \quad \deg(d) = 3$$

تصویر ۶.۲.۱



حالا درجه های راس های گراف ۶.۲.۱ را با هم جمع می کنیم. پس داریم.

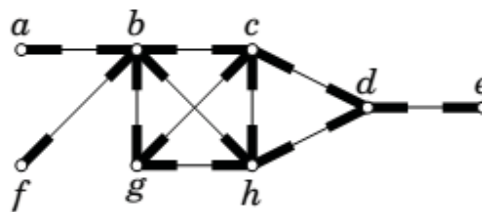
$$\deg(a) + \deg(b) + \deg(c) + \deg(d) + \deg(e) + \deg(f) + \deg(g) + \deg(h)$$

جمع بالا، مجموع پره های، که با خطوط پر رنگ در تصویر ۶.۲.۲ ملاحظه می کنید را نشان می دهد. چون هر یال در گراف، دقیقاً دو پره روی آن دارد، پس مجموع پره ها دو برابر تعداد یال ها است.

و یا $2|E(G)|$

پره : Spoke

تصویر ۶.۲.۲



پس مجموع درجه های راس های یک گراف دو برابر تعداد یال ها است. لذا امر مسلم زیر را داریم.

اصل موضوع ۶.۲.۱ یا قضیه دست دادن Handshake Lemma

برای هر گراف G مجموع درجه های راس های آن، دو برابر تعداد یال های آن است. یعنی

$$\sum_{x \in V(G)} \deg(x) = 2|E(G)|$$

نتیجه این که حاصل جمع درجه های راس های یک گراف، زوج است. حال اگر مجموع اعداد صحیح، زوج است، پس تعداد ارقام فرد در آن جمع باید، زوج باشد.

یکی از استفاده های اصل موضوع ۶.۲.۱ این است که اگر درجه راس ها را به صورت یک دنباله داشته باشیم ، می توانیم تعداد رئوس و یال ها را پیدا کنیم.

مثال ۶.۲.۱

یک گراف باید چند راس و یال داشته باشد ، اگر دنباله درجه راس ها به صورت زیر بشد؟
(۴, ۴, ۳, ۳, ۳, ۲, ۱)

پاسخ

تعداد راس ها تعداد اعضا یا عناصر دنباله داده شده است . پس تعداد رئوس ۷ است.
برای پیدا کردن یال ها ، مجموع درجات رئوس را پیدا می کنیم و سپس تقسیم بر ۲ پس داریم.

$$۴ + ۴ + ۳ + ۳ + ۳ + ۲ + ۱ = ۲۰$$

$$۲۰ \div ۲ = ۱۰$$

پس تعداد یال ها ۱۰ می باشد.

از اصل موضوع ۶.۲.۱ ، گزاره **Proposition** زیر را داریم.

گزاره ۶.۲.۱

تعداد رئوس درجه فرد گراف G , زوج است.

اثبات

فرض کنید یک گراف وجود داشته باشد که تعداد رئوس درجه فرد آن ، فرد باشد. این بر اساس اصل موضوع ۶.۲.۱ غیر ممکن است.

مثلا در مثال بالا تصویر های ۶.۲.۱ و ۶.۲.۲ درجه های شش راس ، فرد بود. یا به عبارت دیگر ، شش راس داشتیم که دارای درجه فرد بودند. به ترتیب زیر.

$$\deg(a) = ۱, \deg(b) = ۵, \deg(c) = ۳, \deg(e) = ۱, \deg(f) = ۱, \deg(g) = ۳$$

اصل موضوع ۶.۲.۱ یک فرمول برای میانگین درجه یک راس در یک گراف به ما می دهد. یعنی مجموع درجه های کلیه رئوس تقسیم بر تعداد رئوس.

$$\frac{\sum_{x \in V(G)} \deg(x)}{|V(G)|} = \frac{۲|E(G)|}{|V(G)|} \quad (۶.۲.۱)$$

این فرمول کمک می کند که بتوانیم بعضی از حقایق در مورد دیاگرام های درختی را ثابت کنیم.

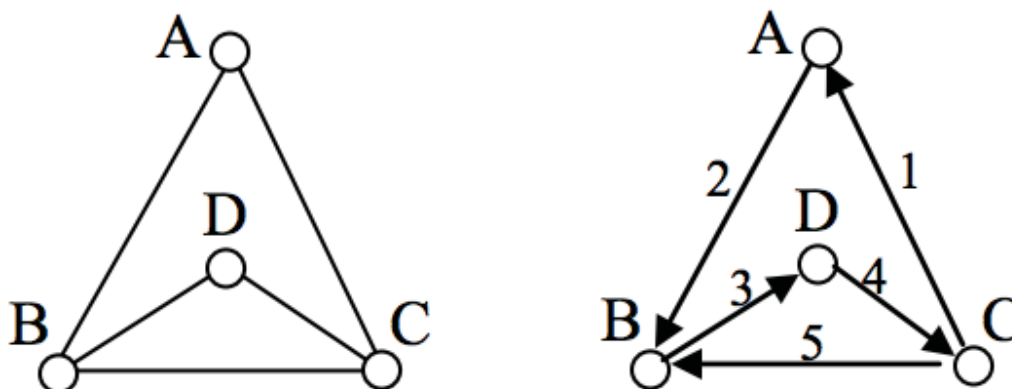
انواع گراف ها

تا کنون چند نوع گراف را دیده ایم و آنها را تعریف کرده ایم. اینک چند نوع دیگر را بررسی می کنیم.

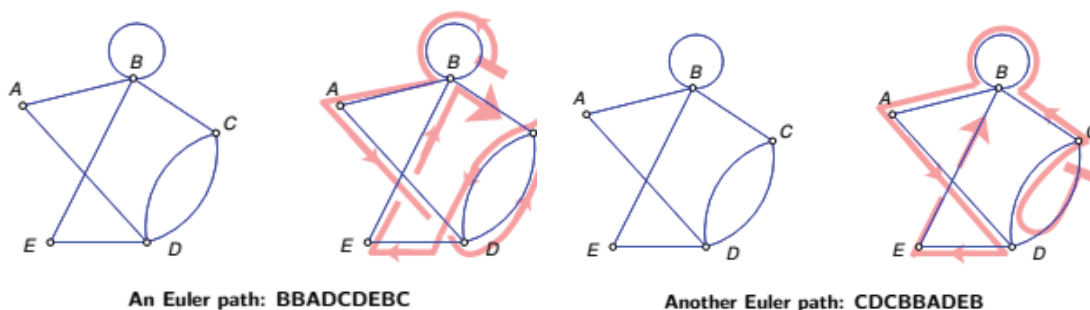
مسیر اویلر Euler Path

به مسیری گفته می شود که از همه یال ها ی یک گراف یک مرتبه عبور شود. اما می توان از هر راس ، چند مرتبه عبور کرد. اگر راس شروع و خاتمه یکی باشد ، پس **حلقه یا دور اویلر Euler Cycle** داریم.

مسیر اویلر

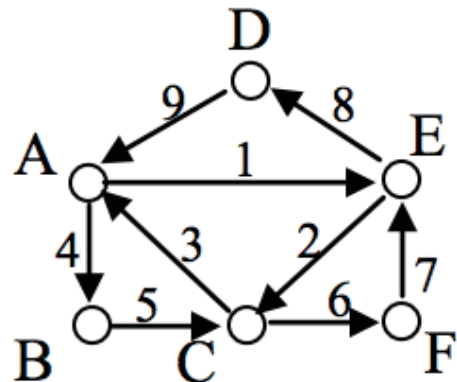
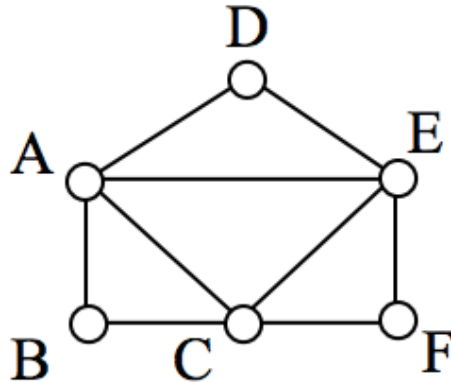


مسیر اویلر

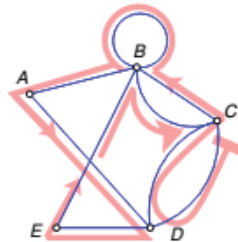
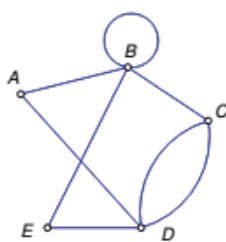


Euler Circute مدار اویلر

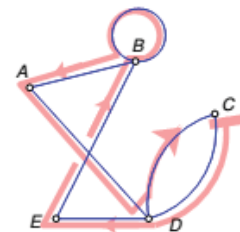
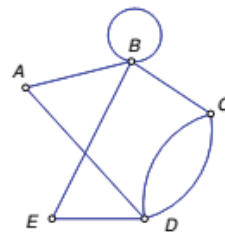
یک مسیر اولیه است که راس شروع و خاتمه یکی است
مدار اولیه



مدار اویئر



An Euler circuit: CDCBBADEBC



Another Euler circuit: CDEBBADC

Euler and Hamiltom Cycles چرخه های دور های اویلر و همیلتون

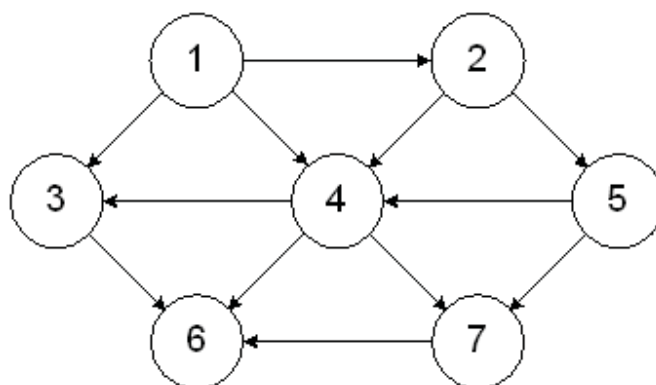
یک چرخه که تمام یال ها فقط یک مرتبه استفاده می کند ، یک چرخه اولیه می نامند .
یک چرخه که تمام راس ها را ، بجز ابتدا و انتها ، فقط یک مرتبه استفاده می کند ، یک چرخه همیلتون است .

مسیر همیلتونی Hamiltonian Path

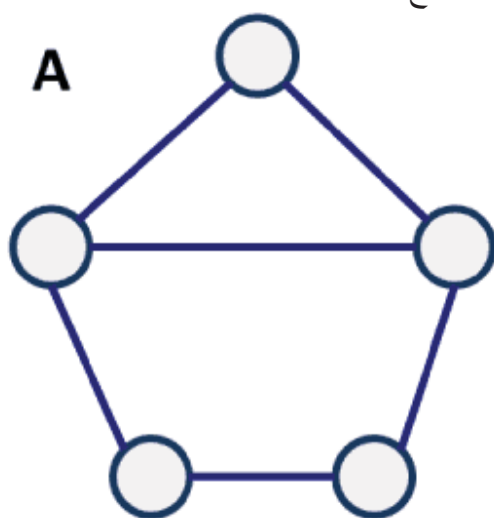
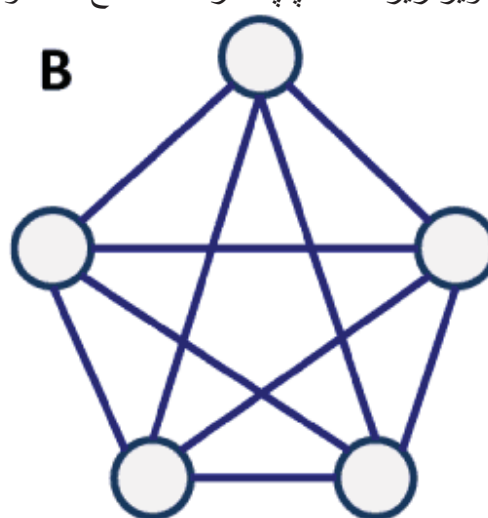
مسیری است که هر راس دقیقاً یک مرتبه باز دید شود.

In-Degree and Out-Degree درجه ورودی و خروجی

در یک گراف جهت دار ، تعداد یال های وارد شده به یک راس را درجه ورودی آن راس می گویند.
در یک گراف جهت دار ، تعداد یال های خارج شده از یک راس را درجه خروجی آن راس می گویند.

