۱۸.۱ - استقرای ریاضی Mathematical Induction

می دانید که مجموعه اعداد طبیعی یا شمارشی $\mathbb{N} = ۱, ۲, ۳, \cdots$ است.
استقرای ریاضی ، روشی است برای برهان یک گزاره ، یک قضیه ، یا یک فرمول که در مورد اعداد طبیعی است.
مثلا

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n + ۱)}{۲}$$

فرمول بالا می گوید مجموع اعداد متوالی از ۱ تا n مطابق فرمول سمت راست بدست می آید. می خواهیم ثابت کنیم این برای $n = ۱, n = ۲, n = ۳$ الی آخر صحیح است. حالا می توانیم برای یک عدد مثلا $n = ۳$ امتحان کنیم.

$$۱ + ۲ + ۳ = \frac{۳ * ۴}{۲} = ۶$$

ملاحظه می کنید که برای $n = ۳$ فرمول بالا صحیح است. برای $n = ۴$ هم صحیح است.

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ = \frac{۴ * ۵}{۲} = ۱۰$$

اما چگونه این قاعده را برای هر مقدار n ثابت می کنیم؟
روش برهان مطابق زیر است.
قدم اول :معمولا ساده است ، تنها لازم است نشان دهیم گزاره برای $n = ۱$ صحیح است.
قدم دوم :
فرض کنید گزاره برای $n = k$ صحیح است.
ثابت کنید گزاره برای $n = k + ۱$ صحیح است.

مثال ۱

ثابت کنید مجموع اولین n اعداد طبیعی بوسیله فرمول زیر بدست می آید.

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = \frac{n(n + ۱)}{۲}$$

برهان
فرض می کنیم گزاره بالا $P(n)$ باشد.
قدم اول :باید نشان دهیم $P(۱)$ صحیح است.

$$۱ = \frac{۱(۱ + ۱)}{۲} = ۱$$

پس $P(۱)$ صحیح است.
قدم دوم :فرض می کنیم $P(k)$ صحیح است.

$$۱ + ۲ + ۳ + \cdots + k = \frac{k(k + ۱)}{۲} \qquad (۱)$$

حالا نشان می دهیم $P(k+۱)$ صحیح است. برای این کار $k+۱$ به طرفین معادله (۱) اضافه می کنیم.

$$
\begin{aligned}
۱+۲+۳+\cdots+k+(k+۱) &= \frac{k(k+۱)}{۲}+(k+۱)\\
&= \frac{k(k+۱)+۲(k+۱)}{۲}\\
&= \frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}
\end{aligned}
$$

پس $P(k+۱)$ هم صحیح است.

مثال ۲

ثابت کنید برای هر عدد صحیح مثبت n گزاره زیر صحیح است.

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots n^۲=\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

برهان

فرض می کنیم گزاره داده شده بالا $P(n)$ باشد.

قدم اول :باید نشان دهیم $P(۱)$ صحیح است.

$$۱^۲=\frac{۱(۱+۱)(۲*۱+۱)}{۶}=\frac{(۲)(۳)}{۶}=۱$$

پس $P(۱)$ صحیح است.

قدم دوم :فرض می کنیم $P(k)$ صحیح است.یعنی

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots k^۲=\frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶} \qquad (۱)$$

باید نشان دهیم $P(k+۱)$ صحیح است. برای این کار $(k+۱)^۲$ به طرفین معادله شماره (۱) اضافه می کنیم.

$$
\begin{aligned}
۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots k^۲+(k+۱)^۲ &= \frac{k(k+۱)(۲k+۱)}{۶}+(k+۱)^۲\\
&= \frac{k(k+۱)(۲k+۱)+۶(k+۱)^۲}{۶}\\
&= \frac{(k+۱)[k(۲k+۱)+۶(k+۱)]}{۶}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{(k+۱)\left[۲k^۲+k+۶k+۶\right]}{۶}$$

$$= \frac{(k+۱)\left[۲k^۲+۷k+۶\right]}{۶}$$

$$= \frac{(k+۱)[(k+۲)(۲k+۳)]}{۶}$$

پس $P(k+۱)$ صحیح است.

