فصل پنجم
احتمال گسسته
Discrete Probability
بخش ۱
فضاهای نمونه ، رویداد ها و احتمال
Sample Spaces, Events and Probability

مقدمه ــ فرض کنید اداره هوا شناسی اعلام کند ، ۵۰% احتمال دارد روز پنجشنبه باران بیاید و ۵۰% احتمال دارد روز جمعه باران بیاید، آیا می توانیم بگوییم احتمال بارندگی آخر هفته ۱۰۰% است؟ مسلم است که اشتباه می کنیم. زیرا باز هم احتمال دارد آخر هفته اصلا باران نیاید. اما پاسخ صحیح چیست؟

یک راه برای رسیدن به این سوال مطابق زیر می تواند باشد.

اگر R را برای باران آمدن فرض کنیم و N را برای باران نیامدن ، می توانیم یک مجموعه چهار لیستی هر کدام دارای دو عنصر یا عضو باشد ، بسازیم.

$$S = \{RR\ \ , RN, NR, NN\}$$

این مجموعه شامل چهار **نتیجه ممکن Possible Outcomes** برای هوای آخر هفته است. اولین حرف هر لیست یا R است و یا N بستگی دارد به این که روز پنجشنبه بارانی است و یا بارانی نیست. حرف دوم هر لیست یا R است و یا N بستگی به این دارد که روز جمعه بارانی است و یا نیست. پس RN یعنی روز پنجشنبه بارانی است اما جمعه بارانی نیست. NR یعنی روز پنجشنبه بارانی نیست اما جمعه بارانی است. RR یعنی هر دو روز بارانی است و NN یعنی در آخر هفته باران نخواهیم داشت.

این اطلاعات می گوید احتمال رخ دادن هر کدام از نتایج RR, RN, NR, NN یکسان است.

احتمال RR فقط ۲۵% است. احتمال RN فقط ۲۵% است. احتمال NR فقط ۲۵% است. احتمال NN فقط ۲۵% است.

می خواهیم احتمال باران آمدن در آخر هفته را مشخص کنیم. وقوع باران در آخر هفته مربوط است به زیر مجموعه $\{RR, RN, NR\} \subseteq S$

$$S = \{\ RR,\ \ RN,\ \ NR,\ \ NN\ \}$$

پس بارش باران در آخر هفته ، در سه نتیجه از چهار نتیجه همسان رخ خواهد داد. پس می توانیم بگوییم $\frac{۳}{۴} =$ ۷۵% شانس باران در آخر هفته وجود دارد.

۵.۱ ـ فضاهای نمونه ، رویداد ها و احتمال Sample Spaces, Events and Probability

در احتمالات ، **آزمایش Experiment** عبارت است **از** فعالیتی که تعدادی نتایج مختلف به بارمی آورد ، که از پیش قابل پیش بینی نیستند.

فضای نمونه Sample Space یک آزمایش عبارت است از مجموعه تمام نتایج ممکن که با S و یا Ω نشان می دهند.

یک **واقعه Event** عبارت است از یک زیر مجموعه از فضای نمونه یعنی $E \subseteq S$

می گوییم **واقعه اتفاق می افتد Event Occurs** اگر آزمایش انجام شود و نتیجه یک عضو E باشد .

یک مثال برای آزمایش ، در مثال پیش بینی هوا شناسی توضیح داده شد. مشاهده این که در آخر هفته باران می بارد یا نه. و نتیجه را به صورت RR, RN, NR یا NN ثبت می کنیم . فضای نمونه در این مثال $S = \{RR, RN, NR, NN\}$ است. واقعه باران باریدن در آخر هفته

$$E = \{RR, RN, NR\} \subseteq S$$

است. اگر آزمایش را انجام دهیم و نتیجه یکی از RR, RN یا $NR \in E$ باشد، می گوییم واقعه E اتفاق می افتد.

تعدادی واقعه دیگر در رابطه به این آزمایش وجود دارد. مثلا واقعه بارش باران در روز پنجشنبه

$$E' = \{RR, RN\} \subseteq S$$

در ذیل چند واقعه دیگر برا ی آزمایش پیش بینی‌هوا ملاحظه می کنید.

واقعه Event	احتمال واقعه Probability of Event
باران اخر هفته: $E = \{RR, RN, NR\}$	$p(E) = \frac{\lvert E\rvert}{\lvert S\rvert} = \frac{۳}{۴}$ %۷۵
باران روزیکشنبه $E = \{RR, NR\}$	$p(E) = \frac{\lvert E\rvert}{\lvert S\rvert} = \frac{۲}{۴} =$ %۵۰
آخر هفته بدون باران $E = \{NN\}$	$p(E) = \frac{\lvert E\rvert}{\lvert S\rvert} = \frac{۱}{۴} =$ %۲۵
باران فقط در یک روز $E = \{RN.NR\}$	$p(E) = \frac{\lvert E\rvert}{\lvert S\rvert} = \frac{۲}{۴} =$ %۵۰
هیچ اتفاقی نمی افتد $E = \emptyset$	$p(E) = \frac{\lvert E\rvert}{\lvert S\rvert} = \frac{0}{۴} =$ %0
یک اتفاق می افتد $E = \{RR, RN, BR, NN\}$	$p(E) = \frac{\lvert E\rvert}{\lvert S\rvert} = \frac{۴}{۴} =$ %۱۰۰

احتمال Probability یا **شانس Chance** یک واقعه عبارت است از احتمال یا شانس وقوع آن واقعه هنگامی که آزمایش انجام می گیرد. احتمل یک واقعه از 0 است تا ۱ یعنی 0% شانس وقوع تا ۱۰۰% شانس وقوع .

احتمال وقوع E را با $p(E)$ نشان می دهیم.

در بسیاری از موارد ، تمام نتایج یک فضای نمونه ، **هم شانس Equally Likely** هستند. مانند مثال هوا شناسی در بالا ، که احتمال وقوع هر یک از واقعه ها ۲۵% بود. در چنین مواردی ، احتمال وقوع E را به صورت زیر می نویسیم و محاسبه می کنیم.

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

پس امر مسلم زیر را داریم.

امر مسلم ۵.۱.۱

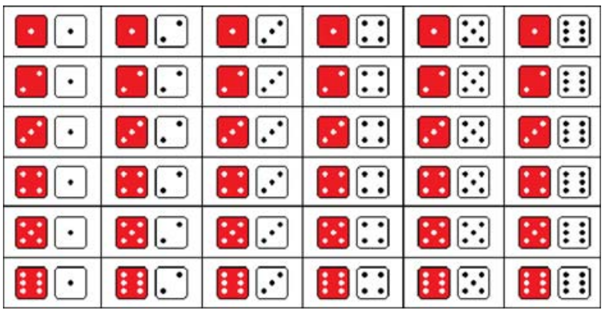
در یک ازمایش اگر تمام نتایج در فضای نمونه دارای شانس وقوع یکسان داشته باشند ، احتمال وقوع یک واقعه $S \subseteq E$ مطابق زیر بدست می آید.

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|}$$

مثال ۵.۱.۱

دو تاس با رنگ های متفاوت داریم. هر دو را با هم می ریزیم. احتمال این که حد اقل یکی از آنها یک شش باشد ، چیست؟ تصویر ۵.۱.۱

تصویر ۵.۱.۱



		White Die					
		1	2	3	4	5	6
Red Die	1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
	3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
	4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
	5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
	6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

پاسخ

فضای نمونه را در تصویر ۵.۱.۱ ملاحظه می کنید. فضای نمونه دارای ۳۶ نتیجه همسان دارد. واقعه $S \subseteq E$ در تصویر سمت راست به رنگ سبز برجسته نشان داده شده است. ملاحظه می کنید که حد اقل یک شش در این قسمت سبز رنگ وجود دارد. احتمال وقوع تمام آنها یکسان است. پس داریم.

$$|E| = ۱۱ \quad \text{و} \quad |S| = ۳۶$$

$$p(E)=\frac{|E|}{|S|}=\frac{۱۱}{۳۶}=0.30\overline{5}=30.\overline{5}\%$$

این یعنی اگر یک جفت تاس را ۱۰۰ مرتبه بریزید ، در ۳۰ مورد ، حد اقل یک شش وجود دارد.
امر مسلم ۵.۱.۱ فقط هنگامی کاربرد دارد ، که تمام نتایج یک فضای نمونه ، دارای شانس وقوع یکسان داشته باشند. مثلا فرض کنید در مثال ۵.۱.۱ یکی از تاس ها سنگین تر باشد ، بطوریکه هنگام روی زمین آمدن ، احتمال شش آمدن بیشتر باشد.پس ، امر مسلم بالا را نمی توان بکار برد. در چنین حالتی $p(E)$ بیشتر از $30.\overline{5}\%$ خواهد بود.

مثال ۵.۱.۲
یک سکه را سه مرتبه بالا می اندازید. احتمال این که حد اقل یک خط بدست آورید ، چقدر است؟
پاسخ
حرف T را برای خط و حرف H را برای شیر در نظر می گیریم. یک نتیجه می تواند یک لیست سه عضوی باشد ، مانند HTH این یعنی مرتبه اول شیر ، مرتبه دوم خط و مرتب سوم شیر آمد. پس داریم.

$$S=\{HHH,HHT,HTH,HTT,THH,THT,TTH,TTT\}$$

قسمت قرمز رنگ ، E است. پس.

$$p(E)=\frac{|E|}{|S|}=\frac{۷}{۸}=0.875=\mathbf{87.5\%}$$

مثال ۵.۱.۵
در یک کیسه ۴ مهره آبی ، ۵ مهره قرمز ، ۱ مهره سبز و ۲ مهره سیاه وجود دارد. یک مهره از کیسه بیرون می آوریم.
الف - احتمال این که مهره بیرون آمده آبی یا سیاه باشد ، چقدر است؟
ب -احتمال این که مهره بیرون آمده بنفش نباشد ، چقدر است؟
پاسخ
الف

$$p(\text{آبی یا سیاه})=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}=\%۵۰$$

ب

$$p(\text{بنفش نباشد})=۱$$

هیچ کدام از مهره ها بنفش نیست. پس **مسلم** است که مهره بیرون آورده شده ، بنفش نیست. **هنگامی که شانس وقوع چیزی مسلم است ، احتمال یک است.**

تمرینات ۵.۱

برای هر یک از مسائل ، فضای نمونه را بنویسید ، $|S|$ را پیدا کنید. سپس E بنویسید و یا شرح دهید، $|E|$ را پیدا کنید ، و در نهایت $p(E)$ را پیدا کنید. ممکن است لازم باشد از تکنیک های شمارش که در فصل ۴ ذکر شد ، استفاده کنید.

۱ - یک تاس را پنج مرتبه می ریزیم. احتمال اینکه هیچ  نیاید چقدر است؟

۲ - یک تاس را پنج مرتبه می ریزیم. احتمال اینکه در هر پنج مورد همان شماره باشد ، چقدر است؟ مثلا تمام یک و یا تمام چهار باشد.

۳ - دو تاس دارید. هر دو را با هم می ریزید. احتمال این که هر دو یک شماره نشان دهند ، چقدراست ؟

۴ - دو تاس را با هم می ریزیم. احتمال این که هر دو اعداد زوج نشان دهند ، چقدر است؟

۵ - یک سکه را هشت مرتبه بالا می اندازیم. احتمال این که اولین و آخرین بالاانداختن ، شیر بیاید ، پیدا کنید. یعنی مرتبه اول که بالا می اندازیم شیر باشد ، مرتبه هشتم هم شیر باشد.

۶ - آرمان و مهران یک عدد بین 0 تا ۹ را بطور تصادفی انتخاب می کنند. احتمال این که هر دو یک عدد را انتخاب کنند ، چقدر است؟ احتمال این که آنها اعداد متفاوتی را انتخاب کنند ، چقدر است؟

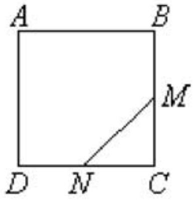
۷ - در یک پارکینگ ، ۱۰۰ وسیله نقلیه وجود دارد، ۶۰ اتومبیل سواری هستند ، ۳۰ وانت بار و بقیه کامیون. اگر احتمال ترک هر یک از وسائل نقلیه همسان باشد .احتمالات زیر را پیدا کنید.

الف – وانت بار اول پارکینک را ترک کند.

ب – کامیون اول پارکینگ را ترک کند.

ج –اگر کامیون یا وانت بار ، پارکینگ را ترک کند ، آنگاه اتومبیل سواری پارکینگ را ترک کند.

۸ - مربع $ABCD$ مفروض است. M نقطه میانی BC است و N نقطه میانی CD. یک نقطه بطور تصادفی در مربع اختیار می کنیم. مطلوب است احتمال این که ، نقطه انتخاب شده ، داخل مثلث MNC قرار داشته باشد.



پاسخ تمرینات ۵.۱

برای هر یک از مسائل ، فضای نمونه را بنویسید ، $|S|$ را پیدا کنید. سپس E بنویسید و یا شرح دهید، $|E|$ را پیدا کنید ، و در نهایت $p(E)$ را پیدا کنید. ممکن است لازم باشد از تکنیک های شمارش که در فصل ۴ ذکر شد ، استفاده کنید.

۱ - یک تاس را پنج مرتبه می ریزیم. احتمال اینکه هیچ ⚅ نیاید چقدر است؟

پاسخ

فضای نمونه S عبارت است از مجموعه تمام لیست های پنج عضوی ، تکرار جایز است ، که عناصر آنها اعداد ۶ ,۵ ,۴ ,۳ ,۲ ,۱ است. پس $۶^{۵} = ۷۷۷۶$ از چنین لیست هایی داریم. یعنی $|S| = ۷۷۷۶$

واقعه E شامل آن لیست هایی از S که شامل یک ۶ نباشد. تعداد $۵^{۵} = ۳۱۲۵$ از آنها را داریم. پس

$$p(E)\frac{|E|}{|S|} = \frac{۳۱۵۲}{۷۷۷۶} \approx 40.187\%$$

۲ - یک تاس را پنج مرتبه می ریزیم. احتمال اینکه در هر پنج مورد همان شماره باشد ، چقدر است؟ مثلا تمام یک و یا تمام چهار باشد.

پاسخ

فضای نمونه S عبارت است از مجموعه تمام لیست های ۵ عضوی ، تکرار جایز است، که عناصر آنها اعداد ۶ ,۵ ,۴ ,۳ ,۲ ,۱ است. پس $۶^{۵} = ۷۷۷۶$ از چنین لیست هایی داریم. پس $|S| = ۷۷۷۶$ ملاحظه می کنید که

$$E = \{۱۱۱۱۱, ۲۲۲۲۲, ۳۳۳۳۳, ۴۴۴۴۴, ۵۵۵۵۵, ۶۶۶۶۶\}$$

پس $|E| = ۶$ و در نهایت.

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{۶}{۷۷۷۶} \approx 0.077\%$$

۳ - دو تاس دارید. هر دو را با هم می ریزید. احتمال این که هر دو یک شماره نشان دهند ، چقدراست ؟

پاسخ

فضای نمونه در مثال ۵.۱.۱ نشان دادیم. و ملاحظه کردید که $|S| = ۳۶$ است. واقعه E که هر دو یک شماره را نشان دهد $|E| = ۶$ است. تصویر ۵.۱.۲

تصویر ۵.۱.۲

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{۶}{۳۶} = 16.6\%$$

۴ ـ دو تاس را با هم می ریزیم. احتمال این که هر دو اعداد زوج نشان دهند ، چقدر است؟

پاسخ

فضای نمونه همان مثال ۵.۱.۱ است.

$$E = \{(۲۲),(۲۴)(۲۶),(۴۲),(۴۴),(۴۶),(۶۲),(۶۴),(۶۶)\}$$

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{۹}{۳۶} = \%۲۵$$

۵ ـ یک سکه را هشت مرتبه بالا می اندازیم. احتمال این که اولین و آخرین بالاانداختن ، شیر بیاید ، پیدا کنید. یعنی مرتبه اول که بالا می اندازیم شیر باشد ، مرتبه هشتم هم شیر باشد.