**گراف مسطح Planar Graph**

گرافی است که می توان روی یک صفحه رسم کرد ، بدون این که یال ها یکدیگر را قطع کنند. در تصویر زیر سمت چپ، گراف مسطح است و سمت راست نا مسطح

**Planar****Non-Planar****قضیه ۶.۲.۱**

یک گراف بدون جهت G یک چرخه یا دور اولری دارد اگر و فقط اگر G همبند باشد و تمام راس ها درجه زوج داشته باشند.
یک گراف دار G یک چرخه اولری دارد اگر و فقط اگر همبند باشد و دارای درجه های ورودی و خروجی مساوی باشد.

اثبات قسمت اول

قسمت اول را ثابت می کنیم ، این قسمت به قمت دوم هم تعمیم داده می شود.

اگر G یک چرخه یا دور اویلری داشته باشد، پس بر اساس تعریف چرخه، G همبند است. چون هر یال در چرخه است، و هر مرتبه که چرخه به یک راس می‌رسد باید به آن وارد و از آن خارج شود، پس درجه هر راس زوج است.

حال نشان می‌دهیم اگر درجه تمام راس ها زوج باشد پس آن چرخه اویلری است.

از یک راس v شروع می‌کنیم، ادعا می‌کنیم که مسیر در نهایت باید به v برگردد، چرا، برای این که مسیر نمی‌تواند تا بی نهایت ادامه داشته باشد. و نمی‌تواند روی یک راس دیگری بجز $v \neq u$ ختم شود، زیرا باید درجه v زوج باشد. اگر یک یال برای ورود به u وجود دارد، پس یک یال برای خروج از u وجود دارد. این یعنی یک چرخه از v به v داریم. اگر چرخه تمام یال های G را مورد استفاده قرار دهد، پس قضیه ثابت شده است.

در غیر این صورت، یک راس دیگر مثلاً w در G پیدا می‌کنیم که هنوز مورد استفاده قرار نگرفته است. باید w در چرخه وجود داشته باشد، وگرنه w از G جدا است. همان الگوریتم بالا که در مورد v انجام دادیم، در مورد w هم انجام می‌دهیم.

سر انجام چون گراف محدود و کران دار است، به این نتیجه میرسیم که قضیه ثابت شده است.

قضیه تبعی Corollary

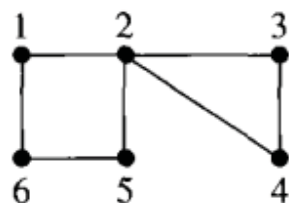
یک گراف بدون جهت G یک مسیر اویلری دارد، اما نه چرخه اویلری، اگر و فقط اگر همبند باشد و فقط دو راس دارای درجه فرد باشد.

شرایط لازم برای گراف های همیلتون Conditions Satisfied by Hamiltonian Graphs

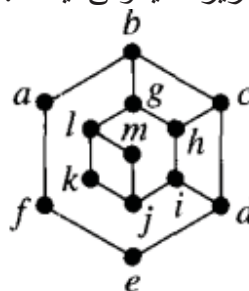
- ۱- یک گراف همیلتون نمی‌تواند دارای یک راس با درجه ۰ یا ۱ داشته باشد.
- ۲- اگر یک راس درجه ۲ دارد، پس هر دو یال های مجاور آن راس باید در تمام چرخه همیلتون در گراف باشد.
- ۳- هر راس در چرخه همیلتون باید انتهای دو یال باشد.
- ۴- اگر یک راس درجه بیشتر از ۲ داشته باشد و دو تا از یال های آن راس برای یک چرخه همیلتون انتخاب شده اند، پس دیگر یال های مجاور آن راس می‌توانند حذف شوند و دیگر در نظر گرفته نشوند.
- ۵- هنگام ساختن یک چرخه همیلتون، یال به یال، یک یال نمی‌تواند طوری انتخاب شود که چرخه را کامل کند، در حالی که تمام راس های گراف شامل نشود.

مثال ۶.۲.۲

هیچ یک از گراف های زیر همیلتونی نیستند.

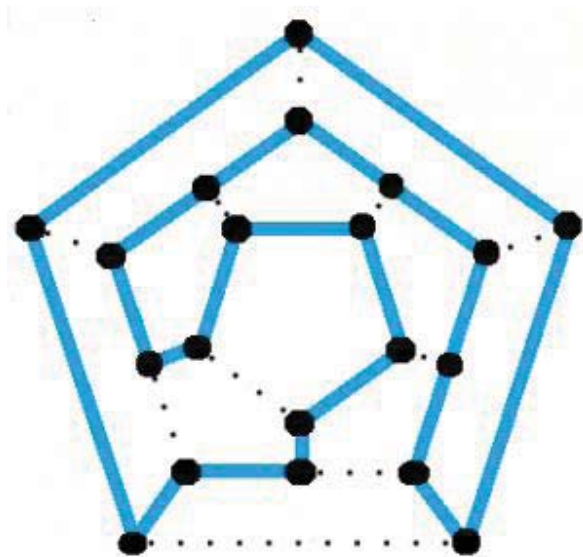


(a)



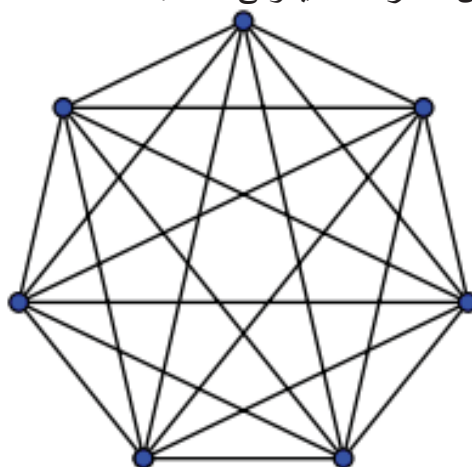
(b)

گراف زیر چرخه همیلتون است.

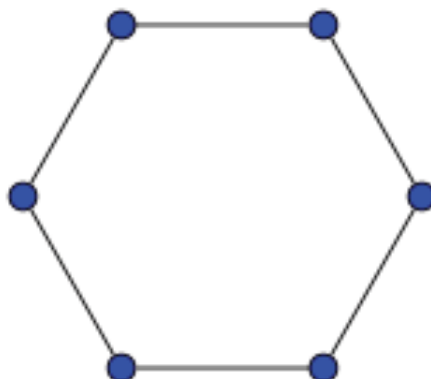


نکات جالب در مورد چرخه یا دور همیلتون

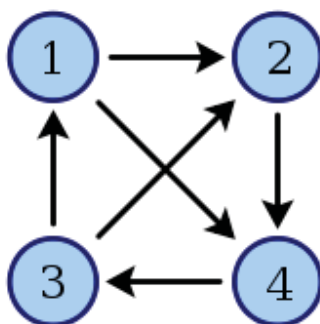
هر گراف کامل با بیش از دو راس، گراف همیلتونی است.



هر گراف چرخه ای ، یک چرخه همیلتونی است.



هر ترنمنت یا دور بازی یک گراف همیلتونی است.



هر شئی افلاطونی به صورت گراف ، یک گراف همیلتونی است.



ماتریس مجاورت گراف Adjacency Matrix

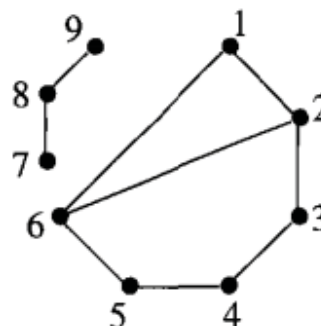
برای اعداد صحیح n و m ، ماتریس A یک ماتریس مستطیلی $n \times m$ است، با n ردیف و m ستون. مقدار ردیف i و ستون j به صورت $A(i, j)$ نمایش داده می شود. ورودی این ماتریس فقط 0 و 1 است. به این ماتریس می گویند ماتریس مجاورت. با مشخصات زیر

$$A(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{برای } (i, j) \in E \\ 0 & \text{برای } (i, j) \notin E \end{cases}$$

یعنی اگر $A(i, j)$ یک باشد، پس یک یال بین i و j وجود دارد. اگر صفر باشد، یالی وجود ندارد. مثلاً در ماتریس زیر ورودی $(1, 1)$ صفر است، پس راس ۱ توسط یک یال به خودش متصل نیست. اما ورودی $(1, 2)$ یک است، پس بین راس ۱ و راس ۲ یک یال است. به همین ترتیب. جلو می رویم. تصویر زیر ماتریس مجاورت و گراف مربوطه را ملاحظه می کنید.

ماتریس مجاورت و گراف آن

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	1	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	1	0	0	0
6	1	1	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	1	0

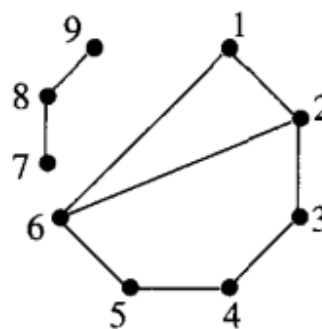


در کتب فارسی زبان، ورودی ها ۲ و ۳ هم دیده شده، یعنی از راس i دو یا سه یال به راس دیگر وجود دارد. اما آن که در بالا آمد یک روش بین المللی است،

روش دیگر مطابق تصویر زیر است که بنام لیست مجاورت **Adjacency List** موسوم است. در ستون سمت چپ لیست، شماره یا نام رئوس نوشته شده است. در ستون سمت راست، در هر ردیف دو یا سه عدد نوشته شده است. این اعداد نشان می دهد که راس ۱ به کدام رئوس دیگر توسط یال متصل است. باز هم منکن است بجای شماره، حروف داشته باشیم.

لیست مجاورت و گراف مربوطه

Vertices	List of Adjacencies
1	2 6
2	1 6 3
3	2 4
4	3 5
5	4 6
6	1 5 2
7	8
8	7 9
9	8



تفاوت ماتریس جهت دار و بدن جهت در تصاویر زیر مشخص است. مثلاً از راس ۱ به راس ۰ اگر هم $(10) = 1$ و هم $(01) = 1$ باشد، پس بدون جهت است اما اگر $(01) = 0$ و $(10) = 1$ انوقت از ۱ به ۰ جهت دار است. فراموش نشود $A(i, j)$ ردیف i است و ستون j است.

ماتریس جهت دار

	0	1	2	3	4	5
0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	1
5	0	1	0	0	0	0



ماتریس بدون جهت

	0	1	2	3	4	5
0	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	1
2	1	0	0	0	1	0
3	1	0	0	0	1	0
4	0	1	1	1	0	1
5	0	1	0	0	1	0



بخاطر آورید که یک درخت **Tree** یک گراف همبند **Connected Graph** است که هیچ چرخه ندارد.

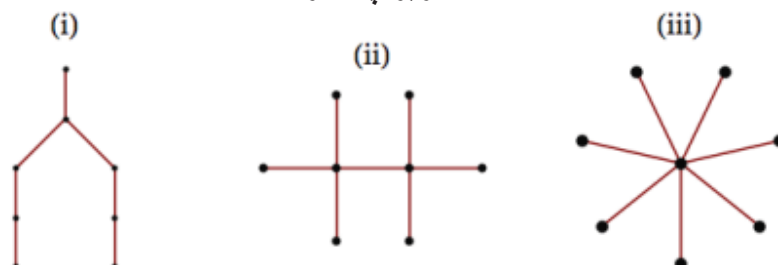
در فصل پنجم دیاگرام درختی را دیدیم. در ذیل تعریف دیاگرام درختی و دیاگرام جنگلی را می آوریم.

تعریف ۶.۲.۱

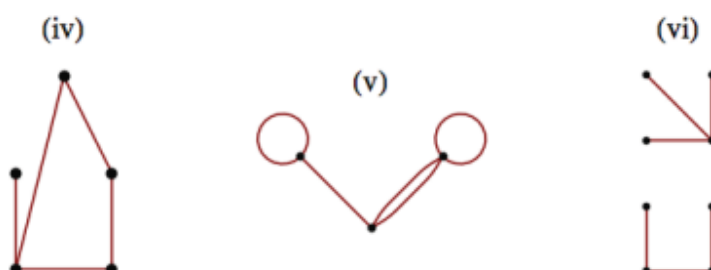
یک درخت **Tree** یک گراف همبند است که هیچ زیر گرافی که چرخه باشد، ندارد.
یک جنگل **A Forest** یک گراف نا همبند است که مولفه های آن درخت ها هستند.

توضیح در کتب فارسی کلمه *Cycle* را دور ترجمه کرده اند و ما از این به بعد آنرا چرخه ترجمه می کنیم. زیرا کلمه دور ممکن است به معنی مسافت تلقی شود. مثلاً شیراز نسبت به تهران خیلی دور است. اما کلمه چرخه این اشتباه ایجاد نمی کند.