۱۸.۲ ـ تمرینات فصل هیجدهم

گزاره ها یا قضیه های زیر را از طریق استقرای ریاضی ثابت کنید.

۱ ـ ثابت کنید

$$۱+۴+۷+\cdots+(۳n-۲)=\frac{n(۳n-۱)}{۲}$$

برهان

فرض می کنیم گزاره بالا $P(n)$ باشد.

قدم اول باید نشان دهیم $P(۱)$ صحیح است.

$$۱=\frac{۱(۳*۱-۱)}{۲}=\frac{۱(۲)}{۲}=۱$$

پس $P(۱)$ صحیح است.

قدم دوم فرض می کنیم $P(k)$ صحیح است. یعنی

$$۱+۴+۷+\cdots+(۳k-۲)=\frac{k(۳k-۱)}{۲} \qquad (۱)$$

باید نشان دهیم $P(k+۱)$ صحیح است. برای این کار $(۳(k+۱)-۲)$ را به طرفین (۱) اضافه می کنیم.

$$\begin{aligned}۱+۴+۷+\cdots+(۳k-۲)+(۳(k+۱)-۲)\\ &=\frac{k(۳k-۱)}{۲}+(۳(k+۱)-۲)\\ &=\frac{k(۳k-۱)}{۲}+(۳k+۱)\\ &=\frac{k(۳k-۱)+۲(۳k+۱)}{۲}\\ &=\frac{۳k^۲-k+۶k+۲}{۲}\\ &=\frac{۳k^۲+۵k+۲}{۲}\\ &=\frac{(k+۱)(۳k+۲)}{۲}\\ &=\frac{(k+۱)(۳(k+۱)-۱)}{۲}\end{aligned}$$

۲ – نشان دهید برای تمام $n \geq ۱$ مجموع مربع های اولین $۲n$ اعداد صحیح مثبت توسط فرمول زیر بدست می آید.

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + (۲n)^۲ = \frac{n(۲n+۱)(۴n+۱)}{۳}$$

برهان

فرض می کنیم گزاره بالا $P(n)$ باشد.

باید نشان دهیم $P(۱)$ صحیح است.

$$۱^۲ + ۲^۲ = \frac{(۱)(۲(۱)+۱)(۴(۱)+۱)}{۳} = \frac{۳(۵)}{۳} = ۵$$

پس $P(۱)$ صحیح است.

فرض می کنیم $P(k)$ صحیح باشد. یعنی

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + (۲k)^۲ = \frac{k(۲k+۱)(۴k+۱)}{۳} \qquad (۱)$$

باید ثابت کنیم $P(k+۱)$ صحیح است. یعنی

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + \left(۲(k+۱)\right)^۲ = \frac{(k+۱)(۲(k+۱)+۱)(۴(k+۱)+۱)}{۳}$$

$$\begin{aligned}
۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + \left(۲(k+۱)\right)^۲ &= ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + (۲k+۲)^۲ \\
&= ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \cdots + (۲k)^۲ + (۲k+۱)^۲ + (۲k+۲)^۲ \\
&= \frac{k(۲k+۱)(۴k+۱)}{۳} + (۲k+۱)^۲ + (۲k+۲)^۲ \\
&= \frac{k(۲k+۱)(۴k+۱)}{۳} + \frac{۳(۲k+۱)^۲ + ۳(۲k+۲)^۲}{۳} \\
&= \frac{k(۲k+۱)(۴k+۱) + ۳(۲k+۱)^۲ + ۳(۲k+۲)^۲}{۳} \\
&= \frac{k\left(۸k^۲ + ۶k + ۱\right) + ۳\left(۴k^۲ + ۴k + ۱\right) + ۳\left(۴k^۲ + ۸k + ۴\right)}{۳} \\
&= \frac{\left(۸k^۳ + ۶k^۲ + k\right) + \left(۱۲k^۲ + ۱۲k + ۳\right) + \left(۱۲k^۲ + ۲۴k + ۱۲\right)}{۳} \\
&= \frac{۸k^۳ + ۳۰k^۲ + ۳۷k + ۱۵}{۳}
\end{aligned}$$