پاسخ

فضای نمونه S عبارت است از مجموعه تمام لیست های ۸ عضوی که از دو نماد H و T ساخته شده اند. پس $|S| = ۲^۸$

واقعه E که اولین و آخرین بالا انداختن ، شیر باشد ، شامل کلیه نتایج در S است بطوری که به شکل زیر باشد.

$$(H، \boxdot ، \boxdot ، \boxdot ، \boxdot ، \boxdot ، \boxdot ،H)$$

پس $|E| = ۲^۶$ است و در نهایت.

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{۲^۶}{۲^۸} = \frac{۱}{۲^۲} = \%۲۵$$

۷ ـ در یک پارکینگ ، ۱۰۰ وسیله نقلیه وجود دارد، ۶۰ اتومبیل سواری هستند ، ۳۰ وانت بار و بقیه کامیون. اگر احتمال ترک هر یک از وسائل نقلیه همسان باشد .احتمالات زیر را پیدا کنید.

الف – وانت بار اول پارکینک را ترک کند.

ب – کامیون اول پارکینگ را ترک کند.

ج –اگر کامیون یا وانت بار ، پارکینگ را ترک کند ، آنگاه اتومبیل سواری پارکینگ را ترک کند.

پاسخ

الف - فرض می کنیم S فضای نمونه و A واقعه یک وانت بار اول پارکینگ را ترک کند.

$$|S| = ۱۰۰$$

$$|A| = ۳۰$$

$$p(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{۳۰}{۱۰۰} = \frac{۳}{۱۰} = 0.3 = 30\%$$

ب – فرض می کنیم B واقعه کامیون اول پارکینگ را ترک کند.

$$|B| = ۱۰۰ - ۶۰ - ۳۰ = ۱۰$$

$$p(B) = \frac{|B|}{|S|} = \frac{۱۰}{۱۰۰} = \frac{۱}{۱۰} = 0.1 = 10\%$$

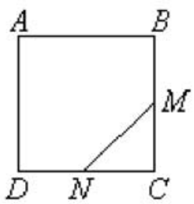
ج – اگر یک کامیون و یا یک وانت بار اول پارکینگ را ترک کند ، پس ۹۹ وسیله نقلیه باقی می ماند.

حالا داریم $|S| = ۹۹$ سپس فرض می کنیم C واقعه اتومبیل سواری پارکینگ را ترک کند.

$$|C| = ۶۰$$

$$p(C) = \frac{|C|}{|S|} = \frac{۶۰}{۹۹} = \frac{۲۰}{۳۳} \approx 0.61 \approx 61\%\backslash$$

۸ - مربع $ABCD$ مفروض است. M نقطه میانی BC است و N نقطه میانی CD. یک نقطه بطور تصادفی در مربع اختیار می کنیم. مطلوب است احتمال این که ، نقطه انتخاب شده ، داخل مثلث MNC قرار داشته باشد.



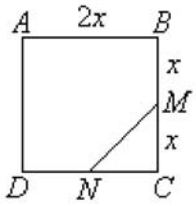
پاسخ

فرض می کنیم طول هر یک از اضلاع مربع $۲x$ باشد. پس داریم.

$$\text{مسلحت مربع} = ۲x * ۲x = ۴x^۲$$

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{۱}{۲}x^۲$$

$$p(\text{نقطه در مربع باشد}) = \frac{۱}{۲}x^۲ \div ۴x^۲ = \frac{۱}{۲}x^۲ \times \frac{۱}{۴x^۲} = \frac{۱}{۸} = 0.125 = 12.5\%$$


A
2x
B
x
M
x
D
N
C

۵.۲ - تلفیق واقعه ها Combining Events

در این بخش میخواهیم در مورد تلفیق واقعه ها صحبت کنیم. فرض کنید یک سکه را چهار مرتبه بالا می اندازیم. فرض کنید A واقعه، *دو پرتاب اول سکه، شیر باشد*، و فرض کنید B واقعه، *دقیقا سه شیر وجود داشته باشد*،

تصویر ۵.۲.۱ فضای نمونه است. ما همچنان فضای نمونه را S می نامیم زیرا S حرف اول $Sample\ Space$ است. واقعه را هم E می نامیم، زیرا E حرف اول $Event$ است.

تصویر ۵.۲.۱

$HHHH$	$HTHH$	$THHH$	$TTHH$
$HHHT$	$HTHT$	$THHT$	$TTHT$
$HHTH$	$HTTH$	$THTH$	$TTTH$
$HHTT$	$HTTT$	$THTT$	$TTTT$
S			

تصویر ۵.۲.۲

$HHHH$	$HTHH$	$THHH$	$TTHH$
$HHHT$	$HTHT$	$THHT$	$TTHT$
$HHTH$	$HTTH$	$THTH$	$TTTH$
$HHTT$	$HTTT$	$THTT$	$TTTT$
A			

تصویر ۵.۲.۳

$HHHH$	$HTHH$	$THHH$	$TTHH$
$HHHT$	$HTHT$	$THHT$	$TTHT$
$HHTH$	$HTTH$	$THTH$	$TTTH$
$HHTT$	$HTTT$	$THTT$	$TTTT$
B			

تصویر ۵.۲.۴

$HHHH$	$HTHH$	$THHH$	$TTHH$
$HHHT$	$HTHT$	$THHT$	$TTHT$
$HHTH$	$HTTH$	$THTH$	$TTTH$
$HHTT$	$HTTT$	$THTT$	$TTTT$
$A \cup B$			

تصویر ۵.۲.۱ فضای نمونه را نشان می دهد. تصویر ۵.۲.۲ واقعه A را به رنگ بنفش نشان می دهد. تصویر ۵.۲.۳ واقعه B را به رنگ آبی نشان می دهد. ملاحظه می کنید که

$$p(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{۴}{۱۶} = \%۲۵$$

$$p(B)=\frac{|B|}{|A|}=\frac{۴}{۱۶}=\%۲۵$$

حالا ، $A\cup B$ یک زیر مجموعه S است ، پس یک واقعه است. می توانیم این واقعه این طور تصور کنیم.

دو تاس اول شیر باشد و یا دقیقا سه شیر وجود داشته باشد.

این حالت در تصویر ۵.۲.۴ به رنگ قرمز نشان داده شده است. پس ملاحظه می کنید

$$p(A\cup B)=\frac{|A\cup B|}{|S|}=\frac{۶}{۱۶}=37.5\%$$

همچنین اشتراک $A\cap B$ هم یک زیر مجموعه S است، پس یک واقعه است. می توان آنرا مطابق زیر بیان کرد.

*دو تاس اول شیر است **و** دقیقا سه شیر وجود دارد.*

این حالت در تصویر ۵.۲.۵ به رنگ سبز نشان داده شده است.

تصویر ۵.۲.۵

$HHHH$	$HTHH$	$THHH$	$TTHH$
$HHHT$	$HTHT$	$THHT$	$TTHT$
$HHTH$	$HTTH$	$THTH$	$TTTH$
$HHTT$	$HTTT$	$THTT$	$TTTT$
$A\cap B$			

ملاحظه می کنید که

$$p(A\cap B)=\frac{|A\cap B|}{|S|}=\frac{۲}{۱۶}=12.5\%$$

و در نهایت ، در آزمایش شیر خط کردن چهار سکه، که در بالا ذکر شد ، می خواهیم متمم A را در نظر بگیریم. می دانیم $\overline{A}\subseteq S$ است. در تصویر ۵.۲.۶ متمم A را به رنگ قرمز تیره ملاحظه می کنید. این واقعه را چنین توصیف می کنیم. *واقعه ای که اعضای آن ، اعضای A نباشد.*

تصویر ۵.۲.۶

$HHHH$	$HTHH$	$THHH$	$TTHH$
$HHHT$	$HTHT$	$THHT$	$TTHT$
$HHTH$	$HTTH$	$THTH$	$TTTH$
$HHTT$	$HTTT$	$THTT$	$TTTT$
$\overline{A}$			

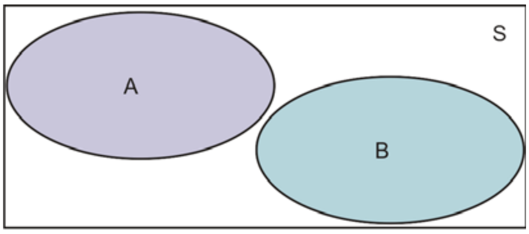
$$p(\overline{A})=\frac{|\overline{A}|}{|S|}=\frac{۱۲}{۱۶}=\%۷۵$$

بطور کلی ، اگر A و B واقعه هایی در یک فضای نمونه باشند ، پس

رخ دهد B یا A یعنی $A \cup B$
رخ دهد B و A یعنی $A \cap B$
" A رخ ندهد " یعنی $\overline{A}$

تعریف ۵.۲.۱
دو واقعه A و B در یک فضای نمونه S **دو بدو ناسازگار Mutually Exclusive** هستند اگر

$$A \cap B = \emptyset$$



P(A or B) = P(A) + P(B)

P(A and B) = 0

واقعه های نا سازگار هیچ نتیجه مشترکی ندارند. اگر یکی رخ دهد ، دیگری رخ نمی دهد. در هر آزمایش ، یکی از آنها ممکن است رخ دهد ، یا هیچ کدام ، اما هرگز با هم رخ نمی دهند.

در مثال چهار مرتبه شیر خط کردن بالا ، واقعه های A و B دو بدو ناسازگار نیستند. زیرا

$$A \cap B = \{HHHT, HHTH\} \neq \emptyset$$

می توان یک سکه را چهار مرتبه بالا انداخت و واقعه های A و B را همان طور که در بالا گفته شد ، داشت.

حالا ، مجددا یک سکه را چهار مرتب بالا می اندازیم. می گوییم A واقعه "*دقیقا سه خط*" و B واقعه "دقیقا سه شیر" این دو واقعه دو بدو ناسازگار هستند. می توان سه شیر یا سه خط بدست آورد ، و یا هیچ کدام ، مثلا $(HHTT)$ اما هم سه خط و هم سه شیر در همان چهار مرتبه بالا انداختن سکه نمی توان بدست آورد. در تصویر ۵.۲.۱ فضای نمونه را ملاحظه می کنید. هر ستون نمایش چهار مرتبه شیر خط کردن است. در ستون اول سمت چپ می توان دقیقا سه شیر را دید اما در همان ستون سه خط نداریم. در ستون چهارم ، می‌توان دقیقا سه خط را دید اما در همان ستون دقیقا سه شیر نیست.

همچنین اگر E یک واقعه در یک فضای نمونه باشد ، پس E و $\overline{E}$ دو بدو ناسازگار هستند. زیر $E \cap \overline{E} = \emptyset$ یک واقعه نمی تواند هم رخ دهد و هم رخ ندهد.

یاد آوری مجدد :در کتب مختلف نماد های مختلف برای متمم یک مجموعه بکار می برند ، از جمله $\overline{E}, \sim E, E'$

امر مسلم ۵.۱.۱ و اصل شمول ـعدم شمول را بخاطر بیاورید ، پس داریم.

$$p(A\cup B)=\frac{|A\cup B|}{|S|}=\frac{|A|+|B|-|A\cap B|}{|S|}=\frac{|A|}{|S|}+\frac{|B|}{|S|}-\frac{|A\cap B|}{|S|}$$
$$=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$$

اگر A و B دو بدو ناسازگار باشند ، پس $|A\cap B|=\emptyset=0$ است و لذا داریم.

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)$$

برای $p(\overline{A})$ از فرمول $\overline{A}=S-A$ استفاده می کنیم.

$$p(\overline{A})=\frac{|\overline{A}|}{|S|}=\frac{|S-A|}{|S|}=\frac{|S|}{|S|}-\frac{|A|}{|s|}=۱-\boldsymbol{p(A)}$$

امر مسلم ۵.۲.۲

فر می کنیم A و B واقعه ها در فضای نمونه S باشند. پس

۱) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

۲) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$ اگر $A\cap B=\emptyset$

۳) $p(\overline{A})=۱-p(A)$

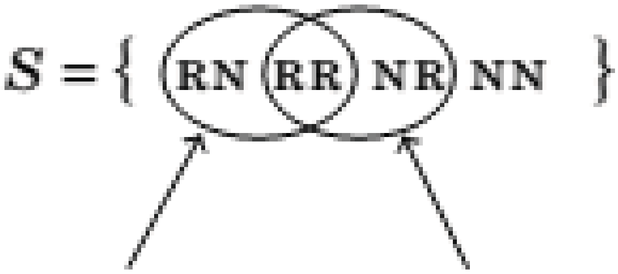
۴) $p(A)=۱-p(\overline{A})$

مثال بخش ۵.۱ در مورد پیش بینی هوا را بخاطر بیاورید. ظاهرا تصور می شود چون احتمال بارش روز پنجشنبه ۵۰ % است و روز جمعه ۵۰ % پس احتمال بارندگی آخر هفته ۱۰۰ % است. به عبارت دیگر تصور می شد

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)=۵۰\%+۵۰\%=۱۰۰\%$$

مشکل اینجا است که A و B دو بدو ناسازگار نیستند. زیرا $A\cap B=\{RR\}\neq\emptyset$ تصویر ۵.۲.۷ اشتباه محاسبه این است که بجای فرمول شماره ۱ بالا ، فرمول شماره ۲ بکار برده می شد. لذا احتمال بارندگی در آخر هفته

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{|A|}{|S|}+\frac{|B|}{|S|}-\frac{|RR|}{|S|}$$
$$=\frac{۲}{۴}+\frac{۲}{۴}-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}=۷۵\%$$



بیضی سمت راست مربوط است به احتمال بارش روز جمعه و بیضی سمت چپ مربوط است به احتمال بارش روز پنجشنبه .

البته ، بدون بکار بردن فرمول $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ می توانیم این حقیقت را که $E = A \cup B$ است و این حقیقت که $p(E) = \frac{|E|}{|S|}$ است ، احتمال بارندگی در آخر هفته پیدا کنیم.

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{۳}{۴} = \%۷۵$$

اما فراموش نشود امر مسلم ۵.۲.۲ هنگامی کاربرد دارد که تمام واقعه ها در S شانس مساوی برای وقوع داشته باشند.

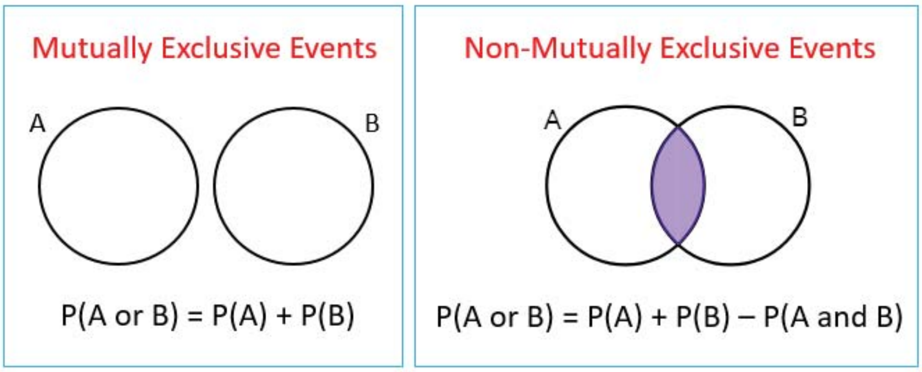
مثال ۵.۲.۱

احتمال این که یک تاس ۲ یا ۵ نشان دهد ، چقدر است؟

پاسخ

این دو واقعه دو بدو ناسازگار هستند. تصویر ۵.۲.۸ سمت چپ، واقعه دو بدو ناسازگار و سمت راست ، دو بدو سازگار.