تصویر چند درخت



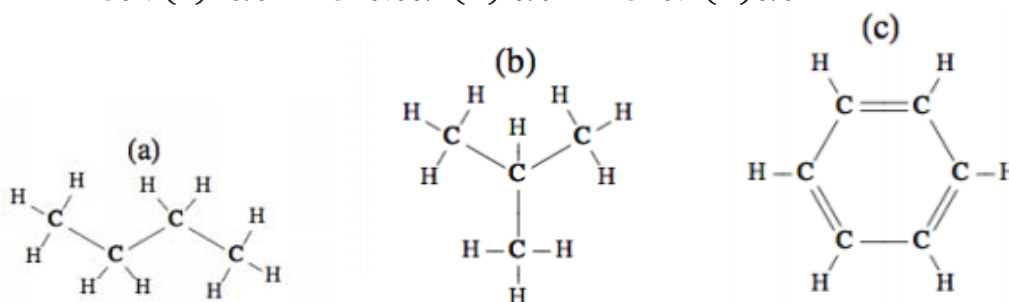
تصویر چند گراف که درخت نیستند



ساختمان بعضی ترکیبات شیمیائی توسط یک درخت تصویر می شوند. مثلاً بوتان *Butane* شامل چهار اتم کربن و ده اتم هیدروژن است. یک یال بین دو اتم نشانه نیرویی است که اتم های ملکول را همبسته نگاه می دارد.

همان مجموعه اتم ها، میتوانند به طریق دیگر به هم متصل شوند تا، ایزوبوتان *Isobutane* به ما بدهد. اما، گراف، بنزن *Benzene* درخت نیست.

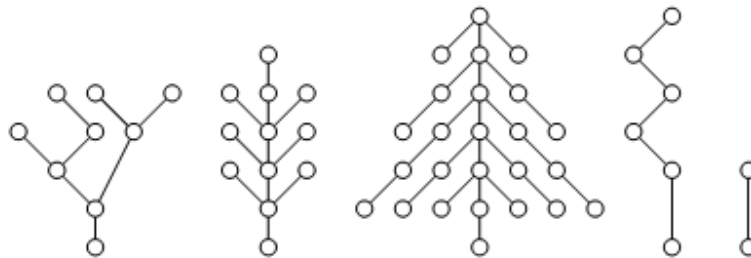
تصویر (a) بوتان، تصویر (b) ایزوبوتان، تصویر (c) بنزن



پس درخت و جنگل هر دو گراف هستند بدون چرخه. تفاوت آنها این است که درخت باید همبند باشد، اما جنگل لازم نیست همبند باشد. پس هر درخت یک جنگل است، اما یک جنگل یک درخت نیست، مگر

این که همبند باشد. تصویر ۶.۲.۳ مثال یک جنگل است. ملاحظه می کنید که هر مولفه یک جنگل، یک درخت است.

تصویر ۶.۲.۳



برای مثال دیگر، توجه دارید که هر مسیر P_n یک درخت است. همچنین هر گراف دو بخشی کامل $K_{1,n}$ یک درخت است. از نماد $K_{1,n}$ متوجه می شوید که یک بخش دارای اندازه یک است. چون یک درخت چرخه و یا دور ندارد، پس مسلماً چرخه یا دور فرد ندارد. پس یک درخت، یک گراف دو بخشی است. این موضوع در مورد جنگل هم صدق می کند.

گزاره ۶.۲.۲

اگر یک درخت n راس داشته باشد، پس $n - 1$ یال دارد. اگر یک جنگل n راس و c مولفه داشته باشد، پس دارای $n - c$ یال است.

برهان قسمت اول

فرض می کنیم n تعداد راس های درخت (T) باشد.

اگر $n = 1$ باشد، پس $0 =$ تعداد یال ها است.

اگر $n = 2$ باشد، پس $1 =$ تعداد یال ها است.

اگر $n = 3$ باشد، پس $2 =$ تعداد یال ها است.

پس قضیه برای $n = 1, 2, 3$ صحت دارد.

حال فرض می کنیم قضیه برای $n = m$ صحیح است. می خواهیم ثابت کنیم که قضیه برای

$n = m + 1$ صحیح است.

فرض می کنیم e یالی باشد که راس های V_i و V_j به هم متصل می کند. چون G یک درخت است، پس فقط یک مسیر بین راس های V_i و V_j وجود دارد. پس اگر یال e را پاک کنیم، یک گراف نا همبند خواهیم داشت. و G به دو مولفه V_1 و V_2 تقسیم می شود. این مولفه ها کمتر از $m + 1$ راس خواهند داشت و مداری هم وجود ندارد و لذا مولفه های G_1 و G_2 دارای m_1 و m_2 راس خواهند بود.

حال

$$\begin{aligned} \text{مجموع تعداد یال ها} &= (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + 1 \\ &= (m_1 + m_2) - 1 = m + 1 - 1 = m \end{aligned}$$

لذا برای $n = m + 1$ راس m یال در یک درخت (T) وجود دارد. پس بر اساس استقرا ریاضی گراف دقیقا $n - 1$ یال دارد.

برهان قسمت دوم.

فرض می کنیم G یک جنگل باشد با رئوس n و c مولفه. مولفه ها را $G_1, G_2, \dots, G_c$ می نامیم. چون هر یک از مولفه های G_i یک درخت است، پس $|V(G_i)| - 1$ یال دارد. لذا مجموع یال های G به صورت زیر بدست می آید.

$$\sum_{i=1}^c (|V(G_i)| - 1) = \left(\sum_{i=1}^c |V(G_i)| \right) - c = n - c$$

مثلا در جنگل تصویر ۶.۲.۳ تعداد راس ها ۵۴ و تعداد مولفه ها ۵ است. پس باید $49 = 54 - 5$ یال وجود داشته باشد. اگر شمارش کنید، صحت آن روشن می شود.

نکته جالب در مورد درخت ها این است که میانگین درجه راس، کاملا پایین است. بر اساس معادله ۶.۲.۱ و گزاره ۶.۲.۲ میانگین درجه یک درخت با n راس به صورت زیر است.

$$\frac{2|E(G)|}{|V(G)|} = \frac{2(n-1)}{n} = \frac{2n-2}{n} = 2 - \frac{2}{n}$$

این عدد بدست آمده، کمتر از ۲ است. یعنی میانگین درجه راس هر درخت کمتر از ۲ است. در نتیجه هر درختی باید حد اقل یک راس با درجه ۰ یا ۱ داشته باشد. اما اگر یک درخت بیش از یک راس داشته باشد، نمی تواند هیچ راسی با درجه صفر داشته باشد. این استدلال، اصل موضوع زیر را نتیجه می شود.

اصل موضوع ۶.۲.۱

یک درخت با بیش از یک راس، دارای یک راس با درجه یک است.
یا یک درخت با حد اقل دو راس، حد اقل دو راس با درجه یک دارد.

اصل موضوع بالا می تواند جهت اثبات گزاره های مربوط به درخت ها بکار برده شود.

خصوصیات درخت ها Properties of trees

قضیه ۶.۲.۲

یک گراف T یک درخت است اگر و فقط اگر بین هر دو راس متمایز T یک مسیر منحصر به فرد وجود داشته باشد.

قضیه فرعی ۶.۲.۲

یک گراف F یک جنگل است اگر و فقط اگر بین هر دو راس F حد اکثر یک مسیر وجود داشته باشد.

قضیه ۶.۲.۳

اگر T یک درخت باشد با v راس و e یال، پس $e = v - 1$

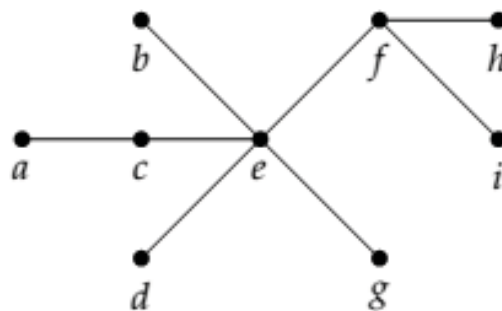
درخت های ریشه دار Rooted Trees

تا کنون، درخت ها را یک نوع مخصوص گراف تصور کرده ایم. اما اغلب مفید به نظر می رسد که ساختار بیش تری به درخت ها اضافه کنیم، تا برای حل مسائل به ما کمک کند. اطلاعات اغلب مثل یک درخت سازمان داده می شوند. مثلا همین کتاب ساختار یک درخت دارد. یک راس رسم کنید برای خود کتاب. سپس برای هر فصل یک راس در نظر بگیرید و آنها را به راس کتاب وصل کنید. سپس زیر هر فصل راس هایی برای بخش های مختلف آن فصل رسم کنید و آنها را به فصل های مربوطه وصل کنید. این گراف چرخه یا دور Cycle ندارد. پس یک درخت است.

همین که یک راس را به عنوان ریشه Root مشخص کردیم، پس ویژگی راس های دیگر روی درخت، بستگی به محل آن راس نسبت به ریشه دارد. چون بین هر دو راس، یک مسیر منحصر به فرد وجود دارد، پس از هر راس می توانیم فقط از یک راه به ریشه برگردیم. اگر دو راس همجوار باشند می گوییم یکی از آنها والد یا نیا Parent راس دیگر است. این راس دیگر را بچه Child آن پدر می نامیم. آن راسی که به ریشه نزدیک تر است، پدر است. پس ریشه یک درخت، خود یک پدر است اما بچه هیچ راس دیگری نیست. بقیه راس ها که ریشه نیستند، دقیقا یک پدر دارند.

بچه بچه یک راس نوه Grandchild آن راس می گویند و آن راس را پدر بزرگ Grandparent می نامند. بطور کلی، می گوییم راس v نواده Descendent یک راس u است اگر u یک راس در مسیر از v به طرف ریشه باشد. پس u را جد Ancestor v می نامیم. البته در مورد بیشتر درخت ها، دو راس وجود دارد که اولاد یکدیگر نیستند. آنها خواهر برادر یا دختر عمو پسر عمو Sibling هستند. توجه داشته باشید عمو زده ها، راس های مجاور نیستند.

مثلا تصویر زیر را در نظر بگیرید.



اگر راس f را ریشه فرض کنیم، پس e, h, i بچه های f هستند. و خواهر برادر یکدیگر هستند. می گوییم a بچه c است و a نواده f است. راس g نوه f است. رئوس d و g خواهر برادر هستند، چون یک پدر مشترک e دارند.

اگر ریشه را عوض کنیم. روابط بالا تغییر می کنند. مثلا اگر a را ریشه فرض کنیم، پس تنها بچه اش c است. و c هم فقط یک بچه دارد و آن هم e است. پس f بچه e می شود. و f نواده a می شود. و الی آخر.

مثال ۶.۲.۳

توضیح دهید که چرا هر درختی یک گراف دو بخشی است.

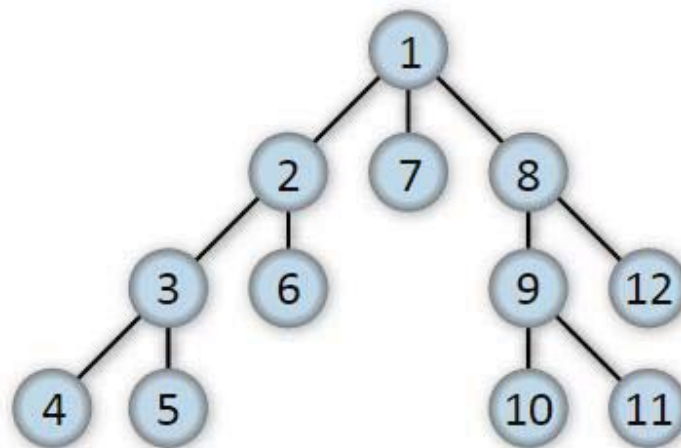
پاسخ

بر این که نشان دهیم یک گراف دو بخشی است ، باید رئوس را به دو مجموعه A و B تقسیم کنیم به طوری که هیچ دو راسی در یک مجموعه ، مجاور هم نباشند. الگوریتم به صورت زیر است. هر راسی را که مایل هستند ، ریشه فرض کنید. آن را مجموعه A بنامید. حالا همه بچه های ریشه را در مجموعه B بگذارید. هیچ یک از بچه ها، رئوس مجاور نیستند. بلکه خواهر برادر هستند. حالا همه بچه های تمام رئوس B را در مجموعه A قرار دهید. باز همان حالت اول پیش می آید. هیچ کدام از بچه ها در مجموعه A ، رئوس مجاور نیستند. پس مساله ثابت می شود.

دو روش برای سیر یا جستجوی یک درخت وجود دارد.