طرف دیگر $P(k+۱)$

$$\frac{(k+1)(2(k+1)+1)(4(k+1)+1)}{3}=\frac{(k+1)(2k+2+1)(4k+4+1)}{3}$$
$$=\frac{(k+1)(2k+3)(4k+5)}{3}$$
$$=\frac{\left(2k^2+5k+3\right)(4k+5)}{3}$$
$$=\frac{8k^3+30k^2+37k+15}{3}$$

پس $P(k+1)$ بر قرار است.

۳ - با استفاده از استقرای ریاضی نشان دهید برای هر عدد صحیح مثبت n عدد 6^n-1 بر ۵ بخش پذیر است.

برهان

فرض می کنیم $P(n)=6^n-1$ باشد.

پس

$$P(1)=6^1-1=5$$

بر ۵ بخش پذیر است.

فرض می کنیم $P(k)=6^k-1$ صحیح باشد. یعنی بر ۵ بخش پذیر باشد.

باید نشان دهیم $P(k+1)=6^{k+1}-1$ بر ۵ بخش پذیر است.

$$6^{k+1}-1=6\left(6^k-1\right)-1+6$$
$$=6\left(6^k-1\right)+5$$

اولین جمله یعنی $6\left(6^k-1\right)=P(k)$ بر ۵ بخش پذیر است و واضح است که جمله دوم یعنی ۵ هم بر ۵ بخش پذیر است ، پس $P(k+1)$ بر قرار است.

۴ - نشان دهید $n!>3^n$ است برای $n\geq 7$.

برهان

برای $n\geq 7$ فرض می کنیم $P(n)$ گزاره $n!>3^n$ باشد.

$$P(7)=7!=7\times6\times5\times4\times3\times3\times1=5040>3^7=2187$$

پس $P(7)$ صحیح است.

فرض می کنیم $P(k)$ بر قرار باشد. یعنی $k!>3^k$ باشد. باید نشان دهیم

$$P(k+۱) = (k+۱)! > ۳^{k+۱}$$

است.

$$\begin{aligned}(k+1)! &= (k+1)k! \\ &> (k+1)3^k \\ &\geq (7+1)3^k \\ &= 8 \times 3^k \\ &> 3 \times 3^k \\ &= 3^{k+1}.\end{aligned}$$

پس $P(k+۱)$ بر قرار است.

۵ - اگر $n \in \mathbb{N}$ باشد پس $۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱) = n^۲$ است.

برهان

فرض می کنیم گزاره داده شده $P(n)$ باشد.

باید نشان دهیم $p(۱)$ صحیح است.

$$P(۱) = ۱^۲ = ۱$$

فرض می کنیم $P(k)$ صحیح باشد.یعنی

$$۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲k - ۱) = k^۲$$

باید نشان دهیم $P(k+۱)$ صحیح است.

$$\begin{aligned}1+3+5+7+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots+(2(k+1)-1) &= \\ 1+3+5+7+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1) &= \\ \left(1+3+5+7+\cdots+(2k-1)\right)+(2(k+1)-1) &= \\ k^2 \quad +(2(k+1)-1) &= k^2+2k+1 \\ &= (k+1)^2.\end{aligned}$$

پس $P(k+۱)$ بر قرار است.

۶ - اگر $n \in \mathbb{Z}$ و $n \geq 0$ باشد ، پس داریم

$$\sum_{i=0}^{n} i * i! = (n + ۱)! - ۱$$

برهان

اگر $n = 0$ باشد ، پس داریم

$$\sum_{i=0}^{0} i * i! = (0 + ۱)! - ۱$$

چون طرف چپ $0 * 0! = 0$ و سمت راست $۱! - ۱ = 0$است پس $P(0)$ صحیح است.