تصویر ۵.۲.۸



$$p(۲) = \frac{۱}{۶} \qquad p(۵) = \frac{۱}{۶}$$

$$p(\text{۵ یا ۲}) = p(۲) + p(۵)$$

$$= \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۶} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

مثال ۵.۲.۲
در یک آزمایش ، یک سکه بالا می اندازیم ، و سپس یک تاس را می ریزیم. مطلوب است احتمال این که سکه ، شیر نشان دهد ، یا تاس عدد پنج را نشان دهد.
پاسخ
فرض H نمایش شیر باشد و T نمایش خط. فضای نمونه به صورت زیر است.

$$S = \{H۱, H۲, H۳, H۴, H۵, H۶, T۱, T۲, T۳, T۴, T۵, T۶\}$$

شش طریق وجود دارد که سکه شیر را نشان می دهد. $\{H۱, H۲, H۳, H۴, H۵, H۶\}$
دو طریق ممکن است تاس عدد ۵ را نشان دهد. $\{H۵, T۵\}$
یک طریق سکه شیر را نشان دهد و تاس عدد ۵ را.$\{H۵\}$ پس داریم.

$$p(\text{شیر یا پنج}) = p(\text{شیر}) + p(\text{پنج}) - p(\text{هم شیر و هم خط})$$

$$= \frac{۶}{۱۲} + \frac{۲}{۱۲} - \frac{۱}{۱۲} = \frac{۷}{۱۲} \approx 0.583 \approx 58.3\%$$

مثال ۵.۲.۳
در یک کلاس ۳۰ نفتره ، معلم می خواست بدانند ، چند دانش آموز یا کلاس هنر انتخاب کرده و یا کلاس انگلیسی.
به دانش آموزان گفت آنها که کلاس هنر انتخاب کرده اند ، دست بلند کنند. ۱۳ نفر دست بلند کردند.
سپس گفت آنها که کلاس انگلیسی انتخاب کرده اند ، دست بلند کنند. ۲۱ نفر دست بلند کردند. پس چنین حساب کرد.

$$p(\text{انگلیسی یا هنر}) = \frac{۱۳ + ۲۱}{۳۰} = \frac{۳۴}{۳۰} \approx ۱.۱۴$$

معلم می دانست که این نتیجه غلط است. زیرا احتمال باید بین صفر و یک باشد. بعد از کمی فکر متوجه شد که ممکن است بعضی از دانش آموزان هر دو کلاس را انتخاب کرده باشند. پس گفت ، آنها که هر دو کلاس را انتخاب کرده اند ، دست بلند کنند. ۹ نفر دست بلند کردند. پس چنین حساب کرد.

$$p(\text{انگلیسی یا هنر}) = p(\text{هنر}) + p(\text{انگلیسی}) - p(\text{انگلیسی و هنر})$$

$$\frac{۱۳ + ۲۱ - ۹}{۳۰} = \frac{۲۵}{۳۰} \approx 0.833 \approx 83.3\%$$

تمرینات ۵.۲

۱ - یک سکه را هشت مرتبه بالا می اندازیم. مطلوب است احتمال این که چهار شیر بدست نیاوریم.

۲ - یک تاس شش مرتبه انداخته می شود. اگر مرتبه اول یک پنج باشد و یا مرتبه آخر زوج باشد ، شما برنده هستید. مطلوب است احتمال برنده شدن شما.

۳ - یک تاس را پنج مرتبه می اندازیم. احتمال این که هر پنج مرتبه زوج نباشد چقدر است؟

۴ - یک سکه پنج مرتبه بالا می اندازیم. مطلوب است احتمال این که مرتبه اول شیر باشد و یا در این پنج مرتبه ، دقیقا دو شیر بیاید.

۵ - یک کیسه شامل ۲۰ مهره قرمز ، ۲۰ مهره سبز و ۲۰ مهره آبی است. شما دست داخل کیسه می کنید و ۱۵ مهره را با هم از کیسه بیرون می آورید. مطلوب است احتمال این که تمام مهره ها یک رنگ باشند.

۶ - احتمالات برد سه تیم فوتبال A, B, C به ترتیب $\frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۳}$ است. احتمالت زیر را حساب کنید.

الف – یا تیم A برنده شود یا تیم B

ب – یا تیم A یا B و یا C برنده شود.

ج – هیچ کدام از تیم ها برنده نشوند.

د – نه تیم A برنده شود نه تیم B

پاسخ تمرینات ۵.۲

۱ - یک سکه را هشت مرتبه بالا می اندازیم. مطلوب است احتمال این که چهار شیر بدست نیاوریم.

پاسخ

فضای نمونه S مجموعه تمام لیست های هشت عنصری از نماد های H و T است.

پس $|S| = ۲^۸$ است. حال فرض می کنیم E واقعه بدست آوردن دقیقا چهار شیر باشد. پس

$$|E| = \binom{۸}{۴} = ۷۰$$

پس $\overline{E}$ واقعه چهار شیر بدست نیاوریم، است. پس پاسخ مساله به صورت زیر است.

$$p(\overline{E}) = ۱ - p(E) = ۱ - \frac{|E|}{|S|} = ۱ - \frac{۷۰}{۲^۸} \approx 72.65\%$$

۲ ـ یک تاس شش مرتبه انداخته می شود. اگر مرتبه اول یک پنج باشد و یا مرتبه آخر زوج باشد ، شما برنده هستید. مطلوب است احتمال برنده شدن شما.

پاسخ

فضای نمونه S مجموعه تمام لیست های شش عضوی است که از ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ ساخته شده اند ، پس $|S| = ۶^۶$ است. فرض می کنیم A واقعه مرتبه اول یک پنج باشد. بر اساس اصل ضرب داریم.

$$|A| = ۶^۵$$

است. فرض می کنیم B واقعه مرتبه آخر زوج باشد. پس $|B| = ۶^۵ * ۳$ است.

ملاحظه می کنید که $A \cap B$ مجموعه تمام لیست های S است ، که اولین عضو آن ۵ است و آخرین عضو آن زوج است. بر اساس اصل ضرب داریم. $|A \cap B| = ۶^۴ * ۳$

احتمال این که اولین مرتبه تاس ریختن یک پنج باشد و یا آخرین زوج باشد به صورت زیر است.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{|A|}{|S|} + \frac{|B|}{|S|} - \frac{|A \cap B|}{|S|}$$

$$= \frac{۶^۵}{۶^۶} + \frac{۶^۵ * ۳}{۶^۶} - \frac{۶^۴ * ۳}{۶^۶} = \frac{۱}{۶} + \frac{۳}{۶} - \frac{۳}{۳۶} \approx 58.33\%$$

۳ ـ یک تاس را پنج مرتبه می اندازیم. احتمال این که هر پنج مرتبه زوج نباشد چقدر است؟

پاسخ

فضای نمونه S مجموعه تمام لیست های پنج عضوی است که از ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ ساخته شده اند، بطوری که اولین عضو نتیجه اولین تاس انداختن است ، دومین عضو نتیجه دومین تاس انداختن است و الی آخر. پس $|s| = ۶^۵$ است. حال فرض می کنیم E واقعه تمام تاس انداختن ها زوج باشند. پس E مجموعه تمام لیست های پنج عضوی است که از ۴و۶ ,۲ ساخته شده اند. لذا $|E| = ۳^۵$ است. می خواهیم احتمال این که همه تاس انداختن ها زوج نباشند ، پیدا کنیم. یعنی $\overline{E}$ باید را پیدا کنیم. پس پاسخ به صورت زیر است.

$$p(\overline{E}) = ۱ - p(E) = ۱ - \frac{|E|}{|S|} = ۱ - \frac{۳^۵}{۶^۵} \approx 96.875\%$$

۴ ـ یک سکه پنج مرتبه بالا می اندازیم. مطلوب است احتمال این که مرتبه اول شیر باشد و یا در این پنج مرتبه ، دقیقا دو شیر بیاید.

پاسخ

فضای نمونه S مجموعه لیست های پنج عضوی است که از نماد های H و T تشکیل شده اند. پس $|S| = ۲^۵ = ۳۲$ است. فرض می کنیم A واقعه اولین بالا انداختن سکه ، شیر باشد ، پس $A \subseteq S$

است. یعنی A مجموعه لیست های داخل S است به شکل H □،□،□،□ پس ۱۶ $= {}^{۴}۲ = |A|$.
فرض می کنیم B واقعه دقیقا ۲شیر باشد ، پس ۱۰ $= \binom{۵}{۲} = |B|$ است. و در نهایت $A \cap B$
مجموعه لیست های S است بطوری که اولین عضو آنها H است و فقط یک عضو از چهار عضو باقی مانده یک H است. پس ۴ $= |A \cap B|$ است.
لذااحتمال اولین بالا انداختن یک شیر باشد و یا دقیقا دو شیر داشته باشیم به صورت زیر است.

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{|A|}{|S|} + \frac{|B|}{|S|} - \frac{|A \cap B|}{|S|}$$
$$= \frac{۱۶}{۳۲} + \frac{۱۰}{۳۲} - \frac{۴}{۳۲} = \frac{۲۲}{۳۲} = 68.75\%$$

۵ ـ یک کیسه شامل ۲۰ مهره قرمز ، ۲۰ مهره سبز و ۲۰ مهره آبی است. شما دست داخل کیسه می کنید و ۱۵ مهره را با هم از کیسه بیرون می آورید. مطلوب است احتمال این که تمام مهره ها یک رنگ باشند.

پاسخ

یک نتیجه برای این آزمایش شامل یک چند مجموعه پانزده عضوی است که از نماد های $\{R, G, B\}$ ساخته شده اند. R حرف اول Red یعنی قرمز، G حرف اول $Green$ یعنی سبز و B حرف اول $Blue$ یعنی سبزاست. پس فضای نمونه S مجموعه تمام این چند مجموعه ها است.
اعضای S با ستاره ها و خطوط عمودی نشان می دهیم. پس یک عضونمونه S یک لیست ۱۷ $= ۲ + ۱۵$ عضوی است با ۱۵ ستاره و۲ خط عمودی

$$\underbrace{**,\cdots,**}_{\text{برای هر قرمز}} \mid \underbrace{**,\cdots,**}_{\text{برای هر سبز}} \mid \underbrace{**,\cdots,**}_{\text{برای هر ابی}}$$

پس ۱۳۶ $= \binom{۱۷}{۲} = |S|$ است. همچنین واقعه E تمام مهره ها یک رنگ باشند

$$E = \{*************** \,||, | *************** \,|, || ***************\}$$

پس ۳ $= |E|$ و در نهایت

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{۳}{۱۳۶} \approx 2.2\%$$

۶ ـ احتمالات برد سه تیم فوتبال A, B, C به ترتیب $\frac{۱}{۹}, \frac{۱}{۵}, \frac{۱}{۳}$ است. احتمالت زیر را حساب کنید.

الف ـ یا تیم A برنده شود یا تیم B
ب ـ یا تیم A یا B و یا C برنده شود.
ج ـ هیچ کدام از تیم ها برنده نشوند.
د ـ نه تیم A برنده شود نه تیم B

پاسخ

الف

$$p(\text{برنده شود } B \text{ یا } A) = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} = \frac{۸}{۱۵}$$

ب

$$p(\text{برنده شود } C \text{ یا } B \text{ یا } A) = \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۹} = \frac{۲۹}{۴۵}$$

ج

$$p(\text{هیچ کدام برنده نشوند}) = ۱ - p(\text{برنده شود } C \text{ یا } B \text{ یا } A) = ۱ - \frac{۲۹}{۴۵} = \frac{۱۶}{۴۵}$$

د

$$p(\text{برنده شود } B \text{ نه } A \text{ نه }) = ۱ = p(\text{برنده شود } B \text{ یا } A) = ۱ - \frac{۸}{۱۵} = \frac{۷}{۱۵}$$

۵.۳ ـ احتمال شرطی و واقعه های مستقل
Conditional Probability and Independent Events

گاهی اوقات ، احتمال یک واقعه A تغییر می کند اگر بدانیم یک واقعه دیگر B رخ داده است. به این نوع احتمال می گوییم احتمال شرطی $conditional\ probability$
یک خانواده سه نفره را در نظر بگیرید. فرض کنید احتمال داشتن یک پسر %۵۰ است و احتمال داشتن یک دختر هم %۵۰ است. کدام بیشتر محتمل است :خانواده *بیشتردختر داشته باشد* ، یا *بزرگ ترین بچه یک پسر باشد ؟*
برای شروع محاسبه ، فضای نمونه برای این خانواده می نویسیم. و تمام نتایج ممکن را به صورت لیست ردیف می کنیم. فرض می کنیم GBB یعنی فرزند اول دختر و سپس یک پسر ، سپس یک پسر دیگر. به همین طریق BGB یعنی فرزند اول پسر ، سپس یک دختر و سپس یک پسر. الی آخر. در تصویر ۵.۳.۱ ستون سمت چپ فضای نمونه را ملاحظه می کنید. ستون وسط A است و ستون سمت راست B است.

B: بزرگترین یک پسر است A: دختر بیشتر از پسر

تصویر ۵.۳.۱

فضای نمونه	A	B
GGG BGG	GGG	BGG
GGB BGB	GGB	BGB
GBG BBG	GBG	BBG
GBB BBB	BGG	BBB

ملاحظه می کنید که

$$p(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{۴}{۸} = \%۵۰ \qquad p(B) = \frac{|B|}{|S|} = \frac{۴}{۸} = \%۵۰$$

پس دختر بیشتر از پسر به همان اندازه محتمل است که بزرگ ترین فرزند پسر باشد.
حالا ، تصور کنید واقعه B رخ داده است ، پس بزرگ ترین فرزند پسر است. احتمال این که دختر بیشتر از پسر باشد چقدر است؟ یعنی $p(A)$ چقدر است؟ چهار نتیجه در واقعه B وجود دارد ، و فقط یکی از آنها دختر بیشتر از پسر است. پس ، بر اساس اطلاعات داده شده جدید ، یعنی بزرگ ترین فرزند پسر باشد ، مقدار $p(A)$ تغییر کرده است به $p(A) = \frac{۱}{۴} = \%۲۵$
پس در یک موقعیت ، $p(A) = \%۵۰$ بود اما به شرطی که B رخ داده باشد ، $p(A) = \%۲۵$ است. این حالت را به صورت $p(A|B) = \%۲۵$ بیان می کنیم. این عبارت را چنین می خوانیم.
احتمال شرطی A در صورتی که B رخ داده باشد ، %۲۵ است.

تعریف ۵.۳.۱
اگر A و B دو واقعه در یک فضای نمونه باشد ، پس **احتمال شرطی A در صورت وقوع B** که به صورت $p(A|B)$ نوشته می شود ، احتمالی است که A رخ خواهد داد اگر B قبلا رخ داده است.