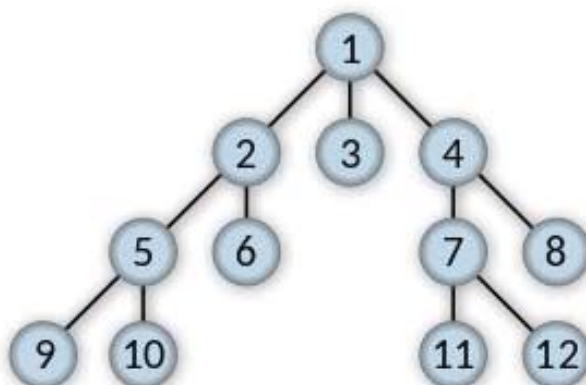
۱. **جستجوی اول عمق DFS Depth First Search** در این روش از ریشه درخت یا هر راس اختیاری که ممکن باشد ، شروع می کنیم و تا آنجا که ممکن باشد در طول یک شاخه جستجو می کنیم ، سپس برمی گردیم یک شاخه دیگر تا به آخر سیر می کنیم. تا این که تمام شاخه ها به این طریق سیر شوند. در تصویر زیر رئوس به ترتیبی که سیر می شوند ، شماره گذاری شده اند.

جستجوی اول عمق



۲ - **جستجوی اول سطح BFS Breadth First Search** در این روش هم از ریشه یا هر راس اختیاری شروع می کنیم ، اما برخلاف روش DFS ابتدا راس های همسایه را جستجو می کنیم و سپس سطح بعد را سیر می کنیم. به عبارت دیگر در BFS رئوس به ترتیب فاصله از راس مبدا مورد بررسی قرار می دهیم. در تصویر زیر رئوس به ترتیبی که سیر می شوند ، شماره گذاری شده اند.

جستجوی اول سطح

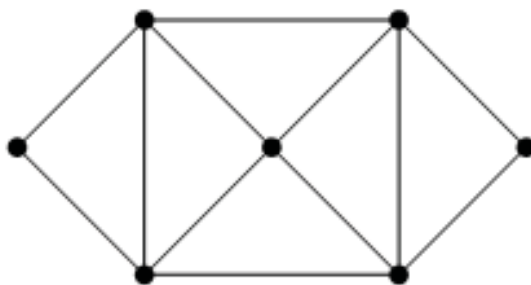


درخت پوشا Spanning Tree

اگر یک گراف همبند G داشته باشیم، یک درخت پوشا G عبارت است از یک زیرگراف G که یک درخت است و شامل تمام رئوس G است.

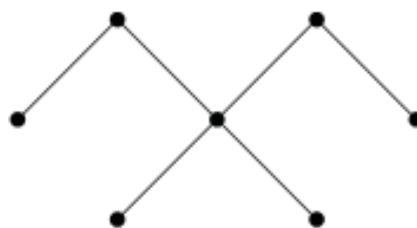
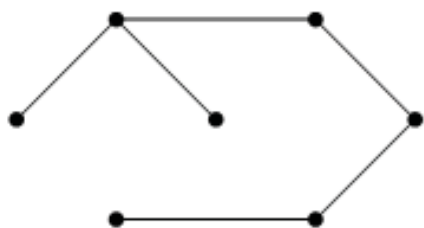
مثال ۶.۲.۴

دو درخت پوشا مختلف گراف زیر را پیدا کنید.



پاسخ

در زیر، دو درخت پوشای گراف بالا است.



تمرینات ۶.۲

۱ - در یک سمینار ، ۹ ریاضی دان به یکدیگر دست دادند. آیا ممکن است هر یک از این ریاضی دانان دقیقاً با ۷ نفر در این سمینار دست داده باشند؟

۲ - تعداد ۵۰۶ نفر در یک مهمانی هستند. فرض کنید هر یک از این افراد حد اقل با یک نفر در این مهمانی دست بدهد. ثابت کنید یک نفر باید در این مهمانی باشد که حد اقل با دو نفر دست داده است.

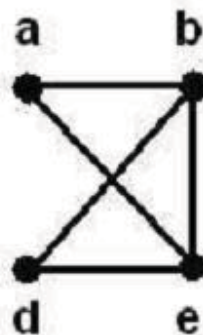
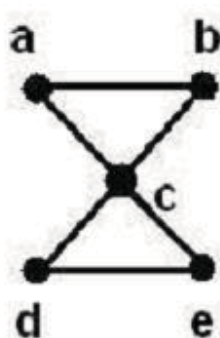
۳ - با توجه به ماتریس مجاورت زیر ، گراف را رسم کنید.

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	1
4	1	1	0	0	1
5	0	1	1	1	0

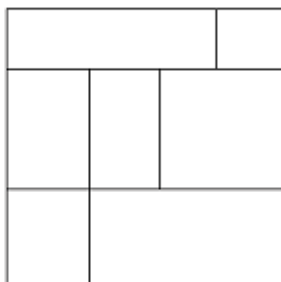
۴ - گراف مربوط به لیست مجاورت زیر را رسم کنید.

1	4
2	4 5
3	5
4	1 2 5
5	2 3 4

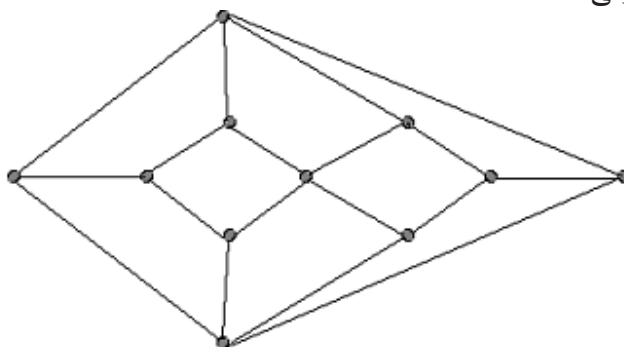
۵ - در مورد گراف های زیر چه نظری دارید؟ آیا مسیر یا مدار اویلری هستند؟ توضیح دهید.



۶ - آیا می توانید یک مداد روی یکی از نقاط تصویر زیر قرار دهید و روی تمام خطوط گردش دهید بدون این که روی یک خط دو مرتبه عبور کنید تا بجای اول برسید؟

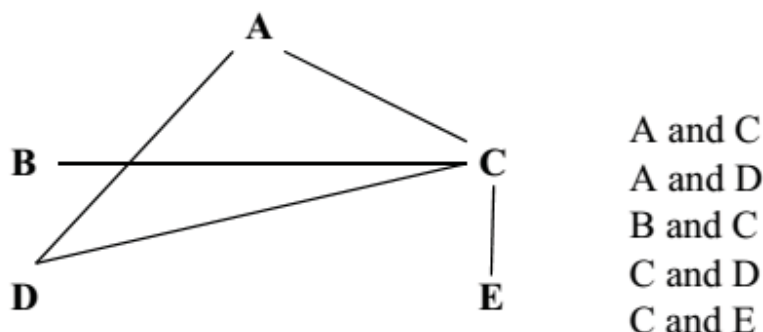


۷ - آیا گراف زیر همیلتونی است؟



۸ - یک گراف پیدا کنید که اویلری باشد ، اما همیلتونی نباشد. یک گراف هم پیدا کنید که همیلتونی باشد ، اما اویلری نباشد.

۹ - یک ماتریس مجاورت برای تمرین شماره ۱۴ بخش ۶.۱ رسم کنید.
برای یاد آوری داشتیم.



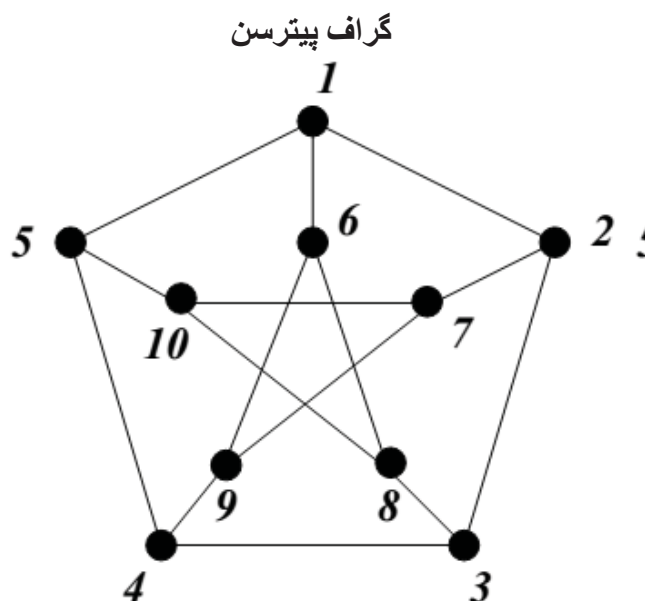
۱۰ - ثابت کنید مجموع درجات رئوس هر گراف کران دار ، زوج است.

۱۱ - نشان دهید که هر گراف کران دار ساده، دو راس با درجات مساوی دارند.

۱۲ - ثابت کنید یک گراف کامل با n راس دارای $\frac{n(n-1)}{2}$ یال است.

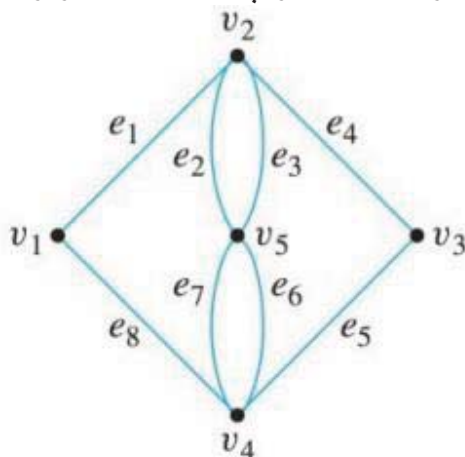
۱۳ - تجزیه یک گراف عبارت است از یک لیست از زیر گراف های آن، بطوری که هر یال دقیقا در یک زیر گراف در آن لیست ظاهر شود.

گراف پیترسن Petersen Graph که در ذیل می آید به سه زیرگراف همبند تجزیه کنید که دو به دو همریخت باشند.

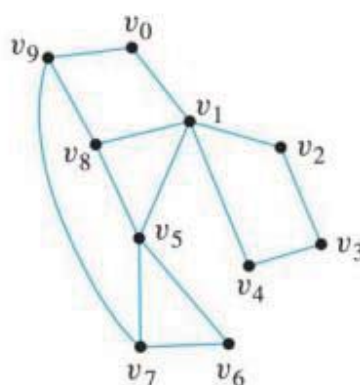


راهنمایی چون در گراف پیترسن ۱۵ یال وجود دارد ، پس هر زیر گراف باید دو یال داشته باشد.

۱۴ - آیا گراف زیر ، یک مدار اویلری است ؟ اگر چنین است ، مسیر را مشخص کنید.



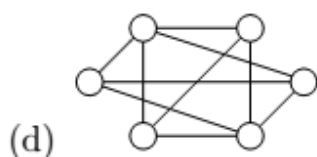
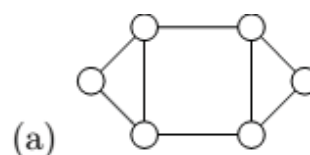
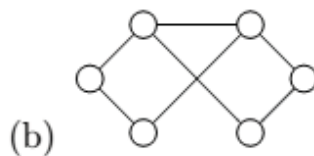
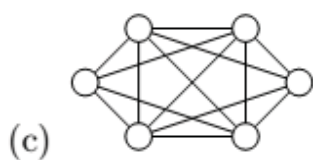
۱۵ - آیا گراف زیر ، یک مدار اویلری است ؟ اگر چنین است ، مسیر را مشخص کنید. اگر پاسخ منفی است ، توضیح دهید.



۱۶ - برای هر یک از گراف های زیر ، پاسخ دهید.

آیا مسطح است؟

آیا دو بخشی است؟



۱۷ - آرش و بهرام با هم دوست هستند. آرش همچنین با سیروس و داریوش دوست است. بهرام و سیروس و احسان با هم دوست هستند. یک ماتریس مجاورت برای این دوستی ها بنویسید و گراف مربوطه را رسم کنید.