فرض می‌کنیم $P(k)$ صحیح باشد. یعنی

$$\sum_{i=0}^{k} i * i! = (k + ۱)! - ۱$$

باید نشان دهیم $P(k + ۱)$ صحیح است. یعنی

$$\sum_{i=0}^{k+۱} i * i! = \big((k + ۱) + ۱\big)! - ۱$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i \cdot i! &= \left(\sum_{i=0}^{k} i \cdot i!\right) + (k+1)(k+1)! \\
&= \big((k+1)! - 1\big) + (k+1)(k+1)! \\
&= (k+1)! + (k+1)(k+1)! - 1 \\
&= \big(1 + (k+1)\big)(k+1)! - 1 \\
&= (k+2)(k+1)! - 1 \\
&= (k+2)! - 1 \\
&= ((k+1)+1)! - 1.
\end{aligned}$$

پس $P(k + ۱)$ بر قرار است.

۷ - مجموع مکب های متوالی
این حقیقت جالب ریاضی را ثابت کنید،

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \cdots + n^۳ = (۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n)^۲$$

یعنی مجموع اولین n عدد مکعب متوالی مساوی است با مربع اولین n عدد. یعنی

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \cdots + n^۳ = \frac{n^۲(n + ۱)^۲}{۴}$$

برهان
مجموع تا n را با $S(n)$ نشان می دهیم. برای $n = ۱$ داریم.

$$۱^۳ = \frac{۱^۲ * ۲^۲}{۲}$$

$$۱ = \frac{۱ * ۴}{۴}$$

پس فرض می کنیم فرمول برای $n = k$ صحیح است. یعنی

$$S(k) = \frac{k^۲(k + ۱)^۲}{۴} \qquad (۱)$$

حالا باید نشان دهیم فرمول برای $n = k + ۱$ صحیح است. یعنی

$$S(k + ۱) = \frac{(k + ۱)^۲(k + ۲)^۲}{۴} \qquad (۲)$$

برای این کار ، مکعب بعدی را به $S(k)$ شماره (۱) اضافه می کنیم.

$$S(k + ۱) = S(k) + (k + ۱)^۳$$

$$= \frac{k^۲(k + ۱)^۲}{۴} + (k + ۱)^۳$$

$$= \frac{k^۲(k + ۱)^۲ + ۴(k + ۱)^۳}{۴}$$

$$= \frac{(k + ۱)^۲\left[k^۲ + ۴(k + ۱)\right]}{۴}$$

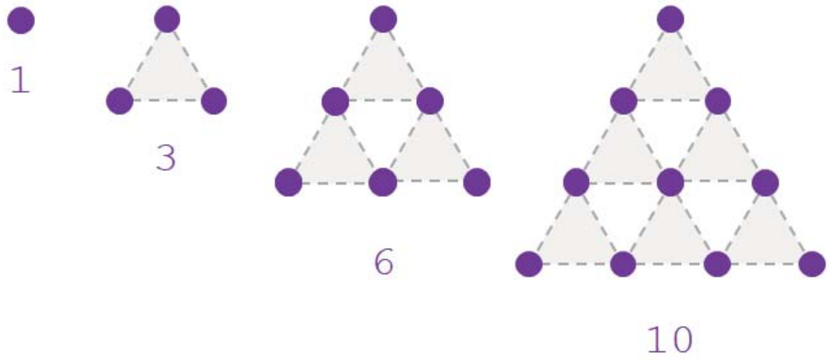
$$= \frac{(k + ۱)^۲\left(k^۲ + ۴k + ۴\right)}{۴}$$

$$= \frac{(k+۱)^۲(k=۲)^۲}{۴}$$

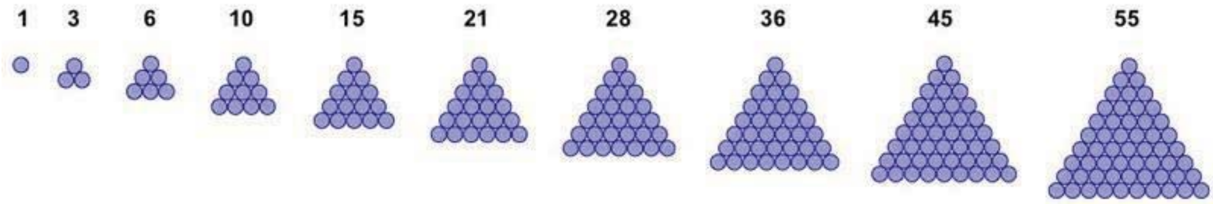
این همان شماره (۲) است که می خواستیم.