مثال ۵.۳.۱
یک سکه بالا می اندازیم. فضای نمونه $S = \{H, T\}$ است. فرض کنید واقعه $A = \{H\}$ باشد و واقعه $B = \{T\}$ باشد. پس $p(A) = p(B) = \%۵۰$ است. اما $p(A|B) = 0$ است. زیرا اگر B رخ داده باشد ، یعنی خط آمده باشد ، پس A یعنی شیر نخواهد آمد. همچنین $p(B|A) = 0$ است. توجه داشته باشید که $p(A|A) = ۱ = \%۱۰۰$ است.

مثال ۵.۳.۲
یک سکه بالا می اندازیم و یک تاس پرتاب می کنیم. واقعه های زیر را در نظر بگیرید.

A: سکه شیر است B: تاس سه است

مطلوب است $p(A)$ ، $p(B)$, $p(A|B)$, $p(B|A)$

پاسخ

واضح است که $p(A) = \frac{۱}{۲}$ و $p(B) = \frac{۱}{۶}$ است. از طرف دیگر بدست آوردن عدد سه ، ربطی به نتیجه سکه ندارد ، و بالعکس ، پس $p(A|B) = \frac{۱}{۲}$ و $p(B|A) = \frac{۱}{۶}$ است.

با این وجود باید با دقت کار کنیم. در تصویر ۵.۳.۲ فضای نمونه S و واقعه های A و B را ملاحظه کنید. تمام جدول S است. ردیف اول A است و ستون سوم B است.

تصویر ۵.۳.۲

H1	H2	H3	H4	H5	H6
T1	T2	T3	T4	T5	T6

ملاحظه می کنید

$$p(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲} \qquad p(B) = \frac{|B|}{|S|} = \frac{۲}{۱۲} = \frac{۱}{۶}$$

است. برای پیدا کردن $p(A|B)$ تصور کنید B رخ داده است. شانس وقوع A چقدر است؟ فقط یکی از دو نتیجه در B شیر است پس $p(A|B) = \frac{۱}{۲}$ است.

برای پیدا کردن $p(B|A)$ تصور کنید A رخ داده است. حالا ، شانس رخ دادن B چقدر است؟ یکی از شش نتیجه A شماره ۳ دارد. پس $p(B|A) = \frac{۱}{۶}$ است.

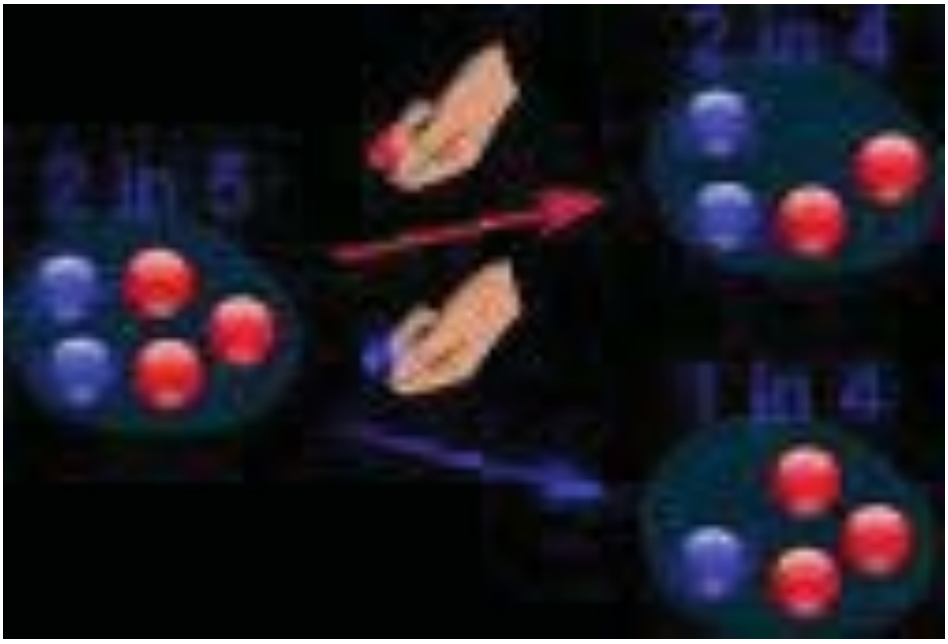
در مثال بالا ، خواه B رخ داده باشد یا رخ نداده باشد ، هیچ اثری در رخ دادن A ندارد. و بالعکس. می گوییم A و B مستقل هستند.

تعریف ۵.۳.۲
دو واقعه A و B **مستقل Independent** هستند اگر یکی رخ دهد احتمال رخ داد دیگری را تغییر ندهد. یعنی اگر $p(A) = p(A|B)$ باشد و $p(B) = p(B|A)$ ، درغیر این صورت آنها **وابسته Dependent** هستند.

پس واقعه های A و B در مثال ۵.۳.۲ مستقل هستند.

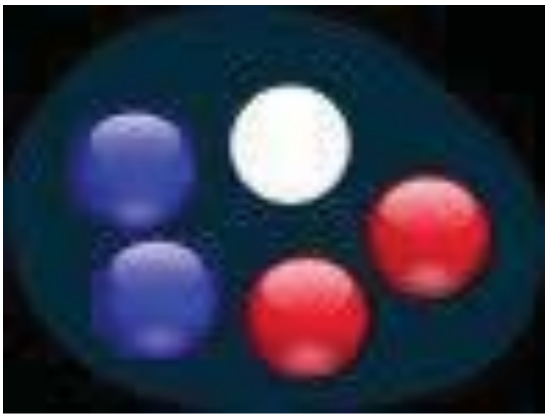
مثال ۵.۳.۳
دو مهره آبی و سه مهره قرمز در یک کیسه است. یک مهره از کیسه بیرون می آوریم. احتمال بیرون آوردن یک مهره آبی چقدر است؟

تصویر ۵.۳.۳



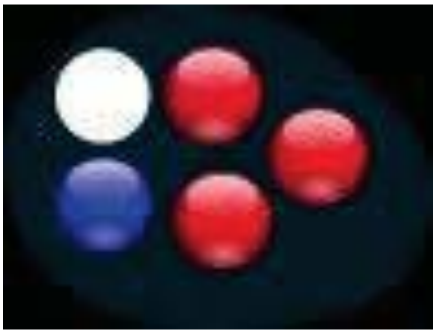
شانس یا احتمال $\frac{۲}{۵}$ است.تصویر ۵.۳.۳
اما بعد از بیرون آوردن یک مهره ، شانس یا احتمال تغییر می کند. اگر دفعه اول یک مهره قرمز بیرون آورده بودیم، بدون برگرداندن ، شانس بیرون آوردن یک مهره آبی $\frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۴}$ است . تصویر ۵.۳.۴

تصویر ۵.۳.۴



اگر مرتبه اول یک مهره آبی بدست آورده بودیم ،بدون برگرداندن , این مرتبه شانس بدست آوردن یک مهره آبی $\frac{۱}{۴}$ است. تصویر ۵.۳.۵

تصویر ۵.۳.۵



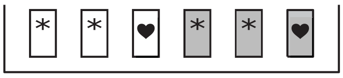
پس واقعه بعدی **بستگی به Depends on** به رخ داد واقعه قبلی دارد. این واقعه را **وابسته Dependent** می گویند.
اما اگر هر مرتبه که یک مهره بیرون می اوریم ، آنرا به کیسه بر گردانیم ، سانس یا احتمال تغییر نمی کند. و واقعه ها را **مستقل** می نامیم.

در ابتدای این بخش ، در مورد خانواده با سه فرزند ، واقعه A *دختر ها بیش از پسر ها* دیدیم که $p(A) = \%۵۰$ بود. اما اگر B یعنی *بزرگ ترین یک پسر* رخ می‌داد ، پس $p(A|B) = \%۲۵$ بود. اینجا A و B وابسته هستند. اما نا سازگار نیستند.

مثال ۵.۳.۴
یک جعبه شامل شش کارت است. سه سفید و سه خاکستری. دو کارت سفید و دو کارت خاکستری روی آنها هر کدام یک ستاره است. روی یک کارت سفید و یک کارت خاکستری تصویر یک قلب است. یک کارت را از جعبه بیرون می آورید. دو واقعه زیر را در نظر بگیرید.

A: کارت خاکستری است B: روی کارت یک ستاره است

سوال :آیا این دو واقعه مستقل هستند یا وابسته ؟



پاسخ

$$p(A) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad p(B) = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$$

اگر B رخ دهد ، پس یکی از چهار کارت با تصویر ستاره ، از جعبه بیرون آورده شده است ، و نصف آنها خاکستری هستند. پس $p(A|B) = \frac{۱}{۲}$ است و این مساوی $p(A)$ است.

اگر A رخ دهد ، پس یکی از سه کارت خاکستری بیرون آورده شده است. روی دو تا از کارت های خاکستری تصویر ستاره است. پس $p(B|A)=\frac{۲}{۳}$ است و این مساوی $p(B)$ است. لذا A و B مستقل هستند. اگر یکی رخ دهد ، احتمال رخ داد دیگری تغییر نمی کند.

دیاگرام درختی

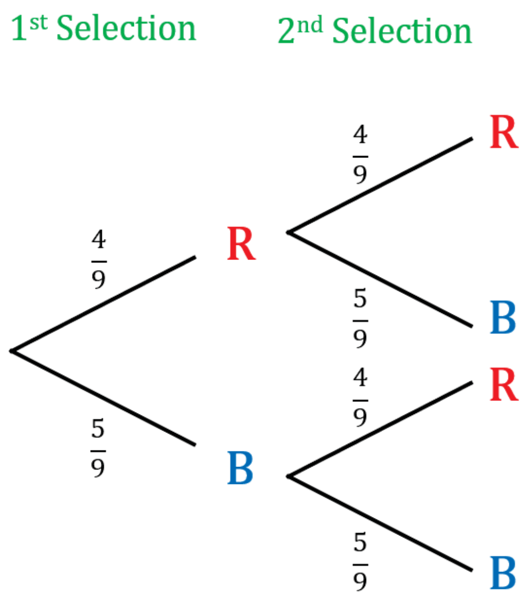
مثال ۵.۳.۵

یک کیسه شامل ۴ توپ قرمز و ۵ توپ آبی است. دو توپ بطور تصادفی از کیسه بیرون می آوریم. مطلوب است احتمال انتخاب دو توپ همرنگ ، در صورتی که هر مرتبه توپ انتخاب شده را به کیسه بر گردانیم.

پاسخ

درخت احتمالات را رسم می کنیم. تصویر ۵.۳.۶

تصویر ۵.۳.۶

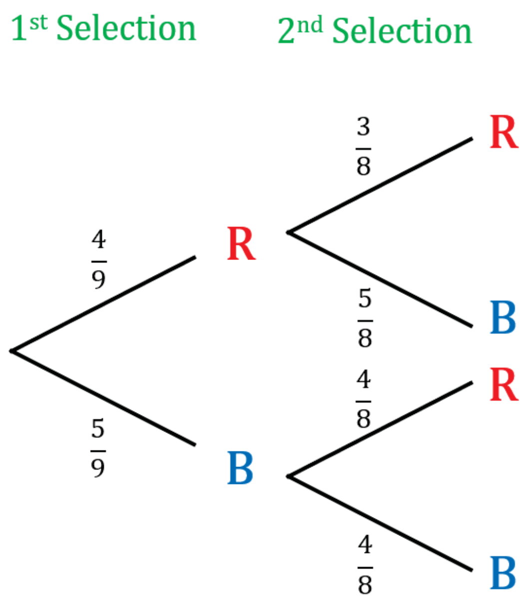


می دانیم مجموعا ۹ توپ وجود دارد. پس $\frac{۴}{۹}$ شانس انتخاب یک توپ قرمز وجود دارد. بعداً چون توپ قرمز به کیسه برگردانده می شود ، باز هم شانس انتخاب یک توپ قرمز در مرتبه دوم همان $\frac{۴}{۹}$ است. به همین ترتیب مطابق دیاگرم ادامه می دهیم. تصویر نشان می دهد اگر در هر انتخاب توپ آبی از کیسه بیرون آید، احتمال چگونه است.

مثال ۵.۳.۶

مثال ۵.۳.۵ را تکرار می کنیم. اما هر مرتبه که یک توپ از کیسه بیرون آوردیم ، **آنرا بر نمی گردانیم.**
دیاگرم درختی را رسم می کنیم. تصویر ۵.۳.۷

تصویر ۵.۳.۷



باز هم ۹ توپ داریم. بعد از انتخاب اول ۸ توپ خواهیم داشت, همانطور که در تصویر ۵.۳.۷ ملاحظه می کنید.

شانس انتخاب یک توپ قرمز در انتخاب اول $\frac{۴}{۹}$ است ، با انتخاب یک توپ قرمز ، شانس انتخاب یک توپ قرمز برای مرتبه دوم $\frac{۳}{۸}$ است. به همین ترتیب ادامه می دهیم.

دیاگرام درختی را بکار می بریم تا احتمال انتخاب دو توپ یک رنگ بدست آوریم. می بینیم دو راه برای این کار داریم. یا آبی و آبی یا قرمز و قرمز. قانون **و AND** را بکار می بریم.

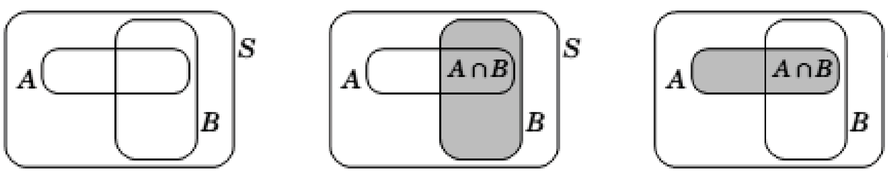
$$p(\text{آبی و آبی}) = \frac{۵}{۹}\times\frac{۴}{۸} = \frac{۲۰}{۷۲} \quad \text{و} \quad p(\text{قرمز و قرمز}) = \frac{۴}{۹}\times\frac{۳}{۸} = \frac{۱۲}{۷۲}$$

و در نهایت ، بر اساس قانون واقعه های نا سازگار ، دو احتمال را با هم جمع می کنیم

$$p(\text{یک رنگ}) = \frac{۲۰}{۷۲}+\frac{۱۲}{۷۲} = \frac{۳۲}{۷۲}$$

حالا می خواهیم یک فرمول کلی برای $p(A|B)$ و $p(B|A)$ پیدا کنیم.

تصویر ۵.۳.۸



فرض می کنیم A و B دو واقعه در فضای نمونه S باشند. تصویر ۵.۳.۸ سمت چپ. اگر B رخ دهد، قسمت سایه دار تصویر وسط ، پس هر نتیجه ای در قسمت سایه دار ممکن است رخ دهد ، پس مجموعه سایه دار B مثل یک فضای نمونه جدید است. حالا اگر A هم رخ دهد ، این یعنی یک نتیجه در $A \cap B$ رخ داده است. حال که $A \cap B \subseteq B$ یک واقعه در B است ، پس بر اساس امرمسلم ۵.۱.۱ بخش ۵.۱ داریم.

$$p(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{|A \cap B|}{|B|} * \frac{\frac{۱}{|S|}}{\frac{۱}{|S|}} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|S|}}{\frac{|B|}{|S|}} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

لذا

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

با وارون کردن نقش A و B و توجه به تصویر سمت راست ۵.۳.۸ داریم.

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

با طرفین وسطین کردن داریم.

$$p(A \cap B) = p(A|B) * p(B) \quad \text{و} \quad p(A \cap B) = p(A) * p(B|A)$$

لذا ، نه فقط فرمول هایی برای $p(A|B)$ و $p(B|A)$ بدست آوردیم ، بلکه برای $p(A \cap B)$ هم بدست آوریم. علاوه بر این ، اگر A و B مستقل باشند ، پس $p(A|B) = p(A)$ است. بنا بر این تساوی $p(A \cap B) = p(A|B) * p(B)$ به صورت زیر ساده می شود.

$$p(A \cap B) = p(A) * p(B)$$

امر مسلم ۵.۳.۱

اگر A و B دو واقعه در یک فضای نمونه باشند ، پس

۱) $p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$

۲) $p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

۳) $p(A \cap B) = p(A|B) * p(B) = p(A) * p(B|A)$

اگر A و B مستقل باشند ، پس داریم.