آرش Arash

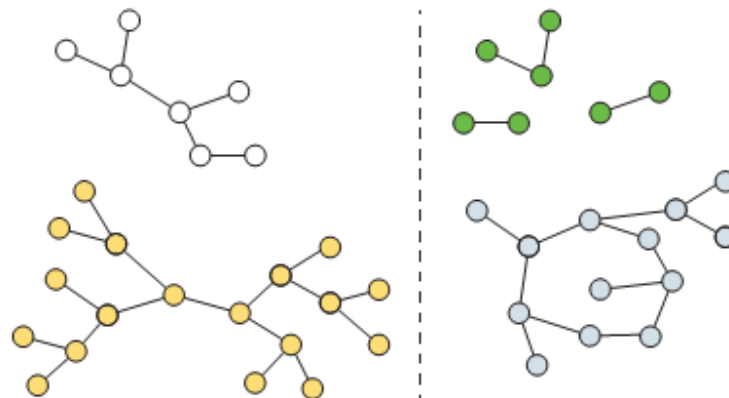
بهرام Bahram

سیروس سیروس Cyrus

داریوش Daryoush

احسان Ehsan

۱۸ - آیا تصاویر زیر درخت هستند؟ توضیح دهید.



۱۹ - کدام یک از گراف های زیر درخت هستند و کدام درخت نیستند. توضیح دهید.

- a) $G = (V, E)$ با $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$
- b) $G = (V, E)$ با $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$
- c) $G = (V, E)$ با $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}\}$
- d) $G = (V, E)$ با $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{d, e\}\}$

پاسخ تمرینات ۶.۲

۱ - در یک سمینار ، ۹ ریاضی دان به یکدیگر دست دادند. آیا ممکن است هر یک از این ریاضی دانان دقیقاً با ۷ نفر در این سمینار دست داده باشند؟

پاسخ

ظاهراً باید ممکن باشد. هر یک از این ریاضی دادان یک شخص را انتخاب می کنند که به او دست ندهند. اما این نمی تواند اتفاق افتد. زیرا ، مثل این است که سؤال کنیم یک گراف با ۹ راس ، می تواند هر راس درجه ۷ داشته باشد ؟ اگر چنین گرافی وجود داشته باشد ، مجموع درجات رئوس آن باید

$$۹ * ۷ = ۶۳$$

باشد ، این باید دو برابر تعداد یال ها ، یعنی دست دادن باشد که نتیجه می شود

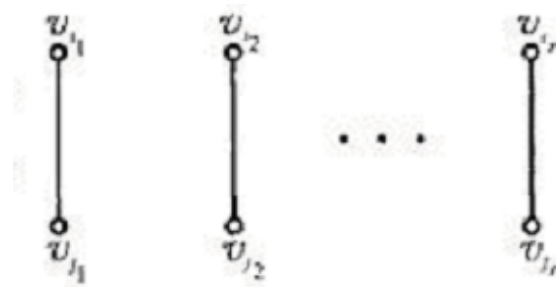
$$۶۳ \div ۲ = 31.5$$

و این غیر ممکن است که 31.5 یال داشته باشیم. پس حد اقل یک نفر باید با تعداد زوجی از افراد در سمینار دست داده باشد.

۲ - تعداد ۵ و ۶ نفر در یک مهمانی هستند. فرض کنید هر یک از این افراد حد اقل با یک نفر در این مهمانی دست بدهد. ثابت کنید یک نفر باید در این مهمانی باشد که حد اقل با دو نفر دست داده است.

پاسخ

بر اساس فرض مساله ، هر یک از اشخاص در این مهمانی حد اقل با یک نفر دست داده است. این یعنی گراف G شامل چندین راس است بطوری که هر دو راس فقط با یک یال به هم مربوط می شوند. تصویر زیر

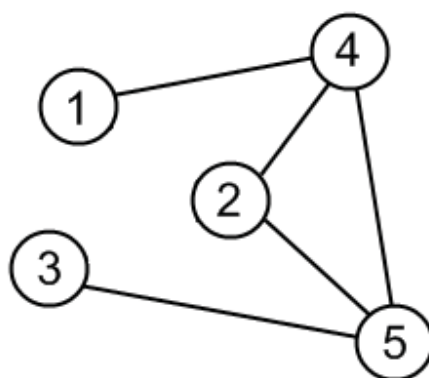


فرض می کنیم G دارای r یال باشد. پس G باید دارای $۲r$ راس باشد. یعنی تعداد راس ها باید زوج باشد. و این خلاف فرض مساله است که گفته تعداد رئوس ۵ و ۶ است یعنی تعداد رئوس فرد است.

۳- با توجه به ماتریس مجاورت زیر ، گراف را رسم کنید

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	1	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	1
4	1	1	0	0	1
5	0	1	1	1	0

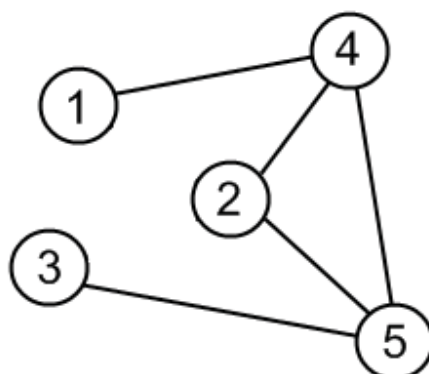
پاسخ



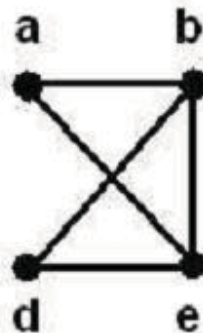
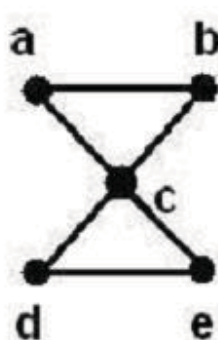
۴- گراف مربوط به لیست مجاورت زیر را رسم کنید.

1	4
2	4 5
3	5
4	1 2 5
5	2 3 4

پاسخ



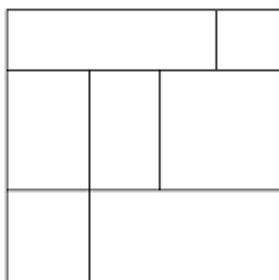
۵ - در مورد گراف های زیر چه نظری دارید؟ آیا مسیر یا مدار اویلری هستند؟ توضیح دهید.



پاسخ

گراف سمت چپ مدار یا چرخه اویلری است. a, c, d, e, c, b, a
گراف سمت راست یک مسیر اویلری است. b, a, e, d, b, e

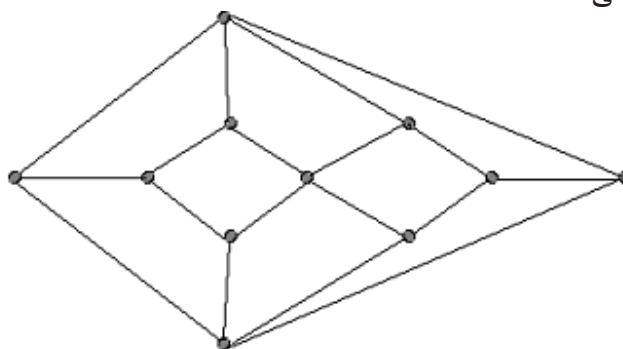
۶ - آیا می توانید یک مداد روی یکی از نقاط تصویر زیر قرار دهید و روی تمام خطوط گردش دهید بدون این که روی یک خط دو مرتبه عبور کنید تا بجای اول برسید؟



پاسخ

خیر ، این تصویر ، یک گراف اویلری نیست زیرا دارای رئوس درجه ۳ دارد.

۷ - آیا گراف زیر همیلتونی است؟



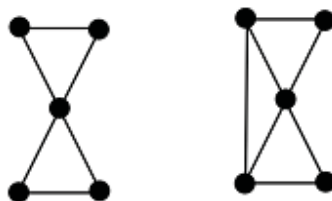
پاسخ

خیر. این یک گراف دو بخشی است با تعداد رئوس فرد.

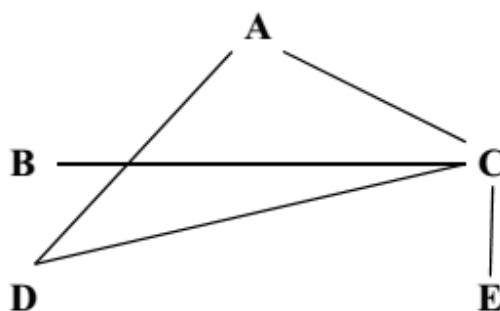
۸ - یک گراف پیدا کنید که اویلری باشد ، اما همیلتونی نباشد. یک گراف هم پیدا کنید که همیلتونی باشد ، اما اویلری نباشد.

پاسخ

گراف زیر ، سمت چپ اویلری است ، اما همیلتونی نیست. گراف سمت راست همیلتونی است ، اما اویلری نیست. مثال های زیادی می توان پیدا کرد.



۹ - یک ماتریس مجاورت برای تمرین شماره ۱۴ بخش ۶.۱ رسم کنید. برای یاد آوری داشتیم.



A and C
A and D
B and C
C and D
C and E

پاسخ

	A	B	C	D	E
A	0	0	1	1	0
B	0	0	1	0	0
C	1	1	0	1	1
D	1	0	1	0	0
E	0	0	1	0	0

۱۰ - ثابت کنید مجموع درجات رئوس هر گراف کران دار ، زوج است.

پاسخ

هر یال به دو راس ختم می شود. اگر فقط با رئوس شروع کنیم و یال ها را ندیده بگیریم ، هر راس دارای درجه صفر است و صفر یک عدد زوج است. حالا یال ها را یکی یکی اضافه می کنیم. هر کدام از این یال ها ، یک راس را به راس دیگری وصل می کند. و یا اگر اجازه دهیم هر یال خودش را به خودش وصل می کند. یا به درجه دو راس یک اضافه می شود ، که مجموع آن میشود دو ، یا درجه یک راس دو تا اضافه می شود. در هر حالت ، به مجموع درجات دو تا اضافه می شود. پس مجموع ، زوج باقی می ماند.

۱۱ - نشان دهید که هر گراف کران دار ساده ، دو راس با درجات مساوی دارند.

پاسخ

از اصل لانه کبوتری استفاده می کنیم.
فرض می کنیم گراف n راس داشته باشد. هر کدام از این راس ها به یکی دیگر از رئوس $0, 1, 2, \dots, n-1$ متصل است. اگر یکی از این رئوس به رئوس $1 - n$ متصل باشد ، پس به تمام بقیه رئوس متصل است. پس راسی نمی تواند وجود داشته باشد که به هیچ راسی متصل نباشد. پس غیر ممکن است که یک گراف با n راس داشته باشیم بطوری که یک راس دارای درجه صفر باشد و یکی دیگر دارای درجه $1 - n$ پس رئوس می توانند حد اکثر $1 - n$ درجات مختلف داشته باشند. و چون n راس وجود دارد ، پس حد اقل دو راس دارای درجات مساوی هستند.

نکته جالب - مساله شماره دو را می توان مانند مساله شماره ۱۱ از طریق اصل لانه کبوتری حل کرد . بجای 605 نفر می گذاریم n نفر.

۱۲ - ثابت کنید یک گراف کامل با n راس دارای $\frac{n(n-1)}{2}$ یال است.

پاسخ

اگر $n = 1$ باشد پس داریم

$$\frac{1(1-1)}{2} = 0$$

یال خواهیم داشت ، پس برای $n = 1$ قضیه ثابت است.
فرض می کنیم برای k راس

$$\frac{k(k-1)}{2}$$

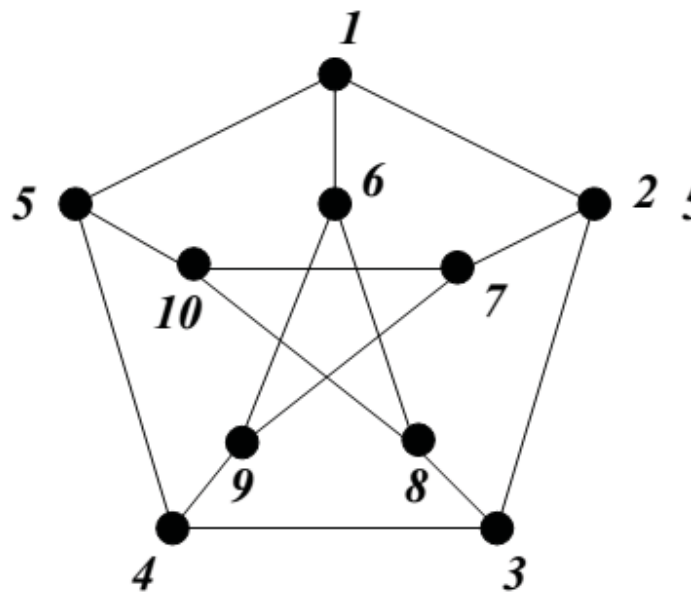
یال داشته باشیم. باید ثابت کنیم، قضیه برای $k+1$ هم صادق است. یعنی $k+1$ ام راس به k رئوس اولیه اضافه کنیم.

$$\frac{k(k-1)}{2} + k = \frac{(k+1)((k+1)-1)}{2}$$

پس قضیه ثابت است.