۸ ـ ثابت کنید جعه عدد مثلثی n ام مطابق فرمول زیر بدست می آید.

$$T(n) = \frac{n(n+۱)}{۲}$$



The First Ten Triangular Numbers



برهان

برای $n = ۱$ داریم

$$T(۱) = \frac{۱(۱+۱)}{۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

فرض می کنیم $T(k)$ صحیح باشد. یعنی

$$T(k) = \frac{k(k+۱)}{۲}$$

باید نشان دهیم $T(k+۱)$ صحیح است. یعنی

$$T(k+۱) = \frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}$$

بر اساس فرض استقرا می دانیم که

$$T(k) = \frac{k(k+۱)}{۲}$$

است. پس یک ردیف اضافه می کنیم. یعنی

$$T(k+۱) = T(k) + T(k+۱)$$

پس داریم.

$$T(k+۱) = \frac{k(k+۱)}{۲} + (k+۱)$$
$$= \frac{k(k+۱) + ۲(k+۱)}{۲}$$
$$= \frac{(k+۱)(k+۲)}{۲}$$

پس $T(k+۱)$ صحیح است.

اگر به تصویر های بالا نگاه کنید متوجه می شوید که

اولین مثلث فقط یک نقطه دارد.

دومین مثلث $۳ = ۲ + ۱$ نقطه دارد.

سومین مثلث $۶ = ۳ + ۲ + ۱$ نقطه دارد.

چهار مین مثلث $۱۰ = ۴ + ۳ + ۲ + ۱$ نقطه دارد.

الی آخر.

۹ - نشان دهید مجموع دو عدد مثلثی متوالی یک عدد مربع است.

برهان

فرض می کنیم $T(n-۱)$ و $T(n)$ دو عدد مثلثی متوالی باشند. بر اساس تمرین شماره ۸ داریم.

$$T(n-۱) = \frac{(n-۱)n}{۲} \quad \text{و} \quad T(n) = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

پس داریم.

$$T(n-۱) + T(n) = \frac{(n-۱)n}{۲} + \frac{n(n+۱)}{۲}$$
$$= \frac{(n-۱+n+۱)n}{۲}$$
$$= \frac{۲n^۲}{۲} = n^۲$$

۱۰ ـ نشان دهید اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد ، پس $n^{۳} + ۲n$ بر ۳ بخش پذیر است.

برهان

فرض می کنیم $P(n)$ گزاره گفته شده بالا باشد.

ابتدا نشان می دهیم $P(۱)$ صحیح است.

$$P(۱) = ۱^{۳} + ۲(۱) = ۳$$

می دانیم که ۳ بر ۳ بخش پذیر است.

فرض می کنیم $P(k)$ صحیح است. یعنی $P(k) = k^{۳} + ۲k$ بر ۳ بخش پذیر است. این گزاره معادل گزاره زیر است ،

$$k^{۳} + ۲k = ۳M$$

اینجا M یک عدد صحیح مثبت است.

حالا باید نشان دهیم $P(k+۱)$ صحیح است. یعنی باید نشان دهیم $(k+۱)^{۳} + ۲(k+۱)$ بر ۳ بخش پذیر است.

$$\begin{aligned}(k+۱)^{۳} + ۲(k+۱) &= k^{۳} + ۳k^{۲} + ۵k + ۳ \\ &= \left[k^{۳} + ۲k\right] + \left[۳k^{۲} + ۳k + ۳\right] \\ &= ۳M + ۳\left[k^{۲} + k + ۱\right] = ۳\left[M + k^{۲} + k + ۱\right]\end{aligned}$$

که بر ۳ بخش پذیر است. پس $P(k+۱)$ صحیح است.