۴) $p(A \cap B) = p(A) * p(B)$

مثال ۵.۳.۷

یک تاس را دو مرتبه برتاب می کنیم. اگر هیچ کدام از پرتاب ها ⊙ نباشد ، شما برنده هستید. شانس برنده شما چقدر است؟

پاسخ

فرض می کنیم A واقعه "*پرتاب اول یک نیست*" باشد. پس $p(A) = \frac{۵}{۶}$

فرض می کنیم B واقعه "دومین پرتاب یک نیست" باشد. پس $p(B)=\frac{۵}{۶}$ است. می خواهیم

$$p(A \text{ و } B)$$

را پیدا کنیم. واقعه های A و B مستقل هستند. زیرا نتیجه پرتاب اول روی پرتاب دوم اثر ندارد. از فرمول شماره ۴ بالا استفاده می کنیم.

$$p(A \text{ و } B)=p(A\cap B)=p(A)*p(B)=\frac{۵}{۶}*\frac{۵}{۶}=\frac{۲۵}{۳۶}=69.4\%$$

مساله احتمال شرطی را گاهی اوقات می توان بوسیله **درخت احتمال Probability Tree** پاسخ داد.
یک نمونه را در مثال ۵.۳.۶ نشان دادیم.
حالا مثال دیگری ذکر می کنیم.
همانطو ر که گفته شد ، فرض می کنیم شانس تولد پسر یا دختر ۵۰ – ۵۰ باشد. فرض کنید یک زن دو بچه داشته باشد. واقعه های A: اولین بچه دختر است و B: دومین بچه دختر است مستقل هستند. اولین بچه خواه پسر خواه دختر باشد ، روی احتمال دختر بودن بچه دوم اثر ندارد. پس احتمال هر دو بچه دختر باشد به صورت زیر است

$$p(A\cap B)=p(A)*p(B)=\frac{۱}{۲}*\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}=\%۲۵$$

توجه دارید که متمم های A و B واقعه های زیر هستند.

$\overline{A}$: اولین بچه پسر است $\overline{B}$: دومین بچه پسر است

احتمال نتیجه GB یعنی اولین بچه یک دختر و دومین بچه یک پسر ، بصورت

$$p(GB)=p(A\cap \overline{B})=p(A)*p(\overline{B})=\frac{۱}{۲}*\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}=\%۲۵$$

به همین طریق ، می توانیم احتمال چهار نتیجه را از درخت تصویر ۵.۳.۹ بدست آورد.

$$p(GG)=p(A)*p(B)=\frac{۱}{۲}*\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}=\%۲۵$$

$$p(GB)=p(A)*p(\overline{B})=\frac{۱}{۲}*\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}=\%۲۵$$

$$p(BG)=p(\overline{A})*p(B)=\frac{۱}{۲}*\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}=\%۲۵$$

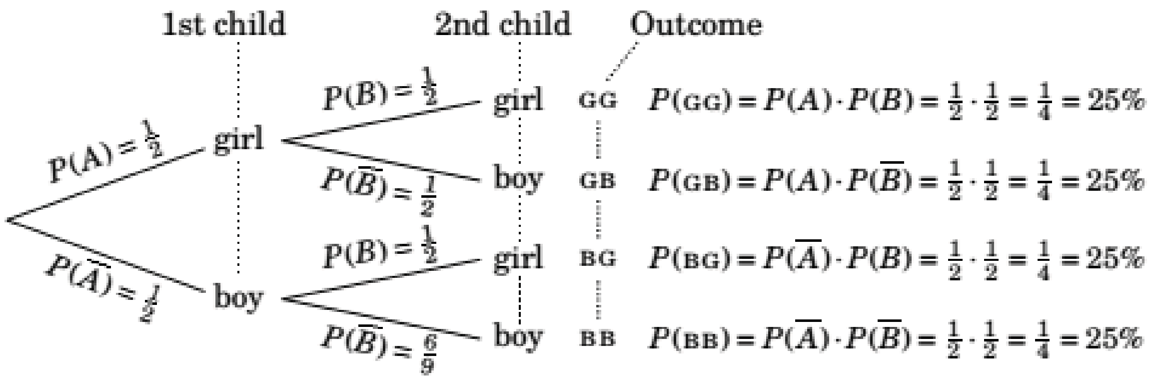
$$p(BB)=p(\overline{A})*p(\overline{B})=\frac{۱}{۲}*\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}=\%۲۵$$

این نشان می دهد هر کدام از نتایج فضای نمونه

$$S=\{GG,GB,BG,BB\}$$

دارای شانس رخ داد ۲۵% دارند.

تصویر ۵.۳.۹



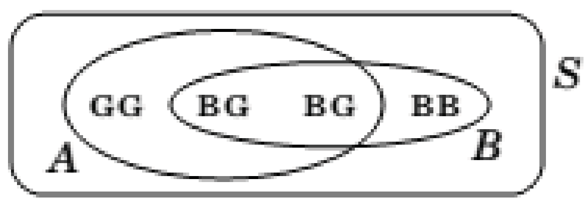
در نمودار بالا $1st\ child$ یعنی بچه اول و $2nd\ child$ یعنی بچه دوم. $Outcome$ یعنی نتیجه

مثال ۵.۳.۸

فرض کنید شما خانمی و یک دختر می بینید. آن خانم به شما می گوید که دو فرزند دارد ، یکی از آنها این دختر است. شانس این که فرزند دیگر ایشان یک پسر باشد ، چقدر است؟

پاسخ

تصویر ۵.۳.۱۰



بسیاری از ما، فورا نتیجه می گیریم که پاسخ ۵۰% است. اما این پاسخ غلط است. برای درک این موضوع به تصویر ۵.۳.۱۰ توجه کنید. در این تصویر فضای نمونه برای آزمایش داشتن دو فرزند ، ملاحظه می کنید. فرض کنید A واقعه " *حد اقل یک دختر* "باشد. ما یک دختر را دیدیم. پس A رخ داده است. فرض کنید B واقعه "*یک پسر در فامیل است*" باشد. پس مساله از ما می خواهد احتمال رخ داد B در صورتی که A رخ داده است، را پیدا کنیم. با توجه به تصویر ۵.۳.۱۰ ملاحظه می کنید که B دو مرتبه رخ می دهد و این دو رخ داد با سه نتیجه هم شانس A مشترک است. پس پاسخ به سئوال به صورت زیر است.

$$p(B|A) = \frac{۲}{۳} = 66.6\%$$

همچنین می توان با استفاده از امر مسلم ۵.۳.۱ پاسخ را به صورت زیر بدست آورد.

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{|A \cap B|}{|S|}}{\frac{|B|}{|S|}} = \frac{\frac{۲}{۴}}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۲}{۳} = 66.6\%$$

در مثال بعد ، آزمایشی انجام می دهیم که همه نتایج در فضای نمونه ، هم شانس نیستند.

مثال ۵.۳.۹

در یک کوزه ، سه توپ قرمز و هفت توپ آبی وجود دارد. دست در کوزه می کنیم و یک توپ بطور تصادفی بیرون می آوریم. سپس یک توپ دیگر بطور تصادفی بیرون می آوریم. پس فضای نمونه این آزمایش به صورت زیر است.

$$S = \{RR, RB, BR, BB\}$$

مطلوب است احتمال هر یک از نتایج در S

توجه : R حرف اول Red است به معنی قرمز و B حرف اول $Blue$ است به معنی آبی.

پاسخ

فرض می کنیم واقعه های A و B به صورت زیر باشند.

A: اولین انتخاب قرمز است

B: دومین انخاب قرمز است

پس

$\overline{A}$: اولین انتخاب آبی است

$\overline{B}$: دومین انخاب آبی است

احتمال اولین انتخاب قرمز است به صورت زیر است

$$p(A) = \frac{۳}{۱۰}$$

زیرا سه توپ از ۱۰ قرمز هستند. بعد ازاین رخ داد ، ۹ توپ باقی است. که دوعدد از آنها قرمز هستند. پس

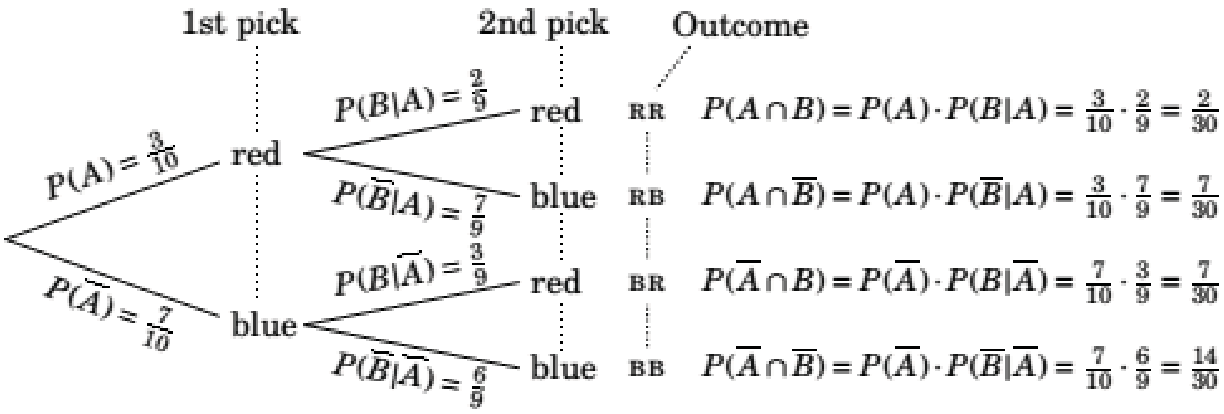
$$p(B|A) = \frac{۲}{۹}$$

لذا احتمال این که هر دو انتخاب قرمز باشند ، به صورت زیر است.

$$p(RR) = p(A \cap B) = p(A) * p(B|A) = \frac{۳}{۱۰} * \frac{۲}{۹} = \frac{۲}{۳۰}$$

این مربوط است به نتیجه اول در درخت زیر ، تصویر ۵.۳.۱۱

تصویر ۵.۳.۱۱



به همین طریق

$$p(RB) = p\left(A \cap \overline{B}\right) = p(A) * p\left(\overline{B}|A\right)$$

برای پیدا کردن $p\left(\overline{B}|A\right)$ توجه دارید که اگر A رخ داده باشد ، پس ۹ توپ در کوزه باقی است ، و ۷ عدد آن آبی است، پس $p\left(A \cap \overline{B}\right) = \frac{۷}{۹}$ است. و لذا

$$p(RB) = p\left(A \cap \overline{B}\right) = p(A) * p\left(\overline{B}|A\right) = \frac{۳}{۱۰} * \frac{۷}{۹} = \frac{۷}{۳۰}$$

به همین طریق احتمال دو نتیجه دیگر را مطابق زیر بدست می آوریم.

$$p(BR) = p\left(\overline{A} \cap B\right) = p\left(\overline{A}\right) * p\left(B|\overline{A}\right) = \frac{۷}{۱۰} * \frac{۳}{۹} = \frac{۷}{۳۰}$$

$$p(BB) = p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = p\left(\overline{A}\right) * p\left(\overline{B}|\overline{A}\right) = \frac{۷}{۱۰} * \frac{۶}{۹} = \frac{۱۴}{۳۰}$$

بر اساس درخت بالا می بینیم که احتمال های نتایج مختلف S مطابق زیر است.

$$S = \left\{ \overbrace{6.6\%}^{RR,} \overbrace{23.3\%}^{RB,} \overbrace{23.3\%}^{BR,} \overbrace{46.6\%}^{BB} \right\}$$

در درخت بالا ، $1st\ Pick$ یعنی انتخاب آول ، $2nd\ Pick$ یعنی انتخاب دوم.

تمرینات ۵.۳

۱ - یک جعبه شامل شش کارت است. $A \quad A \quad B \quad B \quad B \quad E$ دو کارت ، یکی بعد از دیگری ، از جعبه بیرون می آورید. احتمال این که اولین کارت یک A و دومین یک B باشد ، چقدر است؟

۲ - فرض کنید A و B دو واقعه باشند. و فرض کنید

$$p(A) = \frac{۱}{۲} \quad ، \quad p(B) = \frac{۱}{۳} \quad , \qquad p(A \cap B) = \frac{۱}{۶}$$

باشد. آیا A و B مستقل هستند ، یا وابسته و یا اطلاعات کاملی وجود ندارد که دقیقا بگویید کدام یک صحیح است.

۳ - فرض کنید A و B دو واقعه باشند و داشته باشیم

$$p(A) = \frac{۲}{۳} \ , \qquad p(A|B) = \frac{۳}{۴} \ , \qquad p(B|A) = \frac{۱}{۲}$$

مطلوب است $p(B)$

۴ - یک جعبه شامل ۲ توپ قرمز ، ۳ توپ سیاه ، و ۴ توپ سفید است. یک توپ را بیرون می آوریم و سپس یک توپ دیگر بیرون می آوریم. احتمال این که هیچ کدام توپ سیاه نباشد ، چقدر است؟

۵ - یک سکه پنج مرتبه بالا می اندازیم. و تعداد خط ها بیشتر از شیر ها است. احتمال این که مرتبه اول یک خط آمده ، چقدر است؟

۶ - یک تاس پرتاب می کنیم.
الف –احتمال این که عدد پنج رو شود ، به شرطی که یک عدد فرد رو شده باشد، چقدر است؟
ب –احتمال این که عدد فرد رو شود ، به شرطی که عدد پنج رو شده باشد ، چقدر است؟

۷ - یک تاس را پرتاب می کنیم. فرض کنید $A = \{۳\}$ و $B = \{۱, ۳, ۵\}$ باشد. آیا A و B مستقل هستند؟

۸ - یک کوزه شامل ۱۰ مهره است. ۷ سیاه و ۳ سفید. یک مهره بیرون می آوریم ، بدون برگرداندن آن ، یک مهره دیگر بیرون می آوریم.
الف - احتمال این که هر دو مهره سیاه باشند ، چقدر است؟
ب –احتمال این که فقط یک مهره سیاه باشد ، چقدر است؟
ج –احتمال این که حد اقل یک مهره سیاه باشد ، چقدر است؟

پاسخ تمرینات ۵.۳

۱ - یک جعبه شامل شش کارت است. $A \quad A \quad B \quad B \quad B \quad E$ دو کارت ، یکی بعد از دیگری ، از جعبه بیرون می آورید. احتمال این که اولین کارت یک A و دومین یک B باشد ، چقدر است؟

پاسخ

فرض می کنیم A واقعه"*اولین انتخاب یک A است* "و B واقعه"*دومین انتخاب یک B است* "باشد.

پس پاسخ

$$p(A \cap B) = p(A) * p(B|A) = \frac{۲}{۶} * \frac{۲}{۵} = \frac{۲}{۱۵} = 13.3\%$$

۲ - فرض کنید A و B دو واقعه باشند. و فرض کنید

$$p(A) = \frac{۱}{۲} \quad ، \quad p(B) = \frac{۱}{۳} \quad , \quad p(A \cap B) = \frac{۱}{۶}$$

باشد. آیا A و B مستقل هستند ، یا وابسته و یا اطلاعات کاملی وجود ندارد که دقیقا بگویید کدام یک صحیح است.