۱۳ - تجزیه یک گراف عبارت است از یک لیست از زیر گراف های آن، بطوری که هر یال دقیقاً در یک زیر گراف در آن لیست ظاهر شود.
گراف پیترسن Petersen Graph که در ذیل می آید به سه زیرگراف همبند تجزیه کنید که دو به دو همریخت باشند.

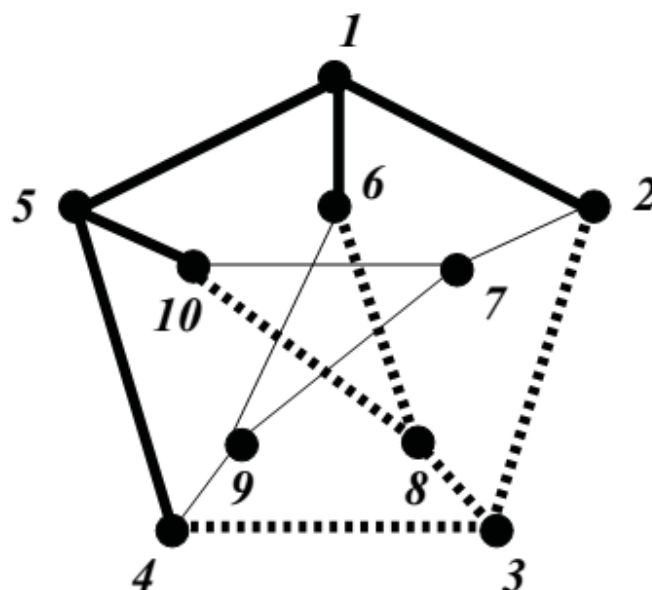
گراف پیترسن



راهنمایی چون در گراف پیترسن ۱۵ یال وجود دارد، پس هر زیر گراف باید دو یال داشته باشد.
پاسخ

یکی از زیر گراف ها درخت T_1 است همراه با گراف آن

$$T_1 : \{(1, 2), (1, 6), (1, 5), (5, 4), (5, 10)\}$$



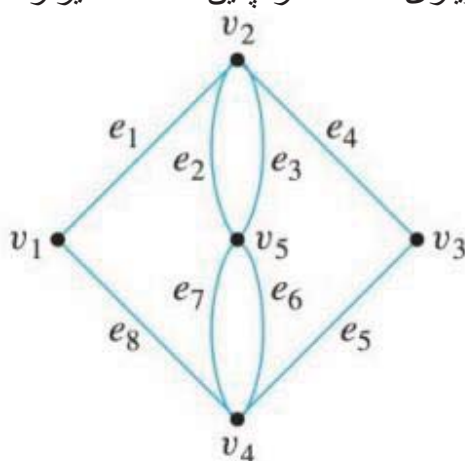
دو زیر گراف دیگر به صورت زیر است.

$$T_2 : \{(4, 3), (3, 8), (3, 2), (8, 6), (8, 10)\}$$

$$T_3 : \{(4, 9), (9, 6), (9, 7), (7, 2), (7, 10)\}$$

ملاحظه می کنید که هر سه زیر گراف ، درخت هستند.

۱۴ - آیا گراف زیر ، یک مدار اویلری است ؟ اگر چنین است ، مسیر را مشخص کنید.

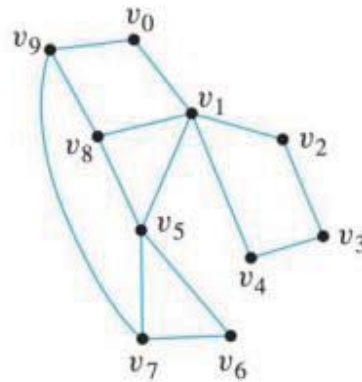


پاسخ

آری ، مسیر گشت به صورت زیر است.

$$e_4, e_5, e_6, e_3, e_2, e_7, e_8, e_1$$

۱۵ - آیا گراف زیر ، یک مدار اویلری است ؟ اگر چنین است ، مسیر را مشخص کنید. اگر پاسخ منفی است ، توضیح دهید.



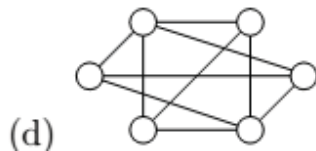
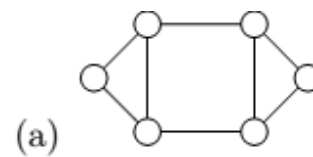
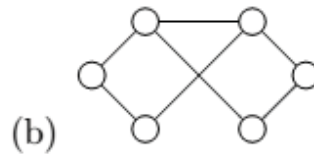
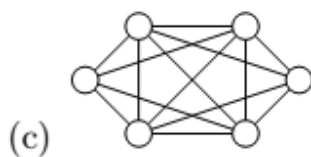
پاسخ

خیر ، زیرا رئیس با درجه فرد دارد.

۱۶ - برای هر یک از گراف های زیر ، پاسخ دهید.

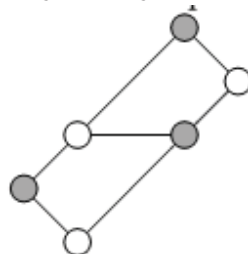
آیا مسطح است؟

آیا دو بخشی است؟



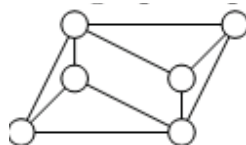
پاسخ

گراف (a) مسطح است ، زیرا یال ها یکد یگر را قطع نمی کنند. اما دو بخشی نیست.
گراف (b) مسطح است. می توانیم قسمتی از گراف را حرکت دهیم که یک گراف مسطح بدست آوریم.
این گراف دو بخشی هم است ، چم می توان یال ها را با دو رنگ مختلف رنگ امیزی کرد.



گراف (c) مسطح نیست. ۶ راس و ۱۴ یال دارد. بر اساس فرمول اویلر، یک گراف مسطح با ۶ راس، می تواند حداکثر $12 = 6 - 3$ یال داشته باشد. این گراف دو بخشی هم نیست، زیرا شامل یک چرخ مثلث است.

گراف (d) یک گراف مسطح است. می توان آنرا به صورت زیر ترسیم کرد.



اما دو بخشی نیست ، زیرا شامل چند مثلث است.

۱۷ - آرش و بهرام با هم دوست هستند. آرش همچنین با سیروس و داریوش دوست است. بهرام و سیروس و احسان با هم دوست هستند. یک ماتریس مجاورت برای این دوستی ها بنویسید و گراف مربوطه را رسم کنید.

آرش Arash

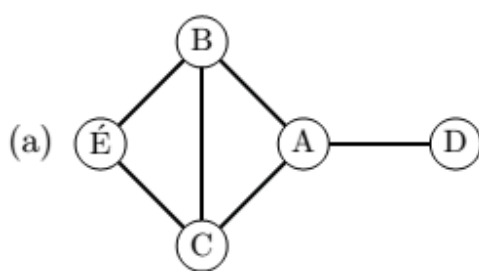
بهرام Bahram

سیروس Cyrus

داریوش Daryoush

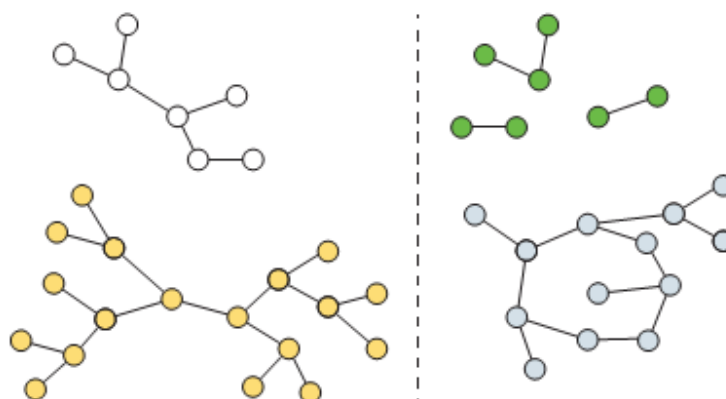
احسان Ehsan

پاسخ



	A	B	C	D	$\bar{E}$
A	0	1	1	1	0
B	1	0	1	0	1
C	1	1	0	0	1
D	1	0	0	0	0
$\bar{E}$	0	1	1	0	0

۱۸ - آیا تصاویر زیر درخت هستند؟ توضیح دهید.



پاسخ

دو گراف سمت چپ ، درخت هستند. اما دو گراف سمت راست درخت نیستند. گراف سمت راست بالا با رئوس سبز رنگ شامل چند مولفه است که هر مولفه همبند است. پس هر کدام یک درخت است. و

هر سه با هم یک جنگل است. گراف سمت راست پایین با رئوس آبی رنگ، شامل دور یا چرخه است، پس درخت نیست.

۱۹ - کدام یک از گراف های زیر درخت هستند و کدام درخت نیستند. توضیح دهید.

- a) $G = (V, E)$ با $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$
 b) $G = (V, E)$ با $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$
 c) $G = (V, E)$ با $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}\}$
 d) $G = (V, E)$ با $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{d, e\}\}$

پاسخ

گراف (a) یک درخت نیست، زیرا شامل دور یا چرخه است. همچنین تعداد یال ها برای یک درخت زیاد است. چون تمام درخت ها با v راس، $v - 1$ یال دارند.

گراف (b) یک درخت است، زیرا همبند است و شامل دور یا چرخه نیست.

گراف (c) یک درخت است، زیرا همبند است و چرخه ندارد.

گراف (d) درخت نیست، زیرا همبند نیست. تعداد یال ها برای این که یک درخت باشد، کافی نیست.

۶.۳ - رنگ آمیزی و عدد رنگی Colorings and Chromatic Number

مقدمه

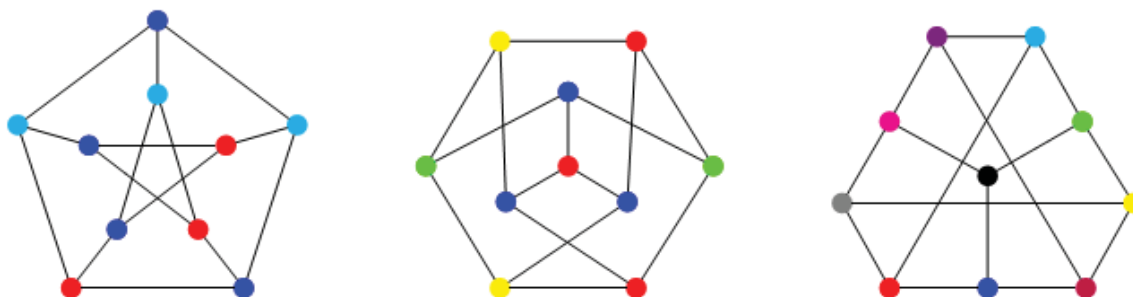
اگر نقشه یک کشور یا استان و غیره داشته باشیم می توانیم به هر ناحیه یک رنگ اختصاص دهیم ، بطوری که ناحیه همسایه ، همان رنگ نباشد. اما این موضوع چه ربطی به تئوری گراف دارد؟ خوب، اگر یک راس در مرکز هر استان قرار دهیم و سپس این رئوس را به هم وصل کنیم ، یک گراف داریم. پس به هر راس یا آن ناحیه یا استان یا کشور یک رنگ اختصاص می دهیم بطوری که با رنگ استان یا ناحیه یا کشور مجاور یکی نباشد.

در تصویر زیر سمت راست نقشه ایران عزیز را ملاحظه می کنید بطوری که هر استان یک رنگ مخصوص به خود دارد ، بطوری که با رنگ استان مجاور یکی نیست. در تصویر سمت چپ نقشه خاور میانه را می بینید که ایران عزیز در قلب آن جا دارد.



رنگ آمیزی یک گراف عبارت است از اختصاص دادن یک رنگ به هر راس بطوری که اگر دو راس همجوار باشند ، رنگ های مختلفی داشته باشند. در تصویر ۶.۳.۱ سه نوع رنگ آمیزی سه گراف همریخت پیترسن را ملاحظه می کنید.

تصویر ۶.۳.۱



بسیاری از مسائل روز مره را می توان با اختصاص دادن رنگ های مختلف به رئوس یک گراف ، حل کرد.