پاسخ

$$\frac{۱}{۶} = p(A \cap B) = p(A) * p(B|A) = \frac{۱}{۲} p(B|A)$$

و در نتیجه $p(B|A) = \frac{۱}{۳}$ است. و لذا $p(B|A) = p(B)$ همچنین داریم.

$$\frac{۱}{۶} = p(A \cap B) = p(B) * p(A|B) = \frac{۱}{۳} p(A|B)$$

که در نتیجه $p(A|B) = \frac{۱}{۲}$ این یعنی $p(A) = p(A|B)$ است ، و لذا A و B مستقل هستند.

۳ - فرض کنید A و B دو واقعه باشند و داشته باشیم

$$p(A) = \frac{۲}{۳} \quad , \quad p(A|B) = \frac{۳}{۴} \quad , \quad p(B|A) = \frac{۱}{۲}$$

مطلوب است $p(B)$

پاسخ

بر اساس امر مسلم ۵.۳.۱ داریم.

$$p(A) * p(B|A) = p(A \cap B) = p(B) * p(A|B)$$

$$\frac{۲}{۳} * \frac{۱}{۲} = p(B) * \frac{۳}{۴}$$

$$p(B) = \frac{۴}{۹}$$

۴ ـ یک جعبه شامل ۲ توپ قرمز ، ۳ توپ سیاه ، و ۴ توپ سفید است. یک توپ را بیرون می آوریم و سپس یک توپ دیگر بیرون می آوریم. احتمال این که هیچ کدام توپ سیاه نباشد ، چقدر است؟

پاسخ

فرض می کنیم A واقعه "*هیچ توپ سیاه در انتخاب اول* "و فرض می کنیم B واقعه "*هیچ توپ سیاه در انتخاب دوم* "باشند. پس ۶ توپ از ۹ توپ سیاه نیستند ، پس

$$p(A) = \frac{۶}{۹}$$

است ، زیرا شش توپ از ۹ توپ سیاه نیستند.

اگر A رخ داده است ، پس ۵ توپ از ۸ توپ باقی مانده سیاه نیستند. پس داریم.

$$p(B|A) = \frac{۵}{۸}$$

احتمال واقعه هیچ توپ سیاه انتخاب نشده است به صورت زیر است.

$$p(A \cap B) = p(A) * p(B|A) = \frac{۶}{۹} * \frac{۵}{۸} = \frac{۵}{۱۲} = 41.6\%$$

۵ ـ یک سکه پنج مرتبه بالا می اندازیم. و تعداد خط ها بیشتر از شیر ها است. احتمال این که مرتبه اول یک خط آمده ، چقدر است؟

پاسخ

فضای نمونه مجموعه لیست های ۵ عضوی است که از نماد ها H و T تشکیل شده است. پس

$|S| = ۲^۵ = ۳۲$ است، حال فرض می کنیم A واقعه "*خط بیشتر از شیر وجود دارد* "و فرض می کنیم B واقعه"*اولین بالا انداختن یک خط است* "باشند. پس پاسخ مساله $p(B|A)$ است. بر اساس امر مسلم ۵.۳.۱ داریم.

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

پس لازم است $p(A \cap B)$ و $p(A)$ را محاسبه کنیم. می دانید که $p(A \cap B)$ واقعه *خط بیشتر از شیر وجود دار*داست **و**واقعه *اولین بالا انداختن یک خط است* می باشد. اگر اولین پرتاب یک خط است ، و قرار است خط بیشتر از شیر باشد ، پس ۲ یا ۳ یا ۴ از ۴ پرتاب های باقی مانده باید خط باشند.
تعداد طرقی که این موضوع می تواند اتفاق افتد

$$\binom{۴}{۲} + \binom{۴}{۳} + \binom{۴}{۱} = ۶ + ۴ + ۱ = ۱۱$$

پس $|A \cap B| = ۱۱$ است. با در نظر گرفتن $|A|$ یعنی داشتن خط یشتر از شیر ، پس ۳ یا ۴ یا ۵ تا از پرتاب کردن ها باید ، خط باشند. پس

$$|A| = \binom{۵}{۳} + \binom{۵}{۴} + \binom{۵}{۵} = ۱۰ + ۵ + ۱ = ۱۶$$

برای بدست آوردن پاسخ مساله ، داریم.

$$p(B|A)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{\frac{|A\cap B|}{|S|}}{\frac{|A|}{|S|}}=\frac{|A\cap B|}{|A|}=\frac{۱۱}{۱۶}=68.75\%$$

۶ - یک تاس پرتاب می کنیم.

الف –احتمال این که عدد پنج رو شود ، به شرطی که یک عدد فرد رو شده باشد، چقدر است؟

پاسخ

فضای نمونه این آزمایش $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است مشتمل بر شش نتیجه هم شانس. فرض می کنیم F واقعه عدد پنج رو شده ، O واقعه یک عدد فرد رو شده است ، باشند. پس داریم.

$$F=\{۵\} \quad ، \quad O=\{۱,۳,۵\}$$

$$p(F|O)=\frac{p(F\cap O)}{p(O)}$$

$$F\cap O=\{۵\}\cap\{۱,۳,۵\}=۵ \ , \ p(F\cap O)=\frac{۱}{۶}$$

$$O=\{۱,۳,۵\} \quad ، \quad p(O)=\frac{۳}{۶}$$

$$p(F|O)=\frac{p(F\cap O)}{p(O)}=\frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۳}{۶}}=\frac{۱}{۳}$$

ب –احتمال این که عدد فرد رو شود ، به شرطی که عدد پنج رو شده باشد ، چقدر است؟

پاسخ

این مانند قسمت الف است ،اما نقش F و O عوض شده است.

$$p(O|F)=\frac{p(O\cap F)}{p(F)}=\frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۱}{۶}}=۱$$

۷ - یک تاس را پرتاب می کنیم. فرض کنید $A=\{۳\}$ و $B=\{۱,۳,۵\}$ باشد. آیا A و B مستقل هستند؟

پاسخ

$$p(A)=\frac{۱}{۶} \quad ، \quad p(B)=\frac{۱}{۲} \ , \qquad p(A\cap B)=p(\{۳\})=\frac{۱}{۶} \ ،$$

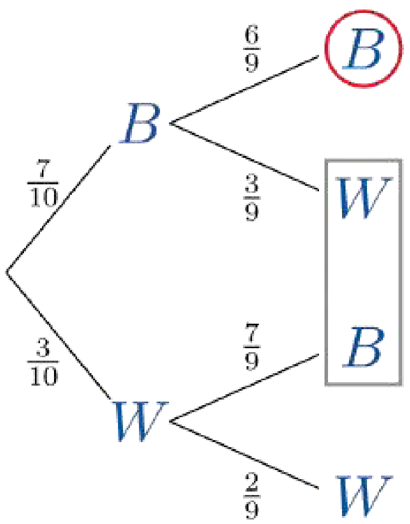
$$p(A) * p(B) = \frac{۱}{۶} * \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۱۲}$$

چون $p(A) * p(B) \neq p(A \cap B)$ پس A و B مستقل نیستند.

۸ ـ یک کوزه شامل ۱۰ مهره است. ۷ سیاه و ۳ سفید. یک مهره بیرون می آوریم ، بدون برگرداندن آن ، یک مهره دیگر بیرون می آوریم.

پاسخ

یک دیاگرام درختی رسم می کنیم.



$P(B_1 \cap B_2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} = 0.47$

$P(B_1 \cap W_2) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = 0.23$

$P(W_1 \cap B_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} = 0.23$

$P(W_1 \cap W_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = 0.07$

اعداد روی دو شاخه های منتهی علیه سمت چپ ، احتمالات بدست آوردن یک مهره سیاه یعنی $\frac{۷}{۱۰}$ و یا یک مهره سفید یعنی $\frac{۳}{۱۰}$ است.

اعداد روی شاخه های سمت راست ، احتمال واقعه مربوط به گره سمت راست آن شاخه است به شرطی که واقعه سمت چپ آن شاخه رخ داده باشد. اولین شاخه سمت راست که دو گره B ها را به هم متصل می کند. B سمت چپ آن شاخه را $B_۱$ و B سمت راست شاخه را $B_۲$ می نامیم. پس عدد روی شاخه اول سمت راست مربوط است به $p\left(P_۲|P_۱\right)$ یعنی احتمال این که مهره دوم سیاه باشد ، به شرطی که مهره اول سیاه باشد. و چون بعد از بیرون آورد یک مهره سیاه ، ۹ مهره باقی می ماند و شش عدد از آنها سیاه است ، پس احتمال $\frac{۶}{۹}$ است.

اعداد سمت راست هر کدام از آخرین گره با استفاده از فرمول امر مسلم ۵.۳.۱ محاسبه شده اند. یعنی

$$p(B \cap A) = p(B) * p(A|B)$$

الف ـ احتمال این که هر دو مهره سیاه باشند ، چقدر است؟

واقعه "*هر دو مهره سیاه هستند*" یعنی $B_۱ \cap B_۲$ مربوط به گره بالایی سمت راست 0.47 است.

ب ـ احتمال این که فقط یک مهره سیاه باشد ، چقدر است؟

واقعه"*دقیقا یک مهره سیاه*" مربوط است به دو گره داخل مستطیل. این دو واقعه دو به دو ناسازگار هستند. پس بر اساس اصل جمع داریم $0.23 + 0.23 = 046$

ج –احتمال این که حد اقل یک مهره سیاه باشد ، چقدر است؟

واقعه "*حد اقل یک مهره سیاه باشد* "مربوط است به دو گره داخل مستطیل یا آن که داخل دایره قرمز است. این واقعه ها نا سازگار هستند. پس بر اساس اصل جمع داریم.

$$0.47 + 0.23 + 0.23 = 0.93$$

۵.۴ - توزیع احتمال و درخت احتمالات Probability Distributions and Probability Trees

تا کنون ، بجز مثال ۵.۳.۹ , فرض کرده ایم که هر دو نتیجه در یک فضای نمونه ، شانس یکسان دارند. در بسیاری حالت ها ، این موضوع منطقی است. مانند پرتاب یک تاس بی عیب و یا یک سکه بی عیب. اما, در زندگی واقعی ، همه چیز همیشه یکسان نیست. مثلا فرض کنید نقطه های روی یک تاس را بیرون بیاوریم. هنگامی که این تاس را پرتاب می کنیم ، احتمال این که هنگام به زمین رسیدن ، طرف سبک تر رو باشد بیشتر است.

فرض کنید یک تاس معیوب را پرتاب می کنیم ، احتمالات شش نتیجه درفضای نمونه ممکن است به صورت زیر باشد.

$$S = \{ \underset{15\%}{⚀}, \underset{15\%}{⚁}, \underset{16\%}{⚂}, \underset{16\%}{⚃}, \underset{18\%}{⚄}, \underset{20\%}{⚅} \}$$

البته ، غیر محتمل است ، که در صد ها اعداد صحیح باشند. ملاحظه می کنید که مجموع احتمالات مساوی ۱ است.

$$p(⚀) + p(⚁) + p(⚂) + p(⚃) + p(⚄) + p(⚅) = 1,$$

زیرا ، اگر آن تاس را پرتاب کنیم احتمال اینکه هنگام به زمین آمدن ، یکی از شش شماره به طرف بالا باشد ، صد در صد است. احتمال واقعه مثلا $E = \{۲, ۴, ۶\}$ یعنی اعداد زوج بیاید ، به صورت زیر است.

$$p(⚁) + p(⚃) + p(⚅) = 15 + 16 + 20 = 51\%.$$

فرمول ۵.۱.۱ بخش ۵.۱ اینجا کاربرد ندارد ، زیرا نتایج شانس یکسان ندارند. مثلا احتمال زیر غلط است.

$$p(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{۳}{۶} = \%۵۰$$

بنا بر این تعریف زیر را داریم.

تعریف ۵.۴.۱

برای یک آزمایش با فضای نمونه $S = \{x_۱, x_۲, \cdots, x_n\}$ یک **توزیع احتمال** ، عبارت است از یک تابع p است که به هر یک از نتایج $x_i \in S$ یک احتمال ، با $0 \leq p(x_i) \leq ۱$ اختصاص می دهد ، بطوری که

$$p(x_۱) + p(x_۲) + \cdots p(x_n) = ۱$$

احتمال $p(E)$ یک واقعه, $E \subseteq S$ عبارت است از مجموع احتمالات عناصر E

در صورتی که تمام نتایج هم شانس باشند ، هر نتیجه $x_i \in S$ دارای احتمال $p(x_i) = \frac{۱}{|S|}$ است. بر اساس تعریف ۵.۴.۱ این یک توزیع احتمال است. و به آن **توزیع یکنواخت** روی S می نامند. برای **توزیع یکنواخت** **Uniform Distribution** فرمول $p(E) = \frac{|E|}{|S|}$ را داریم. اما ، همانطور که در بالا گفته شد ، این فرمول برای
توزیع احتمال غیر یکنواخت **Non-uniform Probability Distributions** کار برد ندارد.

مثال ۵.۴.۱

فرض کنیم در یک حوزه انتخابات محلی ، ۱ ۰۰۰ نفر واجد شرایط رای دادن هستند. از این عده ۶۰۰ نفر از حزب جمهوری و ۴۰۰ نفر از حزب استقلال هستند. و فرض کنید ۲۰۰ نفر از حزب جمهوری و ۳۰۰ از حزب استقلال رای دادند. بطور تصادفی یکی از این افراد واجد شرایط انتخاب می کنید. و یادداشت می کنید که آیا این شخص از حزب جمهوری بوده یا از حزب استقلال ، و آیا رای داده و یا نداده است. پس فضای نمونه این آزمایش به صورت زیر است.

$$S = \{JR, JN, ER, EN\}$$

در فضای نمونه بالا ، JR یعنی جمهوری رای داده. JN یعنی جمهوری رای نداده. ER یعنی استقلال رای داده. EN یعنی استقلال رای نداده.
توزیع احتمال برای S پیدا کنید. همچنین ، مطلوب است احتمال این که انتخاب شما یک جمهوری بوده که رای داده و یا یک استقلال بوده که رای نداده است.

پاسخ

احتمال این که انتخاب شما یک جمهوری بوده به صورت زیر است.

$$p(J) = \frac{۶۰۰}{۱ ۰۰۰} = \%۶۰$$

و احتمال این که انتخاب شما یک استقلال بوده به صورت زیر است.

$$p(E) = \frac{۴۰۰}{۱ ۰۰۰} = \%۴۰$$

اگر جمهوری انتخاب کرده اید احتمال شرطی که آن شخص رای داده باشد ،

$$\frac{۲۰۰}{۶۰۰}$$

است. و احتمال شرطی که آن شخص رای نداده باشد ،

$$\frac{۴۰۰}{۶۰۰}$$

است. اگر استقلال انتخاب کرده اید احتمال شرطی که آن شخص رای داده باشد

$$\frac{۳۰۰}{۴۰۰}$$

و احتمال شرطی که آن شخص رای نداده باشد

$$\frac{۱۰۰}{۴۰۰}$$

است. در تصویر ۵.۴.۱ درخت احتمالات را ملاحظه می کنید. در این تصویر $A=\{JR,JN\}$ واقعه انتخاب جمهوری و $B=\{ER,EN\}$ واقعه انتخاب استقلال است.

توجه :در مثال بالا کلمه جمهوری برای حزب جمهوری بکار بردیم و کلمه استقلال برای حزب استقلال. همچنین JR یعنی عضو حزب جمهوری ، رای داد . JN یعنی عضو حزب جمهوری رای نداد. به همین طریق ER و EN

تصویر ۵.۴.۱

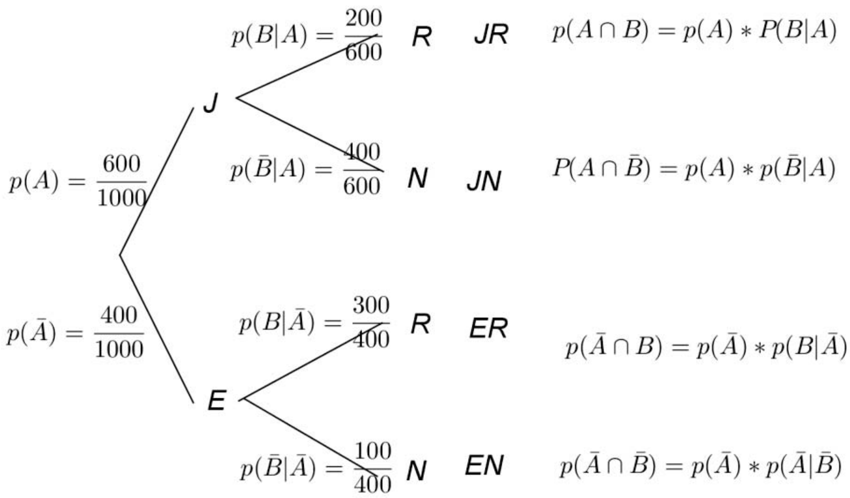


Figure 5.4.1

لذا داریم.

$$p(A\cap B)=p(A)*p(B|A)=\frac{۶}{۱۰}*\frac{۲}{۶}=\frac{۱۲}{۶۰}=\%۲۰$$

$$p(A\cap \overline{B})=p(A)*p(\overline{B}|A)=\frac{۶}{۱۰}*\frac{۴}{۶}=\frac{۲۴}{۶۰}=\%۴۰$$

$$p(\overline{A}\cap B)=p(\overline{A})*p(B|\overline{A})=\frac{۴}{۱۰}*\frac{۳}{۴}=\frac{۱۲}{۴۰}=\%۳۰$$

$$p(\overline{A}\cap \overline{B})=p(\overline{A})*p(\overline{B}|\overline{A})=\frac{۴}{۱۰}*\frac{۱}{۴}=\frac{۴}{۴۰}=\%۱۰$$

پس توزیع احتمال به صورت زیر است.

$$S=\left\{\overbrace{\%۲۰}^{JR,}\ \overbrace{\%۴۰}^{JN,}\ \overbrace{\%۳۰}^{ER,}\ \overbrace{\%۱۰}^{EN}\right\}$$

و در نهایت ، احتمال این که شما یک جمهوری را انتخاب کرده اید که رای داده یا یک استقلال که رای نداده است به صورت زیر است.

$$p(\{JR,EN\})=p(JR)+p(EN)=\%۲۰+\%۱۰=\%۳۰$$

اگر p یک توزیع احتمال روی یک فضای نمونه S باشد ، پس بر اساس تعریف ۵.۴.۱ خواهیم داشت

$$p(S)=۱$$

زیرا مجموع احتمالات اعضای S مساوی ۱ است. همچنین برای واقعه های ناسازگار $A,B\subseteq S$ داریم $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$ زیرا تعریف ۵.۴.۱ می گوید ، $p(A\cup B)$ مساوی است با مجموع احتمالات عناصر A و B و همچنین $S=A\cup\overline{A}$ است. پس

$$۱=p(S)=p\left(A\cup\overline{A}\right)=p(A)+p\left(\overline{A}\right)$$

این یعنی

$$p(A)=۱-p\left(\overline{A}\right)\quad و \quad p\left(\overline{A}\right)=۱-p(A)$$

لذافرمول های ۴و ۳ ,۲ امرمسلم ۵.۲.۲ بخش ۵.۲ برای توزیع احتمالات اختیاری یا دلبخواه کاربرد دارد. گر چه آنها را برای توزیع های یکنواخت ساختیم.
به همین دلیل خلاصه تمام فرمول های احتمالات که تا کنون در این فصل آموخته ایم به شرح زیر است.

خلاصه احتمال Probability Summary

فرض کنید p یک توزیع احتمال برای یک فضای نمونه S در یک آزمایش است. پس احتمال یک واقعه $E=\left\{x_۱,x_۲,\cdots,x_n\right\}\subseteq S$ عبارت است از $p(E)=p\left(x_۱\right)+p\left(x_۲\right)+\cdots+p\left(x_n\right)$ پس $p(S)=۱$ و $p(\emptyset)=0$ است.

اگر $A,B\subseteq S$ واقعه های اختیاری یا دلبخواه بوده اند ، پس

$E=A\cup B$ واقعه "A رخ می دهد **یا** B رخ می دهد" است

$E=A\cap B$ واقعه "A رخ می دهد **و** B رخ می دهد" است

$E=\overline{A}$ واقعه "A **رخ نمی دهد**" است

واقعه های A و B **دو به دو ناسازگار** هستند اگر $A\cap B=\emptyset$ باشد. یعنی

$$p(A\cap B)=p(\emptyset)=0$$

است. به عبارت دیگر A و B هر دو نمی توانند در یک زمان رخ بدهند. بطور کلی

۱) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

اگر A و B ناسازگار باشند ، پس

۲) $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$

۳) $p\left(\overline{A}\right)=۱-p(A)$

۴) $p(A)=۱-p\left(\overline{A}\right)$

احتمال شرطی A و B که با نماد $p(A|B)$ نشان داده می شود ، عبارت است از احتمال A در صورتی که B رخ داده باشد. واقعه های A و B **مستقل** هستند اگر $p(A|B) = p(A)$ باشد و $p(B|A) = p(B)$ باشد ، یعنی اگر یکی رخ دهد احتمال رخ داد دیگری را تغییر ندهد.

بقیه خلاصه احتمال Probability Summary

۵) $p(A|B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

۶) $p(B|A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

۷) $p(A \cap B) = p(A|B) * p(B) = p(A) * p(B|A)$

اگر A و B مستقل باشند ، پس

۸) $p(A \cap B) = p(A) * p(B)$

اگر p توزیع یکنواخت باشد ، پس

۹) $p(A) = \dfrac{|A|}{|S|}$

در ابتدای بخش ۵.۳ در مورد خانواده با سه فرزند ، حساب کردیم که احتمال داشتن دختر بیشتر از پسر به همان اندازه محتمل است که بزرگ ترین فرزند یک پسر باشد .این محاسبه بر اساس این فرض بود که احتمال تولد پسر یا دختر ۵۰ – ۵۰ است.
در حقیقت احتمال تولد یک پسر ۵۱% است و احتمال تولد یک دختر ۴۹% است. گرچه میزان مرگ و میر پسر ها بیشتر است. پس آمار نشان می دهد که تعداد مرد ها و زنها در سنین بزرگسالی یکسان است.
اجزه دهید سئوال خود را در مورد مثال در بخش ۵.۳ تکرار کنیم.

مثال ۵.۴.۲
فرض کنید احتمال تولد یک پسر ۵۱% و احتمال تولد یک دختر ۴۹% است. برای یک خانواده سه فرزندی فرض کنید

A: تعداد دخترها بیشتر از پسر ها است

B: بزرگ ترین فرزند ، پسر است

مطلوب است $p(A)$ و $p(B)$

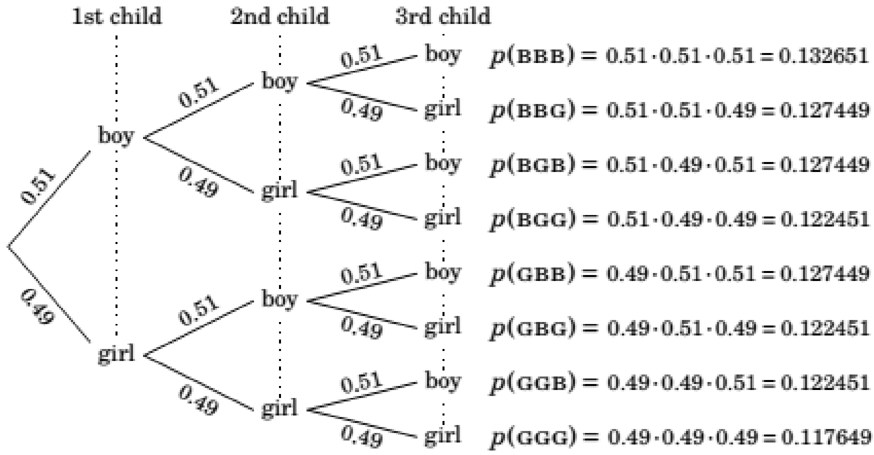
پاسخ

فضای نمونه به صورت زیر است.

$$S = \{BBB, BBG, BGB, BGG، GBB, GBG, GGB, GGG\}$$

درخت احتمال زیر احتمال هر یک از نتایج را محاسبه می کند. فرض می کنیم جنسیت فرزندان تولد شده مستقل است. یعنی جنسیت یک فرزند ، تاثیری روی جنسیت تولید فرزند دیگر ندارد.

تصویر ۵.۴.۲



بر اساس تصویر ۵.۴.۲ داریم.

$$p(BBB) = 0.51 * 0.51 * 0.51 = 0.132651$$
$$p(BBG) = 0.51 * 0.51 * 0.49 = 0.127449$$
$$p(BGB) = 0.51 * 0.49 * 0.51 = 0.127449$$
$$p(BGG) = 0.51 * 0.49 * 0.49 = 0.122451$$
$$p(GBB) = 0.49 * 0.51 * 0.51 = 0.127449$$
$$p(GBG) = 0.49 * 0.51 * 0.49 = 0.122451$$
$$p(GGB) = 0.49 * 0.49 * 0.51 = 0.122451$$
$$p(GGG) = 0.49 * 0.49 * 0.49 = 0.117649$$

و در نهایت داریم.

$$p(A) = p(\{BGG, GBG, GGB, GGG\}) = p(BGG) + p(GBG) + p(GGB) + p(GGG)$$
$$= 0.122451 + 0.122451 + 0.122451 + 0.117649 \approx \mathbf{48.5}\%$$

$$p(B) = (\{BBB, BBG, BGB, BGG\}) = p(BBB) + p(BBG) + p(BGB) + p(BGG)$$
$$= 0132651 + 0.127449 + 0.127449 + 0.122451 = \mathbf{51}\%$$

این پاسخ صحیح به نظر می‌رسد. زیرا شانس این که اولین فرزند پسر باشد ۵۱% است.

تمرینات ۵.۴

۱ - شانس باران روز پنجشنبه ۴۰% است و شانس باران روز جمعه ۲۵% است. احتمال این که حد اقل در یکی از این دو روز باران ببارد ، چقدر است؟ فرض کنید واقعه های "باران روز پنجشنبه" و "باران روز جمعه" مستقل هستند.

۲ - یک انجمن شامل ۶۰ مرد و ۴۰ زن است. بر این که بطور مساوی یک رئیس و یک منشی انتخاب شود ، نام همه اعضا داخل یک جعبه می گذارند و دو نام را از جعبه بیرون می آورند. اولین نام که از جعبه خارج می شود ، رئیس و دومین نام که خارج می شود ، منشی است. احتمال این که رئیس و منشی هم جنس باشند چقدر است؟

۳ - در یک دانشکده ۳۰% دانشجویان سال اولی هستند. همچنین ۸۰% از این دانشجویان در خوابگاه زندگی می کنند. در صورتی که فقط ۶۰% از دانشجویان غیر سال اولی ، در خوابگاه زندگی می کنند. یک دانشجو بطور تصادفی انتخاب می شود. احتمال این که این دانشجوی انتخاب شده ، دانشجو ی سال اولی باشد که بیرون از خوابگاه زندگی می کند ، چقدر است؟

پاسخ تمرینات ۵.۴

۱ - شانس باران روز پنجشنبه ۴۰% است و شانس باران روز جمعه ۲۵% است. احتمال این که حد اقل در یکی از این دو روز باران ببارد ، چقدر است؟ فرض کنید واقعه های "باران روز پنجشنبه" و "باران روز جمعه" مستقل هستند.

پاسخ

. در تصویر ۵.۴.۳ نمودار درختی مربوطه را ملاحظه می کنید. زیر دیاگرام درختی ترجمه کلمات انگلیسی آمده است.

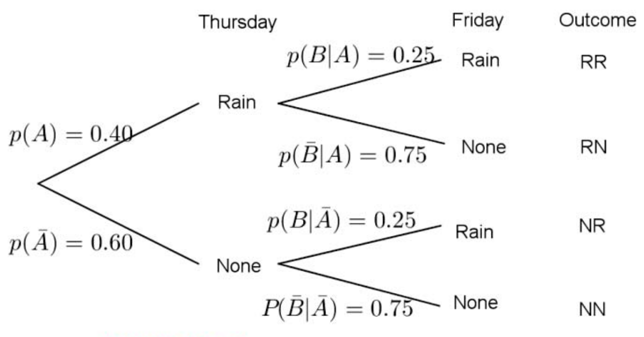


Figure 5.4.3

باران : Rain
هیچ :None
پنجشنبه :Thursday
جمعه :Friday
نتایج :Outcomes

حال فرض می کنیم A واقعه *باران روز پنجشنبه* و B واقعه *باران روز جمعه* باشد. پس فضای نمونه $S = \{RR, RN, NR, NN\}$ و $A = \{RR, RN\}$ و $B = \{RR, NR\}$ هستند
بر اساس نمودار درختی داریم.

$p(A \cap B) = p(A) * p(B|A) = \%۱۰$
$p(A \cap \overline{B}) = p(A) * p(\overline{B}|A) = \%۳۰$
$p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) * p(B|\overline{A}) = \%۱۵$
$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A}) * p(\overline{B}|\overline{A}) = \%۴۵$

پس احتمال باران در آخر هفته یعنی یا پنجشنبه یا جمعه و یا هر دو روز به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\%۱۰ + \%۳۰ + \%۱۵ = \%۵۵$$

۲ - یک انجمن شامل ۶۰ مرد و ۴۰ زن است. بر این که بطور مساوی یک رئیس و یک منشی انتخاب شود ، نام همه اعضا داخل یک جعبه می گذارند و دو نام را از جعبه بیرون می آورند. اولین نام که از جعبه خارج می شود ، رئیس و دومین نام که خارج می شود ، منشی است. احتمال این که رئیس و منشی هم جنس باشند چقدر است؟

پاسخ

فضای نمونه $S = \{MM, MW, WM, WW\}$ است ، اولین حرف نشانه جنسیت اولین نامی است که از جعبه بیرون می آید و دومین حرف نشانه جنسیت دومین نامی است که از جعبه بیرون می آید. حرف M برای مرد Man و حرف W برای زن $Woman$ است. پس داریم.

$$p(MM) = \frac{۶۰}{۱۰۰} * \frac{۵۹}{۹۹} = \frac{۳۵۴۰}{۹۹۰۰} \quad \text{و} \quad p(WW) = \frac{۴۰}{۱۰۰} * \frac{۳۹}{۹۹} = \frac{۱۵۶۰}{۹۹۰۰}$$

پس احتمال این که رئیس و منشی هر دو از یک جنس باشند ، به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$p(\{MM, WW\}) = \frac{۳۵۴۰}{۹۹۰۰} + \frac{۱۵۶۰}{۹۹۰۰} = \frac{۵۱۰۰}{۹۹۰۰} = \mathbf{55.51\%}$$

۳ - در یک دانشکده ۳۰% دانشجویان سال اولی هستند. همچنین ۸۰% از این دانشجویان در خوابگاه زندگی می کنند. در صورتی که فقط ۶۰% از دانشجویان غیر سال اولی ، در خوابگاه زندگی می کنند.
یک دانشجو بطور تصادفی انتخاب می شود. احتمال این که این دانشجوی انتخاب شده ، دانشجو ی سال اولی باشد که بیرون از خوابگاه زندگی می کند ، چقدر است؟

پاسخ

فرض می کنیم A واقعه *انتخاب یک سال اولی* باشد. B واقعه *انتخاب یک نفر که در خوابگاه زندگی می‌کند* باشد. پس بر اساس اطلاعات داده شده $p(A) = \%۳۰$ و $p(\overline{B}|A) = \%۲۰$ است. زیر اگر یک سال اولی انتخاب شود ، $\%۸۰$ احتمال دارد که در خوابگاه زندگی می کند ، پس $\%۲۰$ احتمال دارد که خارج از خوابگاه زندگی می کند. مساله از ما خواسته $p(A \cap \overline{B})$ را پیدا کنیم.

$$p(A \cap \overline{B}) = p(A) * p(\overline{B}|A) = \%۳۰ * \%۲۰ = \%۶$$

پس احتمال این که یک سال اولی انتخاب شود که خارج از خوابگاه زندگی کند $\%۶$ است.