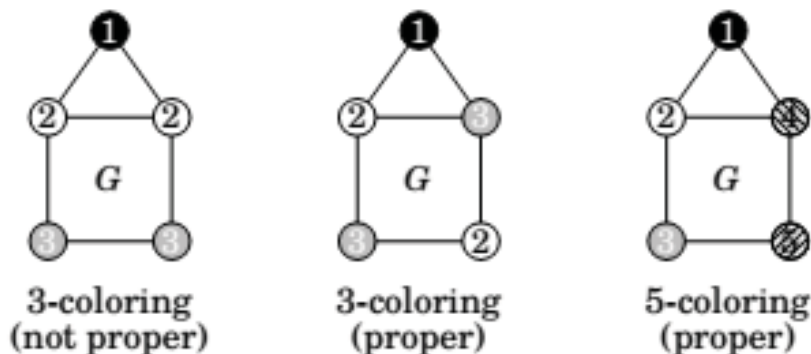
اگر k یک عدد صحیح باشد ، یک رنگ آمیزی k تائی یک گراف **A k -coloring of a Graph** عبارت است از اختصاص k رنگ به رئوس گراف ، بطوری که هر راس یکی از آن رنگها داشته باشد. معمولاً رنگ ها را با یکی از اعداد $1, 2, \dots, k$ نامگذاری می کنیم. مثلاً ۱ یعنی قرمز ، ۲ یعنی آبی ، ۳ یعنی زرد و غیره ، تصویر ۶.۳.۲ دو گراف سه رنگی و یک گراف پنج رنگی ملاحظه می کنید. تصویر سمت چپ ، یک گراف رنگ آمیزی شده ، مجاز نیست. زیرا دو راس هم رنگ نباید مجاور باشند. مشاهده می کنید که رنگ شماره ۲ به دو راس مجاور اختصاص داده شده ، همچنین رنگ شماره ۳. اما رنگ دو گراف دیگر مجاز است. یعنی رئوس هم رنگ ، مجاور نیستند.

تعریف ۶.۳.۱

عدد رنگی The Chromatic Number یک گراف که با نماد $\chi(G)$ یا $\gamma(G)$ نمایش می دهند ، کوچک ترین عدد صحیح k است که گراف ، رنگ آمیزی k تائی مجاز دارد.

رنگ آمیزی مجاز یعنی دو داس همجوار یک رنگ نباشند.

تصویر ۶.۳.۲



مثلاً در تصویر ۶.۳.۲ داریم $\chi(G) = 3$ برای رنگ آمیزی سه تائی مجاز و $\chi(G) = 5$ برای رنگ آمیزی پنج تائی مجاز .

توجه داشته باشید که $\chi(k_n) = n$ است. زیرا می توانیم یک رنگ آمیزی مجاز با استفاده از n رنگ داشته باشیم. اما اگر n راس از k_n را با کمتر از n رنگ ، رنگ آمیزی کنیم ، پس این رنگ آمیزی مجاز نیست ، زیرا دو راس مجاور ، یک رنگ خواهند داشت. پس n کوچک ترین عدد رنگ ها

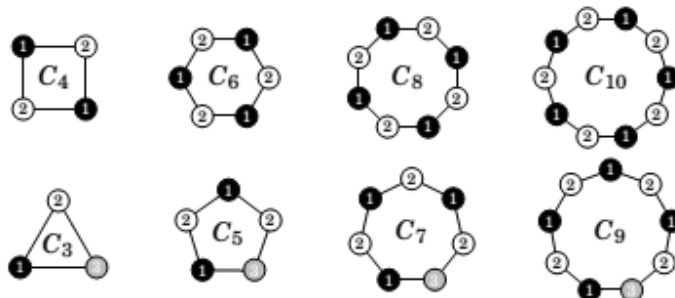
برای رنگ آمیزی مجاز k_n است. یعنی $\chi(k_n) = n$

اما برای گراف های دو بخشی کامل داریم $\chi(k_{m,n}) = 2$ زیرا $k_{m,n}$ دو بخشی است ، یعنی رئوس آن می توانند با دو رنگ ، رنگ آمیزی شوند. سفید و سیاه ، هیچ یالی دارای نقاط انتهایی با یک رنگ ندارد. به همین دلیل ، هر گراف دو بخشی که حد اقل یک یال داشته باشد ، دارای عدد رنگی ۲ است. در مورد عدد رنگی چرخه یا دوره ، C_n یک دو بخشی است اگر n زوج باشد. پس $\chi(k_n) = 2$

برای چرخه یا دور فرد، می‌توانیم با سه رنگ، رنگ آمیزی مجاز داشته باشیم، همان طور که در تصویر ۶.۳.۳ ملاحظه می‌کنید. پس فرمول زیر را داریم.

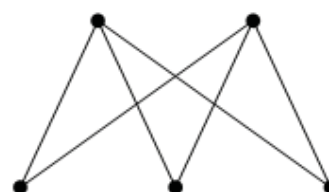
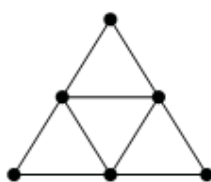
$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{if } n \text{ is even} \\ 3 & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

تصویر ۶.۳.۳



مثال ۶.۳.۱

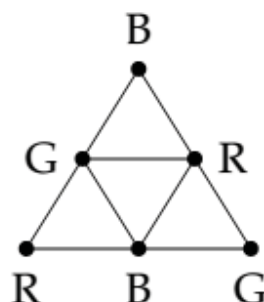
عدد رنگی گراف‌ها زیر را پیدا کنید.



پاسخ

گراف سمت چپ K_6 است. تنها راهی که می‌توان بطور مجاز آنرا رنگ آمیزی کرد، این است که به هر راس یک رنگ بدهیم. زیرا هر راس، مجاور تمام رئوس دیگر است. پس عدد رنگی این گراف ۶ است.

تصویر وسط می‌تواند بطور مجاز با سه رنگ قرمز، آبی و سبز رنگ آمیزی کرد. مثلاً



حرف B برای Black یعنی سیاه
 اهاف G برای Green یعنی سبز
 حرف R برای Red یعنی قرمز

هیچ راهی وجود ندارد که این گراف را فقط با دو رنگ، زنگ آمیزی کرد. زیرا سه راس وجود دارد که دو به دو مجاور هستند. یعنی یک مثلث. پس عدد رنگی این گراف ۳ است. گراف سمت راست $k_{۳,۳}$ است. مانند همه گراف های دو بخشی، این گراف دارای عدد رنگی ۲ است. رئوس ردیف بالا را رنگ قرمز و رئوس ردیف پایین را رنگ آبی می زنیم. به نظر می رسد که نمی توانیم حدی برای اعداد رنگی تصور کنیم. مثلاً k_n دارای عدد رنگی n است. سؤال این است که n چه اندازه بزرگ می تواند باشد؟ آیا n بی کران است؟ مثلاً در مورد رنگ آمیزی نقشه کشور، پاسخ چیست؟ به نظر می رسد که کران بالا برای رنگ آمیزی هر نقشه ای وجود ندارد. اما وجود دارد. اگر نقشه کشورها را به یک گراف تبدیل کنیم، یال های بین رئوس، با مرز های بین کشورها همخوانی دارند. پس می توان رئوس را به نحوی به هم وصل کرد که هیچ یالی با دیگری برخورد نداشته باشد. به عبارت دیگر، گراف های مربوط به نقشه کشورها همه گراف های مسطح هستند. سؤال اینجا است، بزرگ ترین عدد رنگی برای یک گراف مسطح کدام است؟ پاسخ قضیه زیر است.

قضیه ۶.۳.۱ یا قضیه چهار رنگ The Four Color Theorem
اگر G یک گراف مسطح باشد، پس عدد رنگی G کمتر یا مساوی ۴ است. پس هر نقشه ای می تواند بطور مجاز با ۴ رنگ یا کمتر رنگ آمیزی شود.

مثال ۶.۳.۲

یک اداره پنج کارمند دارد. آنها را A, B, C, D, E می نامیم. این پنج کارمند عضو پنج کمیته هستند، از این قرار $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, A, D\}, \{C, E\}, \{E, D\}$ این مجموعه ها نشان می دهند که چه شخصی عضو کدام کمیته است. یک روز، همه کمیته باید برای یک ساعت تشکیل جلسه دهد. واضح است که تمام پنج کمیته نمی توانند در یک ساعت تشکیل جلسه دهند، زیرا بعضی از آنها عضو چند کمیته هستند. و نمی توانند در آن واحد در چند مکان باشند. کمترین تعداد ساعات لازم برای این که تمام کمیته ها تشکیل جلسه دهند، کدام است؟

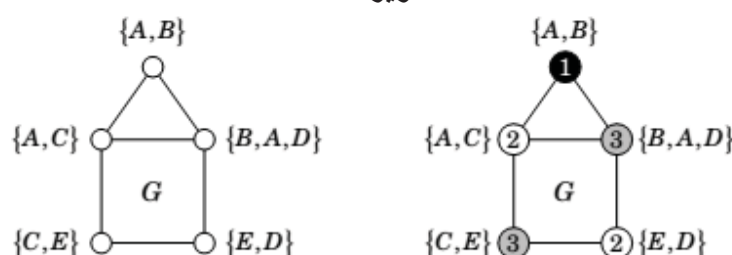
راه ساده این است که هر ساعت یک روز را به یک کمیته اختصاص دهیم. در این صورت پنج ساعت طول می کشد.

تعداد ساعات	زمان	کمیته تشکیل جلسه می دهد
1	1:00-2:00	$\{A, B\}$
2	2:00-3:00	$\{A, C\}$
3	3:00-4:00	$\{B, A, D\}$
4	4:00-5:00	$\{C, E\}$
5	5:00-6:00	$\{E, D\}$

یعنی این پنج کمیته در پنج ساعت مختلف تشکیل جلسه دهند. اما این کار می تواند در تعداد کمتری ساعت انجام شود. زیرا مثلاً کمیته های $\{B, A, D\}$ و $\{C, E\}$ اعضای مشترک ندارند، و می توانند در یک ساعت تشکیل جلسه دهند. می خواهیم کمترین تعداد ساعات لازم برای تشکیل جلسه تمام کمیته ها را پیدا کنیم.

این مساله را می توان از طریق یک گراف حل کرد. فرض می کنیم هر کمیته یک راس باشد ، و اگر کمیته ای شامل اعضای مشترک است آنها را با یک یال به هم متصل کنیم. و لذا این دو کمیته نمی توانند در یک ساعت تشکیل جلسه دهند. در نتیجه، گراف سمت چپ در تصویر ۶.۳.۴ داریم. برای بدست آوردن بهترین برنامه ریزی ، می توانیم به G رنگ آمیزی مجاز بدهیم. یعنی برای ساعت های $۱, ۲, ۳, \dots$ رنگ ها را به نحوی اختصاص دهیم که هیچ راس مجاور هم رنگ نباشد. این را در گراف سمت راست تصویر ۶.۳.۴ ملاحظه می کنید.

تصویر ۶.۳.۴



مشاهده می کنید که $\chi(G) = 3$ است. پس بهترین برنامه ریزی ، تشکیل کمیته ها در سه ساعت مختلف است.

تعداد ساعات	زمان	کمیته تشکیل جلسه می دهد
1	1:00-2:00	$\{A, B\}$
2	2:00-3:00	$\{A, C\}$ و $\{E, D\}$
3	3:00-4:00	$\{B, A, D\}$ و $\{C, E\}$

قضیه ۶.۳.۲

اگر H یک زیر گراف G باشد، پس $\chi(H) \leq \chi(G)$ است.

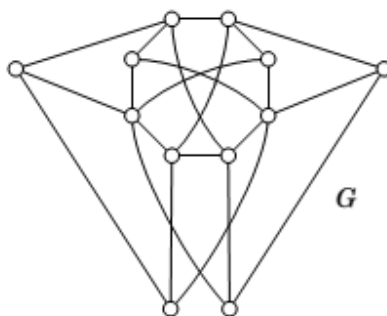
اثبات

فرض می کنیم H یک زیر گراف G باشد. بر اساس تعریف عدد رنگی ، G دارای یک رنگ آمیزی مجاز است با $\chi(G)$ رنگ. چون هر راس H در G هم است ، پس رئوس H رنگ آمیزی G را دارند. و چون هر یال H یک یال G هم هست ، پس هیچ دو یال H یک رنگ نیستند. لذا H بطور مجاز رنگ آمیزی می شود و تعداد رنگ ها بیشتر از $\chi(G)$ نیست.

نتیجه این که $\chi(H) \leq \chi(G)$

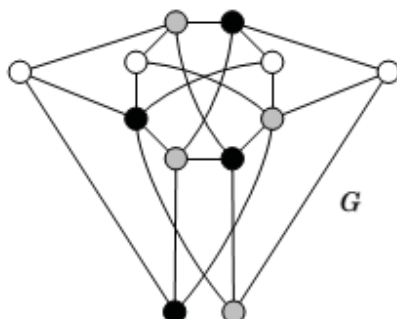
مثال ۶.۳.۲

عدد رنگی گراف زیر را پیدا کنید. قضیه ۶.۳.۲ می گوید $\chi(K_4) \leq \chi(G) \leq 4$ است. اما بزرگ ترین درجه راس $\Delta = 4$ است. پس بر اساس قضیه بروک $\chi(G) \leq \Delta = 4$ است. در نتیجه $4 \leq \chi(G) \leq 4$ است. و در نهایت داریم $\chi(G) = 4$



پاسخ

این گراف دارای یک چرخه یا دور C_5 به عنوان زیر گراف دارد. دارد. و $\chi(C_5) = 3$ است. پس قضیه ۶.۳.۲ می گوید $3 = \chi(C_5) \leq \chi(G)$ است. لذا $\chi(G)$ نمی تواند کوچک تر از ۳ باشد. اما با قدری سعی و خطا رنگ آمیزی زیر را با فقط سه رنگ بدست می آوریم. پس $\chi(G) = 3$ است.



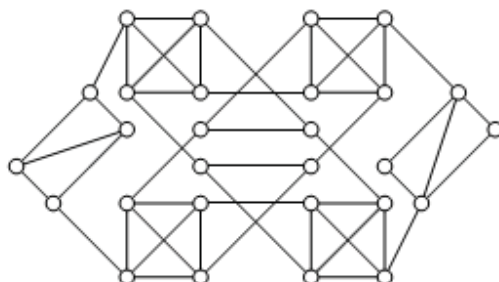
قضیه ۶.۳.۲ کران پایین $\chi(G)$ به ما می دهد، اما اطلاعاتی نمی دهد که چقدر $\chi(G)$ از $\chi(H)$ بزرگ تر است. برای کران بالای $\chi(G)$ قضیه بروک را داریم.

قضیه ۶.۳.۳ یا قضیه بروک Brook's Theorem

فرض کنید G یک گراف همبند است بطوری که نه یک گراف کامل است و نه یک چرخه فرد. اگر بیشترین درجه راس G نماد Δ باشد، پس $\chi(G) \leq \Delta$ است.

مثال ۶.۳.۳

عدد رنگی گراف زیر را پیدا کنید.



پاسخ

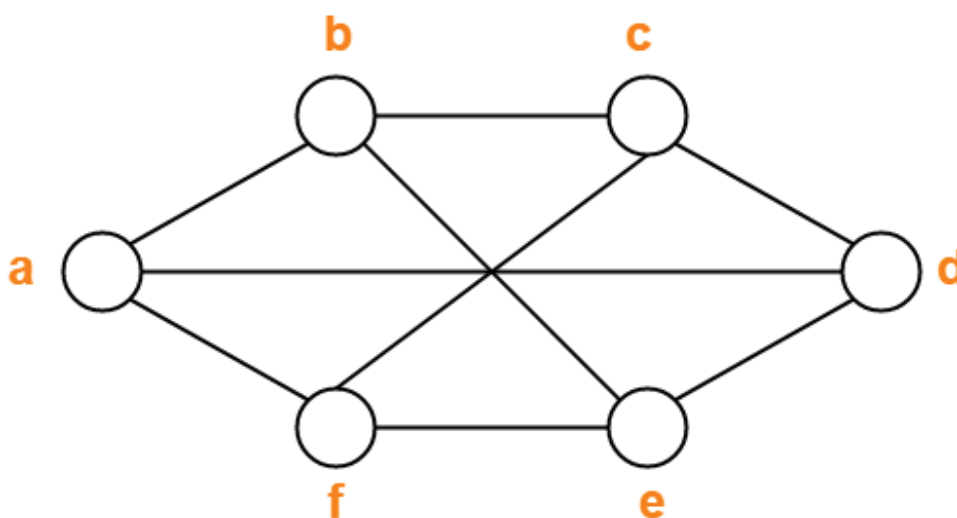
گراف دارای یک K_4 زیر گراف است. می دانیم که $\chi(K_4) = 4$ است. پس بر اساس قضیه ۶.۳.۲ داریم $4 = \chi(K_4) \leq \chi(G) \leq \Delta = 4$ است. پس قضیه بروک می گوید $4 \leq \chi(G) \leq 4$ است. در نتیجه $4 \leq \chi(G) \leq 4$ است. پس $\chi(G) = 4$ است.

تمرینات ۶.۳

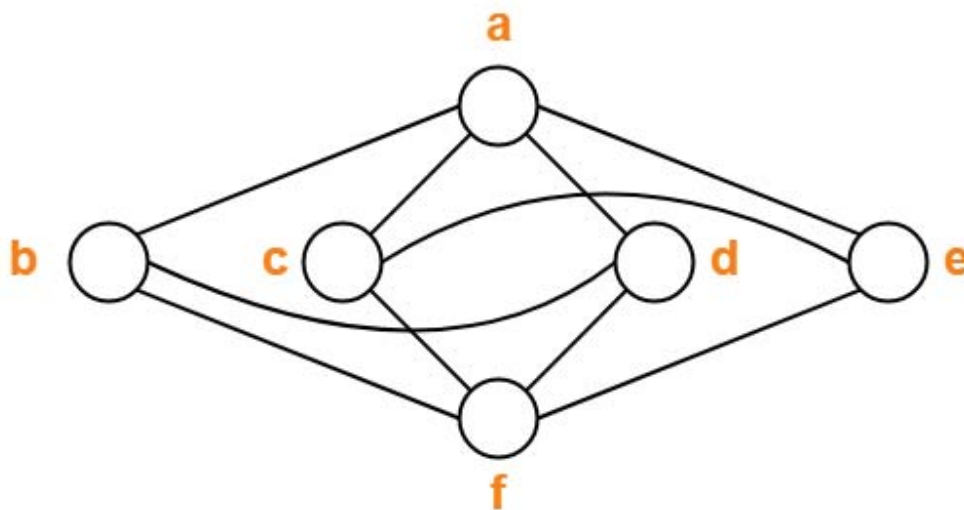
۱ - مطلوب است کوچکترین عدد رنگی برای رنگ آمیزی مجاز $K_{4,5}$

۲ - یک گراف با عدد رنگی ۶ رسم کنید. آیا گراف شما می تواند مسطح باشد؟

۳ - گراف زیر را رنگ آمیزی کنید.



۴ - عدد رنگی گراف زیر را پیدا کنید. و سپس آنرا رنگ آمیزی کنید.



پاسخ تمرینات ۶.۳

۱ - مطلوب است کوچکترین عدد رنگی برای رنگ آمیزی مجاز $K_{۴,۵}$

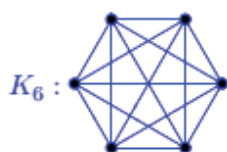
پاسخ

چون گراف، دو بخشی است، پس یک رنگ برای مجموعه رئوس بالایی و یک رنگ برای مجموعه رئوس پائینی، لذا $\chi(G) = ۲$ است.

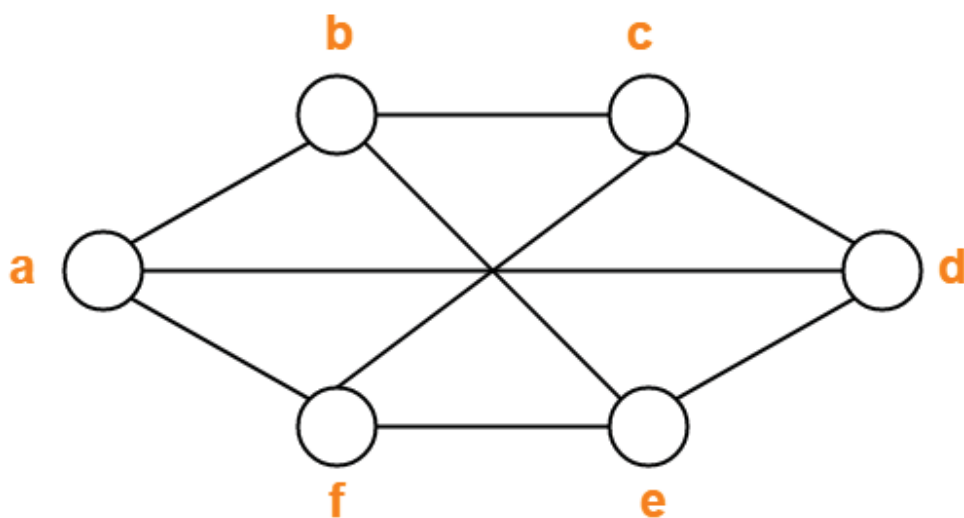
۲ - یک گراف با عدد رنگی ۶ رسم کنید. آیا گراف شما می تواند مسطح باشد؟

پاسخ

یک گراف می تواند K_6 باشد. اگر عدد رنگی ۶ است، پس گراف نمی تواند مسطح باشد. زیرا قضیه ۴ رنگ می گوید تمام گراف های مسطح می توانند با ۴ رنگ یا کمتر می توانند رنگ آمیزی شوند.



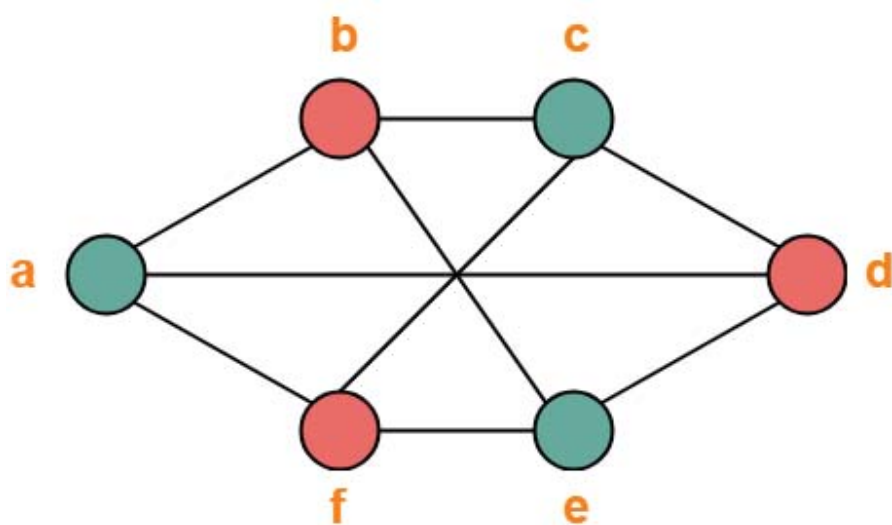
۳ - گراف زیر را رنگ آمیزی کنید.



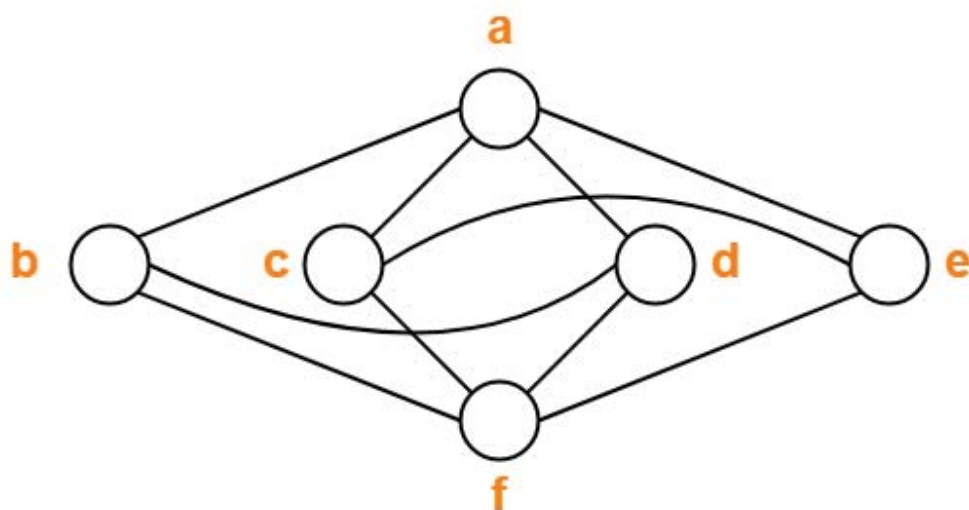
پاسخ

ابتدا یک جدول می سازیم.

رأس	a	b	c	d	e	f
شماره رنگ	۱	۲	۱	۲	۱	۲



۴ - عدد رنگی گراف زیر را پیدا کنید. و سپس آنرا رنگ آمیزی کنید.



پاسخ

رأس	a	b	c	d	e	f
شماره رنگ	۱	۲	۲	۳	۳	۱