5.5 - فرمول بیز Bayes' Formula

بیز بر وزن فیض

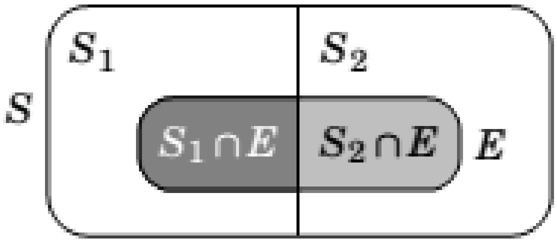
این فرمول توسط توماس بیز کشف شد. او درسال های ۱۷۶۱ — ۱۷۰۲ میلادی می زیست.

می خواهیم اخرین فرمول احتمال را یاد بگیریم. این فرمول بنام مخترع اش ، بیز نامگزاری شده است.
این فرمول به سوال زیر پاسخ می دهد.
فرض کنید یک فضای نمونه S از اتحاد دو فضای نمونه تشکیل شده است ، یعنی داریم

$$S = S_1 \cup S_2 \quad \text{با} \quad S_1 \cap S_2 = \emptyset$$

و همچنین $E \subseteq S$ یک واقعه باشد. تصویر ۵.۵.۱

تصویر ۵.۵.۱



می خواهیم $p(S_1|E)$ را پیدا کنیم. یعنی اگر E رخ دهد ، پس احتمال این که S_1 رخ داده است چقدر است.
یک محاسبه کوتاه پاسخ ما را می دهد. بر اساس فرمول هایی که در بخش های قبلی این فصل اموختیم ، داریم.
بر اساس فرمول شماره ۵ بخش ۵.۴

$$p(S_1|E) = \frac{p(S_1 \cap E)}{p(E)}$$

بر اساس فرمول شماره ۷ بخش ۵.۴ داریم.

$$= \frac{p(S_1) * p(E|S_1)}{p(E)}$$

چون $E = (S_1 \cap E) \cup (S_2 \cap E)$ است ، پس داریم.

$$= \frac{p(S_1) * p(E|S_1)}{p\left((S_1 \cap E) \cup (S_2 \cap E)\right)}$$

چون $S_1 \cap E$ و $S_2 \cap E$ دو به دو ناسازگار هستند ، پس داریم.

$$= \frac{p(S_1) * p(E|S_1)}{p(S_1 \cap E) + p(S_2 \cap E)}$$

و بر اساس فرمول ۷ بخش ۵.۴ داریم.

$$= \frac{p(S_۱) * p(E|S_۱)}{p(S_۱) * p(E|S_۱) + p(S_۲) * p(E|S_۲)}$$

به همین طریق داریم.

$$p(S_۲|E) = \frac{p(S_۲) * p(E|S_۲)}{p(S_۱) * p(E|S_۱) + p(S_۲) * p(E|S_۲)}$$

فرمول بیز Bayes' Formula

فرض کنید یک فضای نمونه S برای یک آزمایش عبارت است از اتحاد دو فضای نمونه $S_۱$ و $S_۲$ یعنی $S = S_۱ \cup S_۲$ و داشته باشیم $S_۱ \cap S_۲ = \emptyset$

همچنین فرض می کنیم $E \subseteq S$ یک واقعه باشد ، پس

$$p(S_۱|E) = \frac{p(S_۱) * p(E|S_۱)}{p(S_۱) * p(E|S_۱) + p(S_۲) * p(E|S_۲)}$$

و

$$p(S_۲|E) = \frac{p(S_۲) * p(E|S_۲)}{p(S_۱) * p(E|S_۱) + p(S_۲) * p(E|S_۲)}$$

گر چه ، ما اینجا از آن استفاده نخواهیم کرد ، لازم است بگوییم که فرمول بیز به حالت هایی که S به بیش از دو قسمت تجزیه می شود هم می توان بسط داد. یعنی اگر داشته باشیم

$$S = S_۱ \cup S_۲ \cup \cdots \cup S_n \quad و \quad S_i \cap S_j = \emptyset \quad هر گاه \quad ۱ \le i \le j \le n$$

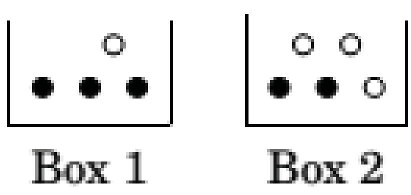
پس برای هر $S_۱$ داریم.

$$p(S_i|E) = \frac{p(S_i) * p(E|S_i)}{p(S_۱) * p(E|S_۱) + p(S_۲) * p(E|S_۲) + \cdots + p(S_n) * p(E|S_n)} \qquad (۵.۵.۱)$$

مثال ۱

دو جعبه داریم. جعبه ۱ شامل سه توپ سیاه و یک توپ سفید است. جعبه ۲ شامل دو توپ سیاه و سه توپ سفید است. تصویر ۵.۵.۲

تصویر ۵.۵.۲



یک نفر یک جعبه را بطور تصادفی انتخاب می کند و از این جعبه بطور تصادفی یک توپ انتخاب می کند. این توپ سفید است ، احتمال این که این توپ از جعبه ۱ باشد ، چقدر است؟

پاسخ

فضای نمونه $S = \{۱B, ۱W, ۲B, ۲W\}$ است. اعداد ۱ و ۲ یعنی جعبه شماره ۱ و جعبه شماره ۲ ، حرف B حرف اول کلمه $Black$ است به معنی سیاه و حرف W حرف اول کلمه $White$ است به معنی سفید.

فرض می کنیم $S_۱ = \{۱B, ۱W\}$ واقعه "*توپ از جعبه اول انتخاب شده*" باشد.

و

فرض می کنیم $S_۲ = \{۲B, ۲W\}$ واقعه "*توپ از جعبه دوم انتخاب شده*" باشد.

و

فرض می کنیم $E = \{۱W, ۲W\}$ واقعه "*توپ سفید است* " باشد.

پاسخ مساله به صورت زیر است.

$$p(S_۱|E) \quad \text{هر گاه} \quad S = S_۱ \cup S_۲ \quad \text{و} \quad S_۱ \cap S_۲ = \emptyset$$

بر اساس فرمول بیز داریم.

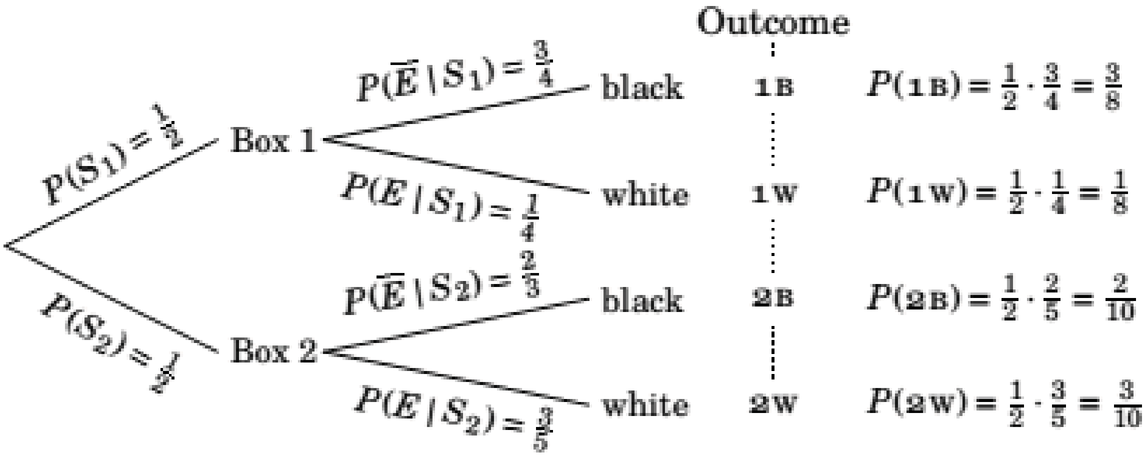
$$p(S_۱|E) = \frac{p(S_۱) * p(E|S_۱)}{p(S_۱) * p(E|S_۱) + p(S_۲) * p(E|S_۲)}$$

$$= \frac{\frac{۱}{۲} * \frac{۱}{۴}}{\frac{۱}{۲} * \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} * \frac{۳}{۵}} = \frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۸} + \frac{۳}{۱۰}} = \frac{\frac{۱۰}{۸۰}}{\frac{۳۴}{۸۰}} = \frac{۱۰}{۳۴} \approx \mathbf{29.4\%}$$

پس شانس این که توپ سفید انتخاب شده ازجعبه شماره ۱ باشد $\mathbf{29.4\%}$ است.

می توان فرمول بیز را دور بزنم و این مساله را با استفاده از نمودار درختی حل کنیم. ملاحظه می کنید که $\overline{E} = \{۱B, ۲B\}$ است ، یعنی واقعه "یک توپ سیاه انتخاب شده" است. پس نمودار درختی زیر را ملاحظه کنید.

تصویر ۵.۵.۳



با استفاده از فرمول شماره ۵ بخش ۵.۴ داریم.

$$p(S_۱|E) = \frac{p(S_۱ \cap E)}{p(E)} = \frac{p(\{۱\ W\})}{p(\{۱\ W, ۲\ W\})} = \frac{p(۱\ W)}{p(۱\ W) + p(۲\ W)} = \frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۱}{۸} + \frac{۳}{۱۰}} = \frac{۱۰}{۳۴}$$
$$\approx \mathbf{29.4\%}$$

مثال ۲

فرض کنید ۱۰۰ نفر در یک مهمانی شرکت دارند. و حساب می کنید چند نفر لباس صورتی پوشیده اند و چند نفر لباس صورتی نپوشیده اند. و آیا شخصی که لباس صورتی پوشیده .مرد است و یا نه. و ارقام زیر را بدست می آورید.

	صورتی	صورتی نه
مرد	۵	۳۵
مرد نه	۲۰	۴۰

حالا چند احتمال را محاسبه می کنیم.

۱ ـ احتمال این که آن شخص یک مرد است. $p(\text{مرد}) = \frac{۴۰}{۱۰۰} = 0.4$

۲ ـ احتمال این که آن شخص صورتی پوشیده است. $p(\text{صورتی}) = \frac{۲۵}{۱۰۰} = 0.25$

۳ ـ احتمال این که یک مرد صورتی پوشیده است. $p(\text{صورتی}|\text{مرد}) = \frac{۵}{۴۰} = 0.125$

احتمال این که شخصی که صورتی پوشیده است ، یک مرد است.

$$p(\text{مرد}|\text{صورتی}) = \frac{p(\text{مرد}) * p(\text{صورتی}|\text{مرد})}{p(\text{صورتی})} = \frac{0.4 * 0.125}{0.25} = 0.2$$

تمرینات ۵.۵

۱ ـ در یک دانشکده ۴۰% دانشجویان پسر و ۶۰% دختر هستند. همچنین ۲۰% از پسر ها ، و ۱۰% از دختر ها سیگاری هستند. یک دانشجو بطور تصادفی انتخاب می شود. اگر این دانشجو یک سیگاری باشد ، احتمال این که او یک دختر باشد چقدر است؟

۲ ـ در یک کوزه ۴ توپ قرمز و ۵ توپ سفید وجود دارد. بطور تصادفی یک توپ از کوزه بیرون می آوریم. و سپس یک توپ دیگر. اگر توپ دوم قرمز بوده باشد ، احتمال این که توپ اول قرمز باشد چقدر است؟

پاسخ تمرینات ۵.۵

۱ - در یک دانشکده ۴۰٪ دانشجویان پسر و ۶۰٪ دختر هستند. همچنین ۲۰٪ از پسر ها ، و ۱۰٪ از دختر ها سیگاری هستند. یک دانشجو بطور تصادفی انتخاب می شود. اگر این دانشجو یک سیگاری باشد ، احتمال این که او یک دختر باشد چقدر است؟

پاسخ

فرض می کنیم S مجموعه تمام دانشجویان باشد. و $S_۱$ مجموعه دانشجویان دختر و $S_۲$ مجموعه دانشجویان پسر. پس $S = S_۱ \cup S_۲$ است و $S_۱ \cap S_۲ = \emptyset$

فرض می کنیم $E \subseteq S$ مجموعه سیگاری ها باشد. مساله از ما خواسته $p(S_۱|E)$ را پیدا کنیم.

$$p(S_۱|E) = \frac{p(S_۱) * p(E|S_۱)}{p(S_۱) * p(E|S_۱) + p(S_۲) * p(E|S_۲)} = \frac{0.60 * 0.10}{0.60 * 0.10 + 0.40 * 0.20}$$

$$= \frac{0.6}{0.8} = \mathbf{75\%}$$

۲ - در یک کوزه ۴ توپ قرمز و ۵ توپ سفید وجود دارد. بطور تصادفی یک توپ از کوزه بیرون می آوریم. و سپس یک توپ دیگر. اگر توپ دوم قرمز بوده باشد ، احتمال این که توپ اول قرمز باشد چقدر است؟

پاسخ

فضای نمونه $S = \{RR, RW, WR, WW\}$ است. اولین حرف نشان رنگ اولین توپ و دومین حرف نشان رنگ دومین توپ که از کوزه بیرون می آوریم. حرف R حرف اول کلمه Red یعنی قرمز و حرف W حرف اول کلمه $White$ یعنی سفید است. فرض می کنیم $S_۱ = \{RR, RW\}$ واقعه *اولین توپ قرمز است* و $S_۲ = \{WR, WW\}$ واقعه *اولین توپ سفید است* باشد. و فرض می کنیم $E = \{RR, WR\}$ واقعه *دومین توپ قرمز است* باشد. پاسخ مساله $p(S_۱|E)$ است. چون داریم $S = S_۱ \cup S_۱$ و $S_۱ \cap S_۲ = \emptyset$ پس بر اساس فرمول بیز داریم.

$$p(S_۱|E) = \frac{p(S_۱) * p(E|S_۱)}{p(S_۱) * p(E|S_۱) + p(S_۲) * p(E|S_۲)} = \frac{\frac{۴}{۹} * \frac{۳}{۸}}{\frac{۴}{۹} * \frac{۳}{۸} + \frac{۵}{۹} * \frac{۴}{۸}} = \frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۳}{۱۸} + \frac{۵}{۱۸}} = \frac{\frac{۱}{۶}}{\frac{۴}{۹}}$$

$$= \frac{۳}{۸} = \mathbf{37.5\%}$